JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

ISABELLE GIRERD-POTIN

Le rôle de l'estimation des variables. Rentabilité et risque dans les anomalies boursières liées à la taille et au P.E.R.

Journal de la société statistique de Paris, tome 133, nº 3 (1992), p. 3-33

<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1992__133_3_3_0>

I

ARTICLES

LE RÔLE DE L'ESTIMATION DES VARIABLES RENTABILITÉ ET RISQUE DANS LES ANOMALIES BOURSIERES LIÉES A LA TAILLE ET AU P.E.R.

par Isabelle GIRERD-POTIN
École Supérieure des Affaires de l'Université Grenoble 2

Résumé

Cette étude montre que, sur le marché français, les titres à faible capitalisation boursière ou à bas P.E.R. présentent des rentabilités anormales positives. Les anomalies constatées ne sont-elles pas seulement dues à des problèmes économétriques ou de calcul ? Il apparaît que les effets taille et P.E.R. ne proviennent pas du mode de calcul des rentabilités. Concernant le risque, un début d'explication des anomalies est fourni par l'instabilité des bêtas en fonction du niveau de la prime de risque de marché. La déviation de la normalité des distributions de rentabilités est mise en évidence et se prolonge logiquement par l'emploi d'estimateurs robustes et l'usage de tests non paramétriques. Les résultats montrent la faiblesse de l'effet taille et la persistance de l'effet P.E.R.

Introduction

La théorie de l'efficience des marchés financiers implique l'impossibilité de réaliser systématiquement des profits anormaux. Toute l'information étant immédiatement et intégralement incorporée dans les cours, personne ne doit « battre le marché » en moyenne sur longue période. Or, sur plusieurs marchés et à des époques différentes, investir de préférence dans les firmes à faible capitalisation boursière ou dans celles à bas P.E.R. a conduit à des rentabilités anormales positives[1]. Inversement, les portefeuilles de firmes à forte capitalisation boursière ou haut P.E.R. ont obtenu des rentabilités anormales négatives. Ces énigmes n'ont pas été résolues pour l'instant. En conservant l'hypothèse d'efficience des marchés, deux grands types d'explications

1. Pour les U.S.A., voir notamment Banz (1981), Basu (1977, 1983), Reinganum (1981) et pour la France, Hamon (1986), Hamon, Jacquillat, Derbel (1991).

peuvent être avancées : invalidité des tests empiriques ou invalidité des modèles rentabilité-risque. Le premier volet doit être considéré avant toute remise en cause des modèles. La mise en œuvre empirique peut être incorrecte en raison, soit d'une mauvaise transcription des variables rentabilité et risque, soit de l'emploi de méthodes économétriques inadaptées. Ce sont ces aspects que nous étudions ci-après en les illustrant par le cas français. Avec le CAPM comme modèle rentabilité-risque, les difficultés portent sur l'évaluation de la rentabilité et du bêta des titres ou portefeuilles. Le premier paragraphe sera consacré à la mesure des rentabilités, le deuxième étant réservé à l'estimation du bêta et aux problèmes économétriques de la régression.

En utilisant le CAPM, le raisonnement se fait implicitement dans un cadre moyenne-variance. En l'absence de spécification de la forme de la fonction d'utilité, il faut faire l'hypothèse que les distributions sont parfaitement décrites par l'espérance et la variance. En pratique, cela revient en général à supposer que les rentabilités suivent une loi normale. Face à la non-normalité de la distribution des rentabilités, deux attitudes sont possibles : la première estime que la non-normalité empêche de caractériser le risque par le bêta ou la variance et propose d'autres modèles rentabilité-risque ; la seconde considère que le cadre moyenne-variance reste valable à condition d'utiliser des estimations de rentabilité et du risque adaptées à la déviation de la normalité. Notre but n'étant pas ici de remettre en cause le modèle rentabilité-risque, nous privilégions la deuxième démarche. Le troisième paragraphe débute par des tests de normalité des distributions de rentabilité, se poursuit par l'estimation robuste des paramètres de rentabilité et de risque et s'achève par des tests non paramétriques sur les distributions des portefeuilles de firmes classées par taille ou P.E.R.

1. Mesure des rentabilités

Le calcul de la rentabilité d'une action met en rapport les revenus générés par cette action avec sa valeur d'origine. Les revenus se composent de deux éléments : plus-value en capital et dividendes. Il n'existe pas une façon unique de calculer la rentabilité d'un titre. De plus, lorsqu'on s'intéresse à un portefeuille, les manières d'agréger les rentabilités individuelles sont multiples.

1.1. Les formules de calcul

Pour un titre, la rentabilité au cours d'une période t se définit par le rapport des revenus générés pendant la période au prix de l'action en début de période :

$$R_{i,t} = (P_{i,t} - P_{i,t-1} + D_{i,t})/P_{i,t-1}\,.$$

Plutôt que de travailler sur les cours eux-mêmes, on utilise souvent le calcul en logarithmes :

$$\text{Log}\,(P_{i,t} + D_{i,t}) - \text{Log}\,(P_{i,t-1}).$$

Ceci supprime le lien mis en évidence par Moore (1964) entre la variance et le niveau du cours. Plus le niveau des cours est élevé, plus la variance est grande. L'emploi des logarithmes supprime cet effet. De plus, plusieurs travaux dont ceux de Daloz (1973) en France ont montré que les lois de distribution des taux de rentabilité sont symétriques et leptokurtiques. L'utilisation du logarithme népérien permet d'avoir des lois de distribution plus proches de la loi normale. Si les cours sont distribués lognormalement, alors les rentabilités logarithmiques sont distribuées normalement. En outre, les rentabilités logarithmiques répondent à une logique de temps continu et sont parfaitement additives sur des intervalles de temps successifs, ce qui n'est pas le cas des rentabilités discrètes. Il en résulte que, lorsque la normalité est exigée par un modèle, le choix de l'intervalle de temps est déterminant si les rentabilités sont discrètes alors que la normalité de la rentabilité logarithmique est indépendante de l'intervalle de temps considéré.

Concernant le calcul de la rentabilité moyenne d'un portefeuille sur plusieurs périodes, Roll (1983) démontre que la méthode retenue a un impact important sur le premium constaté pour les petites firmes. Avec des rentabilités calculées sur de petits intervalles de temps, trois calculs sont présentés. Considérons un échantillon de N titres. Supposons que les résultats de l'investissement sont observés toutes les τ périodes. La rentabilité moyenne du portefeuille sur τ périodes, R_{AR}, est dans le cas d'une moyenne arithmétique :

$$1 + R_{AR} = \left(1/(N \cdot \tau) \sum_{i} \sum_{t=1}^{\tau} (1 + R_{i,t})\right)^{\tau}$$

où $R_{i,t}$ est la rentabilité de l'action i au cours de la période t.

Si on considère les résultats d'un investissement réparti à parts égales entre les N actions et conservé pendant τ périodes, on choisira la moyenne achat-conservation définie par :

$$1 + R_{BH} = 1/N \sum_{i} \left(\prod_{t=1}^{\tau} (1 + R_{i,t})\right).$$

Enfin, la moyenne avec recomposition périodique du portefeuille donne la rentabilité d'un portefeuille formé en investissant le même montant dans chacune des N actions et recomposé à la fin de chaque période t pour maintenir constante les parts investies :

$$1 + R_{RB} = \prod_{t=1}^{\tau} \left(1/N \sum_{i} (1 + R_{i,t})\right).$$

Roll applique ces trois formules à l'étude de l'effet petite firme en faisant varier les intervalles de temps séparant deux observations des résultats de l'investissement (τ varie de un jour à un an). Par exemple, pour la méthode achat-conservation, si la période de révision est de un mois, une part égale est investie dans chaque action le premier jour du mois et les positions obtenues sont conservées pendant tout le mois. Les rentabilités de base sont journalières. La méthode de recomposition utilise les mêmes rentabilités mais, chaque jour, les positions sont révisées. Quant à la méthode arithmétique, elle consiste à faire la moyenne des mêmes rentabilités sur la durée d'un mois. La période d'étude s'étend de 1963 à 1981. Les différences moyennes annuelles entre les rentabilités des titres de l'AMEX et de ceux du NYSE sont observées. En ce qui concerne les calculs de moyenne arithmétique et de moyenne avec recomposition du portefeuille, l'intervalle de temps a peu d'importance. La différence moyenne annuelle est d'environ 15 %. Au contraire, lorsque le calcul de rentabilité suit une logique achat-conservation, cette différence est de l'ordre de 15 % sur période de révision journalière et de 7 % pour un intervalle de un mois et plus. Ces différences proviennent d'une dépendance sérielle dans les données sur actions individuelles[1]. Les résultats sur des portefeuilles de titres classés par taille et non plus sur des indices vont dans le même sens. La prime pour les petites firmes par rapport aux plus grandes est beaucoup plus faible et moins significative quand les rentabilités sont calculées avec la méthode achat-conservation[2].

Quelles sont les implications de ces résultats ? Si les données de base sont séparées par un petit intervalle de temps et si les moyennes calculées sont arithmétiques ou avec recomposition périodique du portefeuille, la prime obtenue surestime la récompense que les investisseurs peuvent attendre d'une position achat-conservation dans des petites firmes. Or, c'est la formule achat-conservation qui est la plus susceptible de refléter les comportements des investisseurs. Les conclusions des travaux sur l'effet petite firme doivent être analysées en tenant compte de la méthode de calcul des rentabilités. Cependant, le problème de l'effet taille n'est pas forcément résolu par cette remarque. Plusieurs articles sur cette question, et notamment l'article de Banz de 1981, traitent de données mensuelles et ne sont pas concernés par les remarques formulées ici.

En conclusion, la formule de calcul la plus adaptée pour les rentabilités des portefeuilles est une moyenne de type achat-conservation calculée sur rentabilités logarithmiques. A défaut d'une moyenne achat-conservation, les observations de cours servant au calcul des rentabilités des titres doivent être suffisamment espacées. En tenant compte de ces conclusions, des calculs de rentabilité des portefeuilles taille et P.E.R. sont effectués sur le marché français.

1.2. Rentabilités brutes des portefeuilles taille et P.E.R. en France

Avant de donner les résultats sur les rentabilités brutes, les données utilisées pour l'ensemble des travaux empiriques sont présentées.

1. Voir Roll (1983), p. 377.

2. Blume et Stambaugh (1983) parviennent aux mêmes conclusions : sur une période d'observation de un an, l'effet taille est deux fois plus faible avec un calcul de type achat-conservation qu'avec un calcul de rentabilité avec recomposition quotidienne des portefeuilles.

