

JEAN-FRANÇOIS BOULIER

**Vue d'ensemble sur les nouveaux outils : l'essor
de la modélisation financière**

Journal de la société statistique de Paris, tome 133, n° 4 (1992),
p. 35-50

http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1992__133_4_35_0

© Société de statistique de Paris, 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (<http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

VUE D'ENSEMBLE SUR LES NOUVEAUX OUTILS : L'ESSOR DE LA MODÉLISATION FINANCIÈRE

par Jean-François BOULIER
Crédit Commercial de France

1. Introduction

La modélisation mathématique a fait ces dernières années une entrée magistrale dans la pensée financière et dans les métiers de l'argent. Le prix Nobel d'économie est venu successivement récompenser les travaux d'économie de Maurice Allais et les outils développés par Messieurs Markowitz, Sharpe et Merton Miller dont le succès et l'efficacité peuvent se mesurer aux centaines de milliards de dollars gérés selon leurs techniques. Le boom des marchés d'options doit également un large tribut aux scientifiques qui ont progressivement apporté une solution non seulement à leur valorisation mais surtout à leur « réplication ». La formule de Black et Scholes [1] a cela de magique qu'elle est à la fois une solution explicite – ce qui est rare somme toute – à un problème de diffusion et en même temps un outil pratique pour des milliers de traders et gestionnaires.

Certes, l'effort de modélisation ne date pas d'hier. Bachelier [2] avait fait un premier pas extrêmement novateur en introduisant les descriptions probabilistes qui mèneront plus tard un physicien célèbre à formaliser le mouvement Brownien. Il faudra sans doute encore attendre longtemps pour qu'un modèle d'agitation moléculaire soit de nouveau utilisé pour décrire les rentabilités des actifs financiers. En effet, la modélisation financière aujourd'hui s'établit sur la ruine d'une idée encore très largement répandue ou entretenue chez les professionnels selon laquelle il est possible de prévoir avec fiabilité l'évolution des marchés ou la rentabilité des actifs financiers. Force est de constater que l'industrie financière, pas plus d'ailleurs que le discours économique, ne sont capables de prédire les mouvements erratiques des bourses. Est-ce à dire que le marché financier est un casino ? Je ne le crois pas. Au contraire, ce que la modélisation financière a apporté au calcul financier traditionnel, c'est l'analyse du risque financier et l'estimation de son prix. A la rentabilité – appréhendée par exemple par un taux de rentabilité interne – s'est ajouté le nouveau concept essentiel qui est la volatilité, écart-type de cette rentabilité. Ainsi, l'approche moderne des marchés financiers hiérarchise les actifs selon leurs rentabilités mais aussi selon leurs risques. Finalement, la loi qui les lie est pleine de bon sens : il n'y a pas de rentabilité sans risque.

Cet article vise à situer les enjeux de l'étonnant dynamisme de la modélisation financière sous l'impulsion de deux communautés : les universitaires et les financiers. J'appartiens aujourd'hui à la deuxième après avoir, sur un sujet très différent, travaillé avec la première. C'est donc en évoquant les besoins ou le point de vue du banquier que je commencerai mon exposé qui présentera ensuite, comme une invitation à les approfondir, les trois axes retenus pour cette journée : la nouvelle économétrie, les processus de diffusion et la modélisation multifactorielle. En guise de synthèse et en forme d'éloge à notre hôte H. Markowitz, j'évoquerai sur quelques exemples l'importance de l'optimisation et les raffinements de cette technique auxquels peuvent conduire les modèles qui seront exposés au cours de cette journée.

2. Le point de vue financier

L'industrie financière française s'est profondément développée pendant les années 80. Les facteurs qui ont favorisé la transformation de notre Place, qui se poursuit encore, sont connus : l'acceptation d'une économie de marché, l'ouverture internationale et la déréglementation. Les acteurs ont œuvré avec une grande célérité tant du point de vue législatif que professionnel et se sont avec raison inspirés des structures ou des produits développés par les économies anglo-saxonnes. Parmi les nombreuses innovations le Matif et le Monep ont permis à l'industrie d'accroître la gamme de ses services et d'en réduire les coûts. Les résultats sont saisissants : à titre d'exemple entre 1980 et 1990 (voir figure n° 1) les volumes de transactions ont été multipliés par 30, l'encours des OPCVM par 30 et le nombre d'OPA par 3.

Cette évolution n'est pas achevée ; la capitalisation boursière des actions françaises (environ 30 % du PNB) encore faible relativement aux grandes économies, l'intégration européenne, notamment monétaire en cours et la croissance à l'Est et au Sud seront autant de stimulants pour l'avenir.

Dans un décor aussi mouvant, les entreprises de service que sont les intermédiaires financiers ont dû faire preuve d'adaptation et d'inventivité. En fait, ils n'ont guère le choix car la compétition sur leur marché est forte. L'innovation et la quête de puissance, avec les besoins corrélatifs d'expertise et de fiabilité font partie des armes de la lutte pour les parts de marché. De la même façon, un service financier de qualité exige une maîtrise et une compréhension fine des rouages financiers pour effectuer d'abord l'analyse des besoins et ensuite la conception des produits ou des montages sur mesure. Innovation et qualité conduisent à la modélisation financière via ce que les japonais dénomment « l'investment technology ». Ce qui distingue en effet cette exigence de connaissance de celle d'une culture générale économique et financière, c'est qu'elle doit être très pratique. Elle doit apporter des réponses de nature technologique à des problèmes financiers qu'il importe d'avoir bien identifiés.

