Journal de la société statistique de Paris

François Quittard-Pinon
Jacques Sikorav

Finance et processus de diffusion

Journal de la société statistique de Paris, tome 133, nº 4 (1992), p. 85-112

<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1992__133_4_85_0>

FINANCE ET PROCESSUS DE DIFFUSION

par François QUITTARD-PINON
École Normale et Supérieure de Cachan
(Institut de Science Financière et d'Assurances)

et Jacques SIKORAV
Crédit Commercial de France
(Direction de la Recherche et de l'Innovation)

INTRODUCTION

Peu de mots sont autant chargés de sens que celui de finance. Celui auquel nous nous restreignons ici est sans doute le moins usuel et comprend la finance à la fois comme discipline théorique et comme science expérimentale*.

Parler de théorie financière évoque davantage l'analyse de documents comptables : bilan, comptes de résultats, tableau de financement, que l'analyse mathématique, la résolution d'équation aux dérivées partielles ou le calcul des probabilités. L'analyse financière essentiellement issue de la pratique a souvent pour objet l'application de règles de bon sens concernant la gestion courante des flux financiers et le respect de préceptes de prudence à ne pas transgresser. Or depuis les années 50, un nombre considérable de travaux scientifiques à caractère économique et financier a permis l'émergence d'une véritable théorie de la décision financière, servant à guider l'action, en venant en appui des analyses traditionnelles. C'est cette évolution que nous rappelons dans la 1re section. Nous montrons ensuite (2e section) de quelle manière une partie de la théorie financière contemporaine, celle utilisant une approche en temps continu, repose sur quelques principes directeurs que des outils particuliers, tels que les processus de diffusion permettent de mettre en œuvre. Nous illustrons dans la 3e section l'opérationalité de cette démarche par la résolution d'un problème auquel sont confrontés de nombreux banquiers et assureurs : celui de l'évaluation d'options de remboursement par anticipation de crédits ou contrats d'assurance.

* Les auteurs tiennent à remercier Monique Jeanblanc-Picque et Patrice Poncet (Université Paris I) pour les commentaires qu'ils nous ont faits lors d'une version antérieure de ce texte.

1. Motivation et historique

L'un des objets fondamentaux de la théorie financière est celui de l'évaluation d'actifs financiers c'est-à-dire d'actifs liquides susceptibles de générer des gains ou pertes monétaires. Cette valorisation peut se faire à l'aide de modèles d'équilibre partiel ou d'un modèle d'équilibre général.

Usuellement on considère que le prix d'un actif financier est la somme des valeurs actualisées de ses revenus futurs. Si les marchés sont parfaits et s'ils présentent une structure plate des taux, le taux d'actualisation qu'il faut choisir est le taux d'intérêt.

Tout irait pour le mieux et la question serait entendue si l'évaluation se faisait dans un univers certain, en utilisant par exemple, dans le cas de portefeuille de créances le calcul actuariel et dans le cas de la valorisation des actions une adaptation de celui-ci : les tables de BATES. Malheureusement tel n'est pas le cas de l'environnement réel : les taux fluctuent, le cours des actions est manifestement stochastique et la suite des dividendes à venir est largement inconnue.

La construction précédente peut toutefois être partiellement sauvée en admettant que les prix d'équilibre sont bien la somme des valeurs actualisées des flux futurs avec des coefficients d'actualisation propres à chaque période. S'il existe des obligations coupon-zéro (obligations qui versent un flux unique à l'échéance, normalisé à un franc) ce sont leurs valeurs qui serviront de coefficients d'actualisation. L'un des problèmes à résoudre s'est donc déplacé vers celui de l'évaluation des coupons-zéro.

Les actions et obligations ne sont pas les seuls titres que l'on cherche à valoriser, il existe d'autres actifs d'une importance considérable, aussi bien théorique que pratique, que l'on qualifie d'actifs dérivés ou contingents, car leur valeur dépend d'un actif support. Le représentant le plus typique de cette famille est l'option. Par exemple, une option européenne d'achat sur action est un contrat négociable pouvant être coté sur un marché, et qui donne le droit à son détenteur d'acheter à une date d'échéance une action pour un prix d'exercice K connu à l'origine[1]. La notion d'option déborde largement ce cadre d'origine et peut s'appliquer à une multitude de problèmes financiers où figurent des clauses conditionnelles ; nous en verrons un exemple dans le cas des options de remboursement par anticipation à la section III. Les options constituent également un véhicule remarquable de la gestion du risque financier. On soulignera que leur apparition et leur essor répondent à la montée des risques financiers des vingt dernières années. Le risque de défaillance mis à part, le risque financier est lié à la variabilité des cours. C'est donc essentiellement un risque de marché. Une mesure communément admise de ce risque : la volatilité est définie comme la variance du rendement de l'actif concerné. L'instabilité naturelle du cours des actions se retrouve dans les cours de change depuis la dénonciation des accords de Bretton Woods (15 août 1971) et la généralisation du système des changes flottants. Cette instabilité se rencontre aussi de façon importante sur les taux d'intérêt,

1. On appelle souvent pour simplifier et par abus de langage (anglicisme) « call » une telle option.

depuis la mise en œuvre d'une nouvelle politique monétaire des États-Unis d'Amérique (septembre 1979). L'internationalisation des marchés de capitaux ainsi que les diverses mesures de déréglementation ont accentué la variabilité des cours et a donc rendu nécessaire une gestion rigoureuse du risque financier. C'est aussi la raison essentielle du développement des marchés dérivés. Dans ces conditions il n'est donc pas surprenant que le modèle le plus célèbre d'évaluation d'option établisse une correspondance biunivoque entre la volatilité de l'actif support et le prix de l'option[1]. Le marché des options peut donc être considéré comme le marché de la volatilité par excellence.

La prise en compte du risque dans les modèles financiers est donc incontournable. On notera par ailleurs que la théorie financière ne retient pas la connotation négative du langage courant : dommage ou perte potentielle. Si la théorie reconnaît l'éventualité de perte, elle n'efface pas, pour autant, la possibilité de réalisation de gains.

Si l'étude du comportement des agents économiques en situation risquée remonte au XVIIIe siècle avec D. Bernoulli, il faut attendre les années 50 avec les travaux de H. Markowitz et J. Tobin pour voir apparaître les premiers modèles explicites de choix de portefeuille. Dans les années 60 W. Sharpe, J. Linter et J. Mossin proposent un modèle d'évaluation des actifs financiers à l'équilibre, le MEDAF ou C.A.P.M.[2] donnant, dans une approche monopériodique les relations vérifiées à l'équilibre, ou les primes de risques, primes exprimées comme excès de la rentabilité attendue sur le taux du marché monétaire, réputé sans risque.

Or, dans ces modèles, la conception du temps est assez réductrice et même s'ils permettent une analyse nouvelle du problème du choix des investissements, du coût du capital et de la structure financière de la firme, cette modélisation n'est pas toujours très adaptée à la description de l'environnement financier contemporain pas plus qu'elle ne l'est pour la résolution des questions financières exprimées en termes d'allocation instantanée de la richesse en situation d'incertitude. Une firme multinationale peut considérer ces flux de trésorerie comme continus. Les réseaux Reuter et Télérate alliés aux moyens télématiques rendent possibles 24 heures sur 24 des interventions sur toutes les grandes places financières mondiales. Ainsi, même s'il s'agit d'une abstraction, une modélisation prenant en compte un écoulement continu du temps peut s'avérer d'un grand secours, en particulier pour l'étude des marchés financiers. A ce propos citons R. Merton (1990) p. 58 : *« The twin assumptions that trading takes place continuously in time and that the underlying stochastic variables follow diffusion-type motions with continuous sample paths lead to a set behavioral equations for intertemporal portfolio selection that are both simpler and richer than those derived from the corresponding discrete-trading model. Moreover, these same assumptions provide the foundation for a unified theory of financial-security and capital-asset pricing that is both theoretically elegant and empirically tractable. »* C'est le caractère à la fois dynamique et aléatoire de l'arrivée d'informations pertinentes et immédiatement exploitées qui donne aux représentations graphiques des

1. Cf. la formule de Black et Scholes ci-dessous p. 101.
2. Capital Asset Pricing Model.

cours boursiers leur allure irrégulière et heurtée. C'est bien dans ces schémas que se manifeste clairement la conjonction du temps et de l'incertitude. On pourra d'ailleurs rapprocher avec profit le graphe 1 de l'évolution de l'indice CAC 40 de la figure 2, expression graphique de la simulation d'un mouvement brownien géométrique.