Données et constitution des portefeuilles

Les titres sur lesquels sont réalisés les tests comprennent les actions cotées au marché à règlement mensuel, à Paris et en province. Sur la période de base d'une année, seule les actions ayant été cotées pendant toute l'année sont conservées. L'exclusion des titres cotés au comptant a pour but d'éviter de superposer un éventuel «effet marché» aux anomalies étudiées. La période d'étude est comprise entre le 1er janvier 1977 et le 31 décembre 1987. Elle a été divisée en deux sous-périodes, 1977-1981 et 1982-1987. Le nombre de titres de l'échantillon varie selon les années entre 128 et 165. Pour l'effet P.E.R., seules les firmes ayant le 31 décembre comme date de clôture de l'exercice ont été retenues (le nombre de titres varie alors entre 115 et 150). Les calculs de rentabilités ont été effectués sur les cours de la base de données AFFI-SBF qui fournit également l'ensemble des opérations susceptibles d'affecter le calcul de rentabilités (dividendes, modifications de capital). Le pas choisi pour le calcul des rentabilités est le mois. L'indice de marché retenu est le CAC général. Le taux sans risque est le taux moyen mensuel du marché monétaire au jour le jour entre banques.

Le critère de taille est la capitalisation boursière définie comme le produit du nombre de titres ordinaires de la firme par le cours de la dernière bourse de l'année. La capitalisation ainsi calculée définit la classe de taille de la firme pour l'année suivante. Pour obtenir le P.E.R., le cours du titre le 31 décembre a été divisé par le bénéfice consolidé net par action pour l'année écoulée.

Pour l'étude de l'effet taille, les titres ont été répartis en dix portefeuilles par capitalisation boursière croissante. La période de base est l'année, la révision de la composition des portefeuilles se faisant chaque année au 31 décembre. Pour l'effet P.E.R., les sociétés ayant eu une perte sont regroupées dans un portefeuille unique. Les autres sont réparties dans neuf portefeuilles numérotés de 1 à 9, le portefeuille 1 comprenant les titres à plus bas P.E.R. et le portefeuille 9 ceux à plus hauts P.E.R.

Rentabilités brutes

Les capitalisations boursières et les rentabilités brutes sont données par le tableau 1 pour l'ensemble de la période (3 janvier 1977 au 31 décembre 1987)[1].

Les rentabilités brutes des portefeuilles sont données dans la troisième colonne. Le calcul s'effectue de la manière suivante : les rentabilités de base sont les rentabilités mensuelles discrètes de chaque titre : $R_{i,t} = (P_{i,t} + D_{i,t} - P_{i,t-1})/P_{i,t-1}$. Chaque mois, la rentabilité du portefeuille est la moyenne des rentabilités des titres le composant :

$$R_{p,t} = 1/n \sum_{i=1}^{n} R_{i,t}$$

où n est le nombre de titres du portefeuille.

1. Les résultats sont similaires sur les deux sous-périodes.

Les rentabilités mensuelles des portefeuilles sont ensuite transformées en rentabilités logarithmiques de façon à pouvoir les sommer dans le temps[1]. Le mode de calcul adopté est parfaitement cohérent avec celui de l'indice CAC ; c'est préférable pour les évaluations ultérieures des bêtas des portefeuilles.

Tableau 1. Effet taille : Capitalisations boursières et rentabilités brutes

Ensemble de la période (1977-1987) :

Portefeuille p	*Capitalisation boursière* (MF)	R_p	*F test* $R_p - R_{10} = 0$	T^2 *égalité des* R_p	σ_p
1	133,5	0,0205	5,88*	1,55	0,0677
2	252,2	0,0177	3,85		0,0670
3	389,4	0,0111	0,03		0,0707
4	547,2	0,0167	2,97		0,0696
5	736,3	0,0154	1,80		0,0648
6	987,4	0,0165	3,59		0,0609
7	1262,5	0,0159	2,74		0,0602
8	1673,1	0,0148	1,26		0,0615
9	2380,6	0,0122	0,07		0,0710
10	5165,4	0,0116			0,0679

* significatif à 5 %

Sur l'ensemble de la période, les petites firmes ont une rentabilité mensuelle moyenne de 2,05 % ; pour les plus grandes firmes elle n'est que de 1,16 %. La différence est significative au seuil de confiance de 5 %. Ce n'est pas le cas pour les portefeuilles 2 à 9 qui n'ont pas une rentabilité significativement différente du portefeuille 10. Un test multivarié d'égalité des rentabilités sur les dix portefeuilles ne permet pas de rejeter l'hypothèse nulle. Il s'agit du test de Hotelling qui permet de s'affranchir de l'hypothèse – faite en analyse de variance classique – d'égalité des variances et de nullité des covariances entre les rentabilités des portefeuilles. Les rentabilités sont supposées suivre une loi normale. L'hypothèse nulle et l'hypothèse alternative sont :

$$H_0 : R_1 = \ldots = R_{10}$$

$$H_1 : \exists\, i,j \text{ tels que } R_i \neq R_j .$$

1. Il s'agit alors d'une moyenne avec recomposition périodique du portefeuille (chaque mois) et non d'une moyenne achat-conservation. En fait, les rentabilités de base sont calculées sur une durée suffisamment longue (le mois) pour que l'écart entre les résultats des deux moyennes soit minime. Des vérifications effectuées sur des portefeuilles extrêmes l'ont confirmé.

Sur les différences de rentabilité des portefeuilles, on calcule la statistique suivante :

$$T^2 = N \cdot (R_1 - R_2 \ldots R_9 - R_{10})\, S^{-1} \cdot {}^t(R_1 - R_2 \ldots R_9 - R_{10})$$

où N est le nombre de données,

S est la matrice de variances-covariances des différences, estimée sur l'échantillon.

Sous H_0, $(N - 10 + 1) / (N - 1)(10 - 1)\, T^2$ suit une loi de Fisher à 9 (= 10 – 1) et $N - 9$ degrés de liberté.

Les rentabilités des portefeuilles taille ne sont pas régulièrement décroissantes du portefeuille 1 au portefeuille 10. En particulier, le portefeuille 3 a la rentabilité la plus faible. L'effet taille sur le marché à règlement mensuel se caractérise essentiellement par une rentabilité plus forte pour les plus petites firmes par rapport aux autres sociétés.

Pour l'effet P.E.R., le tableau 2 est conçu de la même manière que le tableau 1. Sur les portefeuilles 1 et 9 qui comprennent les firmes à plus bas et plus hauts P.E.R. positifs, l'écart de rentabilité brute mensuelle s'établit à 1,03 % (2 % contre 0,97 %). La rentabilité maximale est atteinte par un portefeuille intermédiaire, aussi bien sur l'ensemble de la période que sur les sous-périodes (portefeuille 2 ou 3). Les tests permettent de rejeter l'hypothèse d'égalité des rentabilités au seuil de signification de 1 %. Le découpage en sous-périodes (résultats non rapportés ici) montre que l'anomalie se manifeste surtout sur la deuxième sous-période. La rentabilité n'est pas une fonction décroissante du niveau de P.E.R. Une cassure dans les rentabilités se produit au niveau du portefeuille 5. La rétribution des portefeuilles est forte pour des niveaux de P.E.R. inférieurs au P.E.R. médian. Inversement, elle est faible pour des niveaux supérieurs ou égaux au P.E.R. médian. L'opposition ne se fait pas entre les portefeuilles extrêmes, mais entre les quatre premiers portefeuilles d'une part et les six derniers d'autre part. L'incertitude sur la qualité des anticipations des bénéfices au 31 décembre nous a conduit à recalculer les rentabilités des portefeuilles-P.E.R. formés trois mois après la clôture de l'exercice, soit le 1er avril. Au regard des obligations légales de publications, du comportement des entreprises en matière de diffusion d'informations et des anticipations des analystes, il est raisonnable de considérer que le bénéfice est connu à cette date. Les rentabilités brutes sont un peu différentes de ce que nous avons obtenu précédemment. Le portefeuille des firmes à P.E.R. négatif a une rentabilité nettement supérieure (1,64 % mensuel au lieu de 0,98 %), de même que celui à plus fort P.E.R. (1,38 % au lieu de 0,97 %). Les plus fortes rémunérations reviennent toujours aux portefeuilles 2 et 3 et 4 qui sont les seuls à avoir une rentabilité significativement différente de celle du portefeuille 9.

Les conclusions de ces premiers tests sur rentabilités non ajustées pour le risque peuvent se résumer ainsi : l'anomalie de la taille est faible et n'existe véritablement que pour le décile des plus petites firmes ; l'effet P.E.R. est significatif et se caractérise par l'opposition entre deux groupes : les titres en-dessus et en dessous du P.E.R. médian. Les anomalies existent-elles lorsque les rentabilités sont ajustées pour le risque systématique ? C'est l'objet de la deuxième partie.

Tableau 2. Effet P.E.R. : P.E.R. moyen et rentabilités brutes

Ensemble de la période (1977-1987) :

Portefeuille p	*P.E.R.*	R_p	*F test* $R_p - R_9 = 0$	T^2 *égalité des* R_p	σ_p
1	4,30	0,0200	8,34**	3,92**	0,0798
2	6,34	0,0200	10,43**		0,0677
3	7,81	0,0221	14,82**		0,0681
4	9,18	0,0207	13,06**		0,0619
5	10,51	0,0134	1,74		0,0608
6	12,05	0,0129	1,34		0,0597
7	13,62	0,0123	0,82		0,0664
8	16,84	0,0113	0,34		0,0628
9	30,00	0,0097			0,0616
10 (< 0)	/	0,0098	0,00		0,0811

* significatif à 5 %   ** significatif à 1 %

2. Mesure des bêtas et problèmes économétriques

Les écarts de rentabilité observés sur les portefeuilles ne sont peut-être que la conséquence d'un risque différent. Selon le CAPM, seul le risque systématique mesuré par le bêta mérite rémunération. Or, son calcul n'est pas simple. Les bêtas estimés varient avec l'intervalle de temps choisi pour le calcul des rentabilités. Le coefficient bêta est estimé le plus souvent par la méthode des moindres carrés ordinaires appliquée à l'équation du modèle de marché ou du CAPM. Les valeurs et les tests ne seront acceptables que si les termes d'erreur sont gaussiens, indépendants et homoscédatiques. Enfin, une difficulté supplémentaire est liée à la non constance des bêtas dans le temps. Dans ces conditions, comment bien calculer le bêta ?

2.1. Sensibilité des estimations du bêta à la durée de base du calcul des rentabilités

Pour estimer le bêta d'une action ou d'un portefeuille, les rentabilités utilisées peuvent être quotidiennes, hebdomadaires, mensuelles, annuelles, etc. Or, les bêtas changent avec l'intervalle de temps retenu. Nous en décrivons les causes et les solutions envisagées.

Causes des écarts dans les estimations

Des écarts dans les bêtas calculés sur des rentabilités de durées différentes apparaissent lorsque ce ne sont pas les rentabilités logarithmiques qui sont utilisées. De plus, les transactions peu fréquentes génèrent des biais dans l'estimation du bêta lorsque l'intervalle de temps est court.

