Journal de la société statistique de Paris

Jean-Michel Zakoian

Modèles ARCH : une revue de la littérature

Journal de la société statistique de Paris, tome 133, nº 1-2 (1992), p. 40-57

<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1992__133_1-2_40_0>

III

ARTICLES

MODÈLES ARCH : UNE REVUE DE LA LITTÉRATURE

par Jean-Michel ZAKOIAN
Chercheur au CREST-ENSAE

Résumé

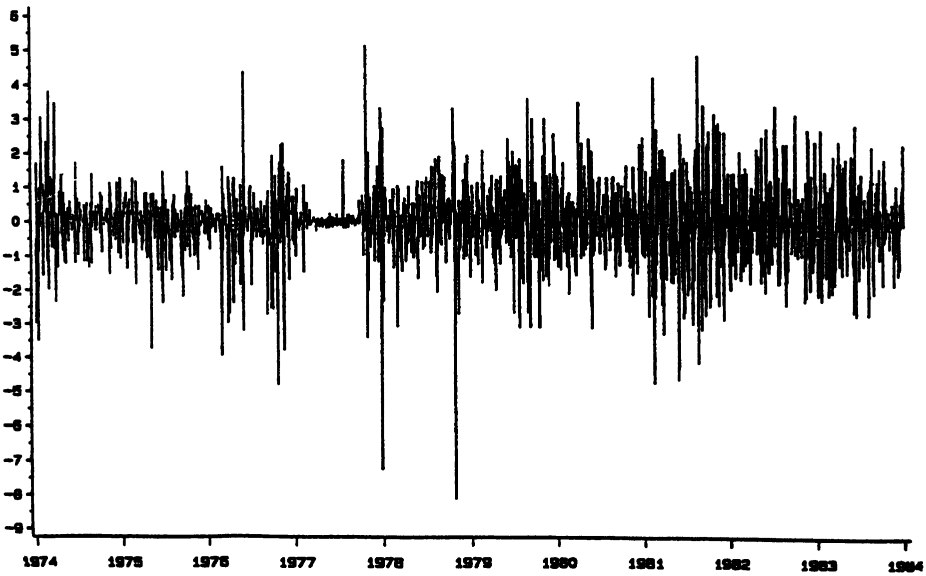
Les modèles ARCH se sont révélés particulièrement adaptés à la prise en compte de caractéristiques importantes des séries financières (volatilité, leptokurticité, asymétrie...). Ils fournissent également un cadre adapté au test des principales théories financières classiques. Les problèmes probabilistes, statistiques et économétriques qu'ils suscitent ont donné lieu à une littérature importante, que ce papier tente de passer en revue. Une bibliographie partielle est également proposée.

Abstract

ARCH models have prooven to be an effective tool for modelling several important characteristics of financial time-series such as volatility clustering, leptokurticity or asymmetry. They also provide an adequate framework for testing most of the classical financial theories. The probabilist, statistic and econometric problems that they raise have implied an important literature, which the paper attempts to survey. It also includes a partial bibliography.

1. Introduction

Depuis l'introduction des modèles autorégressifs par Yule en 1927, et jusqu'au début des années 1980, les séries temporelles ont été dominées par la référence aux modèles ARMA (linéaires). Dans ces formulations, la valeur présente de la variable est écrite comme une fonction *linéaire* de ses valeurs passées ainsi que de valeurs présentes et passées d'un *bruit*. Ces modèles tirent leur généralité de la décomposition de Wold (qui permet d'écrire tout processus stationnaire régulier sous forme d'une moyenne mobile infinie) et leur simplicité de la *linéarité* (à la fois par rapport aux variables et aux paramètres). Celle-ci implique cependant des restrictions importantes sur les types de trajectoires : les composantes périodiques sont de périodes fixes, les phases ascendantes et descendantes des cycles sont symétriques... Parmi les séries pour lesquelles les formulations classiques sont notoirement insuffisantes figurent celles de la finance (taux d'intérêt, taux de change, prix d'actifs...). Leur caractéristique la plus importante est le fait que leur variabilité instantanée (*volatilité*) est une fonction du temps. Typiquement, se succèdent des périodes où la volatilité est élevée (grandes valeurs) et d'autres où elle est faible (petites valeurs), comme l'illustre la trajectoire suivante.



Taux de change Livre/Dollar, 1974-83

Les modèles ARCH (Autorégressifs Conditionnellement Hétéroscédastiques) introduits par Engle (1982) reposent sur une paramétrisation endogène de la variance conditionnelle et permettent la prise en compte de ce type de propriétés. Ils fournissent également un cadre permettant de tester la validité de diverses théories financières (APT, CAPM, ...). Suite à un développement très rapide, la littérature consacrée aux modèles ARCH atteint aujourd'hui une taille impressionnante[1] et couvre un champ très étendu de domaines. Ce papier tente de passer en revue l'essentiel de la littérature statistique et économétrique des modèles ARCH. Il présente également un large éventail des applications, principalement financières, qui s'y rattachent.

La première partie est consacrée à l'étude des principales propriétés probabilistes des modèles ARCH classiques : stationnarité faible et forte, modèles intégrés et effets de persistance... D'autres paramétrisations de la variance conditionnelle sont ensuite présentées. L'inférence statistique fait l'objet de la deuxième partie. Les

1. Plusieurs centaines d'articles s'y rattachent, de près ou de loin...

principales méthodes d'estimation (par moindres carrés, maximum de vraisemblance, non paramétriques) sont décrites ainsi que les procédures de ce test. Enfin, la dernière section traite des principales applications de cette classe de modèles. A cette occasion, diverses extensions (multivariée, GARCH-M, en temps continu) sont analysées.

2. Modèles ARCH

De manière générale un *processus* ARCH univarié peut être défini comme solution d'un modèle de la forme

$$\varepsilon_t = \sigma_t Z_t, \tag{1}$$

où (Z_t) est un processus i.i.d, indépendant du passé de ε_t, centré, de variance unité, et où σ_t est une fonction mesurable du passé de ε_t.

Notons $\underline{\varepsilon_{t-1}} = (\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, ...)$ la tribu engendrée par les valeurs passées de ε_t. Les deux premiers moments conditionnels de ε_t découlent simplement de la définition :

$$E\,(\varepsilon_t / \underline{\varepsilon_{t-1}}) = 0, \quad V(\varepsilon_t / \underline{\varepsilon_{t-1}}) = \sigma_t^2. \tag{2}$$

Ainsi (ε_t) est un processus centré non corrélé mais sa variance *conditionnelle* peut évoluer avec le temps et sa variance *marginale* peut ou non exister.

Le plus souvent ε n'est pas supposé directement observable mais apparaît plutôt soit comme l'innovation d'un processus Y dans un modèle ARMA, écrit sous forme polynomiale (L désignant l'opérateur retard)

$$\Phi(L)\, Y_t = \Theta(L)\, \varepsilon_t, \tag{3}$$

soit comme l'innovation dans un modèle de régression

$$Y_t = m\,(X_{t-1};\ \beta) + \varepsilon_t, \tag{4}$$

où $m\,(X_{t-1};\ \beta)$ désigne une fonction d'une variable X_{t-1} contenue dans l'ensemble d'information à la date $t-1$ et β un vecteur de paramètres.