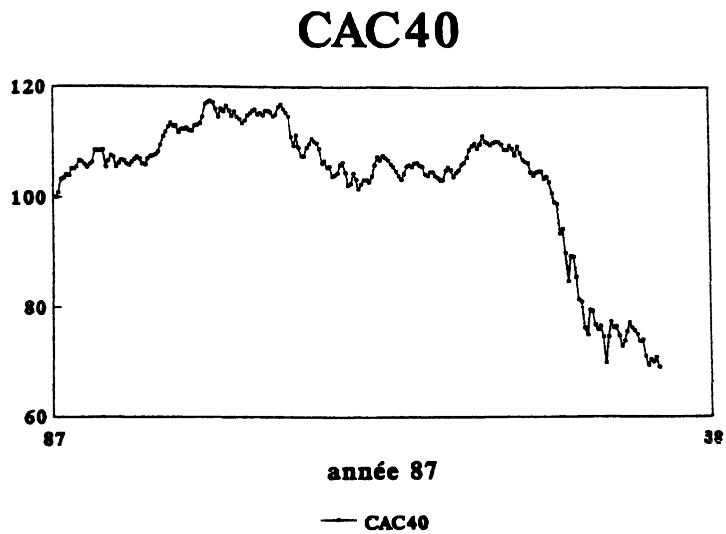


figure 1

CCF

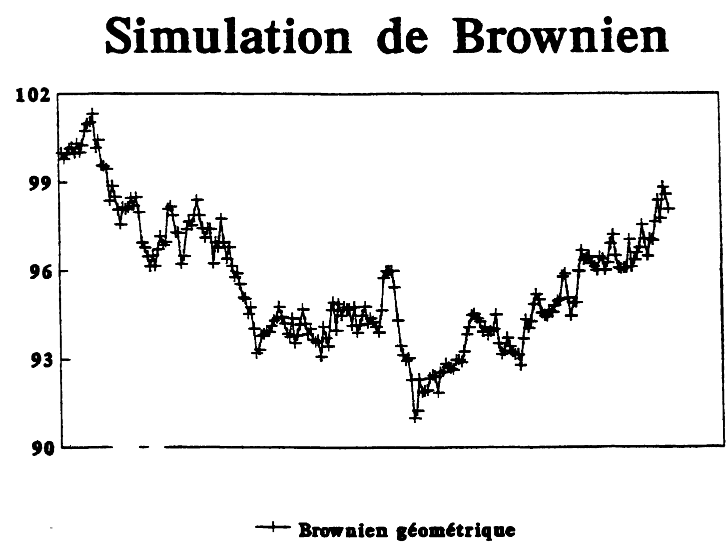


figure 2

CCF

Il faut donc prendre en compte à la fois le temps et l'incertitude. La modélisation privilégiée des cours d'actifs financiers passe ainsi naturellement par les processus stochastiques pour lesquels on dispose aujourd'hui d'une théorie à la fois riche et fort développée mais aussi parfois très complexe. Ayant accepté ces prémisses, une question surgit immédiatement : quel type de processus retenir ? Et plus précisément, les cours boursiers sont-ils des réalisations de processus, continus, markoviens, gaussiens ? Il n'existe pas de réponse immédiate à cette interrogation. Un processus continu ne rendra pas compte de décrochements de cours qui se produisent lors d'événements importants et a fortiori lors de krachs. Un processus markovien qui est sans mémoire implique que la connaissance du passé n'influe en rien sur les trajectoires à venir. Un processus gaussien ne tient pas compte des queues de distributions épaisses, souvent constatées en pratique.

En 1900, Louis Bachelier dans sa thèse sur la spéculation proposa une théorie où les cours suivent un mouvement brownien dont il fut le premier à proposer une formalisation. Malheureusement, malgré ses mérites, une telle formulation est compatible avec l'existence de cours négatifs avec une probabilité non nulle et conduit à une valeur d'option supérieure à la valeur de l'actif support.

Il faudra attendre près de 70 ans avant que ne soient utilisées, en finance et avec succès les méthodes stochastiques, en considérant que les cours sont modélisés par des processus de diffusion pour lesquels les probabilistes développent, depuis les travaux de N. Wiener (1923), A. Kolmogorov (1923), P. Levy (1932) et K. Ito (1941) un calcul particulier, dont il faut souligner les très importants prolongements apportés au cours des vingt dernières années par l'école de Strasbourg. Les économistes P. Samuelson, R. Merton, F. Black et M. Scholes ont été parmi les premiers à utiliser en finance le calcul stochastique.

R. Merton (1971) en particulier a montré que l'on pouvait résoudre dans un cadre de temps continu les problèmes de choix de portefeuille et a proposé un modèle intertemporel d'équilibre, modèle très souvent généralisé, et récemment par I. Karatzas, C. F. Huang et D. Duffie.

F. Black et M. Scholes (1973) en faisant l'hypothèse d'un mouvement brownien géométrique pour l'évolution du cours des actions et en utilisant un argument d'arbitrage ont proposé leur fameuse formule pour l'évaluation d'une option européenne d'achat sur action. Il serait juste d'associer à cette découverte le travail de R. Merton (1973 b).

C'est une étude détaillée du raisonnement de Black et Scholes qui a permis à Cox et Ross (1976) d'abord puis à Harrison et Pliska (1981) ensuite de mettre en évidence un mécanisme général de valorisation des actifs financiers : sous certaines probabilité unique pour laquelle le prix actualisé d'un actif financier est une martingale. Cette mesure est souvent qualifiée de *probabilité risque-neutre*.

Afin de suivre les démarches de la finance en temps continu qui sont très souvent utilisées, il n'est pas nécessaire de s'engager dans la lecture de traités difficiles, mais il est sinon suffisant, du moins utile de disposer de quelques repères. Or ceux-ci sont essentiellement fournis par la notion d'*intégrale stochastique*, par la *règle du chan-*

gement de variable d'Ito et par le théorème de *changement de mesure de GIRSANOV*. La présentation de ces outils fait l'objet de la section suivante.

2. Quelques outils mathématiques de l'analyse financière

2.1. Aspects intuitifs

Pour se resituer dans un univers certain, il est naturel mais naïf de vouloir remplacer les quantités aléatoires par leurs espérances, aussi peut-on être tenté d'évaluer un actif par l'espérance actualisée de l'intégration du flux des revenus qui lui est associé. Or cette façon intuitive de procéder est, moyennement un changement approprié de mesure de probabilité, celle-là même que propose la théorie de l'arbitrage, nous en donnerons plusieurs exemples dans cette note.

Si un investisseur gère un portefeuille d'actifs financiers sur la période $[0, T]$ et s'il choisit de le recomposer aux instants $0 = t_0 < t_1, ..., t_{n-1} < t_n = T$, $\theta(t_j)$ représentant le nombre de titres détenus pendant $[t_j, t_{j+1}[$ et en désignant par $G(t) = S(t) + D(t)$ la somme de la valeur $S(t)$ des titres et $D(t)$ de leurs revenus cumulés (coupons, dividendes, par exemple) le solde total ou résultat de sa gestion en $t_n = T$ noté $W(T)$ s'écrit :

$$W(T) = \sum_{j=0}^{n-1} \theta(t_j)\,[G(t_{j+1}) - G(t_j)] \tag{1}$$

Si l'on suppose un marché fonctionnant en continu et si l'on admet la possibilité de transactions instantanées, la généralisation de (1) doit conduire à remplacer la somme finie par une intégrale. Si la fonction G était déterministe et à variation bornée, cette extension ne poserait pas de problème particulier. Malheureusement G est un processus et il convient d'avancer avec prudence : en effet, lorsque G est un processus de Wiener, plusieurs solutions sont envisageables qui ne conduisent d'ailleurs pas à la même intégrale !

Compte tenu de l'importance de ce processus, nous allons avant d'en donner la définition en proposer une approche intuitive et constructive. A cette fin considérons le jeu suivant : la somme h est gagnée ou perdue à pile ou face. Plusieurs parties sont jouées jusqu'à la date T où le compte du joueur est soldé. En désignant par δ l'intervalle de temps séparant deux tirages successifs, il y a $[T / \delta]$* parties de pile ou face ; en désignant par ξ_i une variable aléatoire prenant les valeurs ± 1 avec des probabilités égales le solde $x(T)$ du compte du joueur est, ex ante, à l'instant T donné par la somme :

* En toute rigueur il faudrait considérer la partie entière.

$$x(T) = h \sum_{i=1}^{[T/\delta]} \xi_i \text{ où les } \xi_i \text{ sont indépendantes}$$

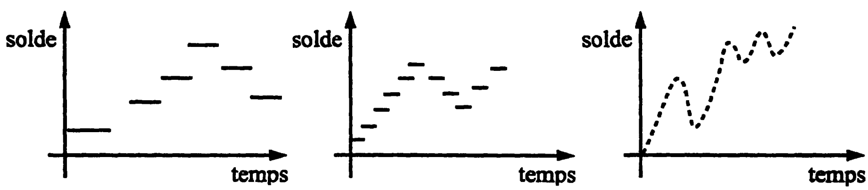
$$\text{var } x(T) = h^2 [T/\delta] \simeq h^2 (T/\delta)$$

On peut se demander ce que devient ce jeu lorsque l'intervalle de temps δ est de plus en plus court et que la somme h est elle même, de plus en plus petite. On exige naturellement que la variance du solde soit à la fois strictement positive, pour conserver l'incertitude, et bornée pour éviter un comportement explosif. Cette exigence est satisfaite en prenant par exemple $h = \sigma/\sqrt{n}$ avec σ constante strictement positive, $\delta = 1/n$, et en faisant tendre n vers l'infini. On a alors var $x(T) \simeq \sigma^2 T$ donc satisfaisant aux conditions imposées. Le solde du joueur en T, noté ici $x^n(T)$, s'écrit :

$$x^n(T) = \sigma\sqrt{T}\,\sqrt{nT}\left[\frac{1}{[nT]}\sum_{i=1}^{[nT]} \xi_i\right] \tag{2}$$

En utilisant le théorème « central-limite », $x^n(T)$ converge en loi vers un processus $x(T)$ de loi normale $N(0, \sigma\sqrt{T})$. On pourrait de la même façon considérer un solde $x(T)$, $\supset t \in [0, T]$.

Les figures suivantes montrent les trajectoires sur $[0, T]$ du solde du joueur lorsque le pas de temps se réduit et en considérant une mise initiale nulle ($x(0) = 0$).



On peut également partitionner l'intervalle $[0, T]$ en sous-intervalles fixes (t_i, t_{i+1}). En partageant de nouveau $[0, T]$ en sous-intervalles de durée δ que l'on fait tendre vers zéro il est facile de voir que les variables $x(t_{i+1}) - x(t_i)$ sont indépendantes, stationnaires et de loi $N(0, \sigma\sqrt{t_{i+1} - t_i})$ avec $x(0) = 0$.

Ce qui conduit à définir le *mouvement brownien* ou processus de Wiener comme un processus réel à trajectoires continues, et noté $z(t)$[1] :

i) nul à l'origine,

ii) à accroissements indépendants et stationnaires,

iii) tel que $z(t) - z(s)$ est distribué $N(0, \sigma\sqrt{t-s})$ $t \geq s$;

lorsque $\sigma = 1$, on parle de processus de Wiener standard.