Précisons un peu les contributions de la modélisation financière en prenant quelques exemples. Tout d'abord il s'agit bien d'une démarche cognitive peu différente dans ses moyens d'une démarche scientifique. Ses objectifs sont en revanche diffé-

Evolution du marché financier Français de 1980 à 1990

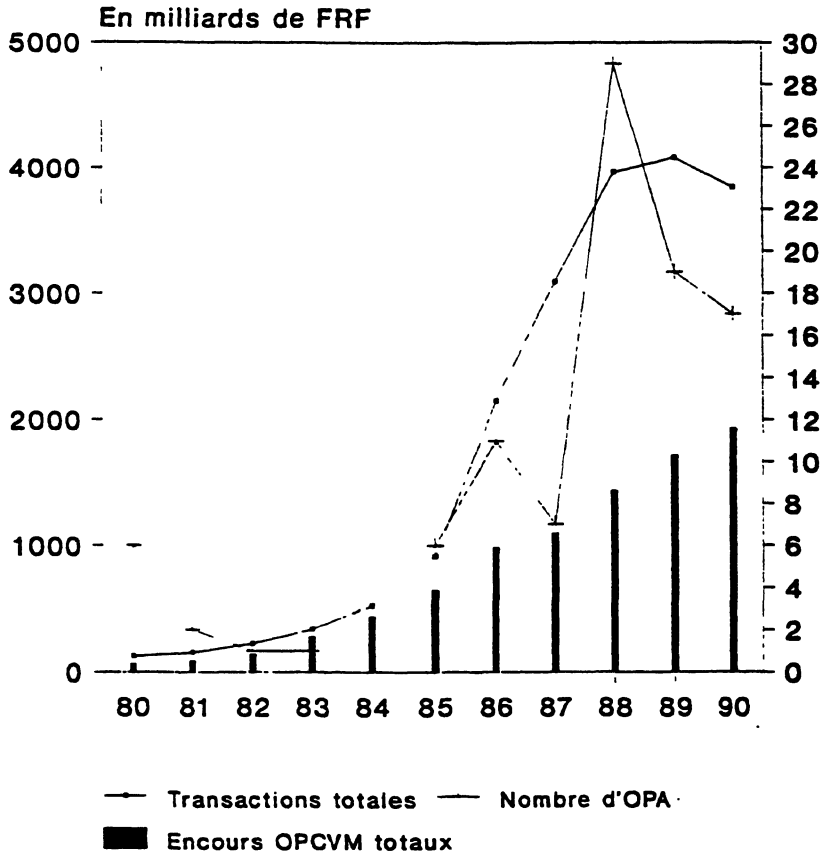


Figure 1

rents en cela qu'ils sont guidés par des considérations économiques. Ainsi la modélisation financière aide-t-elle à accroître les connaissances (analyse et diagnostic), la maîtrise technique et la créativité des équipes. Analyse et diagnostic peuvent porter sur le marché financier lui-même (prime de risque, cherté relative, etc) ou sur les acteurs, leurs besoins ou leur comportement (aversion au risque, remboursement par anticipation, par exemple). La maîtrise concerne bien entendu l'utilisation à bon escient des instruments ou des techniques financières – il s'agira par exemple de bien comprendre les actifs dérivés, de contrôler le risque d'une position ou encore d'optimiser un portefeuille –. L'apport de la modélisation à la créativité ne saurait

VUE D'ENSEMBLE SUR LES NOUVEAUX OUTILS

être oublié. La conception de produits innovants relève souvent de l'association, de « l'hybridation » de techniques ou encore de la transposition, de « l'importation » d'idées. Par exemple la titrisation de créances souveraines lancée au CCF en 1989 est l'adaptation en miniature (après avoir également résolu de nombreuses difficultés juridiques) du plan Brady pour la dette du Mexique. De plus la « technologie » peut permettre de réaliser des produits plus sûrs comme les fonds garantis, ou des produits spectaculaires comme tel produit d'assurance lancé récemment garantissant 90 % du maximum de la performance du marché d'actions.

Si l'on observe les contributions de la modélisation financière sous l'angle des métiers, force est de constater qu'elles ont été importantes pour les investisseurs et pour les opérateurs de marché, tout particulièrement en France. Néanmoins, la gestion quantitative est encore naissante en Europe continentale. Enfin les émetteurs qui ne sont jusqu'à présent que très peu concernés pourraient bien être les prochains intéressés à en juger par la croissance des publications portant sur la finance d'entreprise en relation notamment avec la théorie de l'agence, de l'organisation de la firme ou de la théorie des jeux.

Voici à titre indicatif quelques champs d'application actuels de la modélisation financière dans les trois grandes catégories de métiers :

investisseurs :	analyse et gestion du risque asset allocation prévision sélection de titres attribution de performance assurance de portefeuille tarification des services de gestion
marché et intermédiaires	prix des instruments arbitrage tenue de position (couverture) contrôle du risque analyse de la rentabilité gestion actif-passif allocation de fonds propres, de lignes de crédit options cachées (remboursement par anticipation)
émetteurs :	coût du capital comportement du titre comportement des investisseurs à l'égard du titre OPA defeasance diversification de la dette

Cette liste, qui n'est sans doute pas exhaustive, illustre l'étendue des applications et l'interconnexion des problèmes traités.

