JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

SANVI AVOUYI-DOVI

Une approche prospective des modèles ARCH

Journal de la société statistique de Paris, tome 133, n° 4 (1992), p. 65-76

<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1992__133_4_65_0>

UNE APPROCHE PROSPECTIVE DES MODÈLES ARCH

par Sanvi AVOUYI-DOVI
(Caisse des dépôts et consignations)

Le développement des marchés financiers a ouvert le champ à une impressionnante activité d'études sur ce domaine. Ces dernières portent aussi bien sur la nature, la compréhension et la prévision des actifs financiers que sur les méthodes économétriques ou statistiques qu'on pourrait y appliquer. Le marché financier offre un panel d'information quasiment unique en son genre ; on peut isoler de façon relativement fine les produits ; les données financières sont parfois disponibles depuis très longtemps (les indices boursiers, le Standard and Poor's aux États-Unis existe en données quotidiennes depuis janvier 1928 !) selon quasiment toutes les fréquences.

À titre d'exemple, bien qu'il existe une littérature abondante sur l'analyse de la volatilité des prix des options, des études intéressantes et parfois très *sophistiquées* continuent d'être consacrées à ce sujet en raison d'une meilleure compréhension de leur marché et d'une maîtrise prononcée des modèles s'y référant. De même, la variation temporelle de la variance d'un phénomène suivant un processus aléatoire donné (hétéroscédasticité en économétrie) trouve une application dans l'analyse du risque variable. Enfin, la notion d'incertitude a une importance capitale en finance (et ailleurs !) où elle ne porte pas seulement sur la spécification retenue mais aussi sur les paramètres et les variables du modèle. Ces exemples montrent de façon non exhaustive l'étendue des problèmes relatifs aux comportements des agents intervenant sur les marchés financiers, il en est de même pour les produits financiers.

L'ampleur et l'importance des questions posées par l'analyse des actifs financiers font donc de ces derniers un champ favorable à l'expérimentation de nouvelles méthodes statistiques et économétriques. La grande sensibilité des produits financiers à leur environnement économique mais aussi à des pressions spécifiques, conduisent à une remise en cause de la formalisation économétrique traditionnelle des aléas : l'homoscédasticité est souvent prise en défaut ; la stationnarité du processus n'est pas non plus garantie ; les séries financières suivent souvent une marche au hasard. Toutefois, les années quatre-vingt sont marquées par un type de modèle qui prend en compte directement, la variation temporelle de la variance du processus du phénomène étudié. Cette variance est en général une fonction de sa valeur décalée et d'une combinaison linéaire d'ordre p du carré des erreurs ; ce sont les modèles ARCH(p) « Autoregressive Conditional Heteroscedasticity Model » dont l'initiateur est Engle (1982). On peut les utiliser dans de nombreux domaines ; toutefois, c'est en finance qu'ils trouvent le plus d'applications. Une excellente revue de littérature

Journal de la Société de Statistique de Paris, tome 133, n° 4, 1992

de Bollerslev, Jayaraman, Chou et Kroner (1992) (voir aussi Gouriéroux, 1992) tire un bilan complet et très documenté sur l'utilisation et la pertinence de cet outil en finance. La première section de notre étude sera consacrée aux modèles ARCH ; une application aux taux de change sera analysée dans la deuxième section.

1. Les modèles ARCH

Depuis les travaux de Mandelbrot (1963) et Fama (1965), on sait que les « bonnes » hypothèses statistiques retenues dans les modèles traditionnels sont parfois prises en défaut en finance. Barnea et Downes (1973), Friedman et Vandersteel (1982) et plus récemment Boothe-Glassman (1987), Bollerslev (1987), Baillie et Bollerslev (1989), Hsieh (1989a), Mac Mahon (1989), Atlan, Avouyi-Dovi et Ducos (1990), Boutillier (1991) ou Avouyi-Dovi (1992), ont montré que l'on rejette fréquemment l'hypothèse de normalité et d'homoscédasticité des aléas relatifs aux modèles sur les actifs financiers et que leur distribution a, la plupart du temps, une queue plus épaisse que celle de la loi normale, que ce soit pour les prix à terme, les devises, le prix des options ou la rentabilité des titres. Ces propriétés sont prises en défaut notamment pour les taux de change comme on le verra plus loin. Nous adopterons ici les notations de Bollerslev, Chou, Jayaraman et Kroner (1992).