La classe de modèles ainsi définie est très large et l'hypothèse (1) très générale. Nous nous intéressons dans un premier temps à une sous-classe particulièrement importante, introduite dès l'article fondateur d'Engle (1982).

2.1. Modèles ARCH linéaires : ARCH(q) et GARCH(p,q)

La première famille considérée repose sur une paramétrisation *quadratique* de la variance conditionnelle. A la suite de Higgins et Bera (1988), Bollerslev, Chou et Kroner (1990), nous qualifions de *linéaires* ces modèles pour lesquels les méthodes des séries temporelles classiques (ARMA) restent l'outil de base, appliquées au carré du processus d'innovation. D'autres spécifications seront ensuite considérées qui prendront en compte divers effets de variance caractéristiques de la non-linéarité.

Un processus ARCH(q) est défini par l'équation (1) et une paramétrisation de σ_t^2, fonction affine de valeurs passées du carré du bruit :

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 = \alpha_0 + \alpha(L)\, \varepsilon_t^2, \tag{5}$$

avec les contraintes

$$\alpha_0 > 0, \quad \alpha_i \geq 0 \quad i = 1,\ q, \tag{6}$$

qui garantissent la stricte positivité de la variance conditionnelle.

Une généralisation naturelle (GARCH(p,q), Bollerslev (1986)), analogue à celle des AR(p) par les ARMA(p,q), permet de prendre en compte des processus à mémoire longue avec un nombre restreint de paramètres :

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \sigma_{t-i}^2 = \alpha_0 + \alpha(L)\, \varepsilon_t^2 + \beta(L)\, \sigma_t^2, \tag{7}$$

avec $$\alpha_0 > 0, \quad \alpha_i \geq 0, \quad \beta_i \geq 0, \quad i = 1,\ q.^1 \tag{8}$$

La propriété fondamentale de ce type de représentation tient dans la remarque suivante. Si l'on note (u_t) l'innovation correspondant au carré du processus ε, soit $u_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$, il apparaît que l'équation (7) s'interprète, en réarrangeant les termes, comme un modèle ARMA pour le processus $(\varepsilon_t^2)^2$:

$$[I - \alpha(L) - \beta(L)]\, \varepsilon_t^2 = \alpha_0 + [I - \beta(L)]\, u_t. \tag{9}$$

Cette nouvelle écriture permet de traiter très simplement le problème de la *stationnarité faible* du processus ε. Celle-ci repose en effet sur l'existence d'une variance $V\varepsilon_t = E\sigma_t^2$ (asymptotiquement) indépendante du temps. La condition nécessaire et suffisante s'écrit :

$$\alpha(1) + \beta(1) = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i + \sum_{i=1}^{p} \beta_i < 1. \tag{10}$$

Plus généralement, des conditions (nécessaires et suffisantes) d'existence des moments ont été obtenues dans le cas des ARCH(q) (Milhoj (1985)) et des GARCH(1,1) (Bollerslev (1986)) mais leur expression est assez compliquée. Le calcul explicite de ces divers moments est également possible, par exemple de manière récursive. L'obtention des moments d'ordre deux et quatre permet ainsi de mettre en évidence une propriété de *leptokurticité* caractéristique de ces modèles. On constate en effet un accroissement de la Kurtosis (définie comme le rapport du moment d'ordre 4 et du carré du moment d'ordre deux) lorsque l'on passe des lois conditionnelles aux lois non conditionnelles (voir Gouriéroux (1991)).

La représentation ARMA pour le carré du bruit, peut également être utilisée pour l'étude des autocorrélations et autocorrélations partielles. Avec l'hypothèse

---

1. Avec ces conditions la positivité de σ_t^2 est assurée, mais elles ne sont pas nécessaires ; voir Nelson et Cao (1991).

2. Notons cependant que le processus (u_t) n'est pas nécessairement de variance constante ; il n'est pas non plus i.i.d.

d'existence du moment d'ordre quatre, on obtient en effet des équations de Yule-Walker pour la suite des autocovariances du processus ε^2. Celles-ci peuvent être très utiles comme outil (préliminaire) d'identification des ordres p et q (voir Bollerslev (1988))[1].

Une autre représentation importante porte sur la variance conditionnelle. En remplaçant ε_{t-i}^2 par $\sigma_{t-i}^2 Z_{t-i}^2$ il vient :

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{r} A_i(Z_{t-i})\, \sigma_{t-i}^2, \quad r = \mathrm{Max}(p,q), \quad A(Z_{t-i}) = \alpha_i Z_{t-i}^2 + \beta_i, \quad i = 1, r, \tag{11}$$

avec des conventions de notation évidentes. Cette relation est surtout utilisée pour obtenir des propriétés de *stationnarité stricte* du processus ε. Le premier, Nelson (1990a) a posé le problème de l'existence d'une solution strictement stationnaire et l'a résolu dans le cas GARCH(1,1)[2]. La condition (nécessaire et suffisante) s'écrit

$$E\,[\mathrm{Log}\, A\,(Z_t)] = E\,[\mathrm{Ln}\,(\alpha_1 Z_t^2 + \beta_1)] < 0. \tag{12}$$

Le problème a également été résolu pour le GARCH(p,q) général par Bougerol et Picard (1990) et la condition porte sur le plus grand exposant de Lyapounov associé à une famille de matrices. Les conditions de "mélangeance" (mixing) n'ont par contre pas été établies pour les modèles ARCH (voir Hansen (1990) pour l'étude d'une notion de dépendance voisine dans le cas GARCH(1,1)). La contrainte (12) a ceci de remarquable qu'elle est moins forte que celle de stationnarité faible. Ainsi, et ceci a pu être vérifié pour d'autres spécifications de la variance conditionnelle (voir partie 2.2), lorsque le processus est stationnaire au sens faible il l'est au sens strict. Ceci est particulièrement important pour l'application de procédures d'estimation fondées sur la vraisemblance, qui reposent sur des hypothèses d'ergodicité des divers processus (voir Gouriéroux et Monfort (1990)). Inversement, le processus peut ne pas avoir de variance mais admettre une loi invariante (à queues épaisses). C'est en particulier le cas des processus *intégrés* ou IGARCH introduits par Engle et Bollerslev (1986).

Un processus IGARCH(p,q) correspond à une racine unité dans le polynôme $\alpha(L) + \beta(L)$. Comme les modèles ARIMA, il se caractérise par un effet de *persistance* mais dans la variance[3]. Un choc sur la variance conditionnelle présente se répercute sur les prévisions de toutes ses valeurs futures. Par exemple dans le cas du IGARCH(1,1), avec $\alpha_1 + \beta_1 = 1$, on a $E\,[\sigma_{t+k}^2 / \underline{\varepsilon_t}] = \sigma_{t+1}^2 + (k-1)\,\alpha_0$. En particulier, si $\alpha_0 = 0$, la prévision est la même quel que soit l'horizon, de manière analogue à la marche aléatoire usuelle sur la moyenne. Par contre la variance de cette prévision croît exponentiellement avec k (voir Geweke (1986)). Plus généralement, si $\alpha_1 + \beta_1 \geq 1$ on a toujours persistance en moyenne mais la persistance trajectoire par trajectoire n'a lieu que si $E\,[\mathrm{Log}\,(\alpha_1 Z_t^2 + \beta_1)] \geq 0$ (voir Gouriéroux (1991)).