Le bêta étant le rapport de la covariance de l'actif avec le marché à la variance du marché, le calcul sera indépendant de l'intervalle de temps utilisé pour calculer les rentabilités si la covariance et la variance changent proportionnellement lorsque le pas de calcul varie. Si les rentabilités logarithmiques sont utilisées, la valeur du bêta est indépendante du pas de calcul. En revanche, si l'on retient un calcul de rentabilité arithmétique, le bêta varie avec l'intervalle de temps[1]. Plus la période de calcul des rentabilités est longue, plus l'écart entre les bêtas extrêmes augmente. De plus, les écarts-types des estimateurs de bêtas ont tendance à augmenter avec la longueur de l'intervalle retenu pour le calcul des rentabilités (car le nombre de données utilisées est plus faible).

L'asynchronisme des données, résultant notamment de la faible fréquence de transactions, génère des biais dans l'estimation du bêta lorsque l'intervalle de temps est court. Si on utilise les cours de clôture, la source principale de biais lorsque les transactions sont peu fréquentes provient du fait que les prix enregistrés à la fin d'une période de temps peuvent être les prix d'équilibre résultant d'une transaction intervenue au cours (et non à la fin) de la période ou bien dans une période antérieure[2]. Fisher (1966) a fait remarquer qu'en conséquence, les rentabilités de l'indice sont correlées positivement et que la variance estimée des rentabilités de l'indice est biaisée à la baisse. Le deuxième biais porte sur la covariance des titres avec le marché : les actions qui sont peu fréquemment échangées connaissent une sous-estimation de leur covariance. Certaines valeurs réagissent aux mouvements du marché avec un ou plusieurs jours de décalage, l'ajustement des cours se fait avec retard. Le biais à la baisse de la covariance des actions fréquemment échangées est beaucoup plus petit. Ces biais font que le bêta estimé des titres peu négociés est anormalement bas. Comme la moyenne des bêtas de toutes les actions est l'unité, le bêta des titres fréquemment négociés est biaisé à la hausse.

Reilly et Wright (1988) montrent l'importance de la durée de base des calculs à partir de la constatation d'écarts entre les bêtas publiés par Value Line et Merrill Lynch. La période de calcul est de cinq ans dans les deux cas mais l'intervalle de temps pour le calcul des taux de rentabilité est le mois dans un cas et la semaine dans l'autre. L'intervalle retenu a un fort impact sur la distribution des bêtas individuels et encore plus sur les bêtas des portefeuilles. Les plus grandes firmes ont toujours des bêtas hebdomadaires supérieurs aux bêtas mensuels. Pour toutes les autres catégories de taille, c'est l'inverse et l'écart s'accroît pour les petites firmes.

---

1. La démonstration peut être consultée dans Handa, Kothari et Wasley (1989).

2. L'utilisation des cours d'ouverture conduit à une analyse similaire. L'asynchronisme se traduit alors par l'écart entre l'heure d'ouverture et l'instant de la première cotation. Hamon et Jacquillat (1990) soulignent que « les cours d'ouverture d'une séance donnée ne sont pas simultanément cotés en raison d'une part des caractéristiques propres aux titres et d'autre part de contraintes de fonctionnement de marché ». L'effet d'intervalle n'est donc pas seulement expliqué par la fréquence des transactions. Le délai d'ajustement des prix dépend aussi de la façon dont se font les échanges sur le marché. Les firmes de faible capitalisation boursière sont susceptibles d'être affectées par l'ordre de cotation si celle-ci n'est pas simultanée mais séquentielle.

Solutions pratiques et études des anomalies

Pour réduire les biais dus aux transactions asynchrones, plusieurs auteurs ont proposé de nouveaux modes de calculs de bêta. Les plus usités sont les bêtas de Dimson et ceux de Scholes et Williams. Le bêta de Dimson est obtenu par la régression multiple des rentabilités d'une action sur les rentabilités du marché antérieures, contemporaine et postérieures. L'équation de régression est la suivante :

$$R_{i,t} = \alpha_i + \sum_{k=-n}^{n} \beta_k R_{m,t+k} + \varepsilon_{i,t}.$$

Le risque systématique est estimé par $\Sigma\, \beta_k$.

En utilisant les bêtas de Dimson, est-on en mesure de résoudre l'effet taille ? A cette question, Reinganum (1982) et Stoll et Whaley (1983) donnent une réponse négative. Les différences de bêtas obtenus par la méthode des moindres carrés ordinaires et par celle de Dimson ne suffisent pas pour expliquer les écarts de rentabilité.

D'autres méthodes de calcul de bêtas ont été proposées. La plus commode d'utilisation est celle de Scholes et Williams (1977). Elle permet de limiter les erreurs d'estimation quand l'ajustement des cours est décalé d'une période[1]. Les régressions du modèle de marché sont faites successivement avec l'indice de marché contemporain, de la période précédente et de la période suivante :

$$R_t = \alpha + \beta_k R_{m,t+k} + \varepsilon_t, \quad k = -1, 0, 1.$$

L'estimateur non biaisé est donné par la somme des trois coefficients β_k divisée par $1 + 2\rho$ où ρ est l'autocorrélation de rang 1 de la rentabilité du marché.

Pour tenir compte des biais dans l'estimation des bêtas, Keim (1983) a utilisé à la fois des bêtas obtenus par la méthode des moindres carrés ordinaires (MCO), les bêtas de Scholes et Williams et les bêtas de Dimson. Son étude porte sur dix portefeuilles d'actions du NYSE et de l'AMEX classées d'après leur capitalisation boursière. La période d'observation est 1963-1979. Etant donnée la rentabilité annuelle moyenne du portefeuille 1 (35,0 %), et celle de l'indice de marché pondéré par les valeurs (7,0 %), il faudrait des bêtas excessivement grands pour avoir des rentabilités anormales nulles. Aucune des trois méthodes ne les donne. L'effet taille ne semble pas se réduire à ce problème d'estimation des bêtas. Sur la bourse de Bruxelles, Corhay (1989) a étudié l'effet d'intervalle sur l'estimation du risque systématique. D'après ses tests empiriques, l'effet taille est affaibli mais non supprimé lorsque les bêtas sont calculés par la méthode de Scholes et Williams ou celle de Cohen, Hawawini, Maier, Schwartz et Whitcomb.

De plus, une mise en garde sur l'efficacité des méthodes de correction des biais s'impose. McInish et Wood (1986) testent l'efficacité de quatre techniques proposées pour réduire les biais dus aux transactions peu fréquentes et aux délais d'ajustement

---

1. Cohen, Hawawini, Maier, Schwartz et Whitcomb (1983) ont proposé un estimateur similaire lorsque l'ajustement des cours porte sur plusieurs périodes.

des prix. Ces techniques sont celles de : Scholes et Williams, Dimson, Fowler, Rorke et Jog, Cohen, Hawawini, Maier, Schwartz et Whitcomb. La meilleure méthode (celle de Dimson) produit un biais inférieur seulement de 29 % à celui de la méthode des moindres carrés. Ces résultats confirment l'imperfection des divers bêtas proposés. La meilleure solution pour réduire l'incidence de l'asynchronisme reste l'espacement des données.

C'est aussi ce que conseillent Booth et Smith (1985). Ils vont plus loin, en proposant d'encadrer la vraie valeur du bêta. Pour cela, les conditions suivantes sont nécessaires : les effets de l'asynchronisme des données sont faibles ; l'indice représentant le portefeuille de marché préserve la moyenne (il ne diffère du véritable portefeuille de marché que par une variance plus grande). L'encadrement du bêta réel se fait alors par l'usage de la régression directe et de la régression inverse dont les équations sont les suivantes :

$$R_{p,t} - R_{f,t} = \alpha_d + \beta_d (R_{m,t} - R_{f,t}) + \varepsilon_{t,d}$$

$$R_{m,t} - R_{f,t} = \alpha_r + \beta_r (R_{p,t} - R_{f,t}) + \varepsilon_{t,r} .$$

Le bêta réel est compris entre β_d et $1 / \beta_r$. De même, α_d et α_r constituent deux bornes d'encadrement de la vraie valeur de la rentabilité anormale α.

Sur 50 portefeuilles-taille, Booth et Smith obtiennent les résultats suivants : α_d comme α_r est positif significativement pour les plus petites firmes et négatif significativement pour les plus grandes firmes. L'effet taille ne peut vraisemblablement pas être attribué aux transactions asynchrones ni à une surestimation de la variance du portefeuille représentant le marché. L'estimation des bêtas des portefeuilles-taille et P.E.R. du marché français tient compte de ces remarques.

Rentabilités ajustées pour le risque systématique sur le marché français

Les anomalies peuvent-elles s'expliquer par des écarts de bêta ? Pour vérifier si une telle solution est envisageable, nous avons effectué pour chaque portefeuille la régression suivante :

$$R_{p,t} - R_{f,t} = \alpha_p + \beta_p (R_{m,t} - R_{f,t})$$

sur les 132 mois de la période puis sur les 60 mois et 72 mois des deux sous-périodes. De cette façon, nous avons obtenu les indices de Jensen (α_p) et les bêtas.

Pour l'effet taille (tableau 3), sur l'ensemble de la période, tous les bêtas sont compris entre 0,9 et 1,1, ce qui montre la bonne diversification des portefeuilles. Le bêta des petites firmes est toujours inférieur à celui des grandes firmes ; les petites firmes ne forment pas un ensemble plus risqué que les grandes. Il n'est donc pas surprenant que la performance anormale mesurée par l'indice de Jensen soit largement positive pour les petites firmes (1 %). Les tests de Student montrent que α est significativement positif au seuil de 1 % pour les portefeuilles 1 et 2 mais aussi de façon plus surprenante pour les 6 et 7. Les tests multivariés[1] d'égalité des α_p conduisent au rejet de l'hypothèse sur l'ensemble de la période et sur la première sous-période mais pas sur la deuxième. La qualité de la régression exprimée par le coefficient de détermination R^2 montre le pouvoir explicatif élevé de la rentabilité du marché.

La comparaison des bêtas sur les deux sous-périodes indique la stabilité assez bonne des bêtas dans le temps, en particulier pour les portefeuilles extrêmes qui nous intéressent davantage. Même si les titres ont des bêtas individuels changeants, la technique de groupage selon le critère de capitalisation boursière gomme ces différences.

Pour l'anomalie P.E.R. (tableau 4), le risque mesuré par le bêta est plus élevé pour les firmes à bas P.E.R. ou à résultats négatifs. Toutefois, l'indice de Jensen est significativement positif pour les portefeuilles 1 à 4 et non différent de zéro pour les autres. Le découpage en sous-périodes ne fait que confirmer les conclusions générales. L'égalité des α_p est largement rejetée par le T^2 test. Les R^2 sont d'un bon niveau, voisin de 0,8.