1. z désignera désormais dans tout cet exposé le mouvement brownien standard.

Plutôt que d'affirmer brutalement que les cours des actifs financiers suivent une diffusion, tentons l'approche suivante non rigoureuse mais intuitive qui est une simplification de la proposition faite par R. Merton (1990).

1) Considérons l'intervalle de temps $[0, T]$ subdivisé en N sous- intervalles de durée Δt. Notons $t_n = n\Delta t$, admettons que la différence de cours entre t_{n-1} et t_n vaut : $\zeta_n = \pm\, \sigma(\Delta t)$* avec des probabilités égales et que les variables ζ sont indépendantes. On a :

$$x(n\,\Delta t) - x((n-1)\,\Delta t) = \zeta_n \tag{3}$$

Les ζ étant isonômes, centrées et indépendantes, x est *une marche au hasard.*

$$x(T) - x(0) = \sum_{j=1}^{N} \zeta_j \qquad\qquad N = [T/\Delta t]$$

2) Afin de préciser le rôle de l'incertitude faisons les trois hypothèses suivantes :

H1 : Il existe une constante A1 de R^+ indépendante de N telle que :

$$\supset n \quad \text{var } x(n\Delta t) \geq \text{A1}$$

H2 : Il existe une constante A2 de R^+ indépendante de N telle que :

$$\supset n \quad \text{var } x(N\Delta t) \leq \text{A2}$$

H3 : Il existe une constante A3 de R^+ indépendante de N telle que :

$$\supset n \quad [\text{var } \zeta n\,] / V \leq \text{A3}$$

$V = \max \text{ var } \zeta_j$.

H1 indique qu'il est impossible d'éliminer le risque, H2 que les cours n'ont pas d'évolutions explosives, H3 assure que l'incertitude se trouve bien répartie sur chaque sous-intervalle.

On en déduit que $\sigma(\Delta t) \sim \sqrt{\Delta t}$ et donc que $\zeta_n = \sigma\sqrt{\Delta t}\,\xi_n$.

Avec $\sigma = 1$ on définit z^N vérifiant $z^N(0) = 0$ et :

$$z^N(n\Delta t) - z^N((n-1)\,\Delta t) = \sqrt{\Delta t}\,\xi_n \tag{3}$$

s'écrit :

$$x(n\Delta t) - x((n-1)\,\Delta t) = \sigma\,[z^N(n\Delta t) - z^N((n-1)\,\Delta t)] = \sigma\sqrt{\Delta t}\,\xi_n \tag{4}$$

3) Dans la modélisation par marche au hasard, on notera la nullité de la rentabilité espérée par unité de temps, ainsi que la constance de la variance de cette même rentabilité. On peut modifier la représentation (3) en imposant une rentabilité espérée par unité de temps non nulle et dépendante à la fois de l'instant précédent et du niveau du cours précédent et une dépendance du même type pour la variance, ce qui conduit à écrire :

---

* σ fonction de Δt.

$$\Delta x_n = x(t_n) - x(t_{n-1}) = \mu(x(t_{n-1}), t_{n-1})\,\Delta t + \sigma(x(t_{n-1}), t_{n-1})\,\sqrt{\Delta t}\,\xi_n$$

On a alors :

$$x(T) - x(0) = \sum_n \Delta x_n = \sum_n \mu(x(t_{n-1}), t_{n-1})\,\Delta t$$

$$+ \sum_n \sigma(x(t_{n-1}), t_{n-1})\,[z^N(n\Delta t) - z^N((n-1)\,\Delta t)] \qquad (5)$$

On serait tenté d'écrire après passage à la limite :

$$\int_0^T dx = \int_0^T \mu(x, t)\,dt + \int_0^T \sigma(x, t)\,dz \qquad (6)$$

et de façon symbolique :

$$dx = \mu(x, t)\,dt + \sigma(x, t)\,dz \qquad (7)$$

La difficulté principale consiste une fois de plus à étudier correctement le passage à la limite dans la seconde somme du dernier membre de l'égalité (5).

2.2. La construction de l'intégrale stochastique

Donnons désormais un tour plus rigoureux à cet exposé. Un processus stochastique ou fonction aléatoire, notée f.a. par la suite, est une famille de variables aléatoires réelles $\{X(t)\}_{t\varepsilon\Lambda}$, Λ étant souvent l'intervalle de temps $[0, T]$. C'est donc un ensemble de fonctions mesurables définies sur un espace de probabilité classique (Ω, @, P) à valeurs dans R ou R^n muni de sa tribu borélienne β. $\supset \omega \in \Omega$, $X(\omega, t)$ noté simplement $X(t)$, considéré comme fonction de t, est appelé trajectoire du processus. C'est, ex post, et donc pour un ω particulier, une réalisation du processus, par exemple l'évolution de l'indice CAC 40 depuis sa création jusqu'à aujourd'hui, compte tenu de l'état du monde ω qui a lieu. Avec une autre histoire on aurait connu une autre trajectoire. On note F_t^X la tribu engendrée par $X(s)$, s variant dans $[0, t]$. Cette tribu représente l'information révélée jusqu'à la date t. On appelle filtration une famille croissante de tribu, et on dit que la f.a. X est adaptée à la filtration si $\supseteq t$, $X(t)$, est F_t mesurable. Le quadruple (Ω, @, F_t^X, P) est appelé *espace filtré.*

Une f.a. X intégrable : $E|X(t)| < \infty$ est par définition une *martingale* par rapport à la filtration F si elle vérifie : $E(X(t)/F_s) = X(s)$ pour $0 \leq s \leq t$ autrement dit la meilleure connaissance* en s de $X(t)$ est $X(s)$! (propriété des espérances conditionnelles).

Un processus est *markovien* par définition si :

$$P(X(t) \in A/F_s^X) = P(X(t) \in A/X(s)) \quad \supset A \in \beta \quad \text{et} \quad 0 < s < t$$

autrement dit pour un tel processus *l'avenir ne dépend du passé que par le présent.*

* Au sens de la moyenne quadratique.

Le mouvement Brownien ou processus de Wiener standard défini en 2.1. et noté $z(t)$ possède (entre autres) les propriétés importantes suivantes :

- Il est à trajectoires continues, markovien, gaussien, centré, de fonction d'autocovariance $\inf(t, s)$.
- C'est une martingale par rapport à sa propre filtration de même que :

$z^2(t) - t$, et $\exp\{\sigma z(t) - (1/2)\,\sigma^2 t\}$ $\supset \sigma \in R$ (cf. formule (20) infra).

Notons aussi que les trajectoires d'un mouvement Brownien ne sont pas dérivables, plus précisément presque sûrement nulle part différenciables : pour le comprendre considérons la f.a. $e_t^{(n)}$ définie par :

$$e_t^n = n\left[z(t) - z\left(t - \frac{1}{n}\right)\right] \quad t \in R^+$$

Sa fonction d'autocovariance $Q_n(\tau) = Q_n(t-s)$ s'écrit :

$$Q_n(\tau) = \begin{bmatrix} n^2\left(\dfrac{1}{n} - \tau\right) & \text{pour } |\tau| \leq \dfrac{1}{n} \\ 0 & \text{pour } |\tau| \geq \dfrac{1}{n} \end{bmatrix} \tag{8}$$

$Q_n(\tau)$ converge vers la distribution de Dirac : $\lim\ Q_n(\tau) = \delta(t-s)$.

On appelle bruit blanc une f.a. centrée de fonction d'autocovariance $\delta(\tau)$ (mesure de Dirac). (8) montre bien qu'un processus de Wiener n'est pas dérivable et que le bruit blanc peut seulement être considéré comme sa « dérivée généralisée ».

Considérons désormais une partition de $[0, T]$ en sous-intervalles de points frontières :

$$t_i^n = iT2^{-n} \quad \text{avec} \quad 0 \leq i \leq 2^n \quad \text{et} \quad t_0^n = 0.$$

On définit la variation d'ordre p du processus z sur l'intervalle $[0, T]$ par :

$$V_p^n = \sum_{i=1}^{2^n} |z(t_i^n) - z(t_{i-1}^n)|^p$$

On a alors les résultats suivants (convergence en probabilité) :

$$\lim_{n \to \infty} V_p^n = \begin{bmatrix} \infty & 0 < p < 2 \\ t & p = 2 \\ 0 & p > 2 \end{bmatrix} \quad \text{(convergence dans } L^2 \text{ ou en probabilité)}$$

La fonction z n'étant pas à variation bornée sur $[0, T]$, on ne peut définir les limites évoquées précédemment (équations (1), (5)) comme intégrales de Stieljes. On construit alors l'intégrale stochastique par un procédé similaire à celui de l'intégrale de Lebesgue : d'abord par intégration de f.a. étagées $X(t)$ (c.-à-d., telles qu'il existe une partition $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = T$, pour laquelle $X(\omega, s) = g_j(\omega)$ pour $t_j < s \leq t_{j+1}$ avec g_j v.a. bornée et Ft_j mesurable).

L'intégrale est par définition, pour $0 \leq t \leq T$:

$$I_t(X) = \int_0^t X(s)\,dz(s) = \sum_{j=0}^{m-1} g_j\,[z(t_{j+1}) - z(t_j)] + g_m\,[z(t) - z(t_m)] \tag{9}$$

pour $t \in\,]t_m, t_{m+1}]$.

