JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

HÉLYETTE GEMAN

La représentation des marchés dans la modélisation probabiliste en finance

Journal de la société statistique de Paris, tome 133, nº 4 (1992), p. 123-137

<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1992__133_4_123_0>

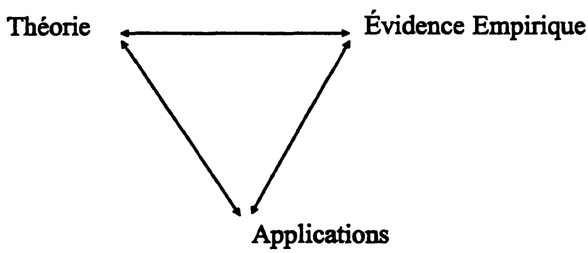
LA REPRÉSENTATION DES MARCHÉS DANS LA MODÉLISATION PROBABILISTE EN FINANCE

par Hélyette GEMAN
(ESSEC)

1. Introduction

L'extraordinaire développement des marchés et nouveaux instruments financiers au cours des trente dernières années a été accompagné au même rythme par le développement de la théorie financière, des méthodes de valorisation d'actifs par arbitrage et de la gestion quantitative de portefeuilles. Comme le physique et la biologie – avec des enjeux probablement moins nobles mais certainement colossaux –, la finance est un domaine où la frontière entre théorie et pratique est peu nette et certainement éphémère.

D'une certaine façon, la théorie avait en fait précédé la pratique et les résultats de Markowitz sur la frontière efficiente ou les travaux de Malkiel (« *A random walk down Wall Street* »), publiés il y a plus de trente ans étaient en avance sur l'explosion des fonds de placement de tous genres proposés aux investisseurs. Mais depuis une trentaine d'années on peut dire que la double bijection



prévaut avec une remarquable stabilité. Les professionnels offrent sans cesse sur les marchés de gré à gré des produits nouveaux - voire exotiques - nés de leur imagination et de leur perception des besoins des investisseurs et des entreprises et, immédiatement, la valorisation de ces instruments devient pour les universitaires et les « Quants » des institutions financières un exercice à résoudre dans les plus brefs délais ; pour les uns et les autres, la part de défi intellectuel est difficile à discerner de la composante de prestige (ou même de publicité) pour l'institution. Le fameux problème des options Asiatiques, discuté plus en détail ci-dessous, en est un exemple frappant : ces options, apparues sur les marchés OTC au début des années 1987,

Journal de la Société de Statistique de Paris, tome 133, n° 4, 1992

représentent aujourd'hui l'essentiel des options négociées sur les produits pétroliers, sur les matières premières et sur les taux de change et constituent par conséquent un volume de titres et un volume financier extrêmement importants. Cependant, malgré les nombreux articles publiés sur le sujet par les universitaires et les praticiens pendant ces quatre dernières années (Kemna - Vorst 1987/1990, Geman - Yor 1991/1992; Levy 1992), aucune formule exacte de valorisation, ayant le caractère « magique » de celle de Black et Scholes pour les options ordinaires, n'a été trouvée à ce jour et surtout, le problème de la couverture de ces options est loin d'être résolu dans son ensemble.

Dans la suite, cet exposé évitera délibérément les développements mathématiques ou techniques (qui pourront être trouvés dans les références bibliographiques ci-jointes) et proposera plutôt quelques idées, à partir d'une réflexion en finance qui a tenté de se placer à la lisière des mondes académique et professionnel. Le point qui ne sera pas discuté, parce que incontestable aux yeux de l'auteur, est le bien fondé de l'utilisation des processus stochastiques dans la modélisation financière pour intégrer la dimension temporelle de l'analyse des phénomènes aléatoires, comme cela a été le cas dans la physique moderne. Cela ne veut pas dire nécessairement qu'apparaît dans les phénomènes financiers une intervention du « Hasard », mais plutôt qu'on observe les phénomènes à un niveau « macroscopique », ne permettant pas de saisir précisément les petites perturbations microscopiques sous-jacentes.

Ces processus stochastiques permettent de formaliser l'évolution des systèmes de prix et des taux d'intérêt, au-delà du message clairement réducteur de l'espérance dans la représentation d'une grandeur aléatoire, et de pouvoir définir une gestion dynamique du risque de taux ou d'un portefeuille ; les processus particuliers que sont les portefeuilles autofinançants fournissent, en conjonction avec la théorie de l'arbitrage, la valorisation des actifs contingents ainsi que le message fondamental de la *couverture.*

Nous allons d'abord étendre la problématique et examiner plus généralement les techniques à la fois méthodologiques et numériques efficientes à ce jour.

2. Les outils de la finance

2.1. Les équations aux dérivées partielles

L'approche EDP, qui a gagné sa notoriété en 1973 par l'article de Black et Scholes, consiste fondamentalement à faire disparaître le terme aléatoire qui intervient dans le processus de diffusion du mouvement du sous-jacent dans un portefeuille constitué à partir de ce sous-jacent et de l'actif contingent à valoriser. Ce portefeuille, par définition « localement » sans risque (i.e., pendant un intervalle de temps *dt*), doit avoir un rendement égal[1] au taux sans risque à condition qu'il n'y

1. NDR. Les auteurs sont seuls responsables de leur texte. En conséquence le *Journal* s'incline devant la volonté de l'auteur de récuser la traduction « *Rentabilité* » pour « *Return* » et de conserver le terme ambigu de « *rendement* ».

ait pas d'opportunité d'arbitrage, et cet argument fournit l'équation aux dérivées partielles satisfaite par le prix de l'actif contingent. Suivant la nature de l'actif contingent étudié, la résolution de cette EDP est plus ou moins simple.