Avant de passer à la modélisation, un mot encore sur les équipes de recherche des établissements privés. Alors qu'aux USA la recherche est développée et conduite soit par les investment banks soit par des équipes de consultants indépendants souvent animées par des universitaires de renom, la recherche privée européenne reste, comme au Japon, encore d'extension modeste, fortement inspirée de l'expérience américaine et essentiellement localisée dans les banques. Les équipes européennes sont généralement rattachées soit aux services d'études économiques, soit aux départements de recherche opérationnelle. La situation française décrite dans Haute Finance [3] montre combien la recherche-développement est encore sous-représentée dans la profession. Le CCF qualifié de « pionnier » dans [3] a depuis 1988 constitué une équipe de modélisation financière. Travaillant comme consultant au sein du groupe ou auprès de ses clients, la direction de la recherche et de l'innovation vise à appliquer la recherche, notamment universitaire, en collaboration directe avec les métiers opérationnels. Cela nous a amenés à adapter ou à développer des techniques qui sont parfois originales et que nous soumettons régulièrement à l'appréciation critique lors de congrès de caractère scientifique ou technique.

3. Quelles modélisations financières ?

Les modèles financiers ont connu de nombreux développements. Les travaux théoriques et empiriques ont depuis une vingtaine d'années profondément modifié la culture financière. Les principaux modèles font désormais partie du bagage de base des jeunes générations de financiers : ce sont notamment la théorie moderne du portefeuille, la théorie des options et le CAPM. Le lecteur souhaitant se familiariser avec les modélisations pourra lire des ouvrages de références [5] en anglais ou [6] en français.

Le principe de modélisation financière n'est pas très différent de toute modélisation mathématique (voir [7] pour une introduction). A partir d'une idée formalisée, un modèle mathématique est retenu, des calculs sont conduits (analytiquement ou numériquement) et les conséquences en sont testées à partir de séries temporelles de cours boursiers ou de caractéristiques à une date particulière. A la différence des tests conduits dans les sciences expérimentales, les tests effectués sur les marchés financiers n'ont qu'une valeur relative. En effet, rien ne garantit que les forces du marché seront tout-à-fait les mêmes demain, ni que les conditions juridiques, économiques voire politiques ne viendront pas rendre un tant soit peu moins efficace tel modèle établi sur des bases conceptuelles claires et dont l'efficacité empirique a pu être testée sur un marché et pendant une période déterminés.

Avant d'introduire les « nouveaux outils » à l'ordre du jour, voici un modèle très simple pour illustrer la démarche du modélisateur. Le sujet en est l'évaluation des actions. Parmi les méthodes traditionnelles, l'actualisation des flux de dividendes (Dividend Discount Model) est très répandue ([8] expose par exemple le modèle utilisé par le CCF). Le plus simple de ces modèles est celui de Gordon-Shapiro [4].

VUE D'ENSEMBLE SUR LES NOUVEAUX OUTILS

L'action est considérée comme une rente versant l'année 0 un dividende de D_0 qui augmente au taux g supposé constant. Le taux actuariel R étant connu on obtient :

$$A = D_0 / (R - g) \quad (1)$$

Réciproquement, connaissant le cours de bourse, on peut déduire le taux de rentabilité attendue R et le comparer à celui d'autres placements. Ce modèle a le mérite d'être très simple. Il exprime une relation inverse entre le cours de bourse et la rentabilité identique à celle des marchés obligataires : les prix montent quand les taux baissent. Toutefois, dans l'univers des titres à taux fixes (par exemple des rentes à coupons fixe ou régulièrement croissant) les actions se distinguent précisément par le fait que les dividendes futurs sont incertains. D'ailleurs l'observation des historiques de dividendes montre à l'évidence que les taux de croissance (g) sont loin d'être constants, même s'ils sont moins variables pour Air Liquide que pour Peugeot par exemple. Il devrait donc y avoir une prime de rentabilité exigée pour des titres ayant les croissances les moins régulières. On pourra prendre comme mesure de la variabilité, l'écart-type σ de la croissance. Supposant σ assez faible devant la moyenne g , on peut appliquer un développement de Taylor au deuxième ordre de la fonction définie dans (1). On obtient :

$$E(A) = A(g) + \frac{1}{2} \sigma^2 A''(g) \quad (2)$$

Tous calculs faits, en notant r le taux de coupon de l'action (c'est le rapport entre le dividende par action et le cours), il vient :

$$E(A) = A(g) (1 + \sigma^2 / r^2) \quad (3)$$

où $A(g)$ est le prix d'une rente à taux de croissance fixe (g) n'ayant aucun risque. L'incertitude sur g a pour conséquence l'addition du terme $(\sigma/r)^2$ qui s'interprète assez aisément. En effet la sensibilité actuarielle de la rente à taux de croissance fixe g est précisément l'inverse du taux de coupon. D'ailleurs les investisseurs sont particulièrement sensibles aux taux de dividende dans les enquêtes d'image boursière que le CCF réalise pour les émetteurs. Il est d'ailleurs logique que pour un niveau d'incertitude donnée, plus le taux de coupon est faible, plus le titre apparaît risqué.

En égalant l'espérance de A dans l'équation 3 avec le cours de bourse on peut déduire la prime de risque p qu'exigerait l'investisseur, définie comme l'écart entre la rentabilité attendue R et la rentabilité d'une rente sans risque de taux de croissance g . On obtient simplement :

$$R = g + r (1 + (\sigma/r)^2)$$

d'où

$$p = \sigma^2 / r \quad (4)$$

Les ordres de grandeurs des quantités entrantes montrent l'importance du risque : le taux de coupon du marché de Paris se situe à un niveau moyen de 2,5 % et l'écart-type des croissances est de l'ordre de 5 %, ainsi dans (3) le terme correctif vaut-il 4. Dans (4) la prime de risque sous les mêmes hypothèses serait de l'ordre de 10 % !