Le modèle (I) défini par les équations (1) et (2) :

$$(\mathrm{I}) = \begin{cases} Y_t = g\,(x_{t-1}, b) + \varepsilon_t & (1) \\ \sigma_t^2 = \omega + \sum\limits_{i=1}^{q} a_i\, \varepsilon_{t-1}^2 & (2) \end{cases}$$

a été appelé modèle ARCH(q) par Engle dans son étude pionnière de 1982, ω représente la variance conditionnelle autonome et les ε_{t-i}^2 matérialisent les effets de surprise. On remarque que :

① ω la variance autonome est positive ; les α_i sont tous positifs ou nuls et l'on montre que la variance conditionnelle est finie si :

$$\sum_{i=1}^{q} a_i < 1 \,;$$

des conditions plus restrictives sont nécessaires pour assurer l'existence du moment du quatrième ordre (variance finie). Du reste, pour limiter le nombre de paramètres à estimer on peut contraindre la structure des α_i en posant :

$$\alpha_i = \alpha \frac{q+1+i}{q\,(q+1)} \,;$$

② Aucun aléa n'est introduit dans l'expression de σ_t^2. Les estimations peuvent être obtenues à partir de la méthode du maximum de vraisemblance (Engle (1982), Pantula (1985)) ou par la méthode des moments généralisés (Mark (1988), ...).

L'identification de l'ordre du modèle ARCH(q) peut aussi être obtenue à l'aide des tests traditionnels utilisés pour l'identification des processus AR en procédant en deux étapes ; le système définissant le modèle pouvant être assimilé dans une première approche à un système de deux régressions.

Diverses applications relatives à ces modèles ont été effectuées dans tous les domaines depuis 1982, citons pour mémoire les travaux de Baillie et Bollerslev (1991) sur la volatilité des taux de change, ou ceux de Diebold et Pauly (1988) sur l'endogénéisation du risque dans un modèle de portefeuille multidevise. L'engouement suscité par ce nouveau modèle a accéléré la recherche s'y référant. Assez rapidement, on s'est rendu compte que l'on pouvait améliorer l'idée initiale de Engle en introduisant les valeurs décalées de la variance dans son équation (équations (3) ou (3')). Cet apport est dû à Bollerselv (1986) ; une étape importante venait alors d'être franchie dans la modélisation de l'effet ARCH, la dynamique mise en place par Bollerslev étant plus complexe. L'équation définissant la variance conditionnelle devient :

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i\, \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j\, \sigma_{t-j}^2 = \omega + \alpha(L)\, \varepsilon_t^2 + \beta(L)\, \sigma_t^2 \qquad (3)$$

$$= \Phi(L)\, \varepsilon_t^2 = (1-\beta(L))^{-1} \alpha(L)\, \varepsilon_t^2 \qquad (3')$$

Cette définition nous conduit à une autre série de remarques :

① Le modèle défini par les équations (3) ou (3') est appelé modèle GARCH(p,q). La deuxième représentation du modèle (équation (3')) impose des conditions restrictives sur les paramètres α_i et β_j, ces derniers ne doivent pas être négatifs entre autres ; dans le modèle GARCH(1,1) par exemple, la variance n'est stationnaire que si $\alpha(1) + \beta(1) < 1$. Comme application, on peut citer les travaux de Kroner et Lastrapes (1990) sur l'impact de la volatilité des taux de change sur le commerce international, ou celui de Bollerslev (1987) sur les prix spéculatifs.

② Nelson (1990c) a montré que, sous certaines conditions, une équivalence peut être établie entre les modèles GARCH(1,1) et un modèle de diffusion. Cette propriété des modèles ARCH est capitale en finance ; ces derniers, représentant une discrétisation d'un processus continu, vont engendrer une meilleure adéquation entre les observations et les modèles théoriques. De ce point de vue, ils apparaissent comme un outil statistique très intéressant.