2.2. L'approche probabiliste

Cette approche a connu un développement majeur depuis les travaux fondamentaux de Harrison-Kreps en 1979 et Harrison-Pliska en 1982. Elle consiste à valoriser un actif contingent comme espérance de sa valeur terminale, espérance calculée sous la probabilité « risque-neutre » qui rend les prix actualisés des actifs (contingents ou non) des martingales, si on se place dans la situation de marchés complets. Cette méthode, qui met en lumière le portefeuille auto-finançant dupliquant l'actif conditionnel a le mérite de fournir ainsi la couverture de cet actif. De façon générale, l'approche probabiliste donne des résultats plus directement interprétables d'un point de vue financier. Notons enfin que le théorème de Feynman-Kac permet de faire le lien entre l'approche EDP et l'approche probabiliste.

Une autre méthode importante de valorisation des options, et qui permet en particulier de prendre en compte des dividendes payés de façon discrète, est celle du modèle binomial de Cox-Ross-Rubinstein.

2.3. L'outil numérique en Finance

a) Que ce soit pour la valorisation des options ou l'étude des instruments dérivés des taux d'intérêt, la mise en place d'arbres binomiaux pour représenter une diffusion (à condition de vérifier la validité de la discrétisation en termes d'absence d'arbitrage ou de limites obtenues dans le passage du discret au continu) est devenue une pratique courante chez les opérationnels.

b) De la même façon, l'usage des simulations, qui fait depuis longtemps partie des techniques classiques dans la Gestion Globale du Risque de Bilan (simulations sur les taux, simulations d'activité), s'est étendu au calcul de volatilité ou à la valorisation d'actifs contingents par la méthode de Monte-Carlo.

Notons que dans tous les cas, l'approche numérique est facilitée par la rapidité de calcul des nouveaux ordinateurs, voire par les calculs en parallèle (connection machine).

2.4. L'apport des statistiques :

a) La première contribution de l'outil statistique est de mettre en évidence par des tests les limites des modèles.

b) Même si les statistiques ne peuvent répondre dans le cas général au problème de la valorisation (par exemple, la variance historique devrait être corrigée pour prendre en compte le fait que le trading a lieu en temps discret), elles sont très utiles pour faire des ARMA en régime stationnaire sur des causalités du type taux-CAC

40 ; elles donnent aussi des messages importants dans l'étude des « écarts » entre prix théoriques et prix observés.

Enfin, les statistiques sont indispensables dans la mise en évidence (par analyse en composantes principales par exemple) des « bonnes variables » d'état à introduire dans les modèles, de taux d'intérêt en particulier.

2.5. Un premier exemple : les options asiatiques

Si le sous-jacent a un processus de prix représenté par S_t, le flux terminal général pour le call asiatique s'écrit max $(A_T - k, 0)$, où k est le prix d'exercice, T la maturité et A_T la moyenne arithmétique de S_t calculée sur un sous-intervalle de $(0,T)$. Ceci explique en particulier que ce type d'options rend beaucoup plus difficiles les manipulations de prix que des organismes ayant une part de marché significative pourraient être tentés d'effectuer le jour de la maturité sur le sous-jacent (indice, produit pétrolier etc...) de l'option.

Notons que l'approche EDP utilisée par Kemna et Vorst qui, dès 1987, se sont intéressés à cette question, fournit une équation aux dérivées partielles plus compliquée que celle de Black & Scholes, en particulier à cause de la présence de la variable supplémentaire A, et que cette EDP ne peut non plus être résolue par une méthode de différences finies. Par conséquent, la solution proposée par Kemna et Vorst a été de procéder à des simulations de Monte-Carlo pour valoriser l'option.

Les autres méthodes utilisées par les différents auteurs sur ce sujet sont en général des méthodes d'approximation : approximation de la loi de A_T par une loi log-normale (sans qu'aucune justification ne soit avancée), approximation de la moyenne arithmétique par la moyenne géométrique pour le calcul de l'option ou pour le calcul des moments. Ces différentes méthodes d'approximation ont au moins deux faiblesses majeures : elles en proposent pas, dans la plupart des cas, de majorant de l'erreur commise ; elles ne donnent pas non plus directement de message pour la couverture puisque l'approximation d'une fonction f par une fonction g peut être bonne alors que celle de f' par g' désastreuse !

Geman-Yor (1991) fournissent par une approche probabiliste le calcul des moments « exacts », c'est-à-dire les moments de tous ordres de la moyenne arithmétique (sachant que, stricto sensu, la condition pour que ces moments donnent la loi de façon unique n'est pas satisfaite). Notons qu'un des apports de cette méthode exacte est de montrer, avec des arguments probabilistes simples, que l'option asiatique (dans le cas non trivial où la moyenne n'a pas encore commencé à courir) peut être parfois plus chère que l'option standard dans le cas des options sur devises, sur spreads pétroliers ou de façon plus générale, toutes les fois que le rendement instantané « risque-neutre » du sous-jacent est négatif. Les articles publiés jusque-là sur ce type de sous-jacent affirmaient que l'option asiatique était toujours moins chère, voire considérablement moins chère !