De nouveau, notre modèle est trop simple ; il faudrait sans doute y ajouter la possibilité de dépôt de bilan, de scénarios de croissance (autre que g) et une structure statistique pour les taux de croissance. Le travail du modélisateur n'en est pas pour

autant achevé : il s'agira en particulier de tester la pertinence de l'approche. Enfin le financier devra imaginer comment l'exploiter si d'aventure le modèle recèle de l'information. Mais tout cela est une autre histoire que nous ne rapporterons pas ici...

Le moment est en effet venu d'introduire les trois axes de modélisation sélectionnés pour cette journée, ce que nous nous efforcerons de faire en mettant l'accent sur leur intérêt particulier et leurs connexions mais en réservant bien entendu l'exposé détaillé des méthodes et des résultats (et les références bibliographiques) à chacun des spécialistes.

3.1. Nouvelle économétrie

Le premier thème est celui de l'économétrie plus spécifiquement financière : l'examen des cours boursiers ou l'analyse des questions que se posent les financiers ont entraîné le développement de nouveaux outils. Les modèles ARCH (pour Auto-Regressive Conditionally Heteroscedastic) visent à décrire le comportement statistique des séries temporelles, essentiellement les cours boursiers et les séries dérivées (taux, rentabilités...) : la variance à une date donnée (ou tout autre moment du second ordre) est considérée comme une variable aléatoire éventuellement dépendante des valeurs des variables d'état antérieures ou contemporaines. Les raisons du succès de cette modélisation sont notamment son caractère intuitif – il n'est pas difficile de constater que les marchés financiers connaissent des fièvres mais aussi des périodes de grands consensus – et d'autre part sa capacité à restituer des lois marginales leptokurtiques... comme le sont précisément toutes les séries financières. Les modèles ARCH ne sont pas les seuls à restituer le phénomène, puisque par exemple des « mixtures » de variables aléatoires ou bien des lois comme les lois stables de Lévy permettent également de prendre en compte le phénomène de queues de distribution beaucoup plus épaisses que celle de la loi normale. Néanmoins la famille des modèles ARCH (GARCH, TAR, TARCH,...) reste proche des séries gaussiennes appréhendables par le praticien qui pourra adapter ses autres outils à ce nouveau modèle. La deuxième catégorie de méthodes statistiques répond aux besoins des financiers d'analyser ou d'essayer de prévoir. Il s'agira par exemple du comportement des acteurs (pourquoi sont-ils acheteurs d'un titre, pourquoi remboursent-ils par anticipation, peut-on détecter les mauvais payeurs, les entreprises « opérables » ?) ou visera à discriminer les facteurs de surperformance des titres, des marchés... qui bien qu'efficients offrent temporairement quelques opportunités. Comme les panels ou tableaux de caractéristiques évoluent au cours du temps, cela soulève d'intéressantes questions théoriques ou pratiques de connexion entre les données « cross-section » et les résultats en série temporelle.

3.2. Processus de diffusion

Les sciences physiques abondent d'exemples de diffusion, l'archétype en est l'équation de la chaleur. Toutefois la diffusion n'est observée qu'au niveau macroscopique alors que ce que les financiers décrivent grâce aux processus de diffusion ce sont les cours. L'équation de diffusion qui en résulte permet de calculer la valeur

de l'option d'achat ou de vente du titre considéré. C'est donc à l'échelle microscopique (pour chaque titre) qu'est analysée la variabilité des cours S au travers par exemple du modèle proposé par Black et Scholes [1] :

$$dS/S = a dt + \sigma dZ \quad (5)$$

où

S est le cours

dS la variation de S pendant l'intervalle de temps dt

a est la tendance du cours

dZ est un bruit blanc gaussien, d'espérance 0 et de variance dt

σ est la volatilité

Les marchés d'instruments dérivés, marchés à terme ou marchés d'options, permettent de protéger les valeurs des portefeuilles ou des positions financières contre les variations des cours. Mais cette couverture a un prix que la théorie des options a permis de déterminer sous certaines hypothèses en fournissant de surcroît la méthode de fabrication de l'option, la gestion en « δ » neutre. De très nombreuses extensions ou adaptations au modèle de base (5) ont été proposées et ont créé un courant de recherche et d'application très important. Les progrès ou prolongements récents dans ce domaine portent d'une part sur les taux d'intérêt, en particulier sur des modèles à plusieurs aléas et d'autre part sur l'approche par les martingales. Cette dernière a non seulement permis, dans un cadre sensiblement différent, de retrouver les résultats antérieurs mais a ouvert la voie à l'évaluation de contrats contingents beaucoup plus généraux. Les options les plus étranges (sur la moyenne, sur le minimum ou le maximum, offrant le choix, s'autodétruisant...) sont désormais traitées sur les salles de marché et vendues aux particuliers dans des formules d'épargne très originales. Options des marchés organisés, options implicites (comme le remboursement par anticipation d'un crédit ou d'un contrat d'assurance-vie) options exotiques, actions ou projets considérés comme des options... il est désormais évident que les processus de diffusion et la théorie des options occupent une place centrale dans la finance moderne.