Deux problèmes restent à régler à ce niveau : celui de la non-linéarité éventuelle de la relation définissant la variance et celui de la non-normalité des résidus.

Le problème de non-normalité a été abordé au début de notre présentation, on le retrouve pour les distributions des rentabilités ou des prix de certains actifs. Bollerslev (1987) a proposé dans son article sur les prix spéculatifs et le taux de rentabilité des actifs, le remplacement de la loi normale par une loi de Student. Hsieh (1989a) a utilisé pour sa part en plus de la distribution de Student, une distribution mixte de lois (loi normale et loi de Poisson, loi normale et loi log normale). Tandis que Jorion

(1988) a proposé un processus de diffusion et de saut pour expliquer les variations des taux de change. Baillie et Bollerslev (1989) dans leur étude sur le taux de change en données journalières ont suggéré le remplacement de la loi normale par une loi exponentielle. Bollerslev et Wooldridge (1990) indiquent l'utilisation du quasi maximum de vraisemblance pour éviter une identification complète de leur modèle. Il n'a pas ici aussi une méthode unique de correction de la non-normalité. En cas de persistance de la variance infinie après la prise en compte de l'effet ARCH, le modélisateur reste relativement démuni lorsque l'une des causes de la non normalité n'est pas isolée. À ce propos, pour éviter les *spurious ARCH* on peut tester l'effet ARCH sous les conditions d'une distribution à queue épaisse Bollerslev (1987) ou Harvey, Ruiz (1990) par exemple pour les lois de Student uni et multivariées. L'issue est plus heureuse pour les modèles ARCH non-linéaires. La formulation introduite jusqu'à ce niveau marche correctement tant que les variations analysées ont le même signe ou des amplitudes équivalentes. Dès que l'on observe des mouvements de sens opposés ou d'amplitude très variable, le modèle ne rend plus compte de manière satisfaisante des variations observées. Une façon de résoudre ce problème est d'introduire des non-linéarités permettant d'intégrer les mouvements atypiques. La première formulation de ce concept a été proposée par Nelson (1990b) (équation (4)) sous la forme d'une équation de σ_t^2 log linéaire :

$$Log\ \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \left(\Phi z_{t-i} + \gamma \left[|z_{t-i}| - E\,|z_{t-i}| \right] \right) + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \log \sigma_{t-j}^2 \qquad (4)$$

Ce modèle est le modèle GARCH(p, q) exponentiel ou EGARCH. La contrainte de positivité des paramètres n'est plus nécessaire ; seules les contraintes liées à la nature du processus choisi perdurent. La variance conditionnelle monte ou baisse selon le signe de $\alpha_i\ \Phi$; les différents chocs sont ainsi représentés. L'étude de Nelson (1990b) portait sur la rentabilité des actifs financiers ; elle peut, bien sûr, être étendue à la prime de risque ou à la mesure de l'aversion pour le risque des actifs.

Un deuxième type de non-linéarité, introduit par Gouriéroux et Monfort (1992) et Zakoïan (1990), a conduit aux modèles ARCH à seuil. L'idée de départ est simple : elle consiste à écrire l'équation de la variance conditionnelle sous la forme d'une fonction linéaire par morceaux, chacun des segments étant associé aux chocs de même nature. Cette approche fort séduisante peut s'appliquer aux actifs financiers. Aussi, à chaque fois que l'on se trouve en face de plusieurs états possibles, les modèles à seuil apporteront une réponse adéquate. Dans les versions de ces modèles où les différents états suivent un processus de Markov (Gouriéroux et Monfort (1992) par exemple), les probabilités de transition sont aussi estimables. Il est clair que plusieurs autres transformations peuvent être envisagées ; Béra et Higgins (1990) par exemple ont proposé une classe de modèles ARCH non linéaires fondée sur des fonctions puissance. Seule l'exploitation empirique de ces modèles non linéaires, limite leur utilisation.