On peut montrer que $I_t(X)$ est centré et que sa variation quadratique est $E\,[\int_{[0,t]} X^2(u)\,du]$ et que la f.a. $I_t(X)$ est une martingale. On montre ensuite que n'importe quel processus adapté et continu X de $L^2\,[\Omega x\,[0, T]]$ peut être approché par une suite de f.a. étagées $\{X^n\}$ au sens où : $E\,\{\int_{[0,T]} (X^n(u) - X(u))^2\,du\}$ tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini. La suite $I_t(X_n)$ est convergente dans $L^2\,[\Omega x\,[0, T]]$ et sa limite est *par définition l'intégrale stochastique de X par rapport à z*. On peut étendre $I_t(X)$ à une classe plus grande de processus, notamment les processus vérifiant $\int_{[0,T]} X^2(u)\,du < \infty$ et continus à droite avec limites à gauche (f.a. CADLAG) mais il faut modifier le mode de convergence et remplacer martingale par « martingale locale » dans les énoncés. Cette extension sortant du cadre de cet exposé, le lecteur intrigué pourra consulter Karatzas et Shreve. Nous nous restreindrons aux processus continus de $L^2\,[\Omega x\,[0, T]]$. Dans ce cas l'intégrale, notée $I_t(X)$ est une v.a. à t fixé, et un processus pour t variable, processus qui possède alors et parmi d'autres les propriétés suivantes :

i) $I_t(aX_1 + bX_2) = aI_t(X_1) + bI_t(X_2) \quad (a, b) \in R \times R$.

ii) $I_t(X)$ est une martingale continue, $t \in [0, T]$.

iii) $[I_t(X)]^2 - \int_0^t [X(s)]^2\,ds$ est une martingale pour $t \in [0, T]$.

iv) Si $E\left[\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^T x^2(s)\,ds\right\}\right] < \infty$ alors :

$$\exp\left\{\sigma I_t(X) - \frac{\sigma^2}{2}\int_0^t X^2(s)\,ds\right\}$$

est une martingale $\supset \sigma \in R$ et $t \in [0, T]$.

2.3. Equation différentielle stochastique et lemme d'ITO

L'intégrale stochastique étant maintenant définie correctement, on peut chercher ($x(0)$ étant une donnée F_0 mesurable) la solution en x, de l'équation :

$$x(t) = x(0) + \int_{[0,t]} f(x(s), s)\,ds + \int_{[0,t]} g(x(s), s)\,dz(s) \quad \text{pour } 0 \leq t \leq T \tag{11}$$

que l'on écrit conventionnellement sous la forme :

$$dx = f(x, t)\, dt + g(x, t)\, dz \qquad (12)$$

x peut être un vecteur de R^n, f une fonction vectorielle $(n, 1)$, g une fonction matricielle (n, k) et z un processus de Wiener k dimensionnel*. Soulignons *que l'écriture* (12) *n'est que pure forme* et rappelons que z n'est pas dérivable !

Une équation de ce type est appelée équation différentielle stochastique et on parle parfois d'E.D.S. Sous réserve que les fonctions f et g soient à croissance bornée et satisfassent à des conditions de type LIPSCHITZ, qui sont souvent vérifiées en pratique, mais pas toujours[1], la solution en x de (11) ou (12) avec la condition initiale $x(0) = x_0$ existe et est unique. Plus précisément on a le résultat suivant :

– pour f et g mesurables :

– S'il existe une constante k, telle que $\supset t \in [0, T]$ et $\supseteq x \in R^n$:

$$\|f(x, t)\|^2 + \|g(x, t)\|^2 \leq k(1 + \|x\|^2)$$

– Si $\supset R > 0$ $\exists$ C_R telle que pour $\|x\| \leq R$ et $\|y\| \leq R$

$$\|f(x, t) - f(y, t)\|^2 + \|g(x, t) - g(y, t)\|^2 \leq C_R \|x - y\|^2$$

alors il existe une solution unique à (11). La solution est un processus continu et markovien que l'on appelle processus de diffusion ou processus de Itô. On appelle dérive ou drift le terme précédant le dt et paramètre de la diffusion le terme précédant dz. L'ensemble des processus de Itô obéit à un calcul particulier dont on ne transgresse pas les lois si, lors de développements de pure forme, on admet la table de multiplication suivante :

X	dt	dz
dt	0	0
dz	0	dt

(13)

Le résultat le plus utilisé en théorie financière est celui de la règle de changement de variable, appelé **Lemme d'Itô** (1951).

Si x suit l'équation scalaire :

$$dx = \mu(x, t)\, dt + \sigma(x, t)\, dz \qquad (14)$$

alors pour tout fonction numérique $y(x, t)$ de classe C^2 par rapport à x, C^1 par rapport à t (classe de fonctions notée $C^{2,1}$ par la suite), on a :[2]

$$dy = [y_t + y_x \mu + 1/2\, (\sigma^2 y_{xx})]\, dt + y_x \sigma\, dz \qquad (15)$$

* Les coordonnées de z sont des processus de Wiener standards non corrélés.

1. En particulier lors de l'étude de taux d'intérêt ; il conviendra donc, dans les applications, de s'assurer des conditions de validité.

2. Un indice indique une dérivation, un ' une transposition. En considérant que $x(t)$ est une diffusion $y(x(t), t)$ est aussi une diffusion dont la dynamique est précisément régie par le lemme d'Itô.

et pour un processus vectoriel :

$$dy = [y_t + y_x{}'\mu + 1/2\ (\text{trace}\ [y_{xx}\ \sigma\sigma'])]\ dt + y_x{}'\ \sigma\, dz \qquad (15')$$

Moyennant ce résultat difficile à démontrer en toute rigueur, donnons les formules suivantes (pour des processus scalaires suivant une équation du type (14)) qui illustrent bien *la spécificité de ce calcul par rapport au calcul différentiel ordinaire :*

$$dy = y_t\, dt + y_x\, dx + (1/2)\ \sigma^2 y_{xx}\, dt$$

Si f et g sont des processus de Itô, on a :

$$d\,(af + bg) = adf + bdg \qquad \text{pour } (a, b) \in R \times R$$

$$d\,(fg) = fdg + gdf + (1/2)\ \sigma^2 f_x\, g_x\, dt$$

$$d\,(x^n) = nx^{n-1}dx + \frac{1}{2}\ n\,(n-1)\,x^{n-2}\sigma^2\, dt$$

$$d\,(f/g) = \frac{gdf - fdg}{g^2} - \frac{\sigma^2}{g^3}\ g_x\,[gf_x - fg_x]\ dt$$

$$d\,(\exp\{x\}) = \left[dx + \frac{1}{2}\ \sigma^2 dt\right] \exp\{x\}$$

Si x_1 et x_2 sont deux processus scalaires de Itô vérifiant :

$$dx_1 = f_1\,(x_1, x_2, t)\, dt + \sigma_1\,(x_1, x_2, t)\, dz_1$$

$$dx_2 = f_2\,(x_1, x_2, t)\, dt + \sigma_2\,(x_1, x_2, t)\, dz_2$$

z_1 et z_2 étant deux processus de Wiener standard de corrélation ρ, on a :

$$d\,(x_1 x_2)\, x_1\, dx_2 + x_2\, dx_1 + dx_1\, dx_2$$

Le dernier terme n'est pas considéré comme négligeable en calcul stochastique ; on a d'ailleurs :

$$dx_1\, dx_2 = \rho\sigma_1\sigma_2\, dt$$

2.4. Modélisation classique des cours et des taux

Deux processus de Itô particuliers sont fréquemment utilisés en modélisation financière : le mouvement brownien géométrique pour le cours des actions (cf. Sprenkle, 1964) et le processus de Ornstein-Uhlenbeck (cf. Vasicek, 1977) pour le taux d'intérêt à court terme.

A) Mouvement Brownien géométrique

Il s'écrit, en notant S la valeur de l'action ex-dividende :

$$dS = \sigma S\, dt + \sigma S\, dz \qquad (\mu, \sigma) \in R^+ \times R^+ \mu \text{ et } \sigma \text{ constantes} \qquad (16)$$

En anticipant sur le caractère positif de S et en posant $y = \text{Log } S$, on déduit après utilisation du lemme d'Itô, et intégration sur $[0, t]$:

$$y(t) = \text{Log}(S(0)) + (\mu - (1/2)\,\sigma_2)\,t + \sigma z(t)$$

$$y(t) \text{ distribuée } N(\log(S(0) + (\mu - (1/2)\,\sigma^2)\,t\,,\ \sigma\sqrt{t}))$$

Les actions dans ce modèle ont des distributions log-normales. On peut également écrire :

$$S(t) = S(0)\ \exp\{(\mu - (1/2)\,\sigma^2)\,t + \sigma z(t)\}$$

dont l'interprétation est immédiate, et :

$$S(t) = S(0)\ \exp\{\eta t\} \qquad \text{avec} \qquad \eta = (1/t)\ \text{Log}\{S(t)\,/\,S(0)\}$$

Ce qui permet de dire que la « rentabilité » η est distribuée

$$N((\mu - (1/2)\,\sigma^2),\ \sigma/\sqrt{t}).$$

La figure 2 ci-dessus donne un exemple de simulation de brownien géométrique.

Notons que si l'on suppose qu'il existe un call européen sur cette action dont la valeur $C(S, t)$ ne dépend que de S et t, avec C de classe $C^{2,1}$, la formule d'Itô s'écrit :

$$dC = C_S\,dS + C_t\,dt + (1/2)\,\sigma^2 S^2 C_{SS}\,dt\,, \tag{16'}$$

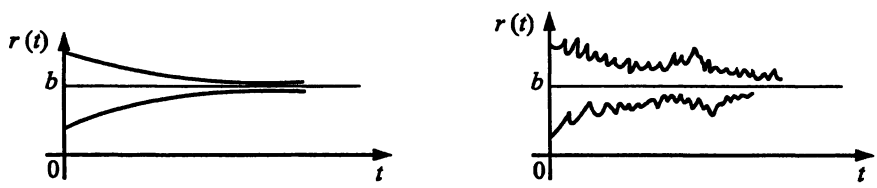
résultat que nous utilisons en 2.6.

B) Processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Il s'écrit en notant $r(t)$ le taux d'intérêt à court terme :

$$dr = a\,(b - r)\,dt + \sigma\,dz \qquad (a, b, \sigma) \in R^+ \times R^+ \times R^+ \text{ et constantes} \tag{17}$$

Les trajectoires ont les allures suivantes :



b apparaît comme taux limite vers lequel converge plus ou moins rapidement $r(t)$; la vitesse de convergence étant exprimée par le paramètre a. La figure 3 donne un exemple de simulation d'un processus de Ornstein-Uhlenbeck.