Sur les portefeuilles P.E.R., la méthode de Booth et Smith pour encadrer les bêtas et alphas réels (voir supra) a été appliquée. La valeur du bêta est encadrée par β_d et $1 / \beta_r$; celle de α par α_d et α_r. Malheureusement, les valeurs de α_r ont toujours un signe opposé à celui de α_d. Il n'est donc pas possible de conclure sur le signe de la performance anormale.

De façon à être exhaustif, nous avons complété l'analyse du risque systématique par l'évaluation des indices de Treynor, Fama et enfin Moses, Cheney et Veit[2]. Les deux derniers indices tiennent compte de l'imparfaite diversification des portefeuilles. Ces indices n'apportent pas de grands bouleversements dans les classements des portefeuilles ; les anomalies résistent aux différentes mesures de performance anormale[3].

---

1. L'avantage des tests multivariés est qu'ils tiennent compte de la corrélation des résidus des portefeuilles. De nombreux résultats empiriques (voir notamment Gibbons, Ross et Shanken, 1989, p. 1139-1140) établissent que la corrélation est positive et élevée entre les portefeuilles de titres à faible valeur de marché et qu'elle diminue lorsque les portefeuilles ont des valeurs de marché bien différentes.

2. Pour un portefeuille p, l'indice de Treynor est : $(R_p - R_f) / \beta_p$; la mesure de Fama : $R_p - (R_f + \beta_h (R_m - R_f))$ avec $\beta_h = \sigma_p / \sigma_m$) ; la mesure de Moses, Cheney et Veit : $(\alpha_p / (\beta_h - \beta_p)) / (R_m - R_f)$.

3. Les résultats sont très dépendants du choix de l'indice de marché. L'indice CAC général est-il pertinent ? Refaire les régressions avec d'autres indices est inutile sachant qu'il faudrait des écarts très grands entre les bêtas pour que tous les portefeuilles aient la même performance ajustée pour le risque systématique. L'excès de rentabilité du portefeuille des plus petites firmes sur le taux sans risque est de : 0,0116 par mois ; pour les plus grandes firmes, l'écart est de 0,0027. Le rapport des deux est de 4,3 ; si l'écart n'est que la résultante d'une différence de risque systématique, le rapport des bêtas doit être aussi de 4,3. C'est difficilement envisageable sur des portefeuilles bien diversifiés dont les bêtas ne s'éloignent guère de 1. Pour justifier les différences de rentabilités des portefeuilles 3 et 9 de l'effet P.E.R., il faudrait que le bêta du portefeuille 3 soit 16,5 fois supérieur à celui du numéro 9. C'est encore moins probable.

Tableau 3. Effet taille : Rentabilité ajustée pour le risque systématique

Ensemble de la période (1977-1987) :

Portefeuille *p*	β_p	*Jensen* α_p	$t(\alpha_p)$	T^2 *égalité des* α_p	R^2 *corrigé*
1	0,940	0,0100	3,28**	7,65**	0,737
2	0,972	0,0072	2,84**		0,812
3	1,041	0,0004	0,16		0,836
4	1,029	0,0060	2,53*		0,844
5	0,962	0,0049	2,23*		0,849
6	0,913	0,0061	3,17**		0,870
7	0,901	0,0054	2,84**		0,867
8	0,905	0,0043	1,99*		0,836
9	1,077	0,0014	0,71		0,890
10	1,055	0,0009	0,58		0,932

Test multivarié $\alpha_p = 0$: $F = 2,79$**

Première sous-période (1977-1981) :

Portefeuille *p*	β_p	*Jensen* α_p	$t(\alpha_p)$	T^2 *égalité des* α_p	R^2 *corrigé*
1	0,945	0,0084	2,10*	4,89*	0,786
2	0,918	0,0073	2,00		0,806
3	0,912	0,0047	1,42		0,835
4	1,016	0,0109	2,81**		0,820
5	1,056	0,0044	1,26		0,855
6	0,941	0,0063	1,86		0,835
7	0,898	0,0046	1,47		0,848
8	0,872	0,0048	1,40		0,814
9	1,049	0,0027	0,84		0,875
10	1,104	−0,0002	−0,07		0,918

Test multivarié $\alpha_p = 0$: $F = 0,95$

Deuxième sous-période (1982-1987) :

Portefeuille *p*	β_p	*Jensen* α_p	$t(\alpha_p)$	T^2 *égalité des* α_p	R^2 *corrigé*
1	0,933	0,0113	2,50*	2,48	0,693
2	1,020	0,0067	1,90		0,817
3	1,161	−0,0041	−1,20		0,859
4	1,050	0,0019	0,64		0,871
5	0,879	0,0059	2,23*		0,854
6	0,889	0,0060	2,88**		0,905
7	0,903	0,0061	2,55*		0,882
8	0,935	0,0037	1,31		0,852
9	1,104	0,0001	0,07		0,902
10	1,010	0,0022	1,28		0,950

Test multivarié $\alpha_p = 0$: $F = 2,86$**

Tableau 4. Effet P.E.R. : Rentabilité ajustée pour le risque systématique

Ensemble de la période (1977-1987) :

Portefeuille p	β_p	*Jensen* α_p	$t(\alpha_p)$	T^2 *égalité des* α_p	R^2 *corrigé*
1	1,196	0,0090	3,57**	18,98**	0,868
2	0,978	0,0094	3,61**		0,806
3	0,975	0,0116	4,28**		0,792
4	0,913	0,0102	4,78**		0,841
5	0,894	0,0030	1,37		0,834
6	0,885	0,0025	1,22		0,846
7	0,984	0,0017	0,75		0,848
8	0,939	0,0008	0,41		0,863
9	0,899	– 0,0007	– 0,31		0,817
10 (< 0)	1,125	– 0,0011	– 0,29		0,739

Test multivarié $\alpha_p = 0$: $F = 4{,}45$**

Première sous-période (1977-1981) :

Portefeuille p	β_p	*Jensen* α_p	$t(\alpha_p)$	T^2 *égalité des* α_p	R^2 *corrigé*
1	1,174	0,0081	2,12*	6,11*	0,863
2	0,896	0,0040	1,19		0,825
3	1,011	0,0132	2,87**		0,762
4	0,965	0,0101	2,90**		0,837
5	0,802	0,0033	0,97		0,783
6	0,791	0,0044	1,34		0,791
7	1,023	0,0013	0,38		0,866
8	1,006	0,0014	0,42		0,868
9	0,934	0,0020	0,60		0,833
10 (< 0)	1,098	– 0,0005	– 0,09		0,734

Test multivarié $\alpha_p = 0$: $F = 1{,}49$

Deuxième sous-période (1982-1987) :

Portefeuille p	β_p	*Jensen* α_p	$t(\alpha_p)$	T^2 *égalité des* α_p	R^2 *corrigé*
1	1,214	0,0097	2,83**	14,62**	0,870
2	1,040	0,0133	3,55**		0,802
3	0,946	0,0104	3,27**		0,823
4	0,867	0,0108	4,02**		0,848
5	0,974	0,0020	0,76		0,878
6	0,970	0,0002	0,10		0,897
7	0,949	0,0023	0,74		0,829
8	0,881	0,0009	0,33		0,860
9	0,874	– 0,0028	– 0,89		0,804
10 (< 0)	1,149	– 0,0017	– 0,35		0,740

Test multivarié $\alpha_p = 0$: $F = 4{,}21$**

2.2. Non-normalité, autocorrélation et hétéroscédasticité des termes d'erreur

L'estimation des paramètres du CAPM (et plus généralement des modèles linéaires reliant la rentabilité à des facteurs de risque) fait appel aux techniques de la régression. Dans la méthode des moindres carrés ordinaires (MCO), qui est couramment employée, le terme d'erreur est supposé satisfaire les hypothèses suivantes : moyenne nulle, variance constante, indépendance intertemporelle. Or, plusieurs travaux ont montré que les résidus du modèle de marché tendent à être autocorrelés et hétéroscédastiques et à s'éloigner d'une distribution normale. Les petites firmes sont plus sujettes aux trois problèmes économétriques évoqués que les grandes firmes. Aussi, il faut s'attacher à déterminer quelles sont les meilleures estimations en cas de non-normalité, autocorrélation ou hétéroscédasticité et vérifier si les anomalies existent toujours.

Non-normalité des résidus

Les propriétés recherchées d'un estimateur sont l'absence de biais, l'efficacité et la convergence[1]. Dans le cas de résidus gaussiens, les estimateurs de MCO ont toutes ces qualités. Dans le cas contraire, l'estimateur des paramètres de la régression par les MCO est toujours non biaisé, convergent et de variance minimale à l'intérieur de la classe des estimateurs linéaires non-biaisés. De même, l'estimateur de la variance des résidus est non biaisé et convergent. Mais, s'il y a déviation par rapport à la normalité, il existe généralement des estimateurs non linéaires ayant des variances inférieures à celle des estimateurs des moindres carrés ordinaires. Cette perte d'efficacité est notamment vraie quand les distributions ont des queues épaisses.

L'autre problème résultant de l'usage des MCO en absence de normalité concerne les tests sur les paramètres. Aucune hypothèse probabiliste n'est nécessaire pour estimer les écarts-types des estimateurs des paramètres et de la variance des résidus. En revanche, il faut faire des hypothèses sur la loi des résidus pour donner la loi de ces estimateurs. La connaissance des lois est une condition nécessaire pour effectuer des tests sur les paramètres. Toutefois, l'usage des statistiques de Student peut se justifier pour de faibles déviations par rapport à la normalité ou pour de grands échantillons auxquels s'appliquent les propriétés asymptotiques.

Sur le marché français, Dumontier (1986) a réalisé des tests sur les coefficients de symétrie et d'aplatissement des rentabilités résiduelles du modèle de marché. Les résultats sont donnés pour cinquante titres (sur 1979-1983), non pas en fonction de la taille des entreprises, mais en fonction du pas de calcul des rentabilités. Le rejet de l'hypothèse de normalité est d'autant plus fréquent que le pas de calcul est petit (les pas retenus sont la semaine, le mois et le trimestre). En conséquence, pour pouvoir

1. Un estimateur sans biais a une espérance égale au paramètre à estimer. Il est efficace si sa variance est égale à la borne de Fréchet (variance minimale). Pour deux estimateurs sans biais d'un paramètre, l'un est plus efficace que l'autre s'il a une variance inférieure. Un estimateur est convergent si sa limite en probabilité est égale au paramètre à estimer.

faire l'hypothèse de normalité, il vaut mieux choisir des durées pas trop courtes entre les observations.