Les deux autres exemples que nous allons examiner maintenant plus en profondeur sont ceux qui s'imposaient naturellement dans une discussion sur la validité de la modélisation financière par les processus stochastiques, à savoir le modèle de Black et Scholes pour la valorisation des options européennes sur actions et d'autre part les principaux modèles représentant la dynamique de la gamme des taux d'intérêt.

3. Le modèle de Black et Scholes

Notons d'abord qu'un argument méthodologique de fond pour expliquer l'importance générale de l'étude des options est que la valorisation d'un actif contingent se ramène presque toujours à un calcul de prix d'option, qu'il s'agisse d'instruments financiers à taux variable, de swaptions ou de contrats d'assurance à taux garanti.

Toute réflexion sur l'utilisation des processus stochastiques en finance passe inévitablement à un instant donné par l'examen de la célèbre formule de Black et Scholes (1973), à laquelle il convient d'associer les remarquables travaux de Merton (1973), éminemment proches dans le temps et dans la teneur des messages.

Que l'on en juge par le nombre de fois où elle est citée dans des articles académiques ou par le nombre de logiciels de valorisation d'options sur actions fondés sur elle, l'immense succès de cette formule est indéniable. Ceci conforte d'ailleurs l'observation faite par certains, à savoir qu'il n'est pas surprenant que cette formule donne des valeurs si proches de celles observées sur les marchés à partir du moment où tous les intervenants l'utilisent. Sans tout à fait réfuter cet argument, on peut y répondre de plusieurs façons :

a) tout d'abord, des études empiriques ont montré que les options négociées à Chicago à la fin des années soixante et au début des années 1970 étaient échangés à un prix remarquablement proche de celui fourni par la formule de Black et Scholes. C'était le « bon » prix auquel les intervenants du marché acceptaient d'acheter ou de vendre.

b) le modèle sous-jacent, tout en étant « rudimentaire », possède néanmoins un certain nombre de propriétés, à la fois financières et mathématiques, qui peuvent expliquer le succès du résultat pour la valorisation des options sur actions et plus généralement, toutes les fois que le pay-off est une fonction convexe du sous-jacent.

3.1. La modélisation de $\frac{dS}{S}$

Le fait que les gens de marché perçoivent leur activité en termes de rendement conduisait naturellement à s'intéresser à $\frac{dS}{S}$; le fait que le risque soit mesuré en pourcentage de prix des actifs ou des portefeuilles gérés et perçu comme proportionnel au temps conduisait au mouvement brownien géométrique pour le sous-jacent (plutôt qu'au modèle de marche aléatoire, qui aurait probablement satisfait le monde académique). C'est donc le marché et sa perception des risques qui ont dicté la dynamique du sous-jacent.

La discussion du bien-fondé de l'hypothèse de normalité des rendements sera laissée de côté puisqu'elle est traitée dans un exposé parallèle. Dans une approche rapide de la question, l'on peut dire que l'épaisseur souvent observée des queues de distribution laisse à penser que les processus stables constituent certainement une piste intéressante ; en revanche, il ne semble pas à ce jour que les gens de marché soient prêts à renoncer à la variance, qui est leur indicateur de risque par excellence.

Notons enfin que l'étude de $\frac{dS}{S}$ permet l'utilisation de tests statistiques classiques puisque la considération du logarithme de grandeurs strictement positives conduit à la symétrisation de leur distribution.

3.2. Le caractère markovien du modèle

La définition bien connue d'un phénomène markovien est que la connaissance du passé du processus n'apporte aucune information sur son évolution future autre que celle contenue dans la valeur présente. Même si elle est une mauvaise nouvelle pour les techniques d'analyse chartistes, cette propriété correspond tout à fait à la réalité des marchés où il est rare de voir un gestionnaire ou un directeur financier prendre des décisions su rla base de taux d'intérêt ou de prix qui prévalaient un mois auparavant...

Dans le même ordre d'idées, il convient d'insister sur le caractère *instantané* de la représentation du rendement par μ et de la volatilité par σ et sur le caractère *conditionnel* de ces grandeurs. Il est clair que les décisions d'investissement et de choix de portefeuilles sont déterminées à partir de l'information disponible à un instant donné. En conséquence, il faut en retenir l'importance de la filtration F_t représentant cette information et conditionnellement à laquelle les espérances et variances seront calculées.

En résumé, dans la conduite indispensable des tests statistiques sur des données passées, il convient de se souvenir que l'on cherche des messages relatifs au futur, non seulement pour le drift μ (qui est par définition une espérance) mais aussi pour la volatilité σ qui n'est pas constante dans la réalité, et qui, malgré son nom de volatilité *implicite* parce que calculée par le marché dans le prix des options négociées la veille, n'en est pas moins exclusivement définie par l'intégrale des volatilités à venir jusqu'à la maturité de l'option.

3.3. Un processus de diffusion comme dynamique du prix du sous-jacent

Les propriétés de continuité des trajectoires de l'actif sous-jacent S et de l'expression du prix de l'option comme fonction non seulement continue mais différentiable de S ont permis, par le raisonnement fondamental d'arbitrage local, de mettre en évidence l'équation aux dérivées partielles que Black et Scholes ont résolue pour trouver la valeur de l'option. Notons que l'approche probabiliste eut donné le résultat encore plus aisément ; mais l'existence des dérivées partielles symbolise une dépendance « lisse » entre le prix du call C et le sous-jacent S, et garantit l'existence du fameux *delta*.

