Journal de la société statistique de Paris

Patrice Fontaine
Pierre Hillion

Le modèle d'évaluation par l'arbitrage, l'APT (Arbitrage Pricing Theory)

Journal de la société statistique de Paris, tome 133, nº 4 (1992), p. 141-160
<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1992__133_4_141_0>

LE MODÈLE D'ÉVALUATION PAR L'ARBITRAGE, L'APT (ARBITRAGE PRICING THEORY)

par Patrice FONTAINE,
(ESA) Université P. Mendes-France et
(ENSGI) Institut National Polytechnique, Grenoble,

et

Pierre HILLION,
INSEAD, Fontainebleau

Le modèle d'évaluation par l'arbitrage a été conçu à l'origine par Ross en 1976 comme une alternative au modèle d'équilibre des actifs financiers. Se fondant en particulier sur l'hypothèse selon laquelle les rentabilités des actifs financiers suivent une loi normale (ou que les investisseurs ont une fonction d'utilité quadratique) et sur le concept d'équilibre, le MEDAF indique qu'un actif risqué, par exemple une action, a une rentabilité espérée égale au taux de l'actif sans risque plus une prime de risque. Cette prime de risque se décompose en deux parties :

- le prix du risque égal à la différence entre la rentabilité espérée du portefeuille de marché et la rentabilité de l'actif sans risque. Le portefeuille de marché est le portefeuille composé de tous les actifs financiers risqués.
- le coefficient de réaction de l'actif risqué au comportement du portefeuillle de marché, appelé le bêta.

Le risque est donc mesuré relativement au portefeuille de marché et une seule source de risque existe, le risque de marché.

Le modèle indique aussi qu'un investisseur peut soit répartir sa richesse entre l'ensemble des actifs, soit la répartir entre deux actifs particuliers, l'actif sans risque et le portefeuille de marché.

La principale critique du modèle est qu'il est impossible de représenter le vrai portefeuille de marché. Or, l'utilisation d'une approximation du portefeuille de marché empêche d'avoir un test valide du modèle et pose aussi des problèmes lorsqu'on essaye d'examiner s'il y a des actifs sur ou sous-évalués ou encore si on essaye de mesurer la performance d'un portefeuille.

Ross (1976) a, en conséquence, tenté de mettre en place un modèle d'évaluation des actifs financiers dans lequel le portefeuille de marché n'intervient pas, et de façon plus générale, qui n'est pas basé sur l'équilibre des actifs financiers.

Journal de la Société de Statistique de Paris, tome 133, n° 4, 1992

Le modèle de Ross (1976) repose essentiellement sur l'hypothèse selon laquelle un modèle statistique, appelé modèle factoriel, décrit les rentabilités des actifs financiers. Cette dernière hypothèse indique en particulier que plusieurs facteurs économiques, disons K, influencent l'ensemble des rentabilités des actifs financiers.

Se fondant 1) sur cette hypothèse, 2) sur le fait qu'il existe un grand nombre d'actifs financiers et 3) sur le principe d'arbitrage qui est une application de la loi du prix unique selon laquelle deux biens identiques, ici des actifs financiers, doivent avoir le même prix, Ross (1976) en déduit la relation d'évaluation du modèle d'arbitrage.

Cette relation indique qu'il existe une relation linéaire entre la rentabilité espérée d'un actif et les coefficients de sensibilité de cet actif aux différents facteurs communs influençant l'ensemble des actifs financiers.

Notre exposé sur le modèle d'arbitrage se déroule comme suit. Sont présentés dans une première section le cadre théorique du modèle d'arbitrage, dans une deuxième section les différentes analyses empiriques du modèle d'arbitrage, dans une troisième section, des exemples d'utilisation du modèle d'arbitrage en gestion de portefeuille, et en conclusion, les avantages et inconvénients du modèle d'arbitrage.

1. Le cadre théorique du modèle d'arbitrage

Il existe deux types de modèles d'arbitrage :

- La version initiale du modèle d'arbitrage, celle proposée par Ross (1976), et plus généralement tous les modèles utilisant exclusivement le principe d'arbitrage pour obtenir la relation d'évaluation que nous allons expliciter dans un premier temps.
- Les versions dites d'équilibre ou exactes du modèle d'arbitrage, permettant d'obtenir une relation d'évaluation exacte du modèle d'arbitrage que nous décrivons dans un deuxième temps.

1.1. La version initiale du modèle d'arbitrage

Trois éléments caractérisent le modèle d'arbitrage : tout d'abord l'hypothèse de base sur le comportement des rentabilités des actifs financiers, ensuite la construction d'un portefeuille d'arbitrage, et enfin la relation d'évaluation.

A) L'hypothèse de base

Dans le modèle d'arbitrage, il est supposé que plusieurs facteurs économiques influencent les rentabilités des actifs financiers.

Ces facteurs peuvent être classés en deux catégories :

- ceux qui affectent l'ensemble des actifs appelés facteurs communs ou systématiques ;

– ceux qui affectent seulement un ou plusieurs actifs (entreprise, secteur ou industrie), appelés facteurs spécifiques.

Selon le comportement de ces facteurs, la rentabilité réalisée des actifs est plus ou moins élevée.

Les investisseurs font des prévisions sur le comportement des facteurs, et ce qu'ils ont anticipé sur le comportement des facteurs est intégré dans le taux de rentabilité anticipée de l'actif considéré. En revanche, les événements non anticipés se traduisent par des comportements non prévus des facteurs et affectent la rentabilité constatée (ex-post).

La rentabilité constatée d'un actif est égale à la rentabilité anticipée de l'actif plus la rentabilité non anticipée. Cette rentabilité non anticipée peut être décomposée en deux parties :

– une partie due aux mouvements non prévus des facteurs communs,

– une partie due aux mouvements non prévus du facteur spécifique.

Ceci constitue l'hypothèse de base du modèle d'évaluation par l'arbitrage. De façon plus formelle, cette hypothèse s'écrit en supposant qu'il y a K facteurs f influençant la rentabilité d'une action de la façon suivante.

$$R_{it} = E_i + b_{i1} f_{1t} + b_{i2} f_{2t} + \dots + b_{iK} f_{Kt} + \varepsilon_{it} \qquad (1)$$

avec

R_{it} : rentabilité constatée (ex-post) en t de l'actif i calculée sur la période $t-1$, t.

E_i : rentabilité anticipée de l'actif i.

b_{i1} : coefficient de sensibilité de l'actif i au facteur 1 ou mesure du risque 1 supporté.

b_{iK} : coefficient de sensibilité de l'actif i au facteur K ou mesure du risque K supporté.

f_{1t} : la valeur prise par le facteur 1 en t.

f_{Kt} : la valeur prise par le facteur K en t.