Par ailleurs, l'étude de certaines variables financières, les taux d'intérêt par exemple, fait apparaître une relation entre la moyenne et la variance de la variable analysée ; c'est en particulier le cas de la prime de risque dans les taux d'intérêt ou des rentabilités des actifs. Les modèles présentés plus haut ne permettent pas de prendre en compte ce phénomène. Engle, Lilien et Robins (1987) ont proposé un modèle répondant à cette question dans leur analyse sur la structure par terme des taux d'intérêt ; c'est le modèle ARCH-M (ARCH in Mean). Le modèle ARCH(q)M est la combinaison de l'équation (2) et d'une équation de moyenne incorporant le moment du second ordre. Ce modèle n'est pas très différent des précédents et son estimation ne pose pas de difficultés supplémentaires, seule la matrice d'information entre les paramètres de l'équation de la moyenne et ceux de l'équation de la variance n'est plus diagonale. Toutefois, le problème de spécification devient crucial, la significativité et le signe du coefficient de la variance pouvant en dépendre. En particulier, Pagan et Ullah (1988) ont montré que toute erreur de spécification de l'équation de la variance entraînerait des biais et une éventuelle non-convergence des estimateurs des paramètres de l'équation de la moyenne.

Il convient maintenant d'évoquer le problème de la persistance de la variance conditionnelle, i.e. le fait qu'elle peut être non stationnaire et infinie ; c'est le cas des modèles GARCH intégrés (IGARCH) (Bollerslev (1987), Hsieh (1989a et 1989b), Baillie et Bollerslev (1989) et Nelson (1990a) par exemple). Si l'on pense que la persistance de la variance infinie provient d'une erreur de spécification liée à la distribution initiale (la loi normale ici), la loi normale ne convient plus et il faut la remplacer par une loi de Pareto ou une distribution quelconque à queue épaisse. Malheureusement le principe de modélisation fondé sur l'analyse *moyenne-variance* ne sera plus applicable, la variance de ces distributions étant souvent infinie. Si c'est un problème réel de racine unité, on ne sait pas encore le régler correctement. Le domaine reste ouvert à la recherche, ce problème arrive fréquemment dans les applications empiriques comme on le verra plus loin.

2. Application d'un modèle ARCH univarié : cas du taux de change FF/DM

Nous cherchons juste à mettre en évidence certaines difficultés des modèles ARCH dans cette section. En partant d'une représentation initiale ARMA (tableau 1A), nous avons introduit au fur et à mesure dans le modèle, des hypothèses prenant en compte l'hétéroscédasticité des résidus ou leur non-normalité. L'hétéroscédasticité est prise en compte par l'introduction d'un effet ARCH (tableau 1B), tandis que la non-normalité est incorporée à l'aide d'une distribution à queue épaisse, la distribution de Student. Les deux propriétés n'étant pas forcément indépendantes, la spécification générale (tableau 1C) intègre ces deux effets.

Le processus initial retenu dans l'analyse du taux de change franc français/deutsche mark sur la période allant du 16 avril 1986 au 2 octobre 1991 en fréquence hebdomadaire (tableau 1A) est un simple MA. Les tests d'identification du processus ARMA ne nous ont pas permis de retenir les paramètres déterminant les AR dans l'équation de la moyenne. Les estimations globales sont réalisées sur les mêmes données et sur la même période. Nous ne cherchons pas à identifier un modèle explicatif mais simplement un modèle de séries temporelles pouvant être utilisé en prévision. L'analyse du modèle 1A montre que les coefficients θ_i du processus MA sont correctement estimés. Une procédure de correction des innovations apparaît puisque le coefficient θ_1 du premier retard est positif, tandis que θ_3 est négatif. La variance conditionnelle ω est non nulle et significativement différente de zéro. Lorsque l'on effectue un test de normalité sur les résidus de ce modèle, l'hypothèse nulle de normalité est rejetée au seuil de 1 % ; en outre, la distribution des résidus n'est ni symétrique, ni à queue comparable à celle d'une loi normale. La statistique de Ljung-Box sur les résidus standardisés au carré montre clairement que l'hypothèse d'homoscédasticité est rejetée. On note par ailleurs la présence des effets ARCH ; on aurait a priori un modèle ARCH(12) avec des restrictions sur certains paramètres $\alpha_i = 0$ pour $i = 3, ..., 11$).