3.3. Modèles d'équilibre par arbitrage

Les méthodes d'évaluation des options ou des obligations font l'objet d'un large consensus et sont d'une bonne précision. Tel n'est pas le cas en revanche des méthodes d'évaluation des actions. La question est plus ouverte et beaucoup plus ardue. Le modèle très simple que nous avons présenté ci-dessus a, par exemple, illustré la sensibilité du prix (ou de la rentabilité attendue) à la variabilité des dividendes. Plutôt que d'évaluer les actions elles-mêmes, les principaux modèles qui ont été développés à ce jour, se sont focalisés sur l'appréciation de la rentabilité, éventuellement la rentabilité relative (par rapport à un indice boursier) ou l'écart de rentabilité avec un placement monétaire. Principalement destinés aux investisseurs, ils servent soit à la sélection de titres, soit à l'allocation d'actifs (entre actions et marché monétaire par exemple), ce sont donc principalement des outils relatifs. Le Capital Asset Pricing Model, première modélisation, est dû à Sharpe (voir [5]) :

$$E(R) = i + \beta (\rho - i) \quad (6)$$

lie la rentabilité espérée d'une action au taux d'intérêt « sans risque » i et au produit de la prime de risque $\rho - i$ où ρ est la rentabilité espérée du marché, par le β de l'action considérée. Ce modèle est un modèle d'équilibre qui s'apparente en pratique à un modèle monofactoriel car si l'on cherche à partir d'une base de données de cours boursiers à déterminer le facteur principal de variation des cours, on trouve l'indice de marché (ou à peu près). Ce qui, d'ailleurs, n'apprend pas davantage dans quelle direction s'oriente le marché. La transposition de (6) dans le monde « obligataire » considérerait la variation des titres obligataires au moyen d'un seul facteur : le niveau moyen des taux d'intérêt. Le CAPM n'est pas suffisant : la variance expliquée est assez modeste ; d'autre part ramener une action à un « bêta » est trop caricatural ; enfin *le modèle ne dit rien sur la rentabilité du marché*. L'Arbitrage Pricing Theory de Ross et les modèles multifactoriels (ou encore multi bêtas) ont pour objectif de nous en dire plus : tant sur les principaux facteurs explicatifs des actions du marché (APT) que sur les facteurs directement identifiables d'une société (ratios, bénéfices, croissances) qui concourent le plus significativement à la rentabilité boursière d'un ensemble de titres. Ces deux approches d'inspiration américaine ont fait l'objet de nombreuses applications pendant les cinq dernières années et ont connu d'incontestables succès commerciaux malgré des performances plus mitigées selon les marchés.

Quelles sont les connexions entre les trois thèmes de la journée, quels en sont les enseignements et quelles sont les questions encore ouvertes ?

Thèmes 1 et 2. Plusieurs tentatives ont été déjà faites pour évaluer des options lorsqu'un titre suit en temps discret un modèle ARCH mais on est encore loin d'une théorie et d'estimateurs équivalents à la volatilité implicite. Est-il possible d'aborder ces questions avec les martingales ? Du point de vue financier est-ce que cela ne revient pas à lever l'hypothèse d'un marché complet ?

Thèmes 1 et 3. Il y a déjà de nombreuses applications de l'économétrie des panels à la modélisation des marchés par arbitrage – il s'agit par exemple de l'estimation des modèles multifactoriels de l'APT mais aussi de l'estimation de courbe de taux d'intérêt. Cependant l'introduction explicite des modèles ARCH dans les modèles d'évaluation reste à faire et à tester.

Thèmes 2 et 3. Les modèles d'évaluation des options peuvent aussi servir à évaluer des obligations par exemple. Plusieurs modélisations de la fluctuation des taux d'intérêt à un ou à plusieurs facteurs peuvent déboucher en effet sur l'évaluation des titres à taux fixe (obligations zéro coupon ou avec coupons) et même à taux variable. Toutefois il n'existe pas sur la base des modèles d'actions de valorisation analogue.

Au-delà de ces trois types de modélisations que toutes les équipes de recherche financière abordent aujourd'hui, il existe encore quelques pistes (voir [7] pour plus de développements) dont la liste ressemblera fort aux yeux du lecteur non averti à un inventaire à la Prévert. Il s'agit par exemple des modélisations non linéaires, traitées avec des réseaux de neurones ou bien des modélisations plus complexes

intervenant notamment dans la définition du risque ou de l'objectif de gestion, dans la microstructure du marché, l'impact de cessions de blocs sur les cours... L'analyse qualitative (forme parmi d'autres de traitement non linéaire) ne sera pas sans élargir son champ d'application qui incorpore déjà le scoring ou la segmentation de clientèle. Il me vient enfin à l'esprit les approches à base de logique floue et de la théorie des possibilités très prisées par la technologie japonaise et qui s'ajouteront peut-être à l'arsenal moderne du traitement de l'information.

4. Optimisation

D'un point de vue pratique, l'optimisation est un outil essentiel de mise en œuvre de la modélisation financière. H. Markowitz, promoteur de l'outil dans le domaine de la gestion de portefeuille, en a fourni une preuve manifeste. D'une façon générale, le modèle seul n'est pas suffisant. En effet du point de vue économique, c'est l'application du modèle qui fait la différence. Combien de jeunes chercheurs sont déçus par le faible pouvoir explicatif des modèles de prévision les plus sophistiqués... dans l'absolu on leur donnerait aisément raison. Mais si, bien utilisé, le modèle permet de faire mieux qu'un indice – ou bien encore mieux que la moyenne de ses concurrents – il prend un intérêt relatif évident. Or qui dit avantage économique ou compétitif dit critère d'évaluation. Comme il n'y a pas (durablement) rentabilité sans risque, il faut bien optimiser les critères de performance retenus.

Toutefois comme la démarche de définition quantitative des objectifs et des critères d'appréciation des performances est encore peu répandue en France, l'optimisation de portefeuille reste peu utilisée. En voici une illustration, dans le contexte des compagnies d'assurance – que nos hôtes assureurs n'en prennent pas ombrage car le même genre d'exemple pourrait à loisir être choisi chez leurs confrères banquiers.