ε_{it} : la rentabilité non anticipée due au facteur spécifique en t.

où $$E(f_{kt}) = 0,\ E(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0,\ E(\varepsilon_{it}) = 0,\ E(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0.$$

Cette hypothèse est au modèle d'arbitrage ce qu'est l'hypothèse de normalité des rentabilités des actifs financiers au modèle d'équilibre des actifs financiers (MEDAF).

L'objet du modèle d'évaluation par l'arbitrage, comme le modèle d'équilibre des actifs financiers, est en fait d'évaluer à quoi est égale la rentabilité anticipée d'un actif quelconque.

B) La construction du portefeuille d'arbitrage

Pour ceci, à partir de l'hypothèse (1), Ross utilise le principe d'arbitrage selon lequel tout investissement créé sans risque et sans richesse (par des ventes à découvert par exemple) doit avoir une rentabilité nulle. L'utilisation du concept d'arbitrage est moins contraignante que l'utilisation du concept d'équilibre (égalité entre l'offre et la demande des actifs) utilisé pour développer le MEDAF. En effet, pour qu'il y ait équilibre sur le marché des actifs, le principe d'arbitrage doit forcément être vérifié alors qu'il n'est pas nécessaire qu'il y ait équilibre pour que le principe d'arbitrage soit vérifié.

Dans ce contexte, l'idée de base est de créer un portefeuille d'arbitrage X composé de tous les actifs (ici, nous avons N actifs).

$\underline{X}$ est un vecteur ligne composé des proportions investies dans chaque actif $\underline{X} = (x_1, x_2, ..., x_N)$.

La rentabilité de ce portefeuille $\underline{X \cdot R}$ est égale à

$$\underline{X \cdot R} = \underline{X \cdot E} + \underline{(X \cdot B.)}\underline{f} + \underline{X \cdot \varepsilon} \tag{2}$$

où

$\underline{R}$ est le vecteur des rentabilités réalisées des N actifs de dimension $N \times 1$ ou de dimension $N \times T$ s'il y a T périodes de temps.

$\underline{E}$ est le vecteur des rentabilités anticipées des N actifs de dimension $N \times 1$.

$\underline{B}$ est la matrice des coefficients de sensibilité des N actifs aux K facteurs communs de dimension $N \times K$.

$\underline{f}$ est la matrice des réalisations des K facteurs de dimension $K \times 1$ ou de dimension $K \times T$ s'il y a T périodes de temps.

$\underline{\varepsilon}$ est le vecteur des réalisations des N facteurs spécifiques de dimension $N \times 1$ ou de dimension $N \times T$ s'il y a T périodes de temps.

Ce portefeuille est un portefeuille d'arbitrage, il est donc construit de telle manière :

- qu'il n'utilise pas de richesse $\underline{X \cdot 1} = 0$.
- que x_t soit de l'ordre de $1/N$.
- qu'il soit sans risque. En conséquence, les coefficients de sensibilité du portefeuille aux différents facteurs communs doivent être nuls, soit $\underline{X \cdot B} = 0$. Et le risque spécifique du portefeuille doit être nul, $\underline{X \cdot \varepsilon} = 0$, ce qui est approximativement obtenu par diversification.

(2) se simplifie et on obtient : $$\underline{XR} \approx \underline{XE} \tag{3}$$

$\underline{X}$ étant un portefeuille d'arbitrage, la richesse investie est nulle, sa rentabilité anticipée $\underline{XE}$ doit être nulle, et en conséquence $\underline{XR} = \underline{XE} = 0$.

C) La relation d'évaluation

Nous constatons que $\underline{X \cdot E}$, $\underline{X \cdot 1}$, $\underline{X \cdot B}$ sont tous les trois nuls, $\underline{E}$ est donc une combinaison linéaire de $\underline{1}$ et de $\underline{B}$.

$$\underline{E} = \underline{1}.\underline{\mu_0} + \underline{B\mu} \tag{4}$$

où μ_0 et μ représentent les coefficients de relation linéaire entre $\underline{E}$, $\underline{1}$ et $\underline{B}$. S'il existe un actif sans risque, il est possible de démontrer que μ_0 est le taux de rentabilité de l'actif sans risque. $\underline{\mu}$ représente le vecteur des primes de risque sur les facteurs communs, de dimension $K \times 1$. Par exemple, μ_k la prime de risque associée au facteur k est égale à $E_k - \mu_0$, où E_k est la rentabilité anticipée du portefeuille k dont les coefficients de sensibilité aux facteurs communs autres que le facteur k sont nuls et dont le coefficient au facteur k est égal à un. Le portefeuille k est encore appelé le portefeuille de base k.

La relation (4) s'écrit encore pour un actif i quelconque.

$$E_i = \mu_0 + \sum_{k=1}^{K} \mu_k \ b_{ik} \tag{5}$$

ou

$$E_i = \mu_0 + \sum_{k=1}^{K} (E_k - \mu_0) \ b_{ik} \tag{6}$$

Si l'équation (1) représente l'hypothèse de base du modèle d'arbitrage, la relation (5) est la relation fondamentale du modèle d'évaluation par l'arbitrage, la relation d'évaluation des rentabilités anticipées des actifs financiers. Elle indique que la rentabilité anticipée d'un actif est égale à la rentabilité de l'actif sans risque plus une prime de risque fonction des coefficients de sensibilité de l'actif i aux différents facteurs communs.

Nous retrouvons une relation proche de celle du MEDAF. Les seules différences sont que :

- Premièrement, dans le MEDAF, il y a une seule prime de risque car il y a une seule source de risque, le risque associé au portefeuille de marché, tandis que dans le modèle d'arbitrage, il y a plusieurs primes de risque car il y a plusieurs sources de risque, les risques associés aux différents facteurs communs.
- Deuxièmement, dans le modèle d'évaluation par l'arbitrage, le portefeuille de marché n'a pas de rôle particulier.

Les avantages du modèle d'arbitrage par rapport au MEDAF sont :

- qu'il utilise le concept d'arbitrage moins contraignant que le concept d'équilibre ;
- que les hypothèses faites soit sur les rentabilités des actifs financiers soit sur les fonctions d'utilité des individus sont beaucoup moins fortes ;
- que le portefeuille de marché n'apparaît pas et par conséquent les problèmes de testabilité du MEDAF liés au portefeuille de marché n'existent pas avec le modèle d'évaluation de l'arbitrage.

Mais s'il y a des avantages, il y a aussi des inconvénients qui sont les suivants :

- Le modèle d'arbitrage n'indique pas quel est le nombre de facteurs communs influençant les rentabilités des actifs financiers et quels sont les facteurs économiques influençant ces rentabilités ;

- La relation finale est approximativement vérifiée car la diversification des risques spécifiques est approximativement réalisée. Même si cette approximation est faible, elle est à l'origine de plusieurs problèmes lors des tests du modèle d'arbitrage. Plusieurs auteurs[1] ont développé des modèles d'arbitrage avec des relations d'évaluation exactes.