1. Malheureusement, l'ARMA étant d'ordre (Max (p,q), p), q n'est pas toujours identifiable ainsi...
2. Dans ce cas, on retrouve l'aspect linéaire de la paramétrisation retenue puisque σ_t^2 est AR(1) (avec innovation de variance constante si ε admet un moment d'ordre (4)).
3. Notons que l'analogie avec les ARIMA n'est pas totale puisque les IGARCH sont ergodiques.

2.2. Modèles ARCH non linéaires

Depuis l'article d'Engle (1982) qui proposait déjà diverses paramétrisations alternatives de la variance conditionnelle, de nombreuses paramétrisations sont apparues. Il s'agit principalement de rompre avec l'aspect symétrique des formulations quadratiques pour lesquelles seule *l'amplitude* des valeurs passées de l'innovation est prise en compte et non leur *signe*. Nous verrons en effet (partie 4) que cette propriété entre souvent en contradiction avec le comportement des séries financières.

Le modèle GARCH exponentiel (EGARCH(p,q)) a été introduit par Nelson (1990c). La spécification porte ici sur le logarithme de la variance conditionnelle (voir également Geweke (1986), Pantula (1986)), ce qui permet d'éviter les contraintes de positivité :

$$\operatorname{Log} \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \left(\theta Z_{t-i} + \gamma[\,|Z_{t-i}| - E\,|Z_{t-i}|\,]\right) + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \operatorname{Log} \sigma_{t-i}^2. \quad (13)$$

Dans ce modèle les effets de signe et de module sont pris en compte séparément par l'intermédiaire des paramètres θ et γ. Le choix des variables Z_{t-i} plutôt que ε_{t-i} dans (13) permet d'obtenir des conditions de stationnarité faible qui portent uniquement sur le polynôme $\beta(L)$. Ces contraintes assurent également l'existence de tous les moments : l'aspect leptokurtique est donc moins marqué que dans le cas linéaire. Par ailleurs, l'existence d'une représentation ARMA pour le carré du bruit n'a pas d'équivalent ici.

Le modèle ARCH à seuil (Threshold ARCH, voir Zakoïan (1990), Rabemananjara et Zakoïan (1991)), spécifie l'*écart-type* conditionnel comme une fonction linéaire par morceaux des valeurs passées du bruit. En introduisant les parties positives et négatives de l'innovation ($\varepsilon_t^+ = \operatorname{Max}(\varepsilon_t, 0)$, $\varepsilon_t^- = \operatorname{Min}(\varepsilon_t, 0)$) on a (GTARCH(p,q)) :

$$\sigma_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i^+ \varepsilon_{t-i}^+ - \alpha_i^- \varepsilon_{t-i}^- + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \sigma_{t-i} = \alpha_0 + \alpha^+(L)\,\varepsilon_t^+ - \alpha^-(L)\,\varepsilon_t^- + \beta(L)\,\sigma_t, \quad (14)$$

avec $$\alpha_0 > 0, \quad \alpha_i^+ \geq 0, \quad \alpha_i^- \geq 0, \quad \beta_i \geq 0, \quad i = 1, q. \quad (15)$$

Ainsi l'effet sur la variance conditionnelle présente d'un choc ε_{t-i} sur la variable observable dépend à la fois du signe et de l'amplitude de ce choc. Avec les contraintes (15), ce modèle présente également des propriétés de linéarité qui le rendent très maniable. On montre en effet que si $p = 0$ (TARCH(q)), le vecteur (ε_t^+, ε_t^-) est solution d'un modèle AR(q). Par ailleurs, on obtient aisément les analogues de (11) pour le processus σ_t. Enfin, il est possible de supprimer les contraintes sur les α_i^+, α_i^- et β_i puisque la spécification ne porte pas sur un carré. Cette suppression, avantageuse d'un point de vue pratique, permet la prise en compte de phénomènes non linéaires sur la volatilité.

Gouriéroux et Monfort (1990) ont proposé un traitement symétrique des moyenne et variance conditionnelles à l'aide de fonctions constantes par morceaux :

$$Y_t = \sum_{j=1}^{J} \alpha_j I_{Aj}(Y_{t-1}) + \sum_{j=1}^{J} \beta_j I_{Aj}(Y_{t-1}) Z_t, \tag{16}$$

où $(A_j)_{1,j}$ est une partition de $\mathbb{R}$. Les propriétés probabilistes sont obtenues ici grâce à la théorie des chaînes de Markov. En particulier, il est possible d'obtenir une représentation ARMA de Y_t. Notons enfin que la généralisation multivariée est immédiate et que les estimateurs des divers paramètres ont des expressions très simples.

D'autres formulations ont été proposées qui apparaissent plutôt comme des généralisations de la forme quadratique. Citons par exemple Higgins et Bera (1988), pour qui la variance conditionnelle est fonction linéaire d'une puissance de valeurs passées de ε_t^2. Bera et Lee (1989) introduisent dans la volatilité des produits croisés de valeurs passées du bruit (Augmented ARCH). Plus généralement Sentana (1990) considère une forme quadratique quelconque, fondée sur un développement de Taylor de la variance conditionnelle. Ces modèles impliquent évidemment des contraintes fortes sur les paramètres afin d'assurer la positivité de σ_t^2. Enfin, Harvey et Ruiz (1990) considèrent des modèles avec variables inobservables (Structural ARCH) dans lesquels l'effet ARCH est placé à la fois sur l'équation d'état et sur celle de mise à jour. L'utilisation de tels modèles repose sur des techniques de filtre de Kalman.

3. Estimation et test

Les techniques usuelles d'estimation (fondées sur la vraisemblance, par moindres carrés, non paramétrique) s'appliquent aux modèles ARCH.

Nous considérons dans cette partie le modèle ARMA défini par les équations (1), (2) et (3) ou, indifféremment d'un point de vue théorique, le modèle de régression (1), (2) et (4). On examine d'abord le cas où la variance conditionnelle est paramétrée.

3.1. Méthodes fondées sur la vraisemblance

Notons l_t la log-vraisemblance associée à Y_t conditionnelle au passé et θ le vecteur des paramètres du modèle. La log-vraisemblance de $Y_1, ..., Y_T$ conditionnelle de Y_0 est

$$L_T(\theta) = (1/T) \sum_{t=1}^{T} l_t. \tag{17}$$

Si $f(.)$ désigne la fonction de densité de (Z_t), l_t s'écrit

$$l_t = \text{Log } f(\varepsilon_t \sigma_t^{-1}) - \text{Log } \sigma_t. \tag{18}$$

L'estimateur est défini comme une solution du problème de maximisation de $L_T(\theta)$.