Ceci conduit à la propriété la plus remarquable de la formule de Black et Scholes – même si celle-ci n'a pas vraiment été soulignée par ses auteurs –, et qui a été plus clairement mise en lumière à partir du début des années 1980, à la fois dans les travaux de Leland et Rubinstein sur l'assurance de portefeuilles et dans les travaux de Harrison – Kreps et Harrison – Pliska sur la formalisation de la théorie de l'arbitrage et l'introduction de la notion de portefeuille auto-finançants. La formule de Black et Scholes donne directement la décomposition du prix de l'option en son portefeuille de couverture, qui consiste à investir $N(d_1)$ dans l'actif risqué sous-jacent et $N(d_2)$ dans des instruments du marché monétaire de valeur faciale K (ceux-ci étant remplacés par l'obligation de même maturité que l'option dans un contexte de taux d'intérêt stochastiques). Ce portefeuille est aussi le portefeuille auto-finançant qui duplique le call et dont l'ajustement convenable au cours du temps en fonction des mouvements du marché et de la volatilité est crucial en assurance de portefeuilles (Geman 1991).

Le caractère instantané de l'adéquation des poids du portefeuille montre la nécessité d'une couverture « physique » (par des options à court terme ou des contrats futures) si l'on veut ne pas être obligé de changer sa position au milieu d'un krach, et telle qu'elle est mise en œuvre dans la « deuxième génération » des stratégies d'assurance de portefeuilles.

Notons enfin que ce portefeuille de couverture est bien sûr crucial pour les opérationnels mais aussi pour les théoriciens car il représente le portefeuille répliquant l'actif contingent (en se plaçant dans un contexte de marchés complets). La convergence de la théorie et de la pratique financières sur un problème fondamental pour les deux approches mérite là encore d'être notée.

3.4. La robustesse de la formule de Black et Scholes

Notons pour terminer la « robustesse » de la formule de Black et Scholes à deux des hypothèses simplificatrices du modèle :

- Le taux d'intérêt est supposé constant pendant la durée de vie l'option. Dans la réalité, les taux d'intérêt varient, et de façon non nécessairement déterministe. On peut néanmoins observer que d'une part, la sensibilité du prix de l'option au taux d'intérêt faible que d'autre part, la formule de Merton donne une extension immédiate de la formule de Black et Scholes à un environnement de taux d'intérêt stochastiques.
- La volatilité est supposée constante alors qu'elle ne l'est pas en pratique. Mais une démonstration assez simple montre que même si la volatilité est aléatoire, l'existence d'un encadrement de la volatilité entre deux grandeurs constantes fournit l'encadrement du prix de l'option entre les deux prix correspondants. En conséquence, en situation « normale », l'erreur sur la valorisation de l'option ne sera pas très importante.

3.5. Les pistes à approfondir

La non-prise en compte des coûts de transaction dans la valorisation des options européennes et la validité de l'hypothèse de marchés complets (ou plus exactement de l'absence d'opportunité d'arbitrage), cruciales pour l'établissement de la formule de Black et Scholes étaient des sujets peu discutés jusqu'ici. La qualité des recherches théoriques récentes sur la question permet d'espérer l'obtention dans un proche avenir de résultats opérationnels.

4. La modélisation de la gamme de taux

4.1. La problématique générale

Autant la formule de Black et Scholes jouit-elle d'une situation de quasi-monopole et, dans tous les cas, de référence dans la valorisation d'options non exotiques sur actions ou sur indices, autant la modélisation de la structure par termes des taux d'intérêt est-elle perçue de façon moins unanime. Plus de modèles ont été proposés pour expliquer la gamme des taux que n'importe quel autre sujet en finance, et la dynamique de la gamme constitue depuis longtemps l'un des problèmes les plus importants de la recherche théorique et pratique.

On peut donner à cela deux types de raisons :

1. Les enjeux financiers y sont infiniment plus importants puisque les mouvements des taux d'intérêt ont un impact sur les portefeuilles d'obligations à taux fixe, à taux variable, l'énorme marché des swaps de taux d'intérêt etc. et une modélisation « supérieure » de la dynamique de la gamme aura des conséquences considérables.

2. Le choix du bon modèle est plus complexe parce que les risques tels qu'ils sont perçus par les praticiens sont plus difficiles à formaliser et partant, à modéliser (d'Archimbaud, Geman, Portait, 1990).

Avant de rentrer dans le détail des modèles, commençons par quelques observations générales :

a) Tout d'abord, il est clair que des méthodes élémentaires (telles que résolution de systèmes d'équations échelonnés, interpolation linéaire ou lissage statistique) suffisent à la reconstitution de la gamme des taux zéro-coupon prévalant à l'instant d'analyse et donc fournissent l'information nécessaire à la valorisation des instruments à taux fixe.