Considérons pour cela le portefeuille d'actifs d'une société d'assurance qui choisirait pour son allocation d'optimiser une fonction d'utilité de type moyenne-variance à l'instar de celle proposée par H. Markowitz ([9]) :

$$U(P) = E(Rp) - \gamma \text{Var}(Rp) \quad (7)$$

où Rp est la rentabilité du portefeuille, qui est une variable aléatoire, dont E et Var désignent l'espérance mathématique et la variance γ est l'aversion au risque de la société d'assurance (c'est une constante positive). Supposant par exemple que cette compagnie alloue ses actifs à quatre grandes classes – l'immobilier, les actions, les obligations et les liquidités –, ses investissements doivent aisément satisfaire des contraintes légales que nous avons schématisées ainsi :

$$\begin{aligned} \text{Actions} &< 65 \% \\ \text{Immobilier} &< 40 \% \end{aligned} \quad (8)$$

D'autre part et dans un souci de simplification, nous supposerons que les quatre classes d'actifs sont valorisées par des indices représentatifs. Nous supposerons enfin – ce qui n'est peut-être pas très fréquent – que la société choisisse comme rentabilités

VUE D'ENSEMBLE SUR LES NOUVEAUX OUTILS

attendues sur les quatre classes d'actifs, les moyennes des rentabilités historiques sur une période d'environ vingt ans (71-89). Les mêmes rentabilités historiques lui servent à évaluer le risque de son portefeuille, ($\text{Var}(Rp)$ étant le carré de la volatilité du portefeuille).

L'optimisation, selon la méthode de Markowitz, de l'utilité U de l'équation (7) sous les contraintes (8) fournit les résultats présentés sur la figure 2. La frontière efficiente (figure 2a) indique la rentabilité maximum qui peut être atteinte pour un niveau de risque donné. Le graphe au-dessous (figure 2b) présente les structures des portefeuilles efficients : il n'est pas étonnant de voir par exemple que la proportion d'actions très faible à gauche augmente à mesure que le risque augmente (et donc que l'aversion au risque diminue) tout en restant inférieure au seuil de 65 %. Notons à ce propos que nous avons ajouté une contrainte technique correspondant à une détention minimale de 10 % de liquidités dont on voit clairement l'effet dans la composition du portefeuille.

Qu'en est-il effectivement des portefeuilles des compagnies financières d'assurance vie et dommages ? Le tableau ci-dessous résume à titre de rapprochement la décomposition à la fin 89 des portefeuilles de l'ensemble des compagnies (source FFSA). Ce rapprochement ne saurait tout à fait être une comparaison car il s'agit dans un cas de valeurs de marché et dans l'autre de valeurs comptables. Les deux dernières lignes indiquent avec les mêmes hypothèses que pour l'optimisation, les rentabilités moyennes (à structure constante) et les niveaux de risque.

	Vie %	Dommages %
Immobilier	11,1	15,6
Actions	17,2	29,4
Obligations	59,3	44,5
Divers*	12,4	10,5
Rentabilité	12,0	12,6
Volatilité	07,8	09,3

* assimilé à un placement monétaire.

Les deux portefeuilles ne sont pas optimaux selon nos hypothèses. S'ils ne sont pas très éloignés (voir figure 2a) de la frontière efficiente, il apparaît toutefois que les compositions des portefeuilles diffèrent très notablement des structures optimales : le portefeuille vie, par exemple, paraît trop investi en obligations (59,3 % contre environ 22 %) et sous-investi en actions (17,2 % contre environ 28 %) et en immobilier (11,1 % contre 40 %) ... ce dernier point montre la difficulté de la comparaison, car la photographie comptable n'est pas superposable à une valorisation de marché.

Frontière Efficiente

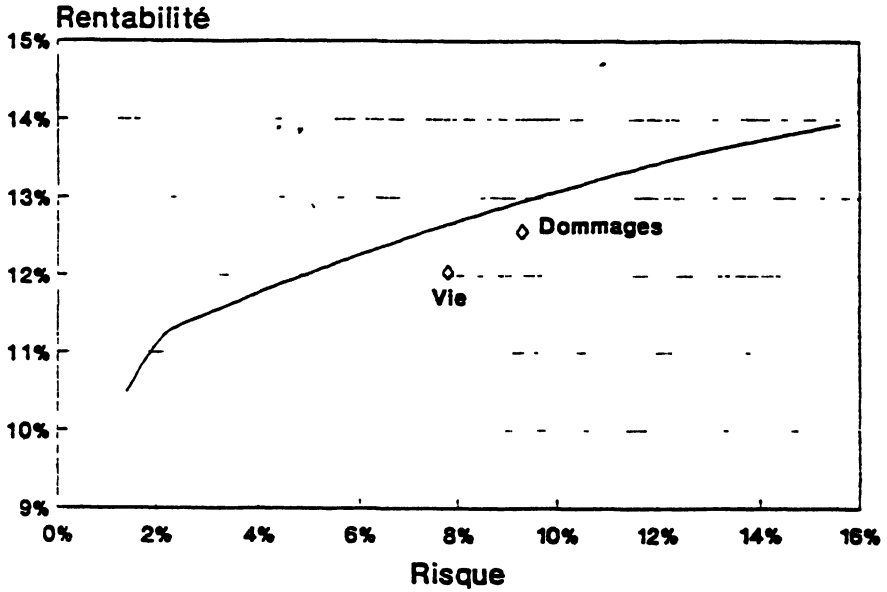
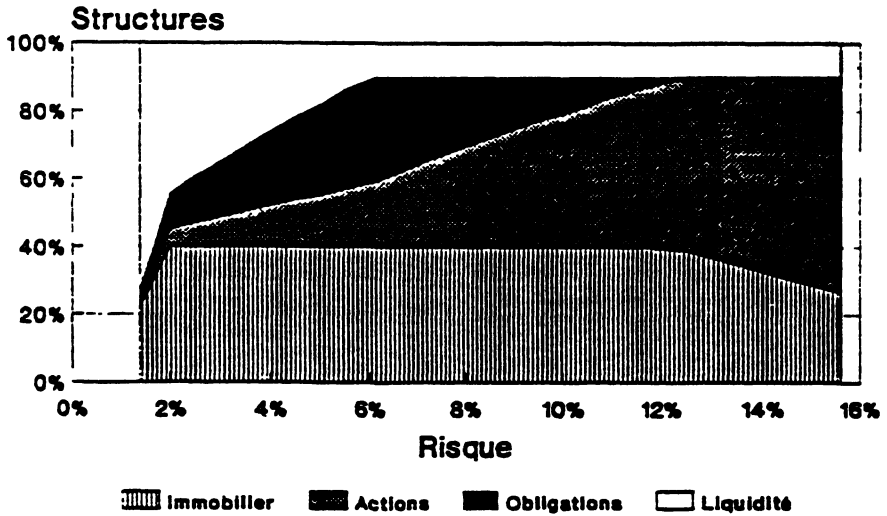