Tout d'abord, en se fondant uniquement sur le principe d'arbitrage, il y a eu des tentatives d'évaluation de l'approximation faite dans le cadre de la version initiale du modèle d'arbitrage.

C'est le cas par exemple d'Huberman (1982) qui démontre que la moyenne des carrés des erreurs d'évaluation tend vers zéro quand le nombre d'actifs est grand.

$$1/N \quad \sum_{i=1}^{N} (\text{erreur d'évaluation de } i)^2 \longrightarrow 0$$

Le seul problème est qu'avec ce type de modèle l'erreur d'évaluation peut être importante pour certains actifs et qu'en conséquence certains rejets du modèle d'arbitrage peuvent être dus à ce problème. Il est donc impossible de tirer une conclusion d'un rejet d'un test du modèle d'arbitrage sous sa forme simple. Ces modèles qu'on appelle modèles d'arbitrage approximatif sont sur le plan de la testabilité de peu d'intérêt.

Ont alors été développés des modèles d'arbitrage dits « exacts » ou encore des versions d'équilibre du modèle d'arbitrage.

1.2. Les versions d'équilibre (exactes) du modèle d'arbitrage

Dans une première étape, le but était d'analyser quelles étaient les hypothèses supplémentaires nécessaires pour obtenir sans approximation, de façon exacte, la relation (5).

Tout d'abord, quel que soit le modèle d'équilibre considéré, il faut qu'en plus des hypothèses traditionnelles du modèle d'arbitrage le marché des actifs considérés soit à l'équilibre et efficient, et que les individus aient des fonctions d'utilité classiques du type « Von Neuman Morgensten ».

Nous constatons déjà que certains avantages de la version initiale du modèle d'arbitrage cités auparavant tels que la non utilisation du principe d'équilibre et les faibles hypothèses sur les fonctions d'utilité disparaissent.

Cependant, selon Chamberlain (1983), Connor (1984), Dybvig (1983), Grinblatt et Titman (1983) et Shanken (1987), les résultats dépendent des hypothèses faites sur les possibilités d'éliminer les différentes sources de risque, les facteurs communs et le facteur spécifique, lorsqu'on essaye de constituer à partir de l'ensemble des actifs le portefeuille avec le plus petit risque possible, appelé encore le portefeuille à variance minimale.

1. Citons entre autres Chamberlain G. et Rotschild M. (1983), Connor (1981), Dybvig (1983), Gilles et Leroy (1990), Grinblatt et Titman (1983) et Huberman (1982).

Trois cas peuvent être envisagés :

A) Cas 1 : il est possible de constituer un portefeuille à partir des *N* actifs risqués dont le risque total est nul.

C'est-à-dire qu'il est possible de constituer un portefeuille dont les coefficients de sensibilité aux différents facteurs communs sont nuls et dont le risque spécifique est nul.

Dans ce cas, par exemple Connor (1981), et compte tenu des hypothèses présentées auparavant, la version exacte de la relation (5) est obtenue :

$$E_i = \mu_0 + \mu_1 b_{i1} + \mu_2 b_{i2} + \ldots + \mu_K b_{iK} \tag{5-1}$$

B) Cas 2 : il est possible de constituer un portefeuille à variance minimale sans risque spécifique mais il n'est pas possible d'éliminer en totalité l'impact des différentes sources de risque systématique.

Le portefeuille constitué est un portefeuille à variance minimale dont l'exposition au risque spécifique est nul, et dont un des coefficients de sensibilité aux facteurs communs est différent de zéro.

Ceci serait dû au fait qu'il y a un facteur économique, par exemple la production industrielle, qui influence tous les actifs de la même manière et dans le même sens. Dans ce cas, les coefficients de sensibilité des actifs à ce facteur commun sont tous proches de un. Il est pratiquement alors impossible de construire un portefeuille sans risque. On obtient un portefeuille dit à variance minimale qui n'a pas de risque spécifique et qui a un degré d'exposition à un des facteurs communs différent de zéro.

La relation d'évaluation des actifs financiers est alors la suivante :

$$E_i = E_1 b_{i1} + E_2 b_{i2} + \ldots + E_K\, b_{iK} \tag{5-2}$$

où E_K est la rentabilité attendue sur le portefeuille K dont la sensibilité aux facteurs autres que le facteur K est nul et au facteur K est égal à un, et dont le risque spécifique est nul.

C) Cas 3 : il n'est pas possible de constituer un portefeuille à variance minimale sans risque spécifique et sans risque systématique.

Le portefeuille avec la variance la plus faible conserve toujours une exposition différente de zéro à au moins l'un des facteurs communs et son risque spécifique est différent de zéro.

Si nous appelons ce portefeuille à variance minimale le portefeuille z, nous obtenons la relation suivante :

$$E_i = E_z + (E_1 - E_z)\, b_{i1} + (E_1 - E_z)\, b_{i2} + \ldots + (E_1 - E_z)\, b_{iK} \tag{5-3}$$

où E_z est la rentabilité attendue sur le portefeuille à variance minimale.

Ainsi, tout test du modèle d'arbitrage consiste en un test d'une des trois relations exactes du modèle que nous venons de présenter ; ce qui revient à dire qu'un test du modèle d'arbitrage est un test de la version initiale de Ross et des hypothèses supplémentaires faites pour obtenir une relation exacte.

Pour compléter cette partie, il faut préciser qu'il existe des versions intertemporelles et des versions internationales du modèle d'arbitrage qui ne sont pas développées ici.

2. Les analyses empiriques du modèle d'arbitrage

Tester le modèle d'arbitrage, c'est sous sa forme la plus simple, tester la relation (5) ou (6), mais plus exactement une des relations (5-1), (5-2) ou (5-3).

Pour ceci, peuvent être utilisées deux approches qui ont été développées dans le cadre des tests empiriques du modèle d'équilibre des actifs financiers (MEDAF). La première est inspirée de la méthodologie de Fama-MacBeth (1973), et la seconde de Gibbons (1982) et de Gibbons, Shanken et Ross (1987).

La première consiste à vérifier que les primes de risque exigées par les investisseurs averses au risque sont non nulles, en régressant en coupe instantanée les rentabilités moyennes des actifs sur les coefficients de sensibilité des actifs, préalablement estimés.