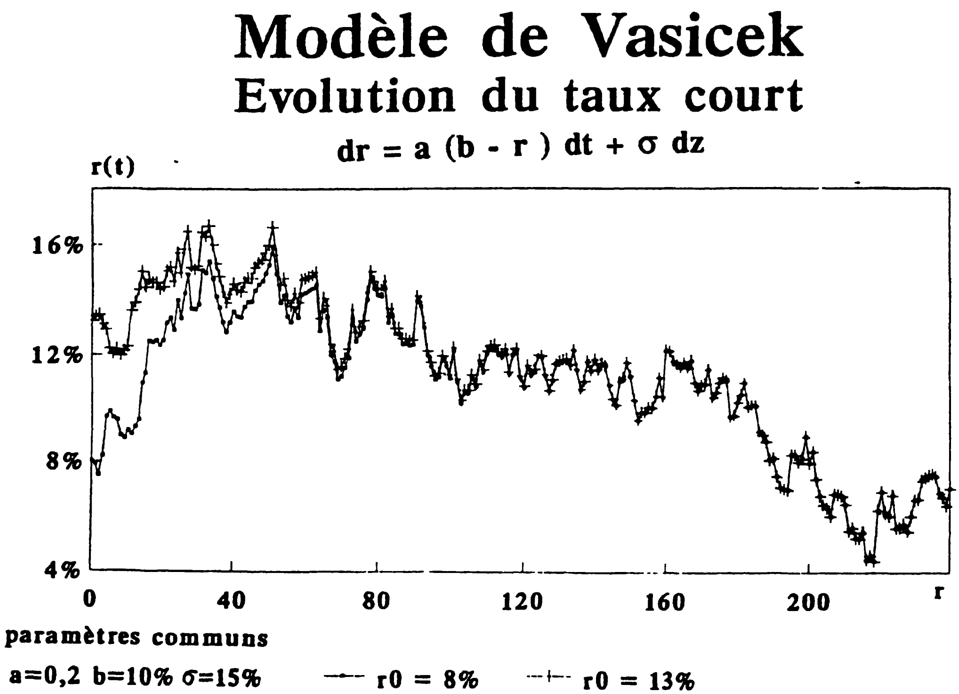


figure 3

CCF

En posant : $y(r, t) = (r - b)\ \exp\{at\}$, le lemme d'Itô permet d'écrire après intégration :

$$r(t) = b + (r(0) - b)\ \exp\{-at\} + \sigma \int_{[0,t]} \exp\{a(s-t)\} dz \qquad (18)$$

$r(t)$ est donc gaussien. Après un léger calcul, on obtient les moments :

$$E[r(t) / r(0)] = b + (r(0) - b)\ \exp\{-at\}$$

$$\mathrm{Var}[r(t) / r(0)] = (1/2a)\ \sigma^2 [1 - \exp\{-2at\}]$$

Les inconvénients majeurs d'une modélisation de ce type proviennent du fait que d'une part $r(t)$ est gaussien, ce qui implique une apparition possible de taux d'intérêt négatifs, d'autre part et surtout que le paramètre de la diffusion est constant. C'est pourquoi Cox Ingersoll et Ross ont proposé une modélisation dite de processus en « racine carré » pour pallier cet inconvénient. Leur hypothèse s'écrit :

$$dr = a(b - r)\,dt + \sigma\sqrt{r}\,dz$$

2.5. Règle de changement de mesure de Girsanov (1960)

Un autre outil très important d'usage de plus en plus répandu en finance est fourni par le **théorème de Girsanov :**

Soit l'espace filtré (Ω, @, F, P) où, F est la filtration du mouvement brownien z, X une f.a. adaptée à F_t telle que :

$$E\,[\exp(1/2)\left\{\int_{[0,\,T]}[X(t)]^2\,dt\right\}] < \infty \quad \text{(condition de Novikov)}$$

Soit Q la mesure de probabilité définie sur F_T par la densité de Radon Nikodym :

$$dQ/dP = \exp\left\{\int_{[0,\,T]} X(t)\,dz(t) - (1/2)\int_{[0,\,T]}(X(t))^2\,dt\right\}$$

alors $\hat{z}(t) = z(t) - \int_{[0,\,t]} X(s)\,ds$ pour $t \in [0, T]$ est un processus de Wiener sous la nouvelle mesure de probabilité Q et la filtration de z*.

Montrons comment utiliser ce théorème *pour modifier la dérive* d'un processus de Itô. Supposons qu'un actif financier suivre un brownien géométrique :

$$dS = \mu S\,dt + \sigma S\,dz \qquad (\mu, \sigma) \in R^+ \times R^+$$

Notons r le taux d'intérêt sans risque supposé constant. En posant $x(s) = (r - \mu)\,/\,\sigma$, on remarque que $x(s)$ est constant et on obtient d'après le théorème de Girsanov :

$$dS = rS\,dt + \sigma S\,d\hat{z} \tag{19}$$

avec *une dérive de* rS *et non de* μS et avec la même volatilité.

Posons ensuite $\bar{S} = \exp\{-rt\}S$. D'après le lemme d'Itô :

$$d\bar{S} = \bar{S}(\mu - r)\,dt + \sigma\bar{S}\,dz$$

Posons à nouveau $x(s) = (r - \mu)\,/\,\sigma$. Le théorème de Girsanov permet d'écrire :

$$d\bar{S} = \sigma\bar{S}\,d\hat{\bar{z}} \tag{20}$$

$\bar{S}$ est une Q-martingale (cf. p. 9). On a donc identifé la loi Q pour laquelle le prix actualisé est une marginale. Si le marché est complet, Q est l'unique probabilité permettant la valorisation par arbitrage. On peut en déduire en particulier le prix $C(S, t)$ d'une option d'achat européenne sur l'action à l'instant t, pour une échéance T et un prix d'exercice K : il suffit d'écrire que c'est l'espérance, calculée sous la probabilité risque neutre Q, de l'intégration de son flux de revenu, actualisé au taux r, revenu qui, dans ce cas, se réduit à la valeur de l'option à l'échéance. On a donc :

$$C(S, t) = E_Q\,[\exp\{-r(T - t)\}\ \mathrm{Max}\,(S(T) - K, 0)\,/\,F_t] \tag{21}$$

En utilisant (19) on obtient après calcul et en notant N la fonction de répartition de la loi normale :

$$C(S, t) = S(t)\,N(d_1) - K\ \exp\{-r(T - t)\}\ N(d_2) \tag{22}$$

* Lorsque x est constant, la filtration de $\hat{z}$ est la même que celle de z.

1. Pour simplifier un marché est dit complet si tout actif contingent peut être dupliqué à partir des actifs de base. Nous renvoyons pour de plus amples développements de cette très importante notion aux articles de Duffie (1990) et Harrison et Pliska (1981) cités en bibliographie.

avec : $$d_1 = \frac{\mathrm{Log}\,(S/K) + \left(r + \frac{1}{2}\,\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-1}$$

C'est la célèbre formule de Black et Scholes.

2.6. L'approche de Black et Scholes

Suivons la démarche originelle de Black et Scholes, dans leur article de 1973. A cette fin considérons un portefeuille constitué d'une action, dont le prix suit un brownien géométrique, et de la vente de $\delta' = 1/C_S$ option d'achat européenne écrite sur cette action. La valeur de ce portefeuille, notée P, s'écrit : $P = S - \delta' C$ d'où : $dP = dS - \delta' dC$; en utilisant le résultat (16') il vient, après un léger calcul : $dP = -(1/C_S)[C_t + (1/2)\,\sigma^2 S^2 C_{SS}]\,dt$, le portefeuille est donc sans risque (pas de terme en dz) ! C'est la raison du choix δ'. Si le marché est en équilibre, la rentabilité de ce portefeuille ne peut être différent du taux r de l'actif sans risque, soit :

$$\frac{dP}{P} = r\,dt \quad \text{ou} \quad \frac{1}{C_S}\,\frac{\left[C_t + \frac{1}{2}\,\sigma^2 S^2 C_{SS}\right]}{[S - \delta' C]}\,dt = r\,dt$$

d'où l'équation aux dérivés partielle (E.D.P.) suivie par le prix du call :

$$\frac{1}{2}\,\sigma^2 S^2 C_{SS} + r\,S C_S + C_t - r\,C = 0 \tag{23}$$

avec la condition :

$$C\,(S, T) = \max\,[0, S\,(T) - K] \tag{24}$$

Cette E.D.P. avec la condition (24) possède la solution analytique (22).

2.7. Quelques remarques méthodologiques

Notons qu'actuellement l'approche de départ la plus usitée dans les problèmes d'évaluation consiste à chercher à se placer sous la probabilité risque-neutre Q et à travailler avec la solution par arbitrage dont la solution unique, pour la valorisation d'un actif X, lorsque le marché vérifie un certain nombre de conditions plus restrictives que celle du marché complet (cf. D. Duffie), peut s'exprimer par la formule générale :

$$X(t) = \frac{1}{\delta(t)}\,E_Q\left[\int_t^T \delta(s)\,dD\,(s) + \delta(T)\,X(T) \mid F_t\right] \quad \text{pour } t \leq T$$

où $\delta(t)$ est la fonction d'actualisation, D le processus du flux des revenus associés à l'actif étudié. Cette formule exprime simplement que le processus de gain $G = X + D$ actualisé : $G\delta = X\delta + D\delta$ est une Q-martingale. Remarquons immédiatement que la formule (22) en représente le cas particulier le plus fameux et prévenons le lecteur que nous en illustrerons systématiquement son usage dans le paragraphe suivant. D'autres approches conduisent assez fréquemment à exprimer que la valeur d'un actif contingent suit une équation aux dérivées partielles (ex. (23)). Or, il est bien connu que certaines E.D.P[1] ont des solutions qui peuvent s'exprimer sous la forme d'espérance mathématique de processus (Théorème de Feynman-Kac). Aussi est-on souvent amené à envisager *trois types de résolution* : par *solution analytique*, par *résolution numérique* ou bien encore par *simulation.* Certains problèmes conduisent même à des inéquations variationnelles pour tenir compte des temps d'arrêt. La formule de Black et Scholes est le cas typique de solution explicite, mais la probabilité d'en trouver une est en général très faible (le lecteur s'en convaincra en écrivant l'E.D.P. suivie par l'Option de Remboursement de Crédit par Anticipation de la section suivante !). Aussi ne faut-il pas se priver de réaliser parfois des approximations numériquement raisonnables. Notons aussi que le choix d'un modèle doit être essentiellement guidé par sa conformité aux estimations empiriques. Il doit représenter en général un compromis entre sa complexité et sa mise en œuvre et montrer des qualités de robustesse.