Lorsque la loi de (Z_t) est normale, on a $l_t = -1/2\,[\text{Log}\,2\pi + (\varepsilon_t\sigma_t^{-1})^2] - \text{Log}\,\sigma_t$. On sait que cette densité peut être utilisée pour calculer l'estimateur même si la vraie distribution n'est pas normale (méthode du pseudo-maximum de vraisemblance, voir Gouriéroux et Monfort (1989)). Des conditions suffisantes de régularité permettant d'obtenir des propriétés de convergence et de normalité asymptotique ont été établies dans le cas des ARCH (linéaires) par Weiss (1984) et (1986) (voir également Bollerslev et Woolridge (1990) pour une classe plus générale). La plus contraignante d'entre elles (rarement vérifiée dans la pratique...) est une condition d'existence du moment d'ordre 4 pour ε_t. Lumsdaine (1990) montre qu'il est possible de s'affranchir de cette contrainte dans le cas GARCH(1,1) et que même dans le cas IGARCH(1,1), les estimateurs du pseudo-maximum de vraisemblance des divers paramètres sont convergents et asymptotiquement normaux. La précision de l'estimateur s'exprime en fonction des matrices I et J habituelles (voir Engle (1982), Gouriéroux (1991)). Il est important de noter que lorsque la vraie densité conditionnelle est effectivement normale, les estimateurs de la moyenne et ceux de la variance (conditionnelles) sont asymptotiquement non corrélés : ils peuvent ainsi être estimés séparément sans perte d'efficacité. Cette propriété tombe lorsque l'on sort de la classe des modèles ARCH linéaires (ARCH à seuil par exemple).

L'estimateur est obtenu en résolvant les équations du premier ordre, qui dans le cas de modèles de type GARCH contiennent une partie récursive (la dérivée de la variance conditionnelle par rapport aux paramètres s'exprime en fonction de ses valeurs passées). La résolution numérique peut être menée par diverses techniques d'optimisation (algorithme Berndt, Hall, Hall et Hausman (1974)...).

D'autres distributions conditionnelles que la normale peuvent évidemment être considérées. En effet, il apparaît souvent dans les applications que les queues de distribution de celle-ci ne sont pas assez épaisses (voir partie 4.1). Différentes lois ont ainsi été proposées : t-student (Bollerslev (1987)), mélange normal-lognormal (Hsieh (1989)), exponentielle généralisée (Nelson (1990c))...

Dans un article récent, Engle et Gonzalez-Rivera (1989), comparent pour plusieurs densités l'efficacité relative de l'estimateur du pseudo-maximum de vraisemblance par rapport à celui obtenu avec la vraie loi (maximum de vraisemblance) : il apparaît que celle-ci peut être très faible pour certaines densités (Gamma, Student...).

Pagan et Sabau (1987) étudient les propriétés de l'estimateur du pseudo-maximum de vraisemblance du paramètre β de la moyenne conditionnelle ($m\,(X_{t-1};\ \beta) = \beta X_{t-1}$ dans (4)), lorsque l'hétéroscédasticité n'est pas correctement spécifiée. Ils montrent en particulier que spécifier un ARCH(q) lorsque σ_t^2 est une fonction symétrique du passé de ε_t n'affecte pas la convergence de β ; il peut en aller tout autrement si la symétrie est en défaut (EGARCH, TARCH...).

La fonction de vraisemblance peut être également utilisée, sous l'hypothèse de normalité conditionnelle, pour tester l'homoscédasticité (conditionnelle). Dans les diverses formes paramétriques considérées, celle-ci est caractérisée par une contrainte du type $H_0 = \{\alpha = 0\}$ et peut être testée par une procédure du multiplicateur de Lagrange. La statistique obtenue suit asymptotiquement une loi du khi-deux avec un nombre de degrés de liberté égal à la taille du vecteur des paramètres de la variance conditionnelle (voir Engle (1982)). Elle présente également une interprétation simple en fonction du R^2 correspondant à la régression de ε_t^2 sur une fonction de ses valeurs passées $((\varepsilon_{t-1}^2, \ldots, \varepsilon_{t-q}^2)$ dans le cas ARCH(q)[1]).

3.2. Moindres carrés en deux étapes

Tirant parti de la représentation autorégressive pour le carré des résidus, les paramètres d'un modèle ARCH(q) peuvent être estimés par moindres carrés. Un estimateur convergent du vecteur des paramètres de la moyenne peut être obtenu, dont on déduit des résidus ε_t. En régressant ε_t^2 sur 1, $\varepsilon_{t-1}^2, \ldots, \varepsilon_{t-q}^2$, on obtient des estimateurs convergents des paramètres figurant dans la variance, qui permettent ensuite d'améliorer les estimateurs de première étape de la moyenne en tenant compte de l'hétéroscédasticité. Des estimateurs de seconde étape peuvent également être obtenus pour les paramètres de la variance. Asymptotiquement normaux, ces estimateurs des moindres carrés quasi généralisés font apparaître une perte d'efficacité asymptotique par rapport à ceux du pseudo-maximum de vraisemblance (voir Engle (1982)). Il est important de remarquer que celle-ci n'affecte que les paramètres de la moyenne : les estimateurs des paramètres de la variance sont asymptotiquement efficaces. Notons enfin que la méthode peut s'appliquer à d'autres paramétrisations, lorsqu'elles impliquent une linéarité pour un processus construit à partir des résidus (ARCH à seuil, par exemple).

3.3. Approches semi-paramétriques

Le terme semi-paramétrique (ou semi-nonparamétrique...) se réfère à des techniques situées à mi-chemin des procédures paramétriques et non paramétriques d'inférence[2]. Dans le cadre des modèles ARCH, l'idée est qu'il peut être préférable de ne pas essayer de paramétrer la variance conditionnelle. Des méthodes ont ainsi été proposées qui ne prétendent pas atteindre l'optimalité pour une forme particulière de l'hétéroscédasticité mais possèdent de bonnes propriétés d'optimalité lorsque cette forme est mal définie.

A la suite de Robinson (1987), divers auteurs dont Pagan et Ullah (1988), Cocco et Paruolo (1990), ont proposé des méthodes du *noyau*[3] dans lesquelles σ_s^2 est estimé comme une moyenne pondérée des ε_t^2, $t = 1$, T. Celle-ci est fondée sur la proximité entre l'ensemble d'information de ε_t (valeurs passées) et celui de ε_s. Différents choix de noyaux sont possibles, le gaussien étant le plus fréquent.

Une autre approche, introduite par Gallant et Nychka (1987), consiste à approximer la densité conditionnelle par le produit de la densité gaussienne standard et d'un polynôme en les diverses variables (conditionnées et conditionnantes). Les

1. Voir également Bera et Lee (1991) pour une interprétation de cette statistique dans le cadre du test de la matrice d'information de White.
2. Voir Robinson (1988) pour une revue de cette littérature.
3. Voir Bierens (1987) pour les propriétés asymptotiques du noyau appliqué à la régression, en particulier dans le cas de séries temporelles.

et d'un polynôme en les diverses variables (conditionnées et conditionnantes). Les applications sont généralement menées avec des polynômes de degrés très faibles (Gallant et Tauchen (1989), Gallant, Hansen et Tauchen (1989)).