Figure 2a

Structures Optimales



Données trimestrielles 1971-1988

Figure 2b

VUE D'ENSEMBLE SUR LES NOUVEAUX OUTILS

Un trait saillant ressort de la comparaison des deux types de sociétés. En effet le portefeuille des assurances dommages semble plus risqué. Cela est d'autant plus surprenant, du point de vue de la gestion financière, que les passifs des compagnies d'assurance vie sont à plus long terme que les autres. Ainsi, si l'horizon d'investissement des premières est plus lointain, la référence de gestion (le « benchmark ») devrait être beaucoup plus investi en actions. Par conséquent si nous rapportons l'ensemble de l'optimisation aux benchmarks respectifs nous accentuerions le phénomène. Est-ce à dire que les assureurs dommages sont beaucoup moins averses au risque que leurs confrères ? Est-ce encore là un artefact comptable ? N'y-a-t-il pas une influence des caractéristiques – notamment les taux garantis – des produits vendus par les compagnies d'assurance vie ? L'exemple que nous avons choisi est trop simplificateur (et trop généraliste) pour permettre de répondre. Toutefois il illustre tout l'intérêt des méthodes rationnelles de la modélisation financière lorsqu'il s'agit d'effectuer un diagnostic ne serait-ce que pour poser les problèmes... ce qui est déjà comme le veut l'adage, les avoir à moitié résolus.

Outil de base pour l'application de la modélisation financière classique, l'optimisation est encore requise pour exploiter au mieux la valeur ajoutée (quand elle existe) de modélisations plus poussées. L'exemple qui suit constitue une première étape vers l'incorporation de modèles ARCH dans le processus d'allocation d'actifs. Dans l'exemple précédent, nous avons utilisé une matrice de covariance estimée sur une période historique, pour déterminer à l'aide du modèle de Markowitz la structure optimale d'un portefeuille à détenir sur une période future plus ou moins longue.

Les réactions des marchés financiers aux différents événements survenus durant la dernière décennie (krach boursier, crise du Golfe, etc...) montrent clairement que les risques et les corrélations entre les rentabilités de plusieurs actifs peuvent varier dans le temps : il existe des sous-périodes où les cours sont plus volatils, d'autres où les rentabilités sont moins bien corrélées, phénomènes bien connus et exploités par nombre d'opérateurs, en particulier sur le marché des options.

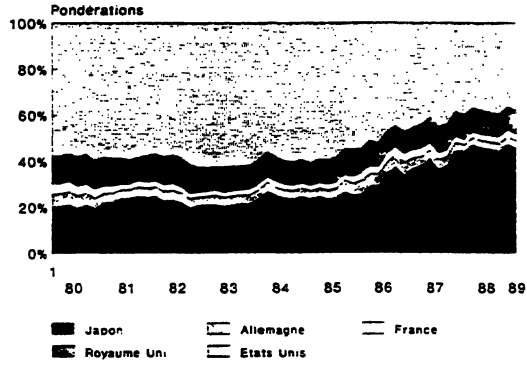
Les indices de marché d'actions comme l'indice mondial MSCI, ont de très nombreux usages ; ils servent de plus en plus de référence à la gestion, pour fixer en quelque sorte les objectifs du gestionnaire de portefeuilles diversifiés. Or les indices internationaux sont généralement construits comme des sommes pondérées des indices nationaux, les poids étant des capitalisations exprimées en une monnaie unique. N'étant pas nécessairement conçues pour bien représenter la force des économies peu capitalisées (l'Europe Continentale par exemple) des pondérations telles que le PNB ont souvent été proposées. Des travaux récents que nous résumons succinctement ici (voir [10]) cherchent à définir de telles références en utilisant l'optimisation de portefeuille.

Une première méthode consiste à déterminer le portefeuille de risque minimum pour une devise d'investissement donnée à partir des covariances historiques constatées à une date donnée. Mais, comme nous l'avons évoqué, les variances et covariances des performances boursières ne sont pas stables temporellement. Cela conduit à rechercher ceux des portefeuilles dont la variance est faible et dont la variance de cette variance est également faible.