3. Fluctuation de taux et gestion actif-passif

Après cette présentation des principaux outils de la finance en temps continu, nous nous proposons ici de montrer une de leur utilisation en gestion Actif-Passif.

3.1. Position du problème

Un plan d'épargne logement, un crédit à la consommation à taux fixe, un bon de capitalisation, une assurance-vie. Quel lien très particulier unit ces produits dont le profil semble bien différent ? Il s'agit bien sûr des options implicites ou cachées, qui sont rattachées à ces instruments et vendues par les banques et asurances.

Un plan épargne logement offre l'option à son souscripteur de réaliser un emprunt à l'échéance, avec un taux garanti connu dès l'origine. Le banquier a donc vendu un cap[2] de taux d'intérêt que les clients exercent aujourd'hui avec de plus en plus de rationnalité financière. Mais les riques du banquier ne s'arrêtent pas là. Chaque fois qu'il met en place un crédit au taux fixe, il court le risque, en cas de baisse des taux, de voir son débiteur le rembourser par anticipation, comme la réglementation le permet à ce dernier. Il n'est alors pas sûr de retrouver des emplois à des taux équivalents à ceux de son passif ! La décrue des taux d'intérêt dans le seconde partie des années 80 et les remboursements importants qui en ont résulté dans un environnement concurrentiel exacerbé, ont mis en lumière tous ces risques et le besoin d'outils permettant de les analyser.

1. Les équations paraboliques
2. Un cap est un contrat qui permet de plafonner un taux d'emprunt.

La situation des assureurs est, par certains aspects, très similaire. Car sur les bons de capitalisation et les assurance-vie, les souscripteurs peuvent demander à bénéficier d'avances sur le capital et les intérêts accumulés, voire à racheter tout simplement leur contrat. Il existe bien des systèmes de pénalisation, mais l'exercice éventuel de ces options, en cas de forte hausse des taux, impose à l'assureur, soit d'être partiellement liquide pour faire face à ces rachats, soit de revendre des actifs qu'il avait acquis avec les primes touchées initialement. Si ces actifs sont liés au taux d'intérêt, il court un risque de moins-value sous l'effet de la hausse des taux. Banquiers et assureurs sont donc confrontés au problème de savoir s'ils sont correctement rémunérés pour les risques qu'ils prennent, pour le banquier à travers le taux fixe auquel il propose le crédit, et pour l'assureur à travers le taux fixe et l'éventuelle participation aux bénéfices qu'il s'engage à servir au souscripteur.

Une fois ce problème de « tarification » résolu (mais nous verrons qu'il n'est pas simple !) nos deux acteurs doivent encore mettre en œuvre des stratégies opérationnelles de couverture de ces risques, pour maximiser avec suffisamment de sécurité les fonds propres de la société, objectif ultime de la gestion Actif-Passif. La multitude des options cédées induit des engagements non certains, dont la réalisation effective dépendra du comportement des clients. Toute couverture devra donc comprendre des rachats d'options suivant des proportions non facilement identifiables.

Dans ce rapide survol des clauses optionnelles implicites contenues dans les produits financiers, nous nous cantonnerons à la seule problématique de l'option de remboursement d'un crédit à taux fixe par anticipation (ou plus simplement ORCA). Notre but est de montrer comment les modèles aléatoires de taux d'intérêt permettent de fournir un outil de mesure du risque encouru par les banquiers. Cette mesure se fait à travers l'évaluation du prix de l'option donnée aux souscripteurs et à sa sensibilité aux paramètres qui en font son prix.

Après avoir introduit la notion de vitesse de remboursement par anticipation, nous montrerons comment cette option peut s'évaluer comme un actif contingent aux taux d'intérêt. Une fois choisi le modèle de diffusion sur la courbe des taux adapté aux observations et estimations empiriques, les outils classiques du calcul stochastique que sont le lemme d'Itô et le théorème de Girsanov permettent de calculer le prix de l'ORCA et sa sensibilité à différents paramètres. Nous verrons que, comme dans le cas du modèle de Black et Scholes, les modélisdations du caractère aléatoire des taux par des diffusions permettent de réaliser des changements de probabilités (risque-neutre ou forward-neutre), où les calculs à mener sont nettement plus simple. Dans notre approche de l'ORCA, il nous a même été possible d'arriver à des formules quasi-explicites.

3.2. Analyse du problème de l'option de remboursement d'un crédit et du modèle de « vitesse de remboursement anticipé » (VRA)

Soit un crédit à annuités constantes A de taux de souscription τ_S sur N périodes. Soit $P_S(k)$ la somme restante dûe à la date k. Alors :

$$P_S(k) = \sum_{i=1}^{N-k} \frac{A}{(1+\tau_S)^i} = \frac{A}{\tau_S}\left(1 - \frac{1}{(1+\tau_S)^{N-k}}\right)$$

Le calcul du prix de marché du crédit à la date k, $P_m(k)$, se fait à l'aide de la courbe des taux à la date k, plus précisément :

$$P_m(k) = \sum_{i=1}^{N-k} AB(k, k+i)$$

où $B(k, k+i)$ est le prix à l'instant k d'un coupon zéro (de nominal un) et de maturité $k+i$.

L'ORCA offre la possibilité au souscripteur de rembourser sa créance à chaque instant i, pour un prix $P_S(i)$. Plutôt que de regarder le comportement de chaque individu, on considère un pool de créances dont une proportion est remboursée tous les ans. La vitesse de remboursement anticipé, notée VRA par la suite, mesure alors cette fraction d'amortissement anticipé. On montre statistiquement que cette vitesse dépend de facteurs dont certains sont prévisibles dès l'accord du crédit (maturité, saisonnalité), alors que d'autres, tels que les taux d'intérêt sont des f.a. On modélise alors les VRA au moyen de la fonction représentée sur la figure 4, dont l'interprétation est la suivante :

- Certains remboursements, effectués au pair, alors que les taux ont monté, sont irrationnels, d'un point de vue strictement financier ; ils induisent une valeur plancher w_1 en dessous de laquelle ne descend pas la vitesse de remboursement.
- Une partie des emprunteurs est indifférente à l'évolution des taux de marché, et ne remboursera pas par anticipation, quel que soit le profit généré par une telle opération, par conséquent, la vitesse de remboursement ne dépassera pas une valeur plafond w_2.
- k_1 représente le prix de la créance en-deça duquel les remboursements ne sont effectués que par la proportion w_1 d'emprunteurs « irrationnels ».
- k_2 est le prix au-delà duquel seuls ne remboursent pas la proportion w_2 d'emprunteurs « indifférents ».
- Pour k compris entre k_1 et k_2, la vitesse de remboursement est une fonction linéaire de k.

Ce schéma, qui prend en compte les principaux effets (taux et maturité), est simple à estimer empiriquement, même si les statistiques de VRA sont peu nombreuses.

Notons $v_k = v\,[P_m(k) / P_S(k)]$ la vitesse de remboursement à la date T_k et posons par convention :

$$v^\circ k = \prod_{i=1}^{k-1} (1 - v_i) \qquad \text{pour } k > i \qquad \text{et } v^\circ 1 = 1$$

Le prix de l'ORCA est alors la valorisation du flux financier obtenu par différence des flux financiers avec et sans possibilité de remboursement anticipé. Un calcul simple montre que ce flux écart vaut :

en période k (autre que la maturité) : $(1 - v\,°k)\,A - v_k\, v\,°kP_S(k)$

à l'échéance : $(1 - v\,°N)\,A$

Ce flux dépend des vitesses constatées, elles-mêmes dépendantes du processus de taux. Nous sommes donc amenés à valoriser un échéancier dont les flux sont des variables aléatoires décroissantes.

3.3. Evaluation théorique de l'option

N. El Karoui et alii ont montré que l'évaluation des actifs contingents aux taux d'intérêt peut être faite avec tout modèle d'équilibre partiel entre les coupons-zéro, actifs de base, et les contingents. Un tel modèle ne cherchant pas à expliquer la dynamique réelle (i.e observée) des coupons-zéro, il n'y a pas lieu d'introduire de prime de risque.