TABLEAU 1A
Modèle ARMA sur FF/DM
période 16 avril 1986 au 2 octobre 1991

Paramètres	Coefficients	T-Student
Cste	0,02	1,50
θ_1	0,25	4,60
θ_3	– 0,19	– 3,3
ω	0,08	11,9

Vraisemblance = – 40,5 ; SK = 1,3 ; EK = 4,6 ; JB = 332,8
Test de sélection ARCH ⇒ 1, 2, 12.

Nous avons alors complété le modèle initial en rajoutant une équation de type ARCH (Weiss (1984)). Les résultats obtenus (tableau 1B) sont intéressants :

– les coefficients de l'équation de la moyenne (excepté la constante) sont relativement stables ; ils sont donc très proches de ceux du modèle présenté dans le tableau 1A ;

– la prise en compte de l'effet de surprise (coefficients $\alpha_i \neq 0$ pour $i = 1, 2, 12$) réduit le poids de la variance autonome (ω) qui passe de 8 % à 5 % et les coefficients ARCH sont significativement différents de zéro, notamment le dernier coefficient (α_{12}).

TABLEAU 1B
Modèle ARCH avec loi normale sur FF/DM

Paramètres	Coefficients	T-Student
Cste	0,02	0,98
θ_1	0,21	3,5
θ_2	– 0,18	– 3,2
ω	0,05	7,2
α_1	0,13	1,5
α_2	0,08	1,5
α_{12}	0,16	2,8

Vraisemblance = – 24,4 ; SK = 0,95 ; EK = 3,03 ; JB = 153.
Somme des coefficients ARCH = 0,37.

Le rapport des vraisemblances des deux modèles montre que le modèle ARCH domine le modèle précédent. Toutefois, l'on ne peut toujours pas accepter l'hypothèse de normalité des résidus dont la distribution semble avoir une queue épaisse (l'excès de kurtosis est élevé) tandis que la distribution apparaît presque symétrique. Le test lié de Jarque et Béra permet donc de rejeter l'hypothèse de non normalité des résidus. Suivant alors l'exemple de Bollerslev (1987) nous avons remplacé la loi normale par une loi à queue épaisse, la loi de Student en l'occurence. Nous n'avons pas procédé à une recherche systématique de la loi réalisant le *meilleur* ajustement à la loi empirique. Nous avons adopté à ce niveau une démarche ad hoc, les résultats doivent donc être interprétés avec prudence. Cependant, on relève (tableau 1C) que :

– les coefficients de l'équation de la moyenne ont légèrement baissé mais restent très proches de ceux du tableau 1A. La partie autonome de la variance conditionnelle (ω^2) est même identique dans les estimations des modèles 1B et 1C (0,5) ;

– les coefficients du ARCH ($\alpha_i \neq 0$) ne sont plus significativement différents de zéro tandis que le paramètre v de la loi de Student (Avouyi-Dovi (1992)) est très significatif et supérieur à 4. Le moment d'ordre 4 est donc fini, la distribution des résidus n'a pas une variance infinie. Les contraintes de positivité des (α_i) sont respectés, en outre, une spécification en IARCH n'est pas nécessaire puisque la somme des coefficients ARCH est très nettement inférieure à 1.

Deux points importants peuvent être notés ici :

• l'effet ARCH mis en valeur n'apparaît pas très robuste puisqu'il disparaît dès que l'on suppose que la distribution des résidus ne suit pas une loi normale. L'épaisseur de la queue de cette distribution ne serait donc pas due aux variations de la variance conditionnelle de la loi normale ;

cet exercice montre qu'il est nécessaire de vérifier les caractéristiques des distributions des résidus lorsque l'on essaie de modéliser les effets ARCH notamment en finance où les distributions des actifs ne sont pas en général normales ; le risque de mettre en évidence des *spurious ARCH* est réel. En l'absence des modèles présentés dans le tableau 1C, on serait tenté de conclure à la présence d'un effet ARCH ; cette conclusion apparaît erronée lorsque l'on prend en considération les résultats du tableau 1C.