La deuxième approche teste une restriction imposée par le modèle d'arbitrage sur le modèle statistique des rentabilités. En l'occurrence, la deuxième méthode consiste, après avoir construit des portefeuilles d'actifs qui dupliquent les facteurs (appelés encore portefeuilles de base), à régresser les rentabilités par excès[1] des actifs sur les rentabilités par excès de ces portefeuilles de base, et à vérifier la nullité de la constante de la régression. Contrairement à la première approche, il s'agit d'une régression en série temporelle.

Ces deux approches exigent au préalable, soit d'identifier les sources de risque, soit d'estimer les coefficients de sensibilité. Deux possibilités existent pour ceci :

- La première fait appel aux techniques de l'analyse factorielle ou de l'analyse en composantes principales qui permettent de calculer les coefficients de sensibilité (mesures du risque) de chaque actif à partir des matrices de covariance-variance des rentabilités. Ces méthodes ne révèlent pas l'identité des facteurs.
- La seconde, moins rigoureuse, fait appel à l'intuition économique. Elle consiste à suggérer un ensemble de variables macro-économiques et à estimer les coefficients de sensibilité, en régressant les rentabilités des actifs sur ces variables macro-économiques. On ne peut toutefois être certain d'avoir identifié correctement toutes les variables macro-économiques.

Le plan de cette partie consacrée à l'analyse empirique du modèle d'arbitrage est comme suit. Le premier point est consacré au problème de l'estimation des facteurs et des coefficients de sensibilité, et aux avantages et inconvénients des différentes méthodes utilisées. Le deuxième point traite des tests du modèle d'arbi-

1. Nous entendons par rentabilité par excès la rentabilité de l'actif considéré moins la rentabilité de l'actif sans risque.

trage à l'aide des régressions en série temporelle et en coupe instantanée. Le troisième et dernier point présente les résultats des deux études. Une synthèse des résultats est présentée en conclusion.

2.1. Détermination des facteurs et des coefficients de sensibilité

Les tests empiriques du modèle par arbitrage supposent l'estimation préalable des facteurs ou des coefficients de sensibilité associés avec les facteurs. Deux approches sont possibles pour les obtenir. La première, statistique, repose sur les techniques d'analyse de données, telle l'analyse factorielle ou l'analyse en composantes principales. Cette approche permet de calculer les coefficients de sensibilité associés avec les facteurs, puis de créer des portefeuilles d'actifs qui dupliquent les facteurs. La seconde, pragmatique, fait appel à l'intuition économique. Partant de la définition des facteurs dans le modèle par arbitrage et d'un modèle simple d'évaluation des actifs financiers, on cherche à déduire un ensemble de variables macroéconomiques pertinentes susceptibles d'agir sur les prix des actifs. Ces deux approches sont détaillées ci-dessous.

A) Estimation statistique des facteurs et des coefficients de sensibilité

L'estimation statistique des facteurs et des coefficients de sensibilité par la méthode de l'analyse factorielle est brièvement discutée ici.

Imaginons un ensemble d'actifs financiers de taille N où les actifs sont indicés par i, avec $i = 1, ..., N$. Supposons que l'on observe les rentabilités de ces actifs pendant T périodes, R_{it}, avec $t = 1, ..., T$, où les rentabilités sont calculées de façon journalière, hebdomadaire ou mensuelle. Soit R la matrice de taille $N \times T$ des rentabilités des N actifs sur les T périodes et $\underline{\Sigma}$ la matrice de variance-covariance des rentabilités de taille $N \times N$.

Après avoir spécifié un nombre de facteurs égal à K, l'analyse factorielle décompose la matrice de variance-covariance des rentabilités en deux sources de risque, l'une systématique provenant des facteurs et l'autre spécifique aux actifs. Plus précisément,

$$\underline{\Sigma} = \underline{B}\,\underline{\cap}\,\underline{B}' + \underline{D} \qquad (7)$$

où

$\underline{B}$ est la matrice $(N \times K)$ des coefficients de sensibilité aux différentes sources de risque systématique des N actifs.

$\underline{\cap}$ est la matrice $(K \times K)$ de variance-covariance des facteurs.

$\underline{D}$ est une matrice diagonale $(N \times N)$ qui a sur sa diagonale les variances des risques spécifiques des N actifs.

L'analyse factorielle permet donc d'estimer les coefficients de sensibilité des actifs aux K facteurs communs. Remarquons toutefois qu'elle ne fournit pas la matrice $(K \times T)$ des réalisations des facteurs communs. Ceux-ci peuvent cependant être calculés à partir des différentes matrices des coefficients de sensibilité aux risques systématiques $\underline{B}$ et des variances des risques spécifiques $\underline{D}$. Par exemple, il est possible de construire K portefeuilles, dits « portefeuilles de base » qui dupliquent les facteurs. Pour ce faire, il suffit de créer des portefeuilles diversifiés qui 1) minimisent le risque spécifique, 2) ont une mesure du risque systématique égale à un avec un des facteurs communs et nulle avec les autres facteurs, et 3) coûtent un franc.

On cherche donc le vecteur de pondération $\underline{w}_j$, avec $j = 1, ..., K$ de taille N, solution du problème de minimisation sous contraintes suivant,

$$\text{Min } \underline{w}_j' \, \underline{D} \, \underline{w}_j \tag{8}$$

sous les contraintes

$\underline{w}_j' \, \underline{b}_K = 0$ quel que soit $j \neq k$

$\underline{w}_j' \, \underline{b}_j = 1$

$\underline{w}_j' \, \underline{1} = \underline{1}$

où $\underline{b}_j$ est le vecteur de taille N composé des coefficients de sensibilité des actifs au facteur commun j.

Une des difficultés associées à cette méthode est celle de la détermination du nombre de facteurs. Rappelons que le modèle d'arbitrage définit un facteur commun comme une source de risque systématique et non diversifiable commune à tous les actifs financiers. Or, l'analyse factorielle identifiera comme facteur commun toute source de covariation entre les rentabilités des N actifs. En particulier, elle peut retenir comme facteur commun un facteur économique qui influence seulement un sous-ensemble des actifs financiers considérés. Par exemple, le prix du pétrole qui influence surtout les valeurs pétrolières sera retenu comme facteur commun, alors qu'il n'influence pas certaines valeurs mobilières et que le risque introduit par ce facteur est peut-être diversifiable. Il n'y a donc pas forcément identité entre la définition des facteurs au sens de l'analyse factorielle et au sens du modèle d'arbitrage.

En conclusion, l'analyse factorielle ou toute autre méthode statistique d'analyse des données permet de calculer les coefficients de sensibilité des actifs, puis de construire des portefeuilles qui dupliquent les facteurs. Ceci permet de valider le modèle par arbitrage soit par des régressions en coupe instantanée en utilisant les coefficients de sensibilité estimées, soit par des régressions en série temporelle en utilisant les portefeuilles de base qui dupliquent les facteurs. Le seul problème est que la notion de facteurs communs n'est pas forcément la même dans les modèles statistiques utilisés et dans le modèle d'arbitrage.