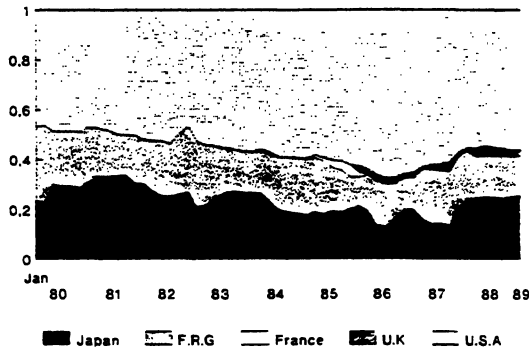
VUE D'ENSEMBLE SUR LES NOUVEAUX OUTILS

INDICES INTERNATIONAUX POUR UN INVESTISSEUR EN DOLLARS

Structure de MSCI reconstituée



Structures de Markowitz pour un investisseur américain



Structures diversifiées pour un investisseur américain

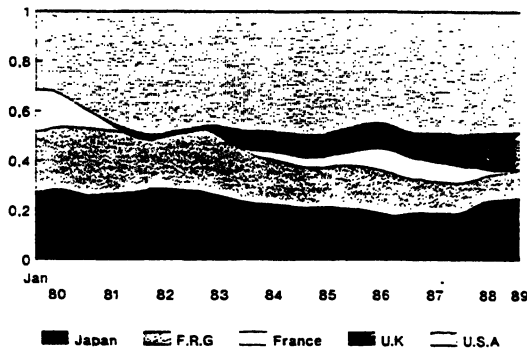


Figure 3

Le premier portefeuille minimise le critère : $\text{Var}(Rp)$.

Le second minimise le critère : $\text{Var}(Rp) - \text{Var}(\text{Var}(Rp))$.

La simulation de mise en œuvre (dont les détails sont dans [10]) pendant la période 1975-1990 fournit les structures représentées sur la figure 3. Les structures « dites diversifiées » correspondant au deuxième critère subissent, comme il est visible, moins de fluctuations. Par ailleurs il se trouve qu'investir dans ce type de portefeuille pour un investisseur en Francs se serait avéré plus rentable que l'indice MSCI sur la même période, tout en étant moins volatil ex post.

La discussion complète des techniques d'optimisation ou des applications de l'optimisation dans le contexte financier sort évidemment du cadre de mon propos. Il est utile de mentionner que l'optimisation est un sujet de recherche très actuel pour les financiers, notamment dans la définition des critères (autres que celui défini dans (7) ou dans l'introduction d'éléments temporels (optimisation des résultats annuels successifs) qui amènent à avoir recours au contrôle stochastique et à l'optimisation dynamique. J'insiste toutefois sur l'importance de l'optimisation pour la bonne application de la modélisation financière, en gestion de portefeuille comme en toute gestion financière, et j'espère que les deux exemples ont pu convaincre de son intérêt, non pas comme celui d'une boîte noire de plus, mais bien comme support au diagnostic et comme aide à la décision.

5. Conclusion

La modélisation financière est en plein essor, cette manifestation en est la preuve. Elle s'est établie grâce à une démarche scientifique mais aussi grâce à l'ingéniosité de ses utilisateurs. Qu'il me soit permis, à la place qui est la mienne, de féliciter H. Markowitz et les modélisateurs universitaires pour leurs efforts et leurs résultats. La modélisation financière s'est aussi établie parce que les financiers se sont petit à petit familiarisés avec des concepts mathématiques, ont su en tirer profit pour leurs clients et pour eux-mêmes. Certains ont franchi un pas supplémentaire en se dotant d'équipes de recherche développement, c'est un très bon signe. D'autant plus que la recherche financière, après avoir « exploité » les techniques développées pour et par d'autres disciplines, produit désormais des modèles qui lui sont tout à fait spécifiques : les trois thèmes de la journée sont là pour le démontrer. Cela a, bien entendu, pour conséquence de placer la barre très haut. Comment faire passer la subtilité de tel modèle ARCH ou de la Tactical Asset Allocation à un public ou à des clients qui n'ont pas eu le temps ou le loisir de saisir la première phrase : l'importance du risque et de sa maîtrise. C'est dire la nécessité de la diffusion et de l'information, et tout l'intérêt qu'il faut porter à cette manifestation. J'ai donc le plaisir de vous inviter maintenant à découvrir ces nouveaux outils avec des spécialistes français en les remerciant à l'avance pour leurs contributions et leurs talents d'informateurs. Parce que je me sens solidaire de leurs approches et parce qu'il faut bien se méfier des contrefaçons, je rappellerai volontiers le mot d'Andrew Rudd, président de BARRA, qui déclare que son principal concurrent c'est tout simplement l'ignorance.

RÉFÉRENCES

- [1] BLACK F., SCHOLES F. (1973) "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *J. Political Economy*.
- [2] BACHELIER L. (1900), *Théorie de la spéculation*, Annales de l'ENS, février 1900, 21-86.
- [3] GAURIAT V. (1991) "La timide incursion des chercheurs dans la banque", *Haute Finance*, décembre.
- [4] GORDON M.J., SHAPIRO E. (1956) "Capital Equipment Analysis : the Required Rate of Profit", *Management Science*, octobre, 102-110.
- [5] SHARPE W. (1985) *Investments*, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, 746 p.
- [6] JACQUILLAT B., SOLNIK B. (1989) *Marchés financiers : gestion de portefeuille et des risques*, Dunod, Paris, 413 p.
- [7] BOULIER J.F. (1991) "Les mathématiques de l'argent". *Marché et Techniques Financières*, octobre et novembre.
- [8] PETTIT B., RICHARD HIDDEN B. (1988) "Evaluation des sociétés et des marchés financiers : le modèle de rentabilité attendue/risque", *Analyse Financière*.
- [9] MARKOWITZ H. (1952) "Portfolio Selection". *J. Finance*, 425-442.
- [10] MIQUEU D., SÉQUIER P. (1990) *Diversifying International Equity Portfolios : Which Benchmark ?* -, HEC-AFFI, International Conference, Jouy-en-Josas, juin.