TABLEAU 1C
Modèle ARCH avec une loi de Student
sur FF/DM

Paramètres	Coefficients	T-Student
Cste	– 0,0008	– 0,06
θ_1	0,18	3,03
θ_3	– 0,16	– 3,0
ω_0	0,05	4,4
α_1	0,16	1,3
α_2	0,12	1,4
α_{12}	0,09	1,2
v_{-1}	0,21	3,4

Vraisemblance = – 12,8 ; SK = 1,06 ; EK = 3,45 ;
JB = 196,05.
Somme des coefficients ARCH = 0,36.

L'exemple proposé ici indique qu'il convient d'effectuer des tests appropriés pour éviter les erreurs de spécification. Les nombreuses sources d'hétéroscédasticité ou de non normalité ne permettent pas d'isoler d'emblée la cause apparente de la volatilité qui peut être, comme on vient de le montrer, soit réelle, soit induite par une distribution non normale. Cette dernière peut aussi s'expliquer, dans le cadre du modèle ARCH de base, par la présence d'un nombre réduit de points aberrants. Une modélisation non-linéaire de l'effet ARCH permettrait certainement de revenir sur l'hypothèse de non normalité si cette dernière est due à la présence d'un nombre réduit de points *hors norme*. L'erreur de spécification n'est donc pas exclue même dans le cas du modèle 1C. Ces remarques nous incitent à adopter une démarche très prudente dans l'utilisation des modèles ARCH.

Les modèles ARCH univariés ont un intérêt lorsque l'on analyse le comportement individuel des différents actifs financiers ; toutefois, les décisions prises par les agents économiques portent en général sur plusieurs variables c'est donc une analyse multivariée qui apparaît le plus souvent appropriée. Les équations du système (I) sont remplacées par des relations vectorielles dans lesquelles interviennent plusieurs paramètres. À titre d'exemple, l'équivalent multivarié d'un modèle univarié GARCH(p,q) comporte $1/2N(N+1)[1+N(N-1)(p+q)/2]$. Les limites de la méthode se trouvent là. Plusieurs solutions ont été alors proposées :

- la première consiste à supposer que les matrices de l'équation de la variance sont diagonales, c'est cette solution qui a été retenue dans l'étude de Bollerslev, Engle et Wooldridge (1988) ;
- Diebold et Nerlove (1989) ont proposé l'introduction de facteurs latents non observables dans leur analyse sur les taux de change. La non-observabilité des facteurs réduit le nombre de paramètres mais complique les estimations ; les procédures de type filtrage ou lissage (filtrage de Kalman) étant indispensables dans ce cas ;
- Engle (1987) a suggéré une représentation en K facteurs ;
- enfin, il existe des modèles à corrélation conditionnelle constante (Bollerslev (1990), Gouriéroux (1992)). Dans ce cas, si $i \neq j$, aucun terme en j n'apparaît dans l'équation définissant la composante i de (ω_{ij}) de la matrice , i.e. la matrice de variance covariance Ω_t varie en fonction du temps mais les corrélations conditionnelles sont constantes. On réduit par ce biais aussi le nombre de paramètres inconnus. Cependant, même si cette procédure conduit à des résultats empiriques intéressants (Bollerslev (1990), Kroner et Lastrapes (1990), Baillie et Bollerslev (1991)), ses fondements théoriques sont restrictifs dans le sens où les contraintes imposées aux corrélations sont ad hoc ; ils apparaissent comme des pseudo-modèles ARCH .

Les modèles multivariés ont été utilisés dans plusieurs études sur les taux de change (Diebold et Pauly (1988), Diebold et Nerlove (1989), Bollerslev (1990)) ou dans les modèles de choix de portefeuille. Les modèles ARCH s'appliquent à l'étude des différents actifs et à leur rendement, on les utilise dans l'analyse des taux d'intérêt, ils jouent un rôle important dans l'analyse dynamique de la volatilité du risque et dans celle des taux de change.