B) Détermination pragmatique des facteurs : l'approche variable macro-économique

Une approche différente de celle suggérée ci-dessus consiste à essayer de déterminer par une méthode intuitive les sources de risque qui affectent les rentabilités des actifs financiers. Leur caractère systématique et non diversifiable limite le champ d'investigation. Les facteurs, au sens du modèle d'arbitrage, ne peuvent être que des variables macro-économiques. Il reste donc à identifier celles qui sont pertinentes.

Chen, Roll et Ross (1986) ont été les premiers à suggérer cette approche. Partant d'un modèle simple d'évaluation des actifs financiers qui donne le prix d'une action comme étant égal à la somme des flux de liquidités nets anticipés actualisés, ils déduisent que les forces systématiques qui agissent sur les cours, donc sur les rentabilités, sont celles qui affectent le taux d'actualisation et les flux de liquidités nets anticipés. Le taux d'actualisation est égal à la somme du taux d'intérêt sans risque, qui reflète entre autres l'inflation anticipée, et d'une prime de risque qui dépend du degré d'aversion au risque des agents économiques. Le taux d'actualisation dépend également du moment où les flux de liquidités nets sont perçus. Il va donc dépendre des taux d'intérêt des différentes échéances. Cette analyse du dénominateur du modèle d'évaluation, à savoir le taux d'actualisation, suggère comme variables macro-économiques pertinentes 1) le niveau des taux d'intérêt, 2) le taux d'inflation anticipé, 3) une mesure du degré d'aversion au risque des agents et 4) une mesure de la pente de la courbe des taux. Le numérateur du modèle d'évaluation, les flux de liquidités nets, va dépendre des mêmes ou d'autres variables macro-économiques. Chen, Roll et Ross (1986) proposent le taux d'inflation anticipé et le taux de croissance du PNB comme les principaux déterminants des flux de liquidités nets anticipés.

Après avoir identifié un ensemble de variables macro-économiques censées influencer les rentabilités des actifs financiers, il reste à trouver des séries statistiques disponibles pour les mesurer, des « proxies », et à estimer leurs innovations, puisque seules les composantes non anticipées ont une influence sur les rentabilités des actifs. Pour ceci, les auteurs utilisent soit un modèle économique, c'est le cas pour l'inflation non anticipée, soit des méthodes statistiques basées sur les processus ARIMA. Les coefficients de sensibilité, ou mesures de risque, des actifs peuvent être obtenues en régressant avec des séries temporelles les rentabilités des actifs financiers sur les composantes non anticipées des variables macro-économiques.

Cette approche pragmatique, qui a le mérite d'être simple, manque de rigueur scientifique. Nous ne sommes pas sûr d'avoir bien identifié les facteurs communs, et ensuite d'avoir estimé correctement leurs variations non anticipées.

2.2. Les tests du modèle d'arbitrage

Deux possibilités existent pour valider le modèle d'arbitrage. La première consiste à régresser en coupe instantanée les rentabilités moyennes des actifs financiers sur les coefficients de sensibilité estimés, et à vérifier que les primes de risque ainsi obtenues sont non nulles. La seconde consiste à vérifier une contrainte imposée par le modèle d'arbitrage. Nous allons maintenant présenter en détail ces deux méthodes.

A) Régression en coupe instantanée des rentabilités moyennes sur les coefficients de sensibilité estimés

La première étape consiste à estimer pour les N actifs considérés la moyenne des rentabilités journalières, hebdomadaires ou mensuelles sur une période donnée.

$$R_i = 1/T \sum_{t=1}^{T} R_{it}, \; i = 1, \; ..., \; N \tag{9}$$

Les coefficients de sensibilité estimés proviennent soit de l'analyse factorielle, soit de l'analyse économique par régression des rentabilités des actifs sur les innovations des variables macro-économiques. Dans une économie à K facteurs, chaque actif financier est caractérisé par un vecteur de K coefficients de sensibilité estimés, appelées b_{ik}. Le modèle d'arbitrage est alors testé en regardant si les coefficients de la régression suivante sont non nuls.

$$R_i = \mu_0 + \mu_1 b_{i1} + \mu_2 b_{i2} + \ldots + \mu_K b_{iK} + \varepsilon_i \tag{10}$$
$$i = 1, \; ..., \; N.$$

Le modèle d'arbitrage est rejeté si μ_0 est différent du taux de rentabilité de l'actif sans risque ou si les primes de risque $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_K$ sont toutes nulles.

Il est également possible dans cette régression de rajouter comme variables explicatives, d'autres mesures du risque dont on sait a priori qu'elles ne sont pas pertinentes dans le cadre du modèle d'arbitrage, par exemple la variance totale de l'actif ou la capitalisation boursière de la société.

Désignons par Φ_i une telle variable et effectuons la régression en coupe instantanée suivante :

$$R_i = \mu_0 + \mu_1 b_{i1} + \mu_2 b_{i2} + \ldots + \mu_K b_{iK} + \delta \Phi_i + \varepsilon_i \tag{11}$$
$$i = 1, ..., N$$

Dans ce cas, le modèle d'arbitrage est rejeté si la constante de la régression μ_0 est différente de la rentabilité de l'actif sans risque ou si toutes les primes de risque $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_K$, sont toutes nulles ou si le coefficient δ est différent de zéro.

Notons que cette régression en coupe instantanée pose de nombreux problèmes économétriques qui dépassent le cadre de cet article.

B) Régression en série temporelle des rentabilités des actifs sur les rentabilités des portefeuilles qui dupliquent les facteurs

Contrairement à l'approche précédente qui repose sur des régressions en coupe instantanée, la méthode de validation du modèle d'arbitrage repose ici sur des régressions en série temporelle. Il est en effet possible de montrer que le modèle d'arbitrage impose une contrainte sur le modèle statistique des rentabilités.

Supposons qu'il existe un actif sans risque et que les portefeuilles qui dupliquent les facteurs, appelés « portefeuilles de base » soient estimés sans erreur. Considérons maintenant la régression des rentabilités en excès du taux sans risque d'un actif, ou d'un portefeuille d'actifs financiers, la variable expliquée, sur les rentabilités en excès du taux sans risque de ces portefeuilles de base, les variables explicatives,

$$R_{it} - R_{ft} = \alpha_i + \sum_{j=1}^{K} b_{ij}\ (R_{bjt} - R_{ft}) + \varepsilon_{it} \qquad t = 1, ..., T \tag{12}$$

où R_{it}, R_{ft} et R_{bjt} désignent à l'instant t les rentabilités respectives de l'actif i, de l'actif sans risque f et du portefeuille de base b_j ($j = 1, \ \ , K$).