Sur les résidus des régressions effectuées pour calculer les bêtas et les rentabilités anormales α des portefeuilles taille et P.E.R., le test de normalité de Wilk-Shapiro a été mis en œuvre (tableaux 5 et 6). L'idée consiste à comparer deux statistiques qui, sous l'hypothèse de normalité, estiment toutes les deux la variance. Le rapport des deux statistiques sera d'autant plus proche de 1 que la distribution tendra vers une loi normale. Pour chaque portefeuille, nous indiquons la valeur du rapport et la probabilité d'obtenir une valeur inférieure sous l'hypothèse de normalité. Les tests sur les portefeuilles taille ne rejettent jamais la normalité au seuil de 5 % et même de 10 %. Les résultats sont légèrement moins bons pour l'effet P.E.R. où l'hypothèse de normalité des résidus est rejetée au seuil de 5 % pour les portefeuilles 2 et 4. Les bonnes performances doivent donc être considérées avec prudence.

Tableau 5. Effet taille : Tests de normalité, d'autocorrélation et d'hétéroscédasticité des résidus

Ensemble de la période (1977-1987)

Tests de normalité et d'hétéroscédasticité :

Portefeuille	*Test de normalité W et Proba < W*	*Test de White*	*$t(\alpha_p)$ avec matrice de White*
1	0,980 (0,42)	0,405	3,30**
2	0,975 (0,20)	0,383	2,86**
3	0,985 (0,76)	0,179	0,16
4	0,971 (0,09)	2,316	2,55*
5	0,988 (0,90)	1,877	2,26*
6	0,985 (0,77)	0,421	3,20**
7	0,991 (0,97)	0,647	2,88**
8	0,991 (0,96)	0,311	2,01*
9	0,986 (0,81)	0,069	0,71
10	0,989 (0,91)	0,638	0,58

* significatif à 5 %   ** significatif à 1 %

Autocorrélation : tests et régression avec processus autorégressif de rangs 1 et 12

Portefeuille	*Durbin Watson*	ρ_1	ρ_{12}	α_p	$t(\alpha_p)$
1	2,28	− 0,174	0,062	0,0101	3,77**
2	2,03	− 0,030	− 0,079	0,0072	3,13**
3	1,86	0,043	0,034	0,0003	0,13
4	2,20	− 0,104	0,142	0,0060	2,49*
5	1,77	0,115	0,005	0,0049	1,95
6	1,60	0,182	0,123	0,0063	2,41*
7	2,10	− 0,058	0,086	0,0054	2,75**
8	1,67	0,155	0,225	0,0034	1,00
9	1,71	0,137	− 0,027	0,0014	0,62
10	1,95	0,025	− 0,009	0,0009	0,56

* significatif à 5 %   ** significatif à 1 %

Tableau 6. Effet P.E.R. : Tests de normalité, d'autocorrélation et d'hétéroscédasticité des résidus

Ensemble de la période (1977-1987)

Tests de normalité et d'hétéroscédasticité :

Portefeuille	*Test de normalité W et Proba < W*	*Test de White*	*$t(\alpha_p)$ avec matrice de White*
1	0,965*(0,03)	2,358	3,62**
2	0,985 (0,73)	0,796	3,66**
3	0,965*(0,02)	2,037	4,31**
4	0,983 (0,62)	0,879	4,84**
5	0,976 (0,25)	3,614	1,37
6	0,982 (0,54)	1,362	1,22
7	0,987 (0,84)	1,548	0,75
8	0,971 (0,09)	0,266	0,41
9	0,983 (0,60)	1,884	− 0,31
10 (< 0)	0,979 (0,39)	0,041	− 0,30

* significatif à 5 % ** significatif à 1 %

Autocorrélation : tests et régression avec processus autorégressif de rangs 1 et 12

Portefeuille	*Durbin Watson*	ρ_1	ρ_{12}	α_p	$t(\alpha_p)$
1	1,66	0,165	0,116	0,0089	2,68**
2	1,92	0,024	0,019	0,0094	3,44**
3	1,94	0,027	0,012	0,0115	4,08**
4	1,69	0,151	0,146	0,0101	3,50**
5	1,56	0,196	0,062	0,0028	0,99
6	2,46*	− 0,247	0,109	0,0025	1,46
7	2,04	− 0,032	0,109	0,0017	0,66
8	1,99	− 0,000	− 0,024	0,0008	0,41
9	1,92	0,039	0,103	− 0,0008	0,30
10 (< 0)	2,23	− 0,135	0,009	− 0,0010	− 0,30

* significatif à 5 % ** significatif à 1 %

Hétéroscédasticité et autocorrélation

L'indépendance et la constance de la variance des résidus sont deux hypothèses de la méthode des MCO. Les implications économétriques de l'hétéroscédasticité et de l'autocorrélation sont les mêmes. Les estimateurs des moindres carrés ordinaires sont non biaisés mais inefficaces. De plus, l'estimateur de la variance des coefficients est biaisé et les tests statistiques usuels sont incorrects. Pour remédier au biais sur les variances des estimateurs, des estimateurs de la matrice des covariances tenant compte de l'hétéroscédasticité, ont été développés. Pour traiter du problème de l'autocorrélation, on postule en général une structure particulière des perturbations, par exemple un processus autorégressif (AR), un processus de moyennes mobiles (MA) ou un processus combinant les deux (ARMA).

Sur le NYSE et l'AMEX, Hillion (1988) a montré que l'usage de matrices de covariances corrigées pour l'hétéroscédasticité (matrices de White et de White et MacKinnon) ne diminue en rien l'existence de rentabilités anormales pour les petites firmes. Concernant l'autocorrélation sur ces marchés, elle provient exclusivement de la saisonnalité de janvier et décroît avec la taille. Avec un processus autorégressif de rang 12 sur les résidus du modèle de marché, les estimations des paramètres sont peu différentes des estimations MCO. Les écarts-types des estimateurs sont systématiquement plus grands que ceux calculés par les moindres carrés ordinaires et ils augmentent avec le coefficient d'autocorrélation. Aussi, les t-statistiques sont plus faibles et les rentabilités anormales pour les plus petites firmes sont significatives au seuil de 5 % au lieu de 1 %.

Sur le marché parisien, il apparaît qu'en utilisant la méthode des MCO, l'autocorrélation et l'hétéroscédasticité deviennent moins sensibles à mesure que le pas de calcul des rentabilités s'allonge (Dumontier, 1986). Sur un plan pratique, cela renforce les arguments en faveur du calcul des rentabilités sur des données au moins mensuelles.

Sur nos données, la question de l'hétéroscédasticité a été envisagée par l'intermédiaire du test de White. Le test n'est jamais significatif, ce qui permet d'admettre l'homoscédasticité des résidus. En complément du test, la dernière colonne du tableau comprend les t de Student sur les α_p lorsqu'ils sont calculés avec la matrice de variances-covariances de White destinée à corriger l'hétéroscédasticité[1]. Il suffit de comparer avec les $t(\alpha_p)$ des tableaux 3 et 4 pour constater qu'ils sont quasiment égaux. La détection d'une éventuelle autocorrélation est réalisée par le test de Durbin-Watson et par les calculs des coefficients d'autocorrélation d'ordre 1 à 12. De façon générale, les coefficients sont faibles et leur signe varie avec les régressions. Les plus remarquables, même s'ils restent très faibles, sont les coefficients d'ordre 1 et 12. Pour vérifier que leur influence est négligeable sur la régression par MCO, nous avons refait les régressions en faisant l'hypothèse que les résidus sont générés par un processus autorégressif d'ordre 1 et 12 :

$$\varepsilon_t = e_t - \alpha_1 e_{t-1} - \alpha_{12} e_{t-12}$$

où e_t suit une loi $N(0, \sigma^2)$.

Les indices de Jensen et leur t associé figurent dans les dernières colonnes du tableau. Les t sont légèrement différents de ceux des MCO mais ne modifient pas l'interprétation globale. L'autocorrélation n'est donc pas un problème épineux. Le test de Durbin-Watson, quasiment jamais significatif, le montre clairement pour l'autocorrélation d'ordre 1.

Les hypothèses de la régression étant respectées de manière assez satisfaisante, il reste encore à s'interroger sur l'instabilité des bêtas.

1. White (1980) a résolu le problème du biais de la matrice de covariances des MCO en proposant pour matrice de covariances des estimateurs : $(X'X)^{-1}\,(X'\,\mathrm{diag}\,(\varepsilon_t^2)\,X)\,(X'X)^{-1}$ où X est le vecteur de la variable explicative et ε_t^2 sont les résidus de la régression MCO.

2.3. L'instabilité des bêtas dans le temps

L'hypothèse implicite de la plupart des études faisant appel au CAPM ou au modèle de marché est la constance des bêtas. Il peut paraître opportun de vérifier la stabilité des bêtas sur longue période au niveau des actions et des portefeuilles et plus finement sur la constance des bêtas selon le mois de l'année.

Instabilité des bêtas sur longue période et saisonnalité

Pour la France, Altman, Jacquillat, Levasseur (1974) exposent qu'on peut utiliser les bêtas d'une année passée pour évaluer les bêtas de l'année suivante dès que le portefeuille contient plus de 10 titres. Blume (1971) conclut que l'extrapolation naïve du bêta d'une période pour la période suivante est très bonne pour les grands portefeuilles mais de valeur limitée pour les petits portefeuilles et les actions individuelles (il estime les bêtas sur une période de sept ans et les utilise sur les sept années suivantes). Le recours à des portefeuilles limite le problème de l'instabilité à condition que les changements de bêtas soient spécifiques à chaque action. En effet, dans les études ignorant les non-stationnarités, les erreurs de mesure seraient réparties à travers les firmes et le temps, n'entraînant pas de biais systématique sur les résidus. Mais, d'après MacDonald (1985) les causes d'instabilité sont également liées aux facteurs communs politiques et économiques. Dans ce cas le problème de l'instabilité existe aussi pour les portefeuilles.

Les bêtas changent en fonction de facteurs communs. Mais, changent-ils tous dans des proportions comparables ? Le changement est-il symétrique quand la conjoncture devient plus ou moins favorable ? Etudiant les performances des firmes gagnantes et perdantes (le critère retenu est le cumul des rentabilités anormales sur une période de cinq ans), De Bondt et Thaler (1985, 1987) ont évalué un bêta lorsque le marché a une rentabilité positive et un bêta lorsque le marché a une rentabilité négative. Ils parviennent ainsi à faire disparaître les rentabilités anormales (mesures de Jensen).

A la suite des travaux de De Bondt et Thaler, Chan (1988) évalue les bénéfices éventuels d'une stratégie consistant à acheter des actions désignées perdantes et à vendre des actions gagnantes. A cette occasion, il repose le problème d'estimation des bêtas des portefeuilles et formalise l'erreur que l'on peut commettre en faisant l'hypothèse de stabilité des bêtas sur toute la période d'étude. Soit l'expression du modèle de génération des rentabilités d'un portefeuille p sur cette période :

$$r_{p,t} = \alpha_{p,t} + \beta_{p,t}\, r_{m,t} + \varepsilon_{p,t}$$

où $r_{p,t}$ et $r_{m,t}$ sont des rentabilités en excès du taux sans risque.