Engle et Gonzalez-Rivera (1989) proposent une procédure en plusieurs étapes qui passe par une estimation non paramétrique de la densité des résidus, fondée sur une technique de maximum de vraisemblance pénalisé (Tapia et Thompson (1978)) avec une forme affine par morceaux pour la densité. Les simulations font apparaître des gains d'efficacité importants pour certaines lois (non symétriques, par exemple).

Enfin Pagan et Schwert (1990) utilisent la forme flexible de Fourier introduite par Gallant (1981) dans laquelle σ_t^2 est écrite comme la somme d'un polynôme et de termes trigonométriques, construits à partir des variables figurant dans l'ensemble d'information. Diverses techniques, paramétriques ou non, sont également comparées à travers un exemple.

4. Applications des modèles ARCH

4.1. Effets ARCH et séries financières

Les séries financières[1] (rentabilités d'action, taux d'intérêt, taux de change...) présentent des propriétés très caractéristiques, discutées dans Taylor (1985) et Campbell (1990). La plus importante est le fait que, comme l'a remarqué Mandelbrot (1963), «les grandes variations de prix tendent à être suivies de grandes variations – de signe quelconque – et les petites variations tendent à être suivies de petites variations». En d'autres termes la *volatilité* (variance conditionnelle) évolue avec le temps[2]. D'autre part les distributions marginales sont à queues épaisses par rapport à la loi normale. Cette propriété n'est d'ailleurs pas uniquement la conséquence de la précédente car même normalisés (i.e après division par les écarts-types conditionnels estimés), les rentabilités présentent encore un «excès de Kurtosis» (Bollerslev (1987)). Enfin, la volatilité est généralement plus élevée après une baisse qu'après une hausse (voir Christie (1982) et Schwert (1989)). Cette *asymétrie* se traduit par une corrélation négative entre le cours présent et la volatilité future. Signalons enfin que ces divers effets sont souvent d'autant plus marqués que l'unité de temps (jour, semaine, mois) est courte.

Les modèles conditionnellement hétéroscédastiques fournissent un cadre adapté à la prise en compte de ces caractéristiques des séries financières. Les formulations linéaires (GARCH(p,q)) ne peuvent évidemment pas capter l'asymétrie (puisque le

1. Généralement les séries considérées sont des rentabilités ou de façon proche les modifications de logarithme de prix entre les dates $t-1$ et t. L'unité temporelle peut être le jour, la semaine ou le mois.

2. Ce phénomène ne semble pas encore avoir trouvé d'explication économique satisfaisante ; voir par exemple Schwert (1989).

signe des erreurs passées n'intervient pas dans la volatilité présente) mais cet effet est contenu dans les paramétrisations non linéaires (EGARCH, TARCH, QTARCH).

Les modèles ARCH ont ainsi été ajustés à de nombreuses séries financières. Citons à titre illustratif : indices boursiers (Akgiray (1989)), rentabilité d'actions (Schwert, (1990)), taux d'intérêt (Engle, Lilien et Robins (1987)), taux de change (Milhoj (1987))... La première phase de l'ajustement passe généralement par l'identification d'un modèle ARMA sur la variable observable et par une série de tests sur les résidus. Il est important de noter que la présence d'hétéroscédasticité affecte les propriétés asymptotiques de nombreux estimateurs couramment utilisés. Par exemple les tests standard de bruit blanc ne sont plus valides en présence d'ARCH (voir Gouriéroux (1990)). De même Milhoj (1985) montre que les variances des estimateurs usuels des autocorrélations peuvent croître considérablement. Il en va de même pour les variances des autocorrélations empiriques du carré du bruit (voir Milhoj (1990) pour le cas ARCH(1)). Ainsi, la puissance des tests d'effet ARCH fondés sur celles-ci est très faible et les ordres p et q des modèles GARCH sont difficiles à identifier. Pour cette raison, ces ordres sont généralement imposés a priori, différents tests a posteriori étant ensuite conduits afin de les réduire : le plus souvent, les formulations retenues sont des GARCH(1,1), GARCH(1,2) ou GARCH(2,1) et ceci semble suffisant même pour de très grandes tailles d'échantillons (voir par exemple French, Schwert et Stambaugh (1987)). Généralement, les critères de choix de modèles a posteriori reposent sur la comparaison des distributions empiriques des résidus normalisés $(\hat{\varepsilon}_t/\hat{\sigma}_t)$ (les queues étant d'autant plus épaisses que la variance est mal spécifiée), ou sur la comparaison des valeurs des log-vraisemblances estimées. Nelson (1990e) montre que si le premier critère est valable, le second peut être faux, en particulier lorsque d'autres vraisemblances que la normale sont utilisées.

Une propriété intéressante (et caractéristique) est la mise en évidence de phénomènes de persistance des chocs sur la volatilité, c'est-à-dire l'existence de racines de modules proches de un dans les polynômes de retard. Ceci a été vérifié pour de très nombreuses séries, quelles que soient la paramétrisation adoptée et la fréquence des observations : GARCH (Chou (1988)), EGARCH (Nelson (1990c), TGARCH (Rabemananjara et Zakoïan (1991)), et également avec des méthodes non-paramétriques (Pagan et Schwert (1990)). Des tests de racine unité dans la variance ont ainsi été mis en œuvre par divers auteurs (par exemple French, Schwert et Stambaugh (1987), Chou (1988)) : ceux-ci conduisent généralement à accepter l'hypothèse. L'effet de persistance a aussi été analysé en liaison avec la taille de la firme (Engle et Gonzalez-Rivera (1989)) ou la présence de valeurs «aberrantes» (krach de 1987, voir Schwert (1990)). Lamoureux et Lastrapes (1990) montrent qu'il peut être attribué à des erreurs de spécification dans la variance conditionnelle (la persistance diminuant considérablement lorsqu'on tient compte de la possibilité d'une instabilité des paramètres sur toute la période).

4.2. Modèles d'évaluation (pricing) et GARCH-M

Les modèles GARCH-M(ean) introduits par Engle, Lilien et Robins (1987), sont des généralisations directes des formulations classiques, obtenues en ajoutant la variance conditionnelle comme variable explicative dans l'équation de la moyenne. Typiquement, (4) est remplacée par

$$Y_t = m\,(X_{t-1};\ \sigma_t^2;\ \beta) + \varepsilon_t, \tag{19}$$

m (.) étant le plus souvent supposée linéaire en σ_t^2. Cette formulation permet d'incorporer le modèle à l'analyse financière classique en termes de risque (mesuré par la variance conditionnelle) et rentabilité. L'estimation peut être menée par maximum de vraisemblance comme dans le cas GARCH, mais les inférences sur les paramètres de la moyenne et de la variance ne peuvent évidemment plus être conduites séparément : toute erreur de spécification sur les paramètres de la variance se répercute donc sur ceux de la moyenne (biais, non convergence, voir Pagan et Sabau (1987))[1]. Pagan et Ullah (1988) proposent une méthode d'estimation par variables instrumentales, les instruments étant construits à partir de l'ensemble d'information et la variance conditionnelle non explicitement paramétrée (voir également Rich, Raymond, Butler (1991)).