Alors, le modèle d'arbitrage impose une contrainte sur la constante α de cette régression qui doit être nulle pour tous les actifs i. Le fait de trouver un α_i statistiquement différent de zéro pour un seul actif suffit à invalider le modèle d'arbitrage si l'on se réfère à l'équation (5-1).

La contrainte de nullité de la constante est en général testée non pas sur des actifs individuels mais sur des portefeuilles d'actifs financiers. Un nombre limité de portefeuilles compris selon les études entre 5 et 20 est créé à cet effet, et un test multivarié du type statistique de Fisher est employé pour tester si le vecteur des constantes est égal au vecteur nul. Ces portefeuilles ne sont toutefois pas créés par hasard. Ils sont généralement construits selon un critère, tel que la capitalisation boursière, l'appartenance à un secteur industriel, le risque total de l'actif, etc.

Prenons l'exemple du critère taille. Il est bien connu qu'un modèle comme le MEDAF n'évalue pas correctement les sociétés à faible capitalisation boursière ou autrement dit que la constante de la régression en série temporelle suivante

$$R_{it} - R_{ft} = \alpha_i + b_{ij}\ (R_{mt} - R_{ft}) + \varepsilon_{it} \tag{13}$$

est positive et statistiquement différente de zéro lorsque les R_i correspondent aux rentabilités d'un portefeuille à faible capitalisation boursière. Dans cette régression, R_{mt} est la rentabilité du portefeuille de marché à l'instant t.

Le même type de test peut être appliqué au modèle d'arbitrage. Nous allons maintenant présenter les résultats des analyses empiriques.

2.3. Les résultats des tests empiriques

La validité du modèle d'arbitrage a fait l'objet de nombreuses recherches. Les résultats de deux études sont présentées ci-dessous. Elles reposent sur des méthodologies différentes. Les facteurs sont supposés connus dans l'une et inconnus dans l'autre. La première est celle de Chen, Roll et Ross (1986) qui ont été les premiers à suggérer un ensemble de facteurs économiques et à tester l'hypothèse jointe de la validité du modèle d'arbitrage et de l'identification correcte des facteurs. Cette hypothèse jointe est testée en vérifiant que les primes de risque associées avec les variables macro-économiques sont non nulles à l'aide d'une régression en coupe instantanée. La seconde est celle de Lehmann et Modest (1988) qui testent la contrainte imposée par le modèle d'arbitrage sur le modèle statistique des rentabilités, à savoir la nullité de la constante dans la régression en série temporelle.

A) L'étude de Chen, Roll et Ross (1986)

Cette étude se déroule en trois étapes. Elle est effectuée sur la période 1965-1984 scindée en quatre sous-périodes sur des cours boursiers mensuels.

Tout d'abord, les auteurs suggèrent un ensemble de variables macro-économiques susceptibles d'expliquer les rentabilités des actions. Ce sont :

- le taux de croissance de la production industrielle (MP) ;
- le taux de variation mensuelle de l'inflation anticipée (DEI) ;
- le taux de croissance mensuelle de l'inflation non anticipée (UEI) ;
- une prime de risque qui reflète le degré d'aversion au risque des agents, estimée comme la différence entre les taux de rentabilité des obligations d'Etat sans risque et les obligations privées de rating BAA (URP) ;
- une prime de risque liée à la pente de la courbe des taux d'intérêt, estimée comme la différence entre les taux de rentabilité des obligations d'échéance longue émises par le gouvernement et les taux de rentabilité des bons du trésor (UTS).

Ensuite, ils extraient les composantes non anticipées de ces variables à l'aide de modèles économiques et de modèles ARIMA, et calculent à l'aide de la régression suivante en série temporelle, les coefficients de sensibilité de chaque action associés avec chacune des variables macro-économiques.

$$R_{it} = \alpha + b_{i1}\, MP_t + b_{i2}\, DEI_t + b_{i3}\, UI_t + b_{i4}\, URP_t + b_{i5}\, UTS_t + \varepsilon_{it} \qquad (14)$$
$$t = 1, \ldots, 60$$

Notons que les rentabilités observées, la variable expliquée de la régression, ne sont pas celles d'actions individuelles mais celles de portefeuilles d'actions créés selon le critère de la capitalisation boursière. Vingt portefeuilles sont ainsi constitués. La régression en série temporelle est effectuée sur chacun de ces vingt portefeuilles. Cette procédure génère une matrice de taille 20 × 5 des coefficients de sensibilité estimés. Cette régression est également calculée en y incluant le taux de rentabilité d'un indice boursier comme variable explicative supplémentaire.

Enfin, ils testent la validité du modèle d'arbitrage en régressant en coupe instantanée les rentabilités moyennes des vingt portefeuilles sur les coefficients de sensibilité estimés lors de l'étape précédente. Le but est de tester si les primes de risque estimées associées aux différentes variables macro-économiques sont non nulles.

$$R_i = \mu_0 + \mu_1\, b_{i1} + \mu_2\, b_{i2} + \ldots + \mu_K\, b_{iK} + \varepsilon_i \qquad (15)$$
$$i = 1, \ldots, 20$$

Les variables macro-économiques pertinentes sont celles qui ont des primes de risque μ_j statistiquement différentes de zéro. Chen, Roll et Ross (1988) trouvent qu'en dehors du taux de variation mensuelle de l'inflation anticipée, les variables macro-économiques décrites ci-dessus sont pertinentes. Il est intéressant de constater que d'autres variables comme les innovations des taux de croissance du prix du pétrole ou d'un indice de la consommation ne sont pas pertinentes. Il en est de même avec l'indice boursier car s'il explique effectivement une partie importante des variations des portefeuilles d'actions, la prime de risque associée à ce facteur boursier n'est pas statistiquement différente de zéro.

Le test de Chen, Roll et Ross (1986) est a priori assez concluant.

B) L'étude de Lehmann et Modest (1988)

C'est l'étude la plus récente, la plus approfondie et la plus sophistiquée sur le plan économétrique de toutes les recherches empiriques menées sur la validité du modèle d'arbitrage. Elle répond aux nombreux problèmes économétriques posés par les études antérieures, en particulier celle de Roll et Ross (1980), de Dhrymes, Friend et Gultekin (1984).