En conclusion, nous rappelons ici deux des plus importantes propriétés de ces modèles :

- les modèles ARCH permettent une modélisation dynamique de la volatilité. C'est l'un des rares modèles qui combine une dynamique probabiliste avec une représentation structurelle du phénomène étudié. De ce point de vue, ils apportent un éclairage nouveau sur l'analyse de la volatilité des actifs financiers ;
- nous avons signalé que sous certaines conditions, les modèles ARCH peuvent être assimilés à des modèles continus de diffusion (Nelson (1990C)) ; ils représentent donc une procédure de discrétisation des processus continus très usités en finance ; la plupart des modèles théoriques étant étudiés en temps continu, le passage au temps discret devrait permettre une réconciliation des modèles théoriques et des observations.

À ces deux apports fondamentaux, on peut ajouter la disponibilité des procédures d'estimation des modèles ARCH dans quasiment tous les logiciels économétriques standard et la relative simplicité des cas retenus dans la plupart des études empiriques. On dépasse rarement l'ordre 2 pour les processus ARCH ou GARCH ($p = q = 2$ au maximum) dans les analyses empiriques. En plus, la philosophie de ces modèles reposant sur deux régressions simples dans une première étape, les rend très intéressants. En outre, même si l'on ne domine pas encore totalement les modèles multivariés, les avancées récentes des modèles dynamiques ouvrent la voie à de véritables progrès dans les années à venir. La pertinence des modèles ARCH dans l'analyse des portefeuilles optimaux par exemple, apparaîtra de façon indéniable lorsque la modélisation de type multivarié sera plus assurée. D'une façon générale, les modèles non-linéaires et les modèles multivariés apparaissent adaptés à l'analyse des actifs financiers qui sont très interdépendants et sont en outre, soumis à divers chocs.

RÉFÉRENCES

AVOUYI-DOVI S. (1992) *Les modèles ARCH : mythe ou réalité*, Document de Travail CDC, 1992-12T.

ATLAN F., AVOUYI-DOVI S., DUCOS Ph. (1990) *Dynamique des taux de change : les propriétés statistiques*, Document de Travail CDC, n° 1990//01T.

BAILLIE R.T., BOLLERSLEV T. (1989) "The Message in Daily Exchange Rates : A Conditional Variance Tale", *J. of Business and Economics Statistics*, 297-305.

BAILLIE R.T., BOLLERSLEV T. (1991) "Intra Day and Inter Market Volatility in Foreign Exchange Rates", *R. of Economics Studies*, 565-585.

BARNEA A., DOWNES D.H. (1976) "A Reexamination of Empirical Distribution of Stock Price Changes", *J. of the American Statistical Association*, 348-351.

BÉRA A., LEE S., HIGGINGS M.L. (1990a) *Interaction between Autocorrelation and Conditional Heteroskedasticity : A Random Coefficient Approach*, D.P. (90-25), University of California.

BOLLERSLEV T. (1986) "Generalized Autoregressive Conditional Heterosckedasticity", *J. of Econometrics*, 307-327.

BOLLERSLEV T. (1987) "A Conditional Heteroskedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rates of Return", *R. of Economics and Statistics*, 542-547.

BOLLERSLEV T. (1990) "Modeling the Coherence in Short-Run Nominal Exchange Rates : A Multivariate Generalized ARCH Approach", *R. of Economics and Statistics*, 498-505.

BOLLERSLEV T., ENGLE R. (1986) "Modeling the Persistence of Conditional Variances" *Econometric Review*.

BOLLERSLEV T., ENGLE R., WOOLDRIDGE J. (1988) "A Capital Asset Pricing Model with Time Varying Covariance", *J. of Political Economy*, 116-131.

BOLLERSLEV T., WOOLDRIDGE J.M. (1990) "Quasi Maximum Likelihood Estimation and Inference in Dynamic Models with Time Varying Covariances", *Econometric Review*, Forthcoming.