Si l'on estime α_p et β_p par la méthode des moindres carrés ordinaires sur toute la période, on obtient deux estimations uniques des paramètres. Or, si α_p et β_p ne sont pas constants sur toute la durée d'étude, on commet une faute qui ressemble à faire la moyenne de paramètres variant dans le temps. Pour en avoir une idée plus précise, faisons la moyenne de l'équation de génération des rentabilités dans le temps. D'après la définition de la covariance, nous obtenons :

$$r_p = \alpha_p + \mathrm{cov}\,(\beta_{p,t},\ r_{m,t}) + \beta_p r_m \,.$$

Si l'on prend comme mesure de la rentabilité anormale la rentabilité ajustée sur le bêta de long terme ($r_p - \beta_p r_m$), on aura la véritable rentabilité anormale augmentée de la covariance.

Ce phénomène est peut-être transposable aux effets taille et P.E.R., d'autant plus que l'effet gagnant-perdant et l'effet petite firme se recoupent en partie. En conséquence, il faut vérifier si les bêtas des portefeuilles changent avec la prime de risque du marché. Si c'est le cas, les rentabilités anormales calculées à partir du CAPM sont fausses car elles ne prennent pas en compte la non-constance du bêta.

La deuxième question concernant l'instabilité porte sur la saisonnalité des bêtas. Les chercheurs supposent en général que le risque des actions des petites firmes reste constant tout au long de l'année. Si le risque augmente au début de l'année, alors les taux de rentabilité requis devraient aussi augmenter. Aux U.S.A., selon Rogalski et Tinic (1986), les bêtas des portefeuilles de petites firmes augmentent fortement en janvier[1]. De plus, les rentabilités de l'indice équipondéré sont sensiblement plus fortes en janvier comparées à celles des autres mois. La prime de risque est donc plus forte en janvier qu'au cours des autres mois.

Afin de déterminer si la saisonnalité explique l'effet taille, Hillion (1988) a estimé les rentabilités anormales avec des bêtas non stationnaires. L'effet petite firme ne disparaît pas. Ritter et Chopra (1989) confirment l'impossibilité d'attribuer les anomalies à la saisonnalité. De plus, le problème du mois de janvier n'existe pas en France comme aux U.S.A. Le calcul des rentabilités mensuelles des portefeuilles montre que l'effet taille se manifeste davantage sur la deuxième moitié de l'année ou plutôt à partir du mois de mai. Les écarts entre les petites et grandes firmes sont les plus importants en juin et septembre. L'anomalie taille ne s'explique vraisemblablement pas par un bêta saisonnier.

Tests sur le marché français

Les calculs de bêtas sur les sous-périodes ont montré leur relative stabilité dans le temps. Comme nous venons de le voir, la stabilité des bêtas n'est peut-être pas à chercher sur des durées assez courtes mais en fonction du niveau de rentabilité de l'ensemble du marché. L'hypothèse est que le bêta a une composante permanente et une composante temporaire variant avec la prime de risque du marché. Voici un exemple de formulation de cette supposition :

$$\beta_t = \beta + \delta (R_{m,t} - R_{f,t})$$

où δ est une constante positive ou négative selon les titres.

Nous appliquons cette idée en supposant que le bêta n'est pas le même lorsque la prime de risque est positive et lorsqu'elle est négative. Le bêta correspondant à

1. Ce résultat, valable aux U.S.A. n'est pas forcément généralisable. Sur la période 1955-1985, Hawawini (1989), estimant les bêtas mois par mois pour vingt portefeuilles du Tokyo Stock Exchange, trouve que les bêtas en janvier ne sont pas significativement différents de ceux des autres mois.

$R_{m,t} - R_{f,t} > 0$ est noté β_h; celui correspondant à $R_{m,t} - R_{f,t} < 0$ est noté β_b. La régression suivante est effectuée pour estimer α, β_h et β_b :

$$R_{p,t} - R_{f,t} = \alpha + \beta_h (R_{m,t} - R_{f,t}) D_h + \beta_b (R_{m,t} - R_{f,t}) D_b$$

où $D_h = 1$ si $R_{m,t} - R_{f,t} > 0$ et $D_h = 0$ autrement

$D_b = 1$ si $R_{m,t} - R_{f,t} < 0$ et $D_b = 0$ autrement.

Les résultats pour les portefeuilles taille et P.E.R. sont donnés au tableau 7. Les petites firmes ont un bêta au comportement intéressant : plus fort lorsque la prime de risque est positive. Pour les grandes firmes, les deux bêtas sont très voisins. Les tests de Fisher ne rejettent pas l'égalité des ordonnées à l'origine et leur nullité. Le nombre de α_p significativement différents de zéro par le test de Student a considérarablement diminué.

Tableau 7. Risque systématique en fonction de la prime de risque du marché

Effet taille :

Portefeuille p	β_h	β_p	*Jensen α_p*	$t(\alpha_p)$	*T^2 égalité des α_p*	*R^2 corrigé*
1	1,028	0,874	0,0063	1,34	2,46	0,737
2	0,913	1,017	0,0096	2,43*		0,812
3	1,060	1,026	– 0,0004	– 0,10		0,835
4	1,156	0,935	0,0008	0,23		0,847
5	0,997	0,936	0,0034	1,00		0,849
6	0,864	0,950	0,0081	2,71**		0,870
7	0,922	0,886	0,0046	1,53		0,866
8	0,976	0,853	0,0014	0,42		0,836
9	1,088	1,069	0,0010	0,32		0,889
10	1,043	1,064	0,0014	0,58		0,932

Test multivarié $\alpha_p = 0$: $F = 1,57$
* significatif à 5 % ** significatif à 1 %

Effet P.E.R. :

Portefeuille p	β_h	β_p	*Jensen α_p*	$t(\alpha_p)$	*T^2 égalité des α_p*	*R^2 corrigé*
1	1,248	1,157	0,0069	1,75	6,32*	0,867
2	1,126	0,868	0,0033	0,83		0,810
3	1,226	0,788	0,0012	0,30		0,807
4	1,094	0,778	0,0028	0,86		0,851
5	0,781	0,977	0,0076	2,28*		0,837
6	0,640	1,067	0,0126	4,22**		0,865
7	0,870	1,069	0,0064	1,82		0,850
8	1,100	0,818	– 0,0058	– 1,88		0,869
9	0,831	0,950	0,0021	0,59		0,817
10	1,264	1,021	– 0,0067	– 1,21		0,741

Test multivarié $\alpha_p = 0$: $F = 2,80$**

Pour l'effet P.E.R., les portefeuilles ayant dans la régression simple à un seul bêta un α significativement différent de zéro ont tous des β_h plus grands que les β_b. Les tests multivariés sur les ordonnées à l'origine sont encore significatifs mais moins nettement que précédemment.

Constater que le bêta n'est pas stationnaire et qu'il diffère notamment lorsque la prime de risque du marché est positive ou négative ne fait que déplacer la question des anomalies. Pourquoi certains titres ont-ils un bêta plus fort lorsque le marché est rémunérateur ? Une réponse possible se situe au niveau du comportement des investisseurs. Lorsque le marché est haut, ils se portent sur des valeurs moins connues, plus incertaines. Ce mouvement vers ces valeurs se traduit par de forts volumes de transactions et des rentabilités élevées. Au contraire, en période de marché baissier, il y aurait repli sur les valeurs vedettes (grandes firmes, titres à hauts P.E.R.). Les autres titres seraient alors peu échangés. Les différences de liquidité sur les titres de faible et forte capitalisation boursière sont en faveur de cet argument.

Pour en terminer sur les problèmes d'estimation, nous envisageons à présent les conséquences de la forme de la distribution des rentabilités sur le choix des estimateurs de rentabilité et de risque.

3. Normalité des distributions de rentabilité

3.1. Tests de normalité sur le marché français

Dans les paragraphes précédents, l'hypothèse de normalité des rentabilités était implicite dans l'approche théorique (cadre moyenne-variance avec risque mesuré par le bêta), dans le choix des estimateurs et dans l'emploi des tests (tests univariés et multivariés de comparaison de moyennes). Les développements ci-après testent la validité de l'hypothèse de normalité et proposent une estimation différente des paramètres de position et de dispersion.

Pour tester la normalité, nous avons utilisé le test de Wilk-Shapiro. A la fois pour obtenir des tests supplémentaires de la normalité et pour caractériser la forme des distributions, nous avons calculé pour chaque portefeuille le coefficient d'asymétrie et le coefficient d'aplatissement de Fisher. Ils sont estimés respectivement par :

$$g_1 = k_3/(k_2^3)^{1/2}$$

$$g_2 = k_4/k_2^2$$

où k_2 est l'écart-type empirique

$k_3 = (n/((n-1)(n-2)))\ \Sigma\ (R_{p,t} - \overline{R})^3$

$k_4 = 1/((n-1)(n-2)(n-3)) \cdot (n\ (n+1)\ \Sigma(R_{p,t} - \overline{R})^4 - 3\ (n-1)^3 k_2^2)$.

Un test de nullité des coefficients d'asymétrie et d'aplatissement est conduit pour chaque portefeuille. Dans le cas d'une loi normale, les deux coefficients sont nuls.