Cette étude se divise en trois étapes. Elle est effectuée sur la période 1963-1982 scindée en quatre sous-périodes. Les coefficients de sensibilité d'un échantillon de 750 actions américaines sont d'abord calculés au moyen de l'analyse factorielle en ayant préalablement spécifié un nombre de facteurs. Celui-ci prend successivement les valeurs 5, 10 et 15. Cette technique est appliquée à des matrices de variance-covariance calculées à partir des rentabilités journalières dans chacune des quatre sous-périodes. Les portefeuilles qui dupliquent les facteurs communs, dits portefeuilles de base sont alors construits. Il y a autant de portefeuilles de base que de facteurs communs, soit 5, soit 10, soit 15. Enfin, les auteurs construisent un certain nombre de portefeuilles, 5 ou 20, selon trois critères différents que sont la capitalisation boursière, la variance et le taux de coupon (D/C) des actifs. Ils régressent alors en série temporelle les rentabilités de ces portefeuilles en excès du taux sans risque sur les taux de rentabilité des portefeuilles de base en excès du taux sans risque. Cette régression du type de l'équation (12) est effectuée soit sur les cinq, soit sur les vingt portefeuilles construits. Lehmann et Modest tentent de valider le modèle d'arbitrage en testant la nullité du vecteur des constantes de la régression. Rappelons que le modèle n'est pas rejeté si le vecteur de constantes n'est pas statistiquement différent de zéro, l'équation testée étant l'équation (5-1).

Les résultats de ces tests sont assez mitigés. Lehmann et Modest (1988) montrent que l'une des plus grandes difficultés rencontrées lors de la validation du modèle est celle de la détermination du nombre de facteurs. Ils trouvent que le vecteur de constantes n'est pas statistiquement différent de zéro lorsque les portefeuilles sont créés en fonction de la variance et du taux de coupon de l'actif. En revanche, l'hypothèse de nullité est rejetée lorsque les portefeuilles sont créés en fonction de la capitalisation boursière. Le modèle d'arbitrage, comme le MEDAF, semble donc ne pas pouvoir expliquer cette anomalie du marché qu'est le facteur taille. Ce dernier résultat tend à invalider le modèle d'arbitrage.

Que peut-on conclure sur la validité du modèle d'arbitrage après plus de dix années de recherches empiriques sur le sujet ? Les résultats sont mitigés. Comme les tests empiriques du MEDAF qui se heurtent au problème de l'identification du portefeuille de marché, Roll (1977), les tests empiriques butent sur les problèmes du nombre de facteurs et également sur l'identification de ces facteurs. L'approche qui consiste à chercher des variables macro-économiques par tâtonnement manque de rigueur scientifique. On n'est pas sûr d'avoir identifié correctement les facteurs. Il s'agit en outre d'un test d'une hypothèse jointe de la validité du modèle et de l'identification correcte des facteurs. Quant à l'approche statistique qui repose sur l'analyse factorielle, elle pose de nombreux problèmes économétriques.

Les résultats obtenus à ce jour nous montrent que le modèle par arbitrage comme le MEDAF est incapable d'expliquer des anomalies telles que l'effet taille.

Examinons maintenant quelles sont les utilisations possibles du modèle d'arbitrage en gestion de portefeuille.

3. Des exemples d'utilisation du modèle d'évaluation par l'arbitrage (M.E.A.) en gestion de portefeuille

Dans le cadre du modèle d'arbitrage, gérer un portefeuille consiste à fixer les valeurs des coefficients de sensibilité aux différents facteurs communs du portefeuille que l'on désire construire, à estimer la rentabilité anticipée du portefeuille et éventuellement à examiner si la rentabilité ex-post peut être différente de la rentabilité anticipée.

Plusieurs stratégies sont envisageables :

3.1. La plus simple, qu'on pourrait qualifier de passive,

est de reproduire les facteurs communs, en constituant des portefeuilles de base avec les coefficients de sensibilité aux facteurs communs autres que le facteur considéré nuls, avec le coefficient de sensibilité au facteur considéré égal à un, et dont les risques spécifiques sont les plus faibles.

La richesse est alors répartie entre ces différents portefeuilles de base. Cette répartition est fonction de la rentabilité anticipée désirée. Les poids des différents portefeuilles de base sont égaux aux coefficients de sensibilité présentés auparavant, par exemple avec la relation (5-2).

$$E_i = E_1\, b_{i1} + E_2\, b_{i2} + \ldots + E_K\, b_{iK} \qquad (5\text{-}2)$$

3.2. Une stratégie active consiste

après avoir construit les portefeuilles de base et identifié les facteurs économiques, à se positionner sur les facteurs économiques dont les primes de risque sont fortes ou susceptibles de croître si leur impact est positif sur la rentabilité.

Par exemple, si on se réfère à l'analyse de Chen, Roll et Ross (1986) et de Fontaine (1988), le facteur économique le plus important est la production industrielle. Elle correspond au premier facteur commun représenté par un des portefeuilles de base.

Si vous anticipez une hausse plus forte de la production industrielle que celle anticipée par le marché, vous allez à la limite investir toute votre richesse dans le portefeuille de base reproduisant le comportement de la production industrielle, voire même emprunter pour investir dans ce portefeuille.

3.2. Des stratégies indicielles sont aussi envisageables

Elles peuvent être de deux sortes :

A) Cas 1

- Vous décidez de construire un portefeuille qui reproduit le portefeuille de marché. C'est-à-dire qu'initialement vous adoptez une stratégie passive dans le cadre du MEDAF, mais votre but est de faire mieux que le portefeuille de marché en terme de rentabilité tout en ayant le même risque relatif (bêta = 1).

Vous pouvez alors utiliser le modèle d'arbitrage. En effet, il est possible de construire plusieurs portefeuilles avec un bêta de un. Ces portefeuilles sont identiques dans le cadre du MEDAF mais ils sont différents dans le cadre du modèle d'arbitrage.

Vous retiendrez alors le portefeuille qui est censé augmenter le plus, compte tenu de vos prévisions sur les différents facteurs économiques.

Prenons le tableau ci-joint avec trois portefeuilles de bêta = 1.

Exemple de trois portefeuilles de bêta = 1

FACTEURS MEA Portefeuilles	FACT 1 Production	FACT 2 Inflation	FACT 3 Structure à terme des taux
Portefeuille1	0,5	0,3	0,1
Portefeuille 2	0,2	– 0,7	– 0,4
Portefeuille 3	1	0,5	0,3

Si par exemple, vous attendez une forte variation à la hausse de la production, vous allez plutôt choisir le portefeuille 1.

B) Cas 2

Vous pouvez adopter une stratégie strictement indicielle dans le cadre du modèle d'arbitrage, par exemple du type préconisé et utilisé par Roll et Ross.

Dans ce cas, il faut estimer 1) les coefficients de sensibilité de l'indice de référence et des différents actifs aux différents facteurs communs du modèle d'arbitrage, 2) les primes de risque associées aux différents facteurs économiques.

Le but est de construire un portefeuille qui a les mêmes coefficients de sensibilité que l'indice mais avec une rentabilité plus élevée.