De surcroît, les taux **forwards**, relatifs à des instants futurs et à des maturités quelconques, sont contenus dans les taux zéro-coupon observés aujourd'hui et constituent une première information essentielle sur les taux futurs correspondants. Que la théorie économique sous-jacente soit la théorie des anticipations ou la théorie des primes, l'*espérance* du taux futur (à une prime près, le cas échéant) est fournie par le taux forward. Notons déjà ici une différence importante entre la courbe des taux forwards et la courbe des swaps, puisque cette dernière contient en plus une information sur la **volatilité** des taux d'intérêt non révélée par la courbe des taux forwards.

Cette structure par termes des taux de swaps est en fait l'instrument de travail pour beaucoup de praticiens.

b) La modélisation de la *dynamique* de la gamme devient indispensable dès que l'on étudie la **sensibilité** des instruments précédents à des mouvements de taux d'intérêt ou que l'on aborde la valorisation des actifs conditionnels (obligations à taux variable, caps, floors, swaps, etc. – Voir Annexe 2).

c) Pour être admissible aujourd'hui, un modèle de gamme de taux doit satisfaire les conditions suivantes :

- Être parfaitement ajusté à la structure par termes des taux d'intérêt prévalant à l'instant d'analyse, laquelle est le paramètre de marché le plus clairement observable ;
- Avoir un nombre de paramètres assez grand pour engendrer toutes les déformations observées de la gamme et permettre de quantifier le *risque* correspondant ;
- Fournir un cadre unifié de valorisation de tous les instruments dérivés des taux d'intérêt et donner un sens à l'agrégation des sensibilités ;
- Intégrer la notion de structure par termes de volatilités (Geman et Portait, 1989) ;
- Permettre de définir la *couverture* sur n'importe quelle période, question au final la plus cruciale non seulement pour les professionnels de la finance mais aussi pour les responsables des grandes entreprises, à la fois dans le cadre domestique et international.

4.2. Les différents modèles de gamme des taux

Les premiers modèles de la gamme des taux zéro-coupon (modèle de Chambers, splines etc.) sont essentiellement des modèles où on se donne a priori une forme fonctionnelle des taux en fonction de la maturité, avec des paramètres qu'il convient de caler à partir des prix de marché.

Les modèles plus récents se sont fondamentalement intéressés à la *dynamique* de la gamme, mais selon deux approches différentes :

a) ceux qui identifient une ou plusieurs variables d'état (le taux court terme et un autre taux, en pratique) pour expliquer tous les mouvements de la gamme (Vasicek ; Brennan et Schwartz ; Cox, Ingersoll et Ross ; Black, Derman et Toy etc.). Ils permettent en particulier de représenter les structures « inversées » de la gamme que l'on a connues en France et en Europe ces dernières années (Voir Annexe 1). Le choix de ces variables explicatives ne peut être totalement arbitraire et, en particulier, doit prendre en compte la condition d'absence d'arbitrage.

b) ceux qui partent de la gamme des taux observés à l'instant d'analyse et lui imposent des déformations respectant l'absence d'opportunité d'arbitrage (Ho et Lee ; Heath, Jarrow et Morton).

Les modèles du premier type à un facteur sont grandement utilisés en pratique. Une explication majeure à cela est que ce sont à peu près les seuls qui fournissent des formules exactes dans la valorisation des différents actifs conditionnels.

La dynamique du taux court terme y est dirigée par un processus de diffusion de la forme

$$dr = (\alpha + \beta r)\, dt + \sigma r^{\gamma} dW$$

où $\gamma \in R^{+}$; α et $\beta \in R$

et dW représente le mouvement brownien.

Le cas $\beta = \gamma = 0$ correspond au modèle de Merton (1973) ; le processus stochastique dirigeant le taux court terme est simplement un mouvement brownien avec drift.

Le cas $\gamma = 0$ correspond au processus de Ornstein – Uhlenbeck utilisé par Vasicek (1977) pour mettre en évidence le prix d'équilibre des obligations zéro-coupon. Les propriétés remarquables induites par le caractère gaussien du modèle ont été récemment réexploitées par de nombreux auteurs pour valoriser les options sur obligations (Jamshidian, 1987-1989 ; El Karoui et Rochet, 1989), les options sur taux et sur futures (Perderson, Shiu et Thoracius, 1989 ; Hull et White, 1990), les obligations à taux variable et les swaps de taux d'intérêt (El Karoui et Geman, 1991).

Le cas $\gamma = \frac{1}{2}$ donne le processus en racine carrée proposé dans le modèle d'équilibre général de la structure des taux d'intérêt par Cox, Ingersoll et Ross en 1985. Ce modèle a aussi été grandement utilisé dans la valorisation d'instruments dérivés tels options sur obligations zéro-coupon (CIR 1985), les futures et options sur futures (Ramaswamy et Sundaresan, 1986).

Le modèle $dr = \sigma r dW (\alpha = \beta = 0, \gamma = 1)$ a été utilisé par Brennan et Schwartz (1977) et Dothan (1978) dans le développement de méthodes numériques de valorisation d'obligations comportant des clauses optionnelles.

Notons que l'importance de la structure des volatilités a été clairement mise en évidence par Heath, Jarrow et Morton (1988) ; ces derniers ont montré en particulier que, dans un cadre général, un modèle à un facteur vérifiant la condition (nécessaire) de non arbitrage local peut être défini soit de façon classique par le mouvement du taux court soit, de façon équivalente, en spécifiant la courbe des taux initiale et la structure de volatilités, c'est-à-dire la volatilité des taux forwards.