Tableau 8. Effet taille : Test de normalité, coefficients d'asymétrie et d'aplatissement

Ensemble de la période (1977-1987) :

Portefeuille	*W : Test de normalité*	*Coefficient d'asymétrie*	*Coefficient d'aplatissement*
1	0,976	– 0,451*	2,427**
2	0,968*	– 0,794**	4,590**
3	0,975	– 0,674**	3,553**
4	0,976	– 0,191	3,653**
5	0,981	– 0,390*	2,487**
6	0,964*	– 0,821**	3,871**
7	0,978	– 0,460*	2,686**
8	0,978	– 0,421*	3,623**
9	0,967*	– 0,776**	4,550**
10	0,966*	– 0,685**	2,295**

* significatif à 5 %   ** significatif à 1 %

Première sous-période (1977-1981) :

Portefeuille	*W : Test de normalité*	*Coefficient d'asymétrie*	*Coefficient d'aplatissement*
1	0,956	0,635*	0,318
2	0,972	0,566*	1,840**
3	0,978	0,489	1,342*
4	0,948*	1,030**	2,817**
5	0,986	0,276	1,492**
6	0,980	0,156	1,269*
7	0,975	0,375	1,458**
8	0,972	0,709*	1,777**
9	0,976	0,382	2,467**
10	0,982	– 0,318	2,079**

Deuxième sous-période (1982-1987) :

Portefeuille	*W : Test de normalité*	*Coefficient d'asymétrie*	*Coefficient d'aplatissement*
1	0,931**	– 1,297**	4,784**
2	0,910**	– 1,706**	6,935**
3	0,944**	– 1,185**	4,213**
4	0,935**	– 1,236**	4,691**
5	0,935**	– 1,280**	4,707**
6	0,884**	– 1,934**	8,067**
7	0,942**	– 1,224**	4,649**
8	0,935**	– 1,296**	5,698**
9	0,908**	– 1,699**	6,886**
10	0,946**	– 1,083**	3,006**

Tableau 9. Effet P.E.R. : Test de normalité, coefficients d'asymétrie et d'aplatissement

Ensemble de la période (1977-1987) :

Portefeuille	*W : Test de normalité*	*Coefficient d'asymétrie*	*Coefficient d'aplatissement*
1	0,988	– 0,340	2,211**
2	0,984	– 0,085	2,121**
3	0,983	0,096	3,375**
4	0,982	0,096	2,617**
5	0,939**	– 1,279**	7,838**
6	0,916**	– 1,647**	7,197**
7	0,958**	– 0,842**	3,855**
8	0,987	– 0,088	1,370**
9	0,955**	– 1,070**	5,607**
10 (< 0)	0,993	– 0,265	0,999**

Première sous-période (1977-1981) :

Portefeuille	*W : Test de normalité*	*Coefficient d'asymétrie*	*Coefficient d'aplatissement*
1	0,976	0,669*	1,981**
2	0,952*	0,866**	2,717**
3	0,940**	1,087**	3,357**
4	0,955	0,904**	2,647**
5	0,966	0,640*	2,006**
6	0,964	– 0,553*	2,691**
7	0,979	– 0,087	2,169**
8	0,981	0,340	0,862
9	0,980	0,156	0,972
10 (< 0)	0,985	0,104	– 0,151

Deuxième sous-période (1982-1987) :

Portefeuille	*W : Test de normalité*	*Coefficient d'asymétrie*	*Coefficient d'aplatissement*
1	0,938**	– 1,162**	3,162**
2	0,965	– 0,684**	2,566**
3	0,951*	– 1,061**	4,038**
4	0,960	– 0,827**	3,354**
5	0,846**	– 2,417**	11,567**
6	0,853**	– 2,283**	9,750**
7	0,906**	– 1,609**	6,510**
8	0,967	– 0,577*	2,418**
9	0,862**	– 2,320**	11,239**
10 (< 0)	0,979	– 0,563*	2,133

Les résultats figurent dans les tableaux 8 et 9. Le test de Wilk-Shapiro rejette la normalité en particulier au cours de la deuxième sous-période. En ôtant la rentabilité d'octobre 1987, l'hypothèse nulle est quasiment toujours acceptée. Le rejet de la nullité des coefficients d'asymétrie et d'aplatissement est très fréquent ; il est même systématique sur la deuxième sous-période. Comme cette dernière comprend le mois exceptionnel d'octobre 1987, il est naturel de se demander si la cause du rejet de l'hypothèse nulle ne réside pas dans l'existence de points aberrants. Lorsque les calculs des coefficients d'aplatissement et d'asymétrie sont effectués sur 1982-1987 en omettant octobre 1987, la différence est saisissante. L'hypothèse nulle est acceptée dans tous les cas au seuil de 1 % aussi bien pour l'effet taille que pour l'effet P.E.R. ; elle n'est rejetée qu'une seule fois au niveau de 5 % (coefficient d'asymétrie du portefeuille-P.E.R. numéro 6).

La non-concordance des distributions de rentabilités avec la loi normale semble provenir des queues de distribution. L'instabilité des coefficients d'asymétrie et d'aplatissement montre que les points aberrants ne sont pas régulièrement répartis dans le temps. Les rentabilités extrêmes proviennent donc essentiellement de facteurs économiques communs qui affectent l'ensemble des titres. La contamination de la loi normale et l'ignorance de la forme de la contamination justifient l'utilisation d'estimateurs robustes.

3.2. Estimation robuste des paramètres de position et de dispersion

Face à la non-normalité, les outils statistiques disponibles sont notamment les estimateurs robustes et les tests non paramétriques. Ces deux techniques seront appliquées à l'étude de l'effet taille et de l'effet P.E.R.

Comme le font remarquer Tassi et Lecoutre[1], « ... le recours à un modèle régi par la loi normale relève plus de l'acte de foi que d'une réflexion rigoureuse ». Un estimateur robuste sera peu affecté par une déviation de la loi théorique. L'usage d'un estimateur robuste a un coût : « La robustesse est une sorte d'assurance : je suis prêt à payer une perte d'efficacité de cinq à dix pour cent par rapport au modèle idéal pour me protéger de mauvais effets de petites déviations de celui-ci. »[2] La robustesse s'apprécie au regard de plusieurs critères[3]. Tassi et Lecoutre (1987) ont montré sur un exemple simple d'estimation de la dispersion comment l'écart absolu moyen pouvait avoir une efficacité supérieure à l'écart-type empirique. Soit la loi normale contaminée :

$$P = (1 - \varepsilon)\, N(m,\ \sigma) + \varepsilon N(m,\ 3\sigma)$$

où $N(m,\ \sigma)$ est une loi normale de moyenne m et d'écart-type σ, ε est compris entre 0 et 1.

1. Voir Tassi Philippe, Lecoutre Jean-Pierre, p. 8.
2. Huber P., cité dans Tassi Philippe, Lecoutre Jean-Pierre, p. 12.
3. Voir Tassi Philippe, Lecoutre Jean-Pierre, chapitre 2.

Pour déterminer quel est l'estimateur le plus efficace, le critère est celui de l'efficacité relative asymptotique :

$$\text{ERA} = \lim \left(V(S)/E^2(S)\right)/\left(V(D)/E^2(D)\right)$$

où S est l'écart-type empirique

D est l'écart absolu moyen

V et E indiquent la variance et l'espérance.

ERA est supérieur à un, lorsque ε dépasse 0,002. Il suffit donc de deux observations aberrantes sur mille pour que D soit préférable à S.

Les distributions de rentabilités sont réputées s'écarter de la normalité par des queues épaisses. Parmi les estimateurs de dispersion qui accordent moins de poids aux extrêmes que l'écart-type, figurent l'écart absolu moyen et la distance semi-interquartile.

Pour les paramètres de position, différents estimateurs ont été étudiés pour leurs qualités de robustesse. Il s'agit notamment de la médiane, des moyennes tronquées, des moyennes de Winsor[1]. Nous retiendrons pour notre part la médiane et la moyenne tronquée (6 % du nombre total des valeurs sont enlevées). Le tableau 10 donne les résultats pour les deux anomalies.

Pour l'effet taille, l'ordre des rentabilités donné par les médianes diffère de celui donné par les moyennes. Les plus fortes rentabilités sont observées pour le portefeuille 2 suivi du 4 et du 7. L'écart entre les portefeuilles extrêmes n'apparaît plus. Les moyennes tronquées sont plus fortes que les moyennes arithmétiques mais les écarts de rentabilités entre les portefeuilles sont peu différents. La mesure de la dispersion par la distance interquartile n'apporte pas de grandes modifications par rapport à l'écart-type. Le portefeuille des plus grandes firmes est plus risqué que celui des petites. Avec l'écart absolu moyen, les écarts de dispersion sont faibles. Ces résultats montrent la sensibilité des rentabilités des portefeuilles taille à la mesure utilisée et par conséquent la fragilité des conclusions sur l'existence d'un effet taille.

Les portefeuilles P.E.R. 1 à 4 sont toujours les plus performants avec la médiane comme mesure de position. Cependant, les différences avec les portefeuilles sur-médians sont moins marquées qu'avec les moyennes. Les valeurs des médianes sont toujours supérieures aux valeurs des moyennes. Les moyennes tronquées des portefeuilles 2 à 4 sont un peu plus faibles que les moyennes arithmétiques et inversement pour les autres portefeuilles. Les portefeuilles au-dessous du P.E.R. médian bénéficient donc d'un plus grand nombre de rentabilités fortement positives ou de moins de rentabilités fortement négatives que les autres. Toutefois, l'opposition entre les

1. La moyenne tronquée d'ordre k est $M_k = (1/(n-2k)) \sum_{i=k+1}^{n-k} X_{(i)}$, où les $X_{(i)}$ sont les valeurs ordonnées de l'échantillon.

La moyenne de Winsor d'ordre k est $W_k = (1/n)\,[kX_{(k+1)} + kX_{(n-k)} + \sum_{i=k+1}^{n-k} X_{(i)}]$.

rentabilités en-dessus et en-dessous du P.E.R. médian demeure. Quant à la dispersion, la distance interquartile accuse un peu plus les différences que l'écart-type empirique. Les portefeuilles à bas P.E.R. sont dans l'ensemble plus risqués, en particulier le numéro 1. Le moins risqué est celui à plus haut P.E.R. L'écart absolu moyen n'apporte pas de grand changement dans l'ordre du risque par rapport à l'écart-type empirique. Les mesures de Sharpe ($(R_p - R_f)/\sigma_p$) avec la médiane comme rentabilité moyenne et l'un des deux paramètres de dispersion comme mesure du risque ont été calculées. Il apparaît que le portefeuille 4 est de loin le plus performant et que la cassure entre les portefeuilles à bonne et mauvaise performance se fait au niveau du portefeuille 8 (les portefeuilles 8, 9 et 10 ont des rentabilités médiocres). L'effet P.E.R. demeure, même si sa configuration est un peu modifiée par rapport aux résultats précédents.

Nous avons remarqué que sur les distributions tronquées, aussi bien pour les portefeuilles taille que P.E.R., les coefficients d'asymétrie (non rapportés ici) ne sont jamais significativement différents de zéro au seuil de confiance de 1 %. Les points extrêmes jouent un grand rôle dans la déviation de la normalité.

Tableau 10. Statistiques robustes de position et de dispersion

Effet taille :

Portefeuille p	*Médiane*	*Moyenne tronquée*	*Intervalle semi-interquartile*	*Déviation absolue moyenne (MAD)*
1	0,0211	0,0215	0,0343	0,0496
2	0,0271	0,0190	0,0391	0,0493
3	0,0143	0,0123	0,0403	0,0523
4	0,0236	0,0167	0,0458	0,0529
5	0,0187	0,0163	0,0357	0,0474
6	0,0221	0,0177	0,0381	0,0452
7	0,0233	0,0163	0,0358	0,0488
8	0,0164	0,0151	0,0330	0,0455
9	0,0198	0,0138	0,0452	0,0523
10	0,0225	0,0131	0,0415	0,0518

Effet P.E.R. :

Portefeuille p	*Médiane*	*Moyenne tronquée*	*Intervalle semi-interquartile*	*Déviation absolue moyenne (MAD)*
1	0, 0259	0,0208	0,0511	0,0615
2	0,0224	0,0197	0,0374	0,0496
3	0,0240	0,0216	0,0439	0,0509
4	0,0276	0,0203	0,0353	0,0454
5	0,0192	0,0147	0,0349	0,0431
6	0,0214	0,0157	0,0327	0,0421
7	0,0223	0,0139	0,0361	0,0485
8	0,0169	0,0115	0,0329	0,0463
9	0,0171	0,0112	0,0321	0,0443
10 (< 0)	0,0127	0,0108	0,0490	0,0622

Les statistiques robustes atténuent les écarts de rentabilité entre les portefeuilles. Elles font apparaître la faiblesse de l'effet taille et la résistance de l'anomalie P.E.R. Qu'en est-il en utilisant les tests non paramétriques ?