BOLLERSLEV T., JAYARAMAN N., CHOU R., KRONER K. (1992) "ARCH Modeling in Finance : A Review of the Theory and Empirical Evidence", *J. of Econometrics*, n° 1/2.

BOOTHE P., GLASSMAN D. (1987) "The Statistical Distribution of Exchange Rates : Empirical Evidence and Economic Implications", *J. of International Economics*.

BOUTILLIER M. (1991) *Approche Patrimoniale du Marché des Changes*, Thèse de doctorat, Université d'Orléans.

DIEBOLD F.X., PAULY P. (1988) "Endogenous Risk in a Portfolio Balance Rational Expectations Model of the DM - Dollar Rate", *European Economic Review*.

DIEBOLD F.X., NERLOVE M. (1989) "The Dynamic of Exchange Volatility : A Multivariate Latent Factor ARCH Model", *J. of Applied Econometrics*, 1-21.

ENGLE B. (1982) "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of U.K. Inflation", *Econometrica*, 987-1008.

ENGLE B. (1987) *Multivariate GARCH with Structure Cointegration in Variance*, Unpublished Manuscript (Department of Economics UCSD).

ENGLE B., LILIEN D., ROBINS R. (1987) "Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure : The Arch-M Model", *Econometrica*, 391-407.

FAMA E. (1965) "The Behavior of Stock Market Prices", *J. of Business*, 34-105.

FRIEDMAN D., VANDERSTEEL S. (1982) "Short-Run Fluctuations in Foreign Exchange Rates : Evidence firm Data 1973-1979", *J. of International Economics*, 171-186.

GOURIÉROUX C. (1992) *Modèles ARCH : applications financières et monétaires*, Economica, Paris.

GOURIÉROUX C, MONFORT A. (1992) "Qualitative Threshold ARCH Models", *J. of Econometrics*, n° 1/2.

HARVEY A.C., RUIZ E. (1990) *Unobserved Component Time Series Models with ARCH Disturbances*, Mimeo, Department of Statistical and Mathematical Sciences, London School of Economics.

HSIEH D.A. (1989a) "Modeling Heteroskedasticity in Daily Foreign Exchange Rates", *J. of Business and Economic Statistics*, 307-317.

HSIEH D.A. (1989b) *Testing for Nonlinear Dependence in Daily Foreign Exchange Rates*, Mimeo Graduate School of Business, University of Chicago.

JORION P.N. (1988) "On Jump Process in the Foreign Exchange and Stock Markets", *R. of Financial Studies*, 427-445.

KRONER K., LASTRAPES W. (1990) *The impact of Exchange Rate Volatility on International Trade : Estimates Using the GARCH M. Model*, Unpublished Manuscript, Department of Economics, University of Pennsylvania.

MAC MAHON P. (1989) *Taux de change et mesure de risque : une étude empirique*, Mimeo, Banque d'Angleterre.

MANDELBROT B. (1963) "The Variation of Certain Speculative Prices", *J. of Business*, 394-419.

MARK N. (1988) "Time Varying Beats and Risk Premia in the Pricing of Forward Foreign Exchange Contracts", *J. of Financial Economics*, 335-354.

NELSON D.B. (1990a) "Stationarity and Persistence in the GARCH (1,1) Model", *Econometric Theory*, 318-334.

NELSON D.B. (1990b) "Conditional Heteroskedasticity in Assets Returns : A New Approach", *Econometrica*, 347-370.

NELSON D.B. (1990c) "ARCH Models in Diffusion Approximations", *J. of Econometrics*, 1-21.

PAGAN A.R., ULLAH A. (1988) "The Econometric Analysis of Models with Risk Terms", *J. of Applied Econometrics*, 87-105.

PANTULA S.G. (1985) *Estimation of Autoregressive Models with ARCH Errors*, Unpublished Manuscript, Department of Statistics, North Carolina State University.

WEISS A.A. (1984) "ARMA Models with ARCH Errors", *J. of Time Series Analysis*.

ZAKOIAN J.M. (1990) *Threshold Heteroskedastic Models*, Unpublished Manuscript, INSEE.