4.3. Les tests des modèles de gamme des taux

Ils consistent fondamentalement à étudier les différences entre les prix fournis par le modèle et les prix observés, les écarts entre prix de marché et prix calculés à partir du modèle étant considérés comme reflétant une faiblesse du modèle.

De surcroît, il est souvent procédé à des tests statistiques supplémentaires pour savoir si ces écarts ne sont pas accidentels et sont observés selon un schéma persistant (ce qui permettra de rechercher, comme le font certaines institutions, des arbitrages « au second ordre »).

Dans un article récent (avril 1991), Falstaff et alii observaient qu'il était difficile de comparer la qualité de ces modèles pour représenter les mouvements des taux d'intérêt car il n'y avait pas eu d'étude de performance comparative effectuée à l'intérieur d'un cadre unique. Eux-mêmes proposent dans cet article une étude économétrique comparant les différents modèles à un facteur décrits plus haut et représentés par la forme générale de la relation

$$dr = (\alpha + \beta r)\, dt + \sigma r^{\gamma} dW \tag{1}$$

Leurs conclusions sont assez troublantes dans le sens où la classification des modèles mise en évidence est quasiment inversée selon qu'ils s'intéressent aux taux d'intérêt réels ou aux taux d'intérêt nominaux (problématique dans laquelle les articles cités plus haut sont très rarement entrés) ; leur méthodologie qui consiste à estimer les paramètres de la relation (1) par une méthode dite « des moments généralisés », nécessite une hypothèse de stationnarité et d'ergodicité de la distribution conjointe des variations de taux d'intérêt.

Plus récemment (octobre 1991), David Heath et son étudiant Hugh Cohen ont publié les conclusions d'une longue étude (en fait la thèse de PHD de H. Cohen) consacrée à comparer les performances des différents modèles de taux d'intérêt. Ils commencent par observer que la plupart des tests pratiqués sur la gamme des taux sont statiques dans le sens où ils essaient de déterminer si, *à un instant donné*, les prix de marché peuvent être expliqués par le modèle ; et que, par ailleurs, les modèles ne fournissant pas de distribution de probabilité des prix, ne peuvent être testés par les méthodes statistiques classiques. En conséquence, ils proposent des tests « dynamiques » des modèles de la gamme des taux, lesquels nécessitent en fait une modélisation à deux niveaux :

- la modélisation de l'évolution des taux d'intérêt,
- la modélisation de l'évolution de l'écart entre les prix de marché et les prix fournis par le modèle.

Ce modèle « augmenté » a le mérite de fournir une distribution de probabilité pour les futurs prix de marché. A partir de là, deux types de critères sont utilisés pour tester le modèle :

- l'utilisation du critère de maximum de vraisemblance pour le modèle augmenté,
- l'étude de la performance des stratégies optimales au sens du modèle.

Dans cette approche assez convaincante, ils concluent d'une part à la supériorité des modèles à un facteur plus complexes sur des modèles plus simples et d'autre part au fait que la performance d'un modèle à deux facteurs – mesurée sur des stratégies d'investissement mettant en œuvre différents instruments dérivés des taux d'intérêt – ne se distingue pas de celle d'un modèle à un facteur (ce qui est probablement exact pour un certain nombre de problèmes sur les taux). Mais leur sentiment final est néanmoins que, en raison de l'analyse naïve de la variabilité des logarithmes des ratios de vraisemblance, aucun modèle des différentes classes étudiées ne peut être la « vraie » description probabiliste du marché.

En conclusion, nous pouvons faire deux observations :

- La première est que sur le sujet délicat des taux d'intérêt et où les enjeux sont énormes, il n'est pas clair que les universitaires et les opérationnels fassent état en temps réel de l'ensemble de leurs résultats ;
- la deuxième est que même si la modélisation de la dynamique de la gamme des taux a fait des progrès considérables ces quinze dernières années, il y a moins à ce jour d'unanimité sur « le » bon modèle à utiliser que sur la méthodologie et la formalisation de ce que l'on veut représenter. Non seulement, il y a divergence, aussi bien chez les praticiens que les théoriciens, sur le choix du sous-jacent dont on modélise la dynamique – taux d'intérêt ou prix d'obligations zéro-coupon – mais aussi sur la nature de ces taux ou de ces prix – spots ou forwards.

BIBLIOGRAPHIE

D'ARCHIMBAUD T., GEMAN H., PORTAIT R. (1990) "Une analyse générale du risque de taux", *Analyse Financière*, N^os 80 et 83.

BLACK F., SCHOLES M. (1973) "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *J. of Political Economy.*

BLACK F., DERMAN E., TOY W. (1990) "A One-Factor Model of Interest Rates and its Applications to Treasury Bond Options", *Financial Analysts Journal.*

BRENNAN M., SCHWARTZ E. (1979) "A Continuous Time Approach to the Pricing of Bonds", *J. of Banking and Finance.*

COHEN H., HEATH D. (1991) *Testing Models for Valuation of Interest Rate Dependent Securities*, Technical Report, Cornell University.

COX J., INGERSOLL J., ROSS S. (1985) "A Theory of the Term Structure of Interest Rates", *Econometrica.*

DOTHAN L. (1978) "On the Term Structure of Interest Rates", *J. of Financial Economics.*

DUFFIE D. (1990) "The Theory of Value in Securities Markets" *in Handbook of Mathematical Economics.*

CHAN K., KAROLY F., LONGSTAFF F, SANDERS A. (1991) *The Volatility of Short-Term Interest Rates*, European Finance Association Meeting, Rotterdam.