3.3. Tests non paramétriques

La statistique non-paramétrique ne nécessite pas d'hypothèse sur la loi de probabilité. C'est une voie de comparaison des portefeuiles tailles et P.E.R. Toute une batterie de tests non paramétriques ont été effectués : test de Wilcoxon (ou Kruskal Wallis dans le cas de plus de deux distributions), test de la médiane, test de Van der Waerden, test de Savage, test de Kolmogorov-Smirnov, test de Kuiper, test de Cramer von Mises.

Supposons que l'on compare deux populations à partir de deux échantillons $(X_1, ..., X_m)$ et $(Y_1, ..., Y_n)$. La résolution d'un test non-paramétrique de position ou d'échelle est fondée sur une statistique de rang de la forme :

$$S_N = \sum_{i=1}^{m} a_N(R_i)$$

où R_i est le rang de X_i dans l'échantillon global $(X_1, ... X_m, Y_1, ... Y_n)$ ordonné de taille $N = n + m$.

$a_N(i)$ sont les scores pour i compris entre 1 et N.

Les tests de Wilcoxon, de la médiane, de van der Waerden sont des tests de position. Un test de Wilcoxon est équivalent à un test de Student sur les rangs. Le test de Kruskal Wallis sur plusieurs échantillons est l'équivalent d'une analyse de variance sur les rangs. Le test de la médiane est un test de Student sur les scores médians. Il est particulièrement adapté pour une distribution symétrique à queues importantes. L'efficacité des tests dépend de la loi sous-jacente.

Le test de Savage est un test d'échelle. Il convient aussi pour détecter les différences de position dans les distributions à valeurs extrêmes. Les tests de Kolmogorov Smirnov, Kuiper, Cramer von Mises sont des tests généraux d'adéquation.

Sur l'ensemble des portefeuilles taille, aucun des tests ne rejette l'hypothèse nulle (d'égalité de position ou d'échelle ou de distribution). Il en est de même en comparant uniquement les portefeuilles extrêmes 1 et 10. Les tests non paramétriques ne permettent pas de faire apparaître l'effet taille. Pour l'effet P.E.R., la conclusion est identique pour les tests portant sur les dix portefeuilles. En limitant la comparaison à deux portefeuilles dont l'un est celui à plus haut P.E.R. (numéro 9), il ressort quelques différences significatives. Les tests de Kuiper et de Kolmogorov Smirnov rejettent, au seuil de 5 %, l'égalité des distributions des portefeuilles 1 et 9. Sur ces mêmes portefeuilles, l'égalité d'échelle est rejetée par le test de Savage au même niveau de confiance. Pour les portefeuilles 2 et 9, d'une part, 3 et 9, d'autre part, le test de Savage est le seul à être significatif au seuil de 10 %. Le test de la médiane donne une différence significative entre les médianes des portefeuilles 4 et 9 au seuil de 10 % Dans toutes ces comparaisons deux à deux de position ou d'échelle, le portefeuille 9 a le score le plus faible. Enfin, d'après le test de Kuiper, le portefeuille des titres à P.E.R. négatif se distingue des titres aux plus forts P.E.R. (seuil de 5 %).

Les tests non paramétriques sont moins puissants que les tests paramétriques. Il est dès lors moins aisé de déceler des anomalies. Toutefois, ces tests confirment en partie les différences entre les portefeuilles P.E.R. Les portefeuilles aux P.E.R. plus faibles que la médiane ont tendance à avoir des paramètres de position et d'échelle plus forts que le portefeuille au plus haut P.E.R. La plus forte rentabilité est peut-être une compensation pour une distribution plus dispersée.

Conclusion

Les anomalies taille et P.E.R. sont des phénomènes décelés empiriquement. Il convient dès lors de s'assurer de la validité de la transcription des variables et des tests utilisés. Sur le marché français à règlement mensuel, l'effet taille et surtout P.E.R. se manifestent effectivement. Les résultats montrent que les anomalies ne peuvent pas s'expliquer par le mode de calcul des rentabilités. Quant aux estimations des bêtas, la durée de base des calculs ou les problèmes économétriques des régressions ne résolvent pas les anomalies. En revanche, une instabilité existe sur le bêta, non dans le temps, mais en fonction de la prime de risque du marché. Les causes se trouvent certainement du côté du comportement des investisseurs et de la liquidité du marché. La question spécifique de la normalité des distributions de rentabilité a été envisagée en raison de son impact sur le choix des estimateurs. La déviation de la normalité des portefeuilles taille et P.E.R. provient notamment de points aberrants. Les estimateurs robustes de position et de dispersion de même que les tests non paramétriques confirment la force de l'effet P.E.R. et mettent en doute l'existence de l'effet taille. Les portefeuilles à bas P.E.R. ont une distribution de rentabilité plus dispersée, donc plus risquée. L'anomalie n'est peut-être que le symptôme de l'inadéquation des compensations entre rentabilité et risque exprimées dans les modèles développés dans un cadre moyenne-variance.

BIBLIOGRAPHIE

ALTMAN E., JACQUILLAT B., LEVASSEUR M. "La stabilité du coefficient bêta", *in Analyse Financière*, 1er trimestre 1974, 43-54.

BANZ R.W. "The relationship between return and market value of common stocks", *in Journal of Financial Economics*, march 1981, 3-18.

BASU S. "Investment performance of common stocks in relation to their price-earnings ratios : a test of the efficient market hypothesis", *in The Journal of Finance*, june 1977, 663-682.

BASU S. "The relationship between earnings'yield, market value and return for NYSE common stocks", *in Journal of Financial Economics*, june 1983, 129-156.

BLUME M.E. "On the assessment of risk", *in The Journal of Finance*, march 1971, 1-10.

BLUME M.E., STAMBAUGH R. F. "Biases in computed returns : an application to the size effect", *in Journal of Financial Economics*, november 1983, 387-404.

BOOTH J.R., SMITH R. L. "The application of errors-in-variables methodology to capital market research : evidence on the small-firm effect", *in Journal of Financial and Quantitative Analysis*, december 1985, 501-515.

CHAN K.C. "On the contrarian investment strategy", *in The Journal of Business, april 1988, 147-163.*

COHEN K.J., HAWAWINI G.A., MAIER S.F., SCHWARTZ R.A., WHITCOMB D.K. "Friction in the trading process and the estimation of systematic risk", *in Journal of Financial Economics*, august 1983, 263-278.

CORHAY A.H. "Effet d'intervalle et estimation du risque systématique : le cas de la Bourse de Bruxelles", *in Journal de la Société Statistique de Paris*, 1990, 69-85.

DE BONDT W., THALER R. "Does the stock market overreact" ? *in The Journal of Finance*, july 1985, 793-805.

DE BONDT W.F., THALER R.H. "Further evidence on investor overreaction and stock market seasonality", *in The Journal of Finance*, july 1987, 557-581.

DUMONTIER P. "La mesure du risque systématique des actions : une approche efficiente", *in Journal de la Société Statistique de Paris*, 1986, 161-177.

FAMA E.F. "Components of investment performance", *in The Journal of Finance*, june 1972, 551-567.

GIBBONS M.R., ROSS S.A., SHANKEN J. "A test of the efficiency of a given portfolio", *in Econometrica*, september 1989, 1121-1152.

GIRERD-POTIN I. *Les anomalies de rentabilité en France liées à la taille et au P.E.R.*, Thèse Sciences de Gestion, Université de Grenoble 2, ESA, 1991.

HAMON J. "Le caractère saisonnier des rentabilités mensuelles à la Bourse de Paris", *in Finance*, juin 1986, 57-74.

HAMON J., JACQUILLAT B. "Effet janvier et taille à la Bourse de Paris", Cahier de recherche n° 9012, CEREG, Université Paris Dauphine, 1990.

HAMON J., JACQUILLAT B., DERBEL T. "Les anomalies boursières : les effets P.E.R., taille et prix", Cahier de recherche n° 9101, CEREG, Université Paris Dauphine, 1991.

HANDA P., KOTHARI S.P., WASLEY C. "The relation between the return interval and betas : implications for the size effect", *in Journal of Financial Economics*, june 1989, 79-119.

HAWAWINI G. "Stock market anomalies and the pricing of equity on the Tokyo Stock Exchange", Working-paper n° 90/07/FIN/EP, INSEAD, Fontainebleau, september 1989.

HILLION P.H. "The econometric problems associated with size-sorted portfolios in empirical tests of the Capital Asset Pricing Model", Dissertation, University of California, Los Angeles, 1988.

MCDONALD B. "Making sense out of unstable alphas and betas", *in The Journal of Portfolio Management*, Winter 1985, 19-22.

MCINISH T.H., WOOD R.A. "Adjusting for beta bias : an assessment of alternate techniques : a note", *in The Journal of Finance*, march 1986, 277-286.

MOSES E.A., CHEYNEY J.M., VEIT E.T. "A new and more complete performance measure", *in The Journal of Portfolio Management*, Summer 1987, 24-33.

REILLY F.K., WRIGHT D.J. "A comparison of published betas", *in The Journal of Portfolio Management*, Spring 1988, 64-69.

REINGANUM M.R. "Misspecification of capital asset pricing : empirical anomalies based on earnings'yields and market values", *in Journal of Financial Economics*, march 1981, 19-46.

REINGANUM M.R. "A direct test of Roll's conjecture on the firm size effect", *in The Journal of Finance*, march 1982, 27-35.

RITTER J.R., CHOPRA N. "Portfolio rebalancing and the turn-of-the-year effect", *in The Journal of Finance*, march 1989, 149-166.

ROGALSKI R.J., TINIC S.M. "The january size effect : anomaly or risk measurement" ? *in Financial Analysts Journal*, november-december 1986, 63-70.

ROLL R. "On computing mean returns and the small firm premium", *in Journal of Financial Economics*, november 1983, 371-386.

STOLL H.R., WHALEY R.E. "Transaction costs and the small firm effect", *in Journal of Financial Economics*, june 1983, 57-79.

TASSI P., LECOUTRE J.-P. *Statistique non paramétrique et robustesse*, Economica, 1987.