Pour ceci, Roll et Ross, compte tenu de certaines hypothèses faites sur le comportement des facteurs, maximisent la probabilité que le portefeuille construit batte l'indice d'un certain montant ε.

L'analyse du portefeuille construit indique que celui-ci est composé des titres qui ont des sensibilités importantes aux facteurs économiques qui présentent les primes de risque les plus élevées.

Les résultats effectifs montrent aussi que trois années de suite, la rentabilité du portefeuille est, après frais de transaction, supérieure à celle de l'indice utilisé (le Standard and Poor 500) d'un peu plus de 1,2 %.

Conclusion

A priori, l'avantage du modèle d'arbitrage est que le portefeuille de marché ne joue aucun rôle et qu'en conséquence, les problèmes de testabilité associés au modèle d'équilibre des actifs financiers ne se posent pas.

En revanche, dans le modèle d'arbitrage, se posent les problèmes du nombre des facteurs communs censés influencer l'ensemble des actifs et de l'identification de ces facteurs.

A notre avis, les problèmes posés par les facteurs communs sont moins graves que les problèmes posés par le portefeuille de marché. En effet, la difficulté de mesurer le portefeuille de marché empêche de tester le MEDAF, c'est la testabilité du modèle qui est remise en question. Il est pratiquement impossible de déduire quelque chose d'un rejet ou d'un non rejet d'un test du modèle d'équilibre des actifs financiers. Par contre, un rejet du modèle d'arbitrage indique que celui-ci n'est pas valide et/ou que les facteurs sont mal identifiés tandis qu'un non rejet du modèle d'arbitrage indique que sa validité et la bonne identitification de certains facteurs communs ne sont pas remises en cause.

Il faut noter que si la relation théorique n'est pas exactement vérifiée, elle risque encore moins de l'être sur le plan empirique si un facteur commun est omis. En effet, si un facteur commun est oublié, il est considéré empiriquement comme un facteur spécifique et par conséquent, les termes spécifiques du portefeuille d'arbitrage ne se compensent pas. Un rejet du modèle d'arbitrage peut alors être causé par une mauvaise détermination du nombre de facteurs, et plus précisément par une sous-évaluation du nombre de facteurs. A priori, il vaut mieux surestimer le nombre de facteurs communs que le sous-estimer, sinon un test de contrainte n'est pas pertinent.

Les tests classiques sur les primes de risque pour le modèle d'arbitrage sont assez favorables, ce qui n'est pas le cas pour les tests plus élaborés sur les contraintes du modèle d'arbitrage.

Ces derniers tests indiquent que les modèles dits exacts ou d'équilibres du modèle d'arbitrage représentés par la relation (5-1), sont rejetés. De plus, ils indiquent que les versions exactes du modèle d'arbitrage n'expliquent pas des anomalies telles que l'effet taille.

Quant aux tests de la relation (5-3), ils posent le problème de déterminer le portefeuille à variance minimale.

En résumé, les tests du modèle d'arbitrage sont mitigés. Les tests concluant à un non rejet sont faibles sur le plan statistique. Quant aux rejets du modèle par des tests plus élaborés, ils sont peut-être dus à une mauvaise détermination des facteurs communs.

Les tests ne permettant pas de trancher entre le modèle d'arbitrage et le modèle d'équilibre des actifs financiers, il est préférable, à défaut d'un autre modèle, de les considérer de façon complémentaire, comme nous avons pu le suggérer dans la troisième partie sur la gestion de portefeuille.

BIBLIOGRAPHIE

BROWN D., WEINSTEIN M. (1983) "A New Approach to Testing Asset Pricing Models : the Bilinear Paradigm", *J. of Finance*, juin, 711-743.

CHAMBERLAIN G. (1983) "Funds, Factors and Diversification in Arbitrage Pricing Models", *Econometrica*, 1305-1323.

CHAMBERLAIN G., ROTHSCHILD M. (1983) "Arbitrage and Mean/Variance Analysis on Large Markets", *Econometrica*, septembre, 1281-1304.

CHEN K., ROLL R., ROSS S. (1986) "Economic Forces and the Stock Market : Testing the APT and Alternatives Asset Pricing Theories", *J. of Business*.

CONNOR G.(1981) *A Factor Pricing Theory for Capital Assets*, Cahier de recherche, Nortwestern University.

DHRYMES P., FRIEND I, GULTEKIN M. (1984) "A Critical Reexamination of the Empirical Evidence on the Arbitrage Pricing Theory", *J. of Finance*, juin, 323-350.

DYBVIG P. (1983) "An Explicit Bound on Individual Assets Deviations from APT Pricing in a Finite Economy", *J. of Financial Economics*, décembre, 483-496.

FAMA E., MAC BETH J. (1973) "Risk, Return and Equilibrium : Empirical Tests", *J. of Political Economy*, mai, 607-636.

FONTAINE P. (1985) "La théorie de l'arbitrage et l'évaluation des actifs financiers : une alternative au MEDAF, une application à la gestion de portefeuille", *R. du Financier*, avril, 16-24.

FONTAINE P. (1988) *Arbitrage et évaluation internationale des actifs financiers*, Economica, Paris.

GIBBONS M. (1982) "Multivariate Tests of Financial Models", *J. of Financial Economics*, mars, 3-27.

GIBBONS M., ROSS S., SHANKEN J. (1987) *A Test of the Efficiency of a Given Portfolio*, Unpublished research paper n° 853, Graduate School of Business, Stanford University.

GILLES C., LEROY S. (1990) *On the Arbitrage Pricing Theory*, Cahier de recherche, University of Santa Barbara, California, à paraître dans *J. of Economic Theory*.

GRINBLATT M., TITMAN S. (1983) "Factor Pricing in a Finite Economy", *J. of Financial Economics*, décembre, 497-507.

HUBERMAN G. (1982) "A Simple Approach to Arbitrage Pricing Theory/", *J. of Economic Theory*, octobre, 183-191.

JOBSON J ; (1982) "A Multivariate Linear Regression Test for the Arbitrage Pricing Theory", *J. of Finance*, septembre, 1037-1042.

LEHMANN B., MODEST D. (1988) "The Empirical Foundations of the Arbitrage Pricing Theory", *J. of Financial Economics*, 213-254.

ROLL R., ROSS S. (1980) "An Empirical Investigation of the Arbitrage Pricing Theory", *J. of Finance*, décembre, 1073-1103.

ROLL R., ROSS S. (1984) "The Arbitrage Pricing Theory Approach to Strategic Portfolio Planning", *Financial Analyst Journal*, mai, 14-26.

ROSS S. (1976) "The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing", *J. of Economic Theory*, décembre, 341-360.

SHANKEN J. (1987) "Multivariate Proxies and Asset Pricing Relations : Living with the Roll Critique", *J. of Financial Economics*, 91-110.