EL KAROUI N, GEMAN H. (1991) "A Stochastic Approach to the Pricing of Floating Rate Notes", *RISK.*

EL KAROUI N., ROCHET J.C. (1989) *A Pricing Formula for Options on Coupon Bonds*, Working Paper, GREMAQ, Toulouse.

GEMAN H.(1989) *The Importance of the Forward-Neutral Probability in a Stochastic Approach of Interests Rates*, Working Paper, ESSEC.

GEMAN H. (1991) "Portfolio Insurance and Synthetic Securities", *Applied Stochastic Models and Data Analysis.*

GEMAN H., PORTAIT R. (1989) *A Framework for Interest Rate Risk Analysis and Portfolio Management*, American Stock Exchange Colloqium, New York.

GEMAN H., YOR M. (1991) "Processus de Bessel et options asiatiques", *Notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences.*

GEMAN H, YOR M. (1992) "Bessel Processes, Asian Options and Perpetuities", *Annual Conference of the Financial Options Research Centre.*

HARRISON J., KREPS D. (1979) "Martingale and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets", *J. of Economic Theory.*

HARRISON J., PLISKA S. (1981) "Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading", *Stochastic Processes and their Applications.*

HEATH D., JARROW R., MORTON A. (1988) *Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates : A New Approach*, Working Paper, Cornell University.

HO T., LEE X. (1986) "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims", *J. of Finance.*

HULL J., WHITE A. (1990) "Pricing Interest-Rate Derivative Securities", *R. of Financial Studies.*

JAMSHIDIAN F. (1987) *Pricing Contingent Claims in the One-Factor Term Structure Model*, Working Paper, Merrill Lynch.

JAMSHIDIAN F. (1989) "An Exact Bond Option Formula", *J. of Finance.*

KEMNA A., VORST A. (1990) "A Pricing Method for Options Based on Average Asset Values", *J. of Banking and Finance.*

LEVY E. (1992) "Pricing Average Rate Currency Options", *The International Journal of Money and Finance.*

MARKOWITZ H. (1952) "Portfolio Selection", *J. of Finance.*

MERTON R. (1973) "The Theory of Rational Option Pricing", *Bell Journal of Economics.*

PERDERSON H., SHIU E., THORLACIOUS A. (1989) "Arbitrage Free Pricing of Interest Rate Contignent Claims", *Transactions of the Society of Actuaries.*

ROGER P. (1990) "Les Outils de la Modélisation Financière", *PUF*, Paris.

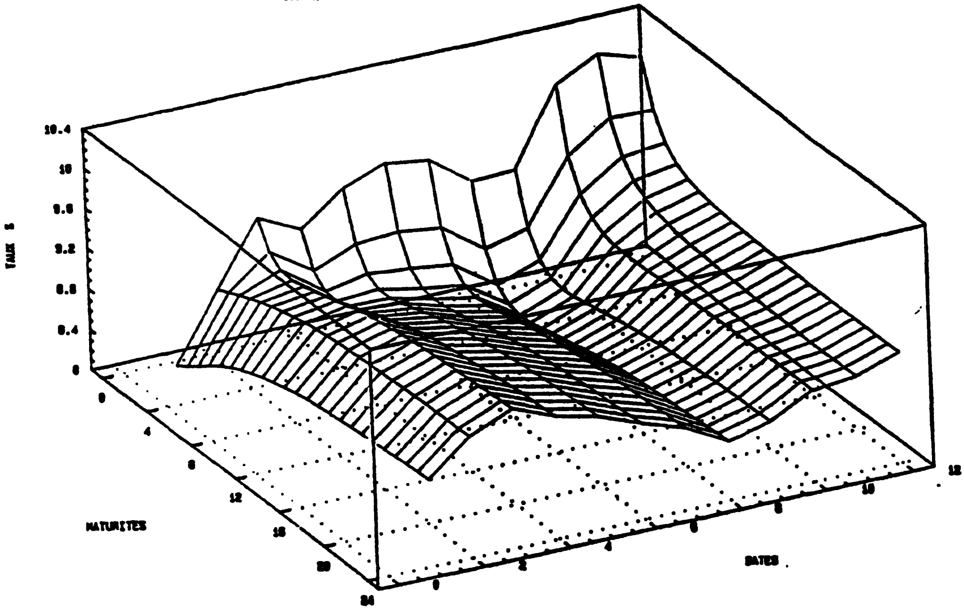
RUBINSTEIN M., LELAND H. (1981) "Replicating Options with Positions in Stock and Cash", *Financial Analysts Journal.*

VASICEK O. (1977) "An Equilibrium Characterization of the Term Structure", *J. of Financial Economics.*