A) Choix du processus de taux

Pour limiter la complexité des calculs, nous nous sommes restreints à un modèle de fluctuations monofactoriel sur la courbe des taux. *On suppose donc* que sous la probabilité risque neutre Q, la loi des coupons-zéro $B\,(t, T)$ (prix à l'instant t du coupon zéro d'échéance T), est donnée par :

$$\frac{dB\,(t, T)}{B\,(t, T)} = r\,(t)\,dt - \sigma\beta\,(T-t)\,dz$$

avec $$\beta\,(T-t) = \frac{1}{a}\,(1 - \exp\,(-a\,(T-t))) \quad \text{et} \quad a > 0$$

Par suite la volatilité $\sigma\beta(T-t)$ à la date t d'un coupon-zéro d'échéance T est décroissante avec la maturité (puisque a est positif), vaut 0 en T et est de l'ordre de $[\,\sigma / a]$ lorsque $t << T$. On montre alors que le taux d'intérêt actuariel $R\,(t, T)$ associé à $B\,(t, T)$ a pour variance : $[\sigma^2\beta\,(2t)\,\beta^2\,(2\,(T-t))\,/\,2\,(T-t)]$, aussi bien sous la probabilité corrigée du risque que dans l'univers historique. Pour les grandes valeurs de t et pour une échéance de coupon-zéro T telle que $T = t + h$ avec h fixé, cette variance croît asymptotiquement vers une valeur limite $\sigma^2\beta\,(2h)\,/\,2ah^2$. Le modèle permet d'avoir un comportement de la volatilité du coupon-zéro conforme aux variations estimées empiriquement de la courbe française des emprunts d'État (Cf. Boulier et Sikorav (1990)).

On montre facilement que le fait d'avoir pris une volatilité déterministe pour les coupons-zéro conduit à des taux markoviens gaussiens, donc éventuellement négatifs.

Mais pour un bon choix des paramètres, la probabilité est faible et par ailleurs cela ne mène pas à des opportunités d'arbitrage.

B) Calcul de l'option

La valeur OP de l'ORCA est alors l'espérance sous Q des flux écarts actualisés, soit :

$$OP = E_Q\left[\mu(T_N)\, A\,(1 - v^{\circ}N) + \sum_{k=1}^{N-1} \mu(T_k)\,[A\,(1 - v^{\circ}k) - v^{\circ}k v_k P_S(k)]\right]$$

où $\mu(t) = \exp - \int_0^t r(s)\, ds$ est le processus de réactualisation.

Donnons maintenant une autre interprétation de cette valorisation de l'option de remboursement anticipé.

Utilisant la relation $\sum_{i=1}^{k-1} v^{\circ}i v_i = 1 - v^{\circ}k$, on montre facilement que :

$$OP = E_Q\left[\sum_{k=1}^{N-1} v^{\circ}k v_k \mu(T_k)\,[P_m(k) - P_S(k)]\right]$$

Cette formule s'interprète facilement. A la date k il reste une proportion $v^{\circ}{}_k$ d'emprunteurs n'ayant pas remboursé par anticipation et une proportion v_k va rembourser par anticipation. Le solde (perte ou éventuellement gain) dû à ce remboursement est égal à : $v^{\circ}{}_k v_k\,[P_m(k) - P_S(k)]$, puisque l'emprunteur rembourse $P_S(k)$ et qùe le prix du crédit squr le marché est $P_m(k)$. En utilisant le principe d'arbitrage, le prix de l'option de remboursement anticipé est donc l'espérance sous la probabilité Q de la somme de ces flux actualisés.

Sans entrer dans le calcul complet de l'ORCA, que le lecteur pourra trouver dans (P. d'Andria et alii), nous allons en donner les grandes lignes.

i) Introduisons le processus L défini par :

$$L(t) = \exp\left[-\sigma \int_0^t \beta(T-u)\, dz(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2\beta^2(T-u)\, du\right]$$

L_t est une Q-martingale. En utilisant le théorème de Girsanov on peut alors considérer la nouvelle probabilité $Q_T = L_T Q$ (pour $T = T_k$). Si h_T est F_T mesurable on a :

$$E_Q\left[\exp\left(-\int_0^T r(s)\, ds\right) h(T)\right] = B(0, T)\, E_{Q_T}(h(T))$$

Sous cette nouvelle probabilité « forward-neutre », (ce qui correspond simplement à un changement de numéraire), les prix à terme $B(t, t') / B(t, T)$ (pour $t' > t$) sont des martingales. On peut réécrire la valeur de l'ORCA :

$$OP = A \sum_{k=1}^{N} (1 - E_{Q_k}(v^{\circ}k)) B(0, T_k) - \sum_{k=1}^{N-1} E_Q(v^{\circ}kv_k) P_S(k) B(0, T_k)$$

où Q_k est la probabilité « forward-neutre » associée au temps $T = T_k$. Si $v_i(k)$ est l'espérance de v_i pour cette probabilité, on réalise alors l'approximation suivante (après l'avoir justifiée numériquement et en notant k pour T_k dans la formule suivante) :

$$E_{Q_k}(v^{\circ}kv_k) = \prod_{i=1}^{k-1} (1 - E_{Q_k}(v_i)) E_{Q_k}(v_k) = \prod_{i=1}^{k-1} (1 - v_i(k)) v_k(k)$$

ii) On remarque ensuite que $v_i = v(P_m(i) / P_S(i))$ est, à un facteur multiplicatif et à une translation près, la différence de deux calls sur l'obligation P_m. Le premier a pour prix d'exercice $k_1 P_S(i)$, le second $k_2 P_S(i)$. On a donc à trouver la valeur de ces calls « retardés », car s'ils sont exerçables à l'instant T_i le produit de cet exercice n'est encaissé qu'en T_k.

iii) Utilisant encore le théorème de Girsanov, on est capable de mettre en évidence de nouvelles mesures de probabilités où les coupons-zéro $B(t, t+k)$ suivent des lois log-normales, dont les logarithmes sont tous positivement proportionnels à une même variable gaussienne normée centrée, avec un facteur de proportion indépendant de k. On sait alors calculer la loi d'une combinaison linéaire à coefficients positifs des $B(t, t+k)$ et donc la loi d'une obligation ! Suivant une méthodologie semblable à celle de El Karoui et Rochet, on en déduit le prix des calls retardés $v_i(k)$, d'où il découle la valeur de l'ORCA, sous la forme quasi-explicite suivante :

$$OP = \sum_{k=1}^{N} A \left[1 - \prod_{i=1}^{k-1} (1 - v_i(k)) \right] B(0, T_k)$$
$$- \sum_{k=1}^{N-1} \prod_{i=1}^{k-1} (1 - v_i(k)) v_k(k) P_S(k) B(0, T_k)$$

$v_i(k)$ est donnée par la formule suivante :

$$v_i(k) = \left[\sum_{g=1}^{N-i} A \frac{B(0, T_{i+g})}{B(0, T_i)} \exp(\Gamma_g \Gamma_h) [N(d_{1i} + \Gamma_g + \Gamma_h) - N(d_{2i} + \Gamma_g + \Gamma_h)] \right.$$
$$\left. - [K_1 N(d_{1i} + \Gamma_h) - K_2 N(d_{2i} + \Gamma_h)] \right] \frac{1}{P_S(i)} \frac{w_2 - w_1}{k_2 - k_1} + w_1$$

avec $h = k - i$, $K_1 = k_1 P_S(i)$, $K_2 = k_2 P_S(i)$ et où d_1 et d_2 sont les réels solutions de l'équation en x :

$$\sum_{l=1}^{N-i} A \frac{B(0, T_{i+l})}{B(0, T_i)} \exp\left(\Gamma_l x - \frac{1}{2} \Gamma_1^2\right) = Y$$

avec respectivement $Y = k_1 P_S(i)$ et $Y = k_2 P_S(i)$ et $\Gamma_1^2 = \frac{1}{2} \sigma^2 \beta(2T_l) \beta^2(T_l)$.

Si on est loin de la formule simple de Black et Scholes, l'application numérique sur un micro-ordinateur ne prend que quelques secondes !

3.4 Commentaires et perspectives

Disposant maintenant d'une formule quasi-explicite pour l'ORCA il est possible d'examiner la valeur de celle-ci suivant les différents paramètres retenus. À titre d'exemple les figures 5, 6 et 7 donnent des prix d'ORCA pour des crédits à annuités constantes de maturité de 5, 10, et 15 ans. La courbe des taux de marché est supposée plate à 9,5 %, les vitesses $w1$ et $w2$ sont respectivement de l'ordre de 90 et 110. Trois courbes sont dessinées à chaque fois. La première donne la valeur « déterministe » de l'option, c'est-à-dire lorsque la volatilité des coupons-zéro est nulle. Sous l'hypothèse de non-arbitrage les taux futurs sont alors les taux à terme. Les deux autres courbes illustrent la valeur de l'ORCA calculée par une méthode de Monte-Carlo simple (avec 1 000 tirs et sans technique de réduction de variance), et la valeur de l'ORCA donnée par la formule quasi-explicite, qui nécessite un temps de calcul cent fois plus faible !

On remarque la très bonne précision de la formule quasi-analytique, dont la rapidité de calcul permet de mesurer alors la flexibilité de l'ORCA aux variations des paramètres. Si les prix d'options, ramenés en marge de taux, ne sont pas en général très importants, leurs durations peuvent être considérables induisant ainsi un fort effet de levier dont les conséquences ne sont pas négligeables en gestion Actif-Passif, conduisant à couvrir ces options ou bien à les revendre à travers des opérations de titrisations.