Le modèle GARCH-M peut être utilisé pour estimer une classe centrale de modèles d'équilibre en théorie financière : les CAPM (Capital Asset Pricing Models) (voir Sharpe (1964), Mossin (1966), Merton (1973)). Sous une forme simplifiée, le CAPM prédit que l'espérance conditionnelle de l'excès de rentabilité d'un actif par rapport à l'actif non risqué est proportionnelle à la covariance (conditionnelle) entre cette rentabilité et celui d'un portefeuille composé de tous les titres du marché. On en déduit (voir Merton (1980)) sous certaines hypothèses, une relation linéaire entre espérance et variance conditionnelles du portefeuille de marché. De nombreux auteurs, dont par exemple French, Schwert et Stambaugh (1987), Chou (1988), ont testé ce type de liaison sur divers indices boursiers. Dans tous les cas, le paramètre mesurant l'impact de la variance conditionnelle sur la moyenne est apparu significativement strictement positif. La linéarité de la liaison entre rentabilité espérée et variance conditionnelle a été rejetée par Chou, Engle et Kane (1989) qui supposent variable le coefficient de la variance conditionnelle dans l'équation de la moyenne, à travers une représentation espace-état.

4.3. Modèles en temps continu

Fondée sur le calcul d'Itô, une part importante de la littérature financière, en particulier celle qui concerne l'évaluation des options, est écrite en *temps continu*. Par ailleurs les séries financières ne sont évidemment disponibles qu'à intervalles fixes et les procédures standard d'estimation des modèles de diffusion nécessitent souvent l'expression analytique de la densité de transition du processus sous-jacent. Or sauf pour des classes très particulières de processus, celle-ci est généralement difficile à obtenir (voir Lo (1988)). Une autre approche consiste à chercher pour

1. D'où l'importance particulière des tests de spécification dans ce contexte.

tout modèle de diffusion un modèle discret dont les solutions fournissent de bonnes approximations. L'idéal serait de pouvoir intégrer les équations différentielles stochastiques, de manière à obtenir le modèle discret exact correspondant. Malheureusement, cela est rarement possible (voir El Babsiri, Renault (1989)). Nelson (1990b) prend le problème en sens inverse en établissant la convergence de processus discrets vers des processus de diffusion lorsque l'unité de temps tend vers zéro. Il considère ainsi une suite de modèles discrets (GARCH(1,1) ou EGARCH(1,1), voir également El Babsiri et Zakoïan (1990) pour le TGARCH(1,1)), indexée par l'unité de temps h séparant deux observations, à laquelle il associe une suite de processus en temps continu supposés constants entre deux unités de temps consécutives. Les processus limites obtenus en faisant tendre h vers zéro, sont définis comme solutions d'équations différentielles stochastiques, qui admettent une forme très générale dans le cas EGARCH. Dans une série d'articles récents, Nelson (1990d), Nelson et Foster (1991a), (1991b), montrent que pour des observations très rapprochées, un modèle ARCH même mal spécifié peut fournir une estimation convergente de la variance conditionnelle présente. Par contre, il peut se révéler désastreux en termes de prévision, ce qui conduit les auteurs à comparer l'efficacité de divers modèles ARCH selon ces deux aspects.

4.4. Modèles ARCH multivariés

Dans ce qui précède, les divers processus ont été considérés exclusivement dans un cadre univarié. Très tôt, la nécessité est apparue de prendre en compte des effets de variance croisés par l'intermédiaire de modèles multivariés. Pour un processus ε à N composantes, l'analogue des contraintes (2) s'écrit naturellement

$$E(\varepsilon_t/\underline{\varepsilon_{t-1}})=0, \quad V(\varepsilon_t/\underline{\varepsilon_{t-1}})=H_t, \tag{20}$$

où H_t est une $N \times N$ matrice de covariance fonction mesurable du passé de ε_t. De manière générale, la principale difficulté consiste à trouver une paramétrisation économe en nombre de paramètres. Il faut également pouvoir déterminer les contraintes de symétrie, de semi-définie positivité de H_t et celles assurant la stabilité.

Une écriture très générale du modèle GARCH(p,q) multivariée est (voir Bollerslev, Engle et Wooldridge (1988)) :

$$\mathrm{Vech}(H_t)=\mathrm{Vech}\ C+\sum_{i=1}^{q}A_i\ \mathrm{Vech}(\varepsilon_{t-i}\varepsilon_{t-i})+\sum_{i=1}^{p}B_i\ \mathrm{Vech}(H_{t-i})^{1}, \tag{21}$$

où C, A_i et B_i sont des $N(N+1)/2 \times N(N+1)/2$ matrices, semi-définies positives.

1. Vech (.) désigne l'opérateur présentant sous forme vectorielle la partie inférieure d'une matrice symétrique.

Des conditions suffisantes de stationnarité faible peuvent être établies, ainsi que le calcul explicite de la matrice de variance non conditionnelle (voir Gouriéroux (1990)). En pratique et sans contraintes supplémentaires, cette formulation est cependant inutilisable dès que N, p, ou q dépasse quelques unités (plus de 100 paramètres pour $N=4$, $p=1$, $q=0$...). Une simplification immédiate consiste évidemment à supposer les matrices A_i et B_i diagonales, ce qui revient à dire que chaque covariance ne dépend que de son propre passé et de celui des composantes de ε correspondantes. Moins dramatique du point de vue des interprétations financières, la solution de Bollerslev (1990) consiste à supposer constantes les corrélations conditionnelles. L'approche la plus intéressante (la plus adaptée aux applications financières) est sans doute celle proposée par Diebold et Nerlove (1989) qui introduisent un modèle ARCH à *facteurs*. Chaque composante du processus est exprimée en fonction d'un petit nombre de facteurs latents, sur lesquels portent les hypothèses d'hétéroscédasticité conditionnelle. Ainsi dans le cas d'un facteur F_t à K composantes, le modèle peut s'écrire

$$\varepsilon_t = CF_t + \nu_t, \tag{22}$$

où C est une $N \times K$ matrice de rang $K\,(N \geq K)$, (ν_t) un bruit indépendant de matrice de variance Γ, indépendant de (F_t), et où toute l'hétéroscédasticité est contenue dans F_t : $E\,(F_t/\underline{F_{t-1}}) = \mu_t$, $V\,(F_t/\underline{F_{t-1}}) = \Omega_t$. L'estimation de ce modèle par maximum de vraisemblance pose de sérieux problèmes en raison de la non-observabilité des facteurs. La démarche suivie par Diebold et Nerlove (1989) (avec un seul facteur) consiste à utiliser le filtre de Kalman et une écriture approchée de la log-vraisemblance. Une approche plus générale des modèles à facteurs est présentée dans Gouriéroux, Monfort et Renault (1991).