Annexe 1

EVOLUTION GAMME DES TAUX DIRECTEURS DU MARCHE OBLIGATAIRE FRANCAIS

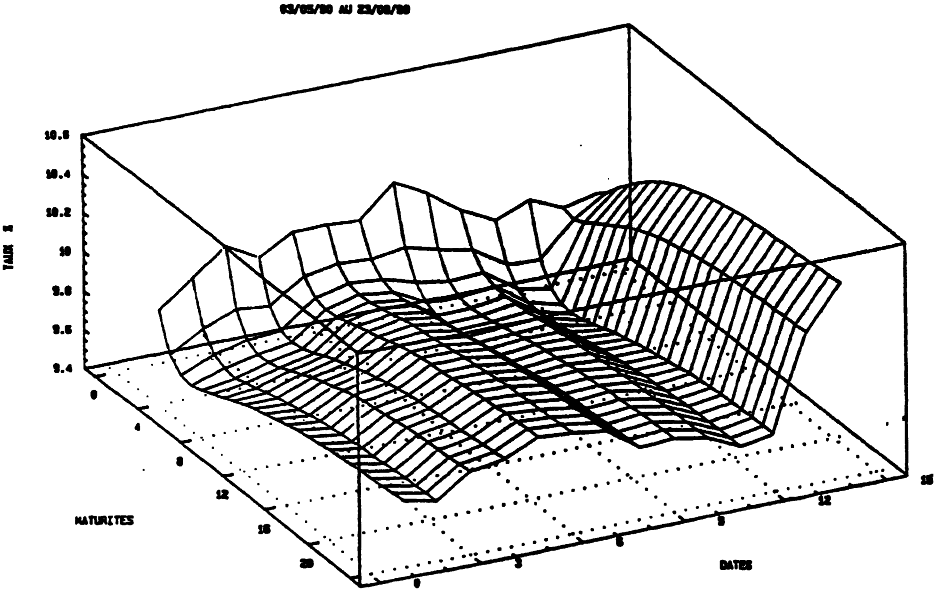
03/01/89 AU 29/12/89



Source CDC-RD Données lissées mensuelles

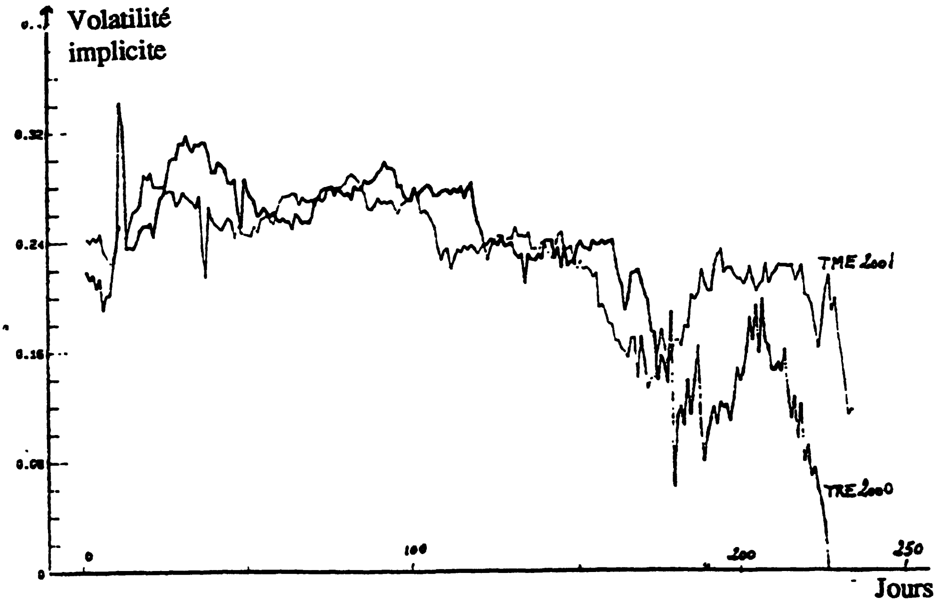
EVOLUTION GAMME DES TAUX DIRECTEURS DU MARCHE OBLIGATAIRE FRANCAIS

03/05/90 AU 23/08/90

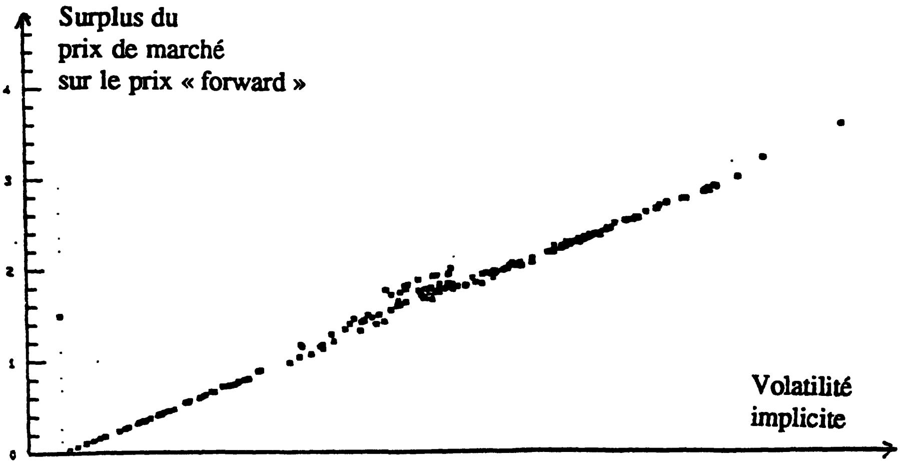


Source CDC-RD Données lissées hebdomadaires

Annexe 2



Volatilité implicite contenue dans les cours des obligations
à taux variable TRE 2000 & TME 2001 durant l'année 1989



Étude des obligations à taux variable TRE 2000 et TME 2001