Journal de la société statistique de Paris

Marie Berrondo-Agrell

Vers une syntaxe des diagrammes de Venn : lutte contre un mythe

Journal de la société statistique de Paris, tome 133, nº 1-2 (1992), p. 140-150

<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1992__133_1-2_140_0>

VERS UNE SYNTAXE DES DIAGRAMMES DE VENN : lutte contre un mythe[1]

par Marie BERRONDO-AGRELL
Université de Paris XII

et Per AGRELL
F.O.A., Suède

Résumé

Dans le domaine probabiliste, nombreux sont les élèves qui pensent plus facilement en s'aidant d'images qu'en écrivant directement des formules mathématiques ou des tables de vérité. Inversement nombreux sont aussi les professeurs qui ressentent une réelle honte à enseigner à l'aide d'images, car cela leur semble moins professionnel. Il s'agit là d'un véritable mythe. Voici un essai sur l'art d'utiliser les diagrammes de Venn dans l'enseignement du calcul des probabilités, de telle sorte que le confort intellectuel de l'image (3) soit associé à une rigueur scientifique suffisante. Certes, utiliser de tels diagrammes pour illustrer un problème de probabilités ou pour suggérer une solution n'est pas nouveau (8), mais il est nouveau de proclamer qu'une démonstration puisse s'exprimer dans le langage des diagrammes de Venn, à condition de suivre une syntaxe précise pour aboutir à une méthode exhaustive, c'est-à-dire, qui n'oublie aucun cas.

1. Les 5 langages adaptés au fondement du calcul des probabilités

Le fondement du calcul des probabilités se traite à travers différents langages[2]. Nous pensons tout d'abord à la langue parlée habituelle qu'utilisaient par exemple dans leurs lettres Pascal et Fermat, créant ainsi la base de cette discipline. Il y a aussi le langage classique des mathématiciens d'aujourd'hui, utilisant en particulier les différents opérateurs Booléens. N'oublions pas les langages spécialement adaptés à la logique (9) et à l'informatique : les fonctions indicatrices et les tables de vérité. Quant au langage visuel développé essentiellement par John Venn (10), il a la réputation d'illustrer un problème et d'aider l'imagination à découvrir une solution sans apporter pour autant de preuve formelle : la solution éventuellement découverte grâce à l'image devra s'exprimer formellement dans un des langages précédents.

1. Exposé fait au 2ᵉ Congrès de la Société Bernoulli (13-18 août 1990) à Uppsala en Suède.
2. Ce qui forme une richesse selon James Adams (1).

Voici un exemple : Pour comprendre la base du calcul des probabilités, il est important de connaître, entre autres, les lois de Morgan. Observons la première d'entre elles :

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Nous n'allons pas en donner la démonstration selon la pure langue française car cela serait trop long. Nous nous bornons à démontrer ici cette formule en utilisant successivement chacun des 4 autres langages.

Par les mathématiques classiques :

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \,/\, x \in A \quad \text{ou} \quad x \in B\} \\ \overline{A \cup B} &= \{x \,/\, x \notin A \quad \text{et} \quad x \notin B\} \\ &= \{x \,/\, x \notin A\} \cap \{x \,/\, x \notin B\}. \end{aligned}$$

Donc $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Par les fonctions indicatrices (9) :

$$\begin{aligned} f_{A \cup B} &= f_A + f_B - f_A f_B \\ f_{\overline{A \cup B}} &= 1 - f_{A \cup B} = 1 - f_A - f_B + f_A f_B. \end{aligned}$$

Or, $\quad f_{\overline{A}} = 1 - f_A \quad \text{et} \quad f_{\overline{B}} = 1 - f_B.$

Donc $\quad f_{\overline{A} \cap \overline{B}} = f_{\overline{A}} \cdot f_{\overline{B}} = (1 - f_A)(1 - f_B) = 1 - f_A - f_B + f_A f_B.$

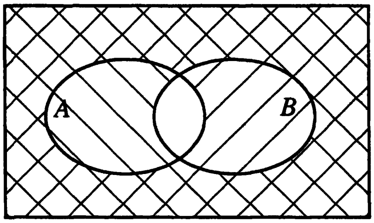
Donc $\quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$

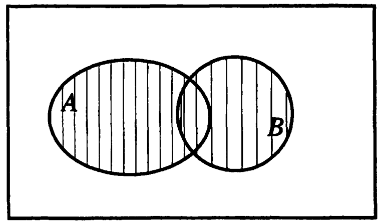
Par les tables de vérité :

	Col. 1	Col. 2	Col. 3	Col. 4
A	V	V	F	F
B	V	F	V	F
$A \cup B$	V	V	V	F
$\overline{A \cup B}$	F	F	F	V
$\overline{A}$	F	F	V	V
$\overline{B}$	F	V	F	V
$\overline{A} \cap \overline{B}$	F	F	F	V

Résultat : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$

Et voici l'illustration par les diagrammes classiques de Venn :





$\bar{A}$ est dessiné : 

$\bar{B}$ est dessiné : 

$\bar{A} \cap \bar{B}$ apparaît : 

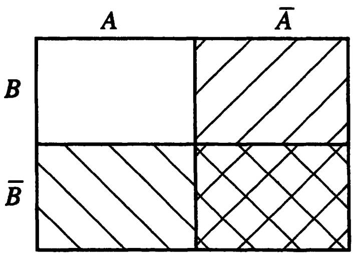
$A \cup B$ est dessiné : 

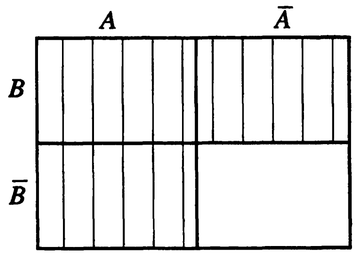
$\overline{A \cup B}$ apparaît : 

blanc

Résultat : $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$.

Voici enfin une illustration équivalente qui utilise la systématisation récente des diagrammes de Venn due à Anthony Edwards (6) :





$\bar{A}$ est dessiné : 

$\bar{B}$ est dessiné : 

$\bar{A} \cap \bar{B}$ apparaît : 

$A \cup B$ est dessiné : 

$\overline{A \cup B}$ apparaît : 

blanc

Donc : $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

Remarque :

Chacune des 4 cases correspond clairement à l'une des 4 colonnes de la table de vérité (la bijection est évidente) :

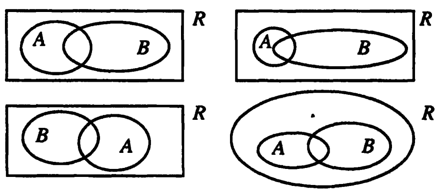
	A