Une généralisation des modèles GARCH-M en multivarié a été introduite par Bollerslev, Engle et Wooldridge (1988). Elle a été utilisée dans un cadre simple (matrices diagonales, un seul retard dans toutes les variables) pour tester le CAPM avec un portefeuille constitué de trois titres. Les résultats semblent meilleurs que ceux obtenus en traitant les séries séparément.

Conclusion

Jusqu'à une date récente, l'économétrie avait l'habitude de considérer l'hétéroscédasticité comme un phénomène à prendre en compte pour obtenir des estimateurs efficaces des divers paramètres d'un modèle. La nécessité de modéliser les variances conditionnelles *pour elles-mêmes* est apparue dans la théorie économique, principalement financière. Les modèles ARCH, à travers une paramétrisation endogène de l'hétéroscédasticité dans les séries temporelles, ont fourni un outil particulièrement adapté tant pour l'analyse et la prévision de la volatilité que pour le test de diverses théories économiques.

Même si la littérature consacrée au sujet semble avoir atteint sa maturité aujourd'hui, de nombreuses questions restent ouvertes, dont certaines ont pu apparaître ici. Par exemple des développements rapides sont certainement à attendre dans le choix entre les diverses paramétrisations, la modélisation multivariée ou le test d'autres théories de l'évaluation financières. D'autres problèmes, plus économiques, comme la recherche des causes de l'hétéroscédasticité dans les séries financières, l'explication des disymétries dans la volatilité, resteront sans doute plus longtemps sources de conjectures.

RÉFÉRENCES

AKGIRAY V., 1989, Conditional Heteroskedasticity in Time Series of Stock Returns: Evidence and Forecasts, *Journal of Business*, 62, 55-80.

BERNDT, E.K., B.H. HALL, R.E. HALL and J.A. HAUSMAN, 1974, Estimation inference in non linear structural models, *Annals of Economic and Social Measurement* 4, 653-665.

BERA A.L. et S. LEE, 1989, *On the Formulation of a General Structure for Conditional Heteroskedasticity*, D.P. University of Illinois.

BERA A.K. et S. LEE, 1991, *Information Matrix Test, Parameter Heterogeneity and ARCH: A Synthesis,* D.P. University of Illinois.

BIERENS H.J., 1987, *Kernel Estimators of Regression Functions*, Cambridge University Press : Advances in Econometrics, 99-144.

BOLLERSLEV T., 1986, Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, *Journal of Econometrics* 31, 307-327.

BOLLERSLEV T., 1987, A Conditional Heteroskedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rates of Return, *Review of Economics and Statistics*, 69, 542-547.

BOLLERSLEV T., 1988, On the Correlation Structure for the Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastic Process, *Journal of Time Series Analysis* 9, 2, 121-131.

BOLLERSLEV T., 1990, Modelling the Coherence in Short-Run Nominal Exchange Rates : A Multivariate Generalized ARCH Approach, à paraître dans *Review of Economics and Statistics*.

BOLLERSLEV T., R.Y. CHOU et K.F. KRONER, 1990, *ARCH modeling in Finance: a Review of the Theory and Empirical Evidence*, Working Paper No. 97, Northwestern University.

BOLLERSLEV T., R.F., ENGLE et J.M. WOOLDRIDGE, 1988, A Capital Asset Pricing Model with Time-varying Covariances, *Journal of Political Economy*, 96, 1, 116-131.

BOLLERSLEV T. et J.M. WOOLDRIDGE, 1990, *Quasi Maximum Likelihood Estimation and Inference in Dynamic Models with Time Varying Covariances*, D.P. MIT.

BOUGEROL P. et N. PICARD, 1990, *Stationarity of GARCH Process and of some Non-negative Time-Series*, D.P. University de Nancy I.

CAMPBELL J.Y. et L. HENTSCHEL, 1990, *No News is Good News: An Asymmetric Model of Changing Volatility in Stock Returns*, D.P. Princeton University.

CHESNEY M., and L.O. SCOTT, 1989, Pricing European Currency Options: a

Comparison of the Modified Black-Scholes Model and a Random Variance Model, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 24, 267-284.

CHOU R.Y., 1988, Volatility Persistence and Stock Valuations: Some Empirical Evidence Using GARCH, *Journal of Applied Econometrics*, 3, 279-294.

CHOU R.Y., ENGLE R.F. et A. KANE, 1989, On the Measurement of Risk Aversion with Time-Varying Volatility and Unobservable Component of Wealth, à paraître dans *Journal of Econometrics*.

CHRISTIE A.A., 1982, The Stochastic Behavior of Common Stock Variances, *Journal of Financial Economics* 10, 407-432.

COCCO F. et P. PARUOLO, *Volatility Persistence and the Italian Risk Premium: Parametric and Non-Parametric Evaluation*, D.P. Universita' di Bologna.

DIEBOLD F.X. and M. NERLOVE, 1989, The Dynamics of Exchange Rate Volatility: A Multivariate Latent Factor ARCH Model, *Journal of Applied Econometrics*, 4, 1-21.

EL BABSIRI M. et E. RENAULT, 1989, *Principes de la Statistique des Modèles Financiers en Temps Continu*, D.P. CREST.

EL BABSIRI M., et J.M. ZAKOIAN, 1990, *Approximation en Temps Continu d'un Modèle ARCH à Seuil*, D.P. INSEE

ENGLE R.F., 1982, Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of U.K. Inflation, *Econometrica* 50, 987-1008.

ENGLE R.F., 1987, *Multivariate GARCH with Factor Structures - Cointegration in Variance*, D.P. U.C.S.D.

ENGLE R.F. et T. BOLLERSLEV, 1986, Modelling the Persistence of Conditional Variances, *Econometric Reviews*, 5, 1-50, 81-87.

ENGLE R.F. et G. GONZALEZ-RIVERA, 1989, *Semiparametric ARCH Models*, D.P. University of California, San Diego.

ENGLE R.F., C.W.J. GRANGER and D. KRAFT, 1984, Combining Competing Forecasts of Inflation Using a Bivariate ARCH Model, *Journal of Economics Dynamics and Control*, 8, 151-165.

ENGLE R.F., D. LILIEN and R. ROBINS, 1987, Estimation of Time varying Risk Premiums in the Term Structure, *Econometrica*, 55, 391-408.

ENGLE R.F., V.K. Ng and M. ROTSCHILD, 1989, *Asset Pricing with a Factor ARCH Covariance Structure: Empirical Estimates for Treasury Bills*, D.P. U.C.S.D.

FRENCH K.R., G.W. SCHWERT et R.F. STAMBAUGH, 1987, Expected Stock Returns and Volatility, *Journal of Financial Economics*, 19, 3-29.

GALLANT A.R., 1981, On the Bias in Flexible Functional Forms and an Essentially Unbiased Form: the Fourier Flexible Form, *Journal of Econometrics*, 15, 211-244.

GALLANT A.R., L.P. HANSEN et G. TAUCHEN, 1989, Using Conditional Moments of Asset Payoffs to infer the Volatility of Intertemporal Marginal Rates of Substitution, *Journal of Econometrics*, 45, 141-180.

GALLANT A.R. et D.W. NYCHKA, 1987, Semi-nonparametric Maximum Likelihood Estimation, *Econometrica*, 57, 363-390.