MODELE DE V R A

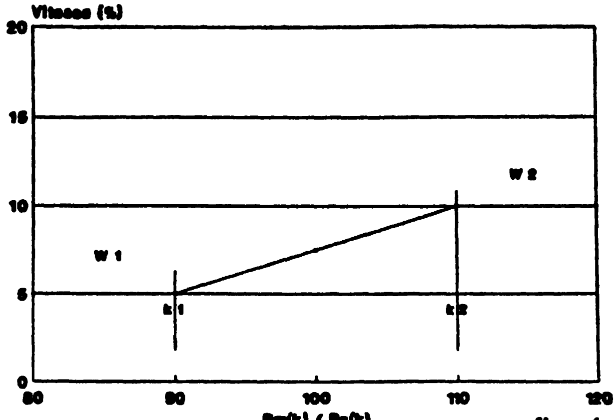


figure 4

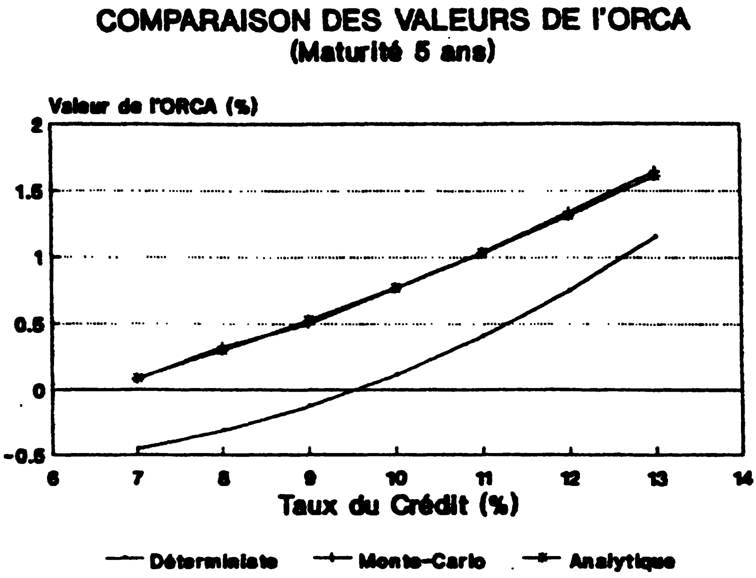


Figure 5

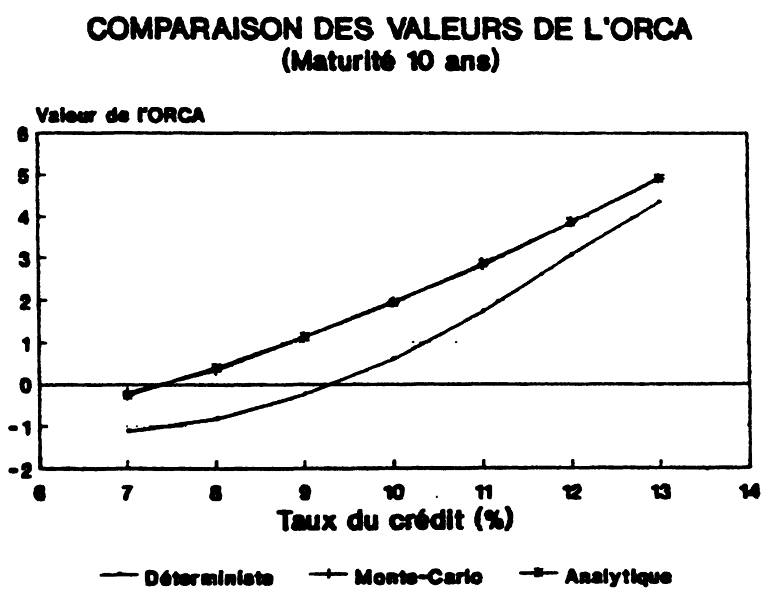


Figure 6

COMPARAISON DES VALEURS DE L'ORCA
(Maturité 15 ans)

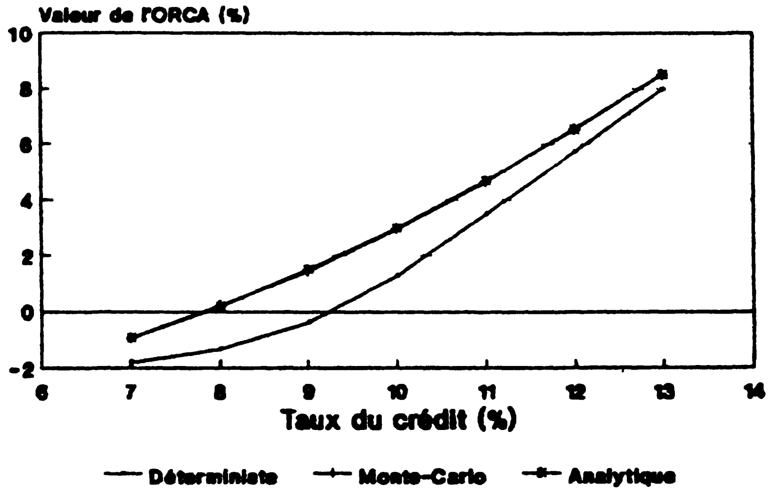


Figure 7

Conclusion

Nous espérons avoir pu montrer dans ces quelques pages que l'utilisation des processus de diffusion pour traiter des problèmes financiers n'est pas un simple jeu pour mathématicien en mal d'applications. Sans partager totalement l'enthousiasme de Harrison et Pliska (p. 222) qui soulignent la remarquable adéquation entre les grands résultats du calcul stochastique et les questions soulevées par la finance en temps continu, nous sommes persuadés qu'une modélisation de ce type constitue l'une des voies possibles d'accès à la résolution des problèmes financiers, aussi bien théoriques que pratiques.

Dans le premier cas, évoquons deux problèmes situés à la frontière des connaissances actuelles : celui de la valorisation d'actifs dans les marchés incomplets et celui de la difficile prise en compte des coûts de transaction.

Dans le second cas, nous croyons également aussi avoir mis en évidence que cette approche permet de développer jusqu'à son terme une application non immédiate portant sur les modèles de fluctuations aléatoires des taux d'intérêt. Les théories nouvelles en mathématiques financières ont été mis en évidence que l'évaluation des actifs contingents aux taux d'intérêt peut être réalisée à l'aide de modèle d'équilibre partiel. Il n'est alors besoin que de connaître la courbe des coupons-zéro et leur volatilité future dans la probabilité risque-neutre.

La méthodologie développée pour l'évaluation de l'ORCA est un point de départ essentiel pour adopter une stratégie opérationnelle en gestion Actif-Passif. Son prolongement permet d'aborder des problèmes encore plus complexes dans le domaine de la titrisation. Mais, comme nous l'avons fait remarquer, l'existence d'options cachées n'est pas l'apanage des seuls banquiers. Les activités d'assurance sont aussi un champ privilégié pour une gestion Actif-Passif optimale, qui est donc un véritable défi à la communauté financière dans son ensemble pour les années 90.

RÉFÉRENCES

D'ANDRIA P., BOULIER J.F., ÉLIE L. (1991) "Modèle analytique d'évaluation des options de remboursement anticipés", Congrès international de l'AFFI, Louvain.

AUGROS J.C., QUITTARD-PINON F. (1990) "Champ d'application de la formule de Black et généralisation au cas d'une option sur contrat forward d'échéance antérieure à celle du contrat à terme sous-jacent", *Analyse Financière*, n° 83.

BACHELIER L. (1900) *Théorie de la Spéculation*, Thèse (Faculté des Sciences de Paris).

BLACK F., SCHOLES M. (1973) "The pricing of options and corporate liabilities", *J. of Political Economy*, 637-654.

BOULIER J.F., SIKORAV J. (1990) "Yield Curve Fluctuations : does the French Market fit the Ho and Lee Model ?", Congrès de l'AFFI.

COX J., ROSS S. (1976) "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes", *J. of Financial Economics*, 385-408.

COX J., INGERSOLL J., ROSS S. (1985) "An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices", *Econometrica*, 363-384.

DANA R.A., DUFFIE D., JEANBLANC-PICQUE M. (1991) *Valorisation d'actifs et problème d'équilibre* (à paraître), Université de Paris IX (Dauphine).

DUFFIE D. (1990) *The Theory of Value in Security Markets* (to appear in "The Handbook of Mathematical Economics").

ITO K. (1951) "On a Formula Concerning Stochastic Differentials", *Nagoya Mathematics Journal*, 55-65.

EL KAROUI N., ROCHET J.C. (1989) *A Pricing Formula for Options on Coupon-bonds*, Cahier n° 8925, Université de Paris VI.

EL KAROUI N., LEPAGE C., MYNENI R., ROSEAU N., WISVANATHAN R. (1991) *The Valuation of Contingent Claims with Gaussian Markov Interest Rates*, Congrès International de l'AFFI, Louvain.

GEMAN H. (1990) *Une approche probabiliste de la structure par terme des taux d'intérêt*, Thèse, Université Panthéon-Sorbonne, Paris.

GIRSANOV (1960) "On Transforming a Certain Class of Stochastic Processes by Absolutely Continuous Substitution of Measures", *T.P.A.J.*, 285-301.

HARRISON J.M., KREPS D. (1979) "Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets", *J. of Economic Theory*, 381-408.

HARRISON J.M., PLISKA S. (1981) "Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading", *Stochastic Processes and their Applications*, 313-316.

HUANG C.F. (1987) "An Intertemporal General Equilibrium Asset Pricing Model : the Case of Diffusion Information", *Econometrica*, 117-142.

JACQUILLAT B. (1982) "Les processus de diffusion et leur utilisation dans l'évaluation des actifs conditionnels", *Économie et Sociétés*, Cahiers de l'ISMEA, 91-113.

KARATZAS I., SHREVE (1988) *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, New York : Springer Verlag.

MARKOWITZ H. (1954) "Portfolio Selection", *J. of Finance*, 77-91.

MERTON R. (1971) "Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model", *J. of Economic Theory*, 373-413.

MERTON R. (1973a) "An Intertemporal Capital Asset Pricing Model", *Econometrica*, 867-888.

MERTON R. (1973b) "Theory of Rational Option Pricing", *Bell Journal of Economics and Management Sciences*, 141-183.

MERTON R. (1990) *Continuous Time Finance*, Blackwell.

SAMUELSON P.A. (1965) "Rational Theory of Warrant Pricing", *Industrial Management R.*, 13-31.

SHARPE W.(1954) "Capital Asset Prices : a Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk", *J. of Finance*.

SPRENKLE (1964) "Warrant Prices as Indicators of Expectations and Preferences", *in* Cootner P. editor, *The Random Character of Stock Market Prices*, MIT Press, Cambridge, Massachussets.

TOBIN J. (1958) "Liquidity Preference as Behaviour Towards Risk", *R. of Economic Studies*, 65-86.

VASICEK O. (1977) "Equilibrium Characterization of the Term Structure", *J. of Financial Economics*, 177-188.