GALLANT A.R. et G. TAUCHEN, 1989, Semi-nonparametric Estimation of Conditionally Constrained Heterogeneous Processes: Asset Pricing Applications, *Econometrica*, 57, 1091-1120.

GEWEKE J., 1986, Comment on Modelling the Persistence of Conditional Variances, *Econometric Reviews*, 57-62.

GOURIEROUX C., 1990, *Modèles ARCH*, à paraître chez Economica.

GOURIEROUX C. et A. MONFORT, 1989, *Statistiques et Modèles Econométriques*, Economica, 2 tomes.

GOURIEROUX C. et A. MONFORT, 1991, Qualitative Threshold ARCH Models, *Journal of Econometrics*.

GOURIEROUX C., A. MONFORT et E. RENAULT, 1991, *Modèles Dynamiques à Facteurs*, D.P. INSEE.

HANSEN B.E., 1990, GARCH(1,1), Processes are Near Epoch Dependent, à paraître dans *Economic Letters*.

HARVEY A.C. et E. RUIZ, 1990, *Unobserved Component Time Series Models with ARCH disturbances*, D.P. London School of Economics.

HIGGINS M.L. et A.K. BERA, 1988, *Nonlinear ARCH Models: Properties, Testing and Applications*, D.P. University of Wisconsin-Milwaukee.

HSIEH D.A., 1989, Modeling Heteroskedasticity in Daily Foreign Exchange Rate Changes, *Journal of Business*, 62, 339-368.

HULL J., and A. WHITE, The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities, *Journal of Finance*, 42, 281-300.

LAMOUREUX C.G. et W.D. LASTRAPES, 1990, Persistence in Variance, Structural Change and the GARCH Model, *Journal of Business and Economic Statistics*, 8, 225-234.

LO A., 1988, Maximum Likelihood Estimation of Generalized Ito Processes with Discretely Sampled Data, *Econometric Theory*.

LUMSDAINE R.L., 1990, *Asymptoptic Properties of the Quasi-Maximum Likelihood Estimator in GARCH(1,1) and IGARCH(1,1) Models*, D.P. Harvard University.

MANDELBROT B., 1963, The Variation of Certain Speculative Prices, *Journal of Business*, 36, 394-419.

MERTON R.C., 1973, An Intertemporal Capital Asset Pricing Model, *Econometrica*, 41, 867-887.

MERTON R.C., 1980, On Estimating the Expected Return on the Market: An Explanatory Investigation, *Journal of Financial Economics*, 8, 323-361.

MILHOJ A., 1985, The Moment Structure of ARCH Processes, *Scandinavian Journal of Statistics*, 12, 281-292.

MILHOJ A., 1987, A Conditional Variance Model for Daily Deviations of an Exchange Rate, *Journal of Business and Economic Statistics*, 5, 99-103.

MILHOJ A., 1990, *Distribution of Empirical Autocorrelations of a Squared First Order ARCH Process*, D.P. University of Odense.

MOSSIN J., 1966, Equilibrium in a Capital Asset Market, *Econometrica*, 768-783.

NELSON D.B., 1990a, Stationarity and Persistence in the GARCH(1,1) Model, *Econometric Theory*, 6, 318-334.

NELSON D.B., 1990b, ARCH Models as Diffusion Approximations, *Journal of Econometrics*, 45, 7-38.

NELSON D.B., 1990c, Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach, à paraître dans *Econometrica*.

NELSON D.B., 1990d, Filtering and Forecasting with Misspecified ARCH models I: Variance Estimation, à paraître dans *Journal of Econometrics*.

NELSON D.B., 1990e, *A Note on the Normalized Residuals from ARCH and Stochastic Volatility Models*, D.P. University of Chicago.

NELSON D.B. et C.Q. CAO, 1991, *A Note on the Inequality Constraints in the*

Univariate GARCH Model, D.P. University of Chicago.

NELSON D.B. et D.P. FOSTER, 1991a, *Filtering and Forecasting with Misspecified Arch models II: Making the Right Forecast with the Wrong Model*, D.P. University of Chicago.

NELSON D.B. et D.P. FOSTER, 1991b, *Estimating Conditional Variances with Misspecified ARCH Models: Asymptotic Theory*, D.P. University of Chicago.

NERLOVE M., F.X. DIEBOLD, H. VAN BEECK and Y.W. CHEUNG, 1988, *A Multivariate ARCH Model of Foreign Exchange Rate Determination*, D.P. University of Pennsylvania.

PAGAN A.R. et H.C.L. SABAU, 1987, *On the Inconsistency of the MLE in Certain Heteroskedastic Regression Models*, D.P. University of Rochester.

PAGAN A.R. et G.W. SCHWERT, 1990, Alternative Models for Conditional Stock Volatility, *Journal of Econometrics*, 45, 267-290.

PAGAN A.R. et A. ULLAH, 1988, The Econometric Analysis of Models with Risk Terms, *Journal of Applied Econometrics*, 3, 87-105.

PANTULA S.G., 1986, Comments on Modelling the Persistence of Conditional Variances, *Econometric Reviews*, 57-62.

RABEMANANJARA R. et J.M. ZAKOIAN, 1991, *TARCH Models with Asymmetries in Volatility*, D.P. INSEE.

RICH R.W., J. RAYMOND et J.S. BUTLER, 1991, Generalized Instrumental Variables Estimation of Autoregressive Conditional Heteroskedastic Models, *Economics Letters*, 35, 179-185.

ROBINSON P.M., 1988, Semiparametric Econometrics: a Survey, *Journal of Applied Econometrics*, 3, 35-52.

SCHWERT G.W., 1989, Why does Stock Market Volatility Change over Time ? *Journal of Finance*, XLIV-5, 1115-1153.

SCHWERT G.W., 1990, Stock Volatility and the Crash of '87, *Review of Financial Studies*, 3, 77-102.

SENTANA E., 1990, *Quadratic ARCH models: A Potential Re-Interpretation of ARCH Models as Second-Order Approximations*, D.P. London School of Economics.

SHARPE W.F., 1964, Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk, *Journal of Finance*, 19, 425-442.

TAPIA R.A. et J.R. THOMPSON, 1978, *Nonparametric Probability Density Estimation*, John Hopkins University Press, Baltimore.

TAYLOR S., 1985, *Modelling Financial Time Series*, John Wiley and Sons.

WEISS A.A., 1984, ARMA Models with ARCH Errors, *Journal of Time Series Analysis*, 5, 129-143.

WEISS A.A., 1986, Asymptotic Theory for ARCH Models: Estimation and Testing, *Econometric Theory*, 2, 107-131.

WIGGINS J.B., 1987, Option Values under Stochastic Volatility: Theory and Empirical Estimates, *Journal of Financial Economics*, 19, 351-372.

YULE G.U., 1927, On a Method of Investigating Periodicities in Disturbed Series with Special Reference to Wolfer's Sunspot Numbers, *Philos. Trans. Royal Society*, London, Series A, 226, 267-298.

ZAKOIAN J.M., 1990, *Threshold Heteroskedastic Models*, D.P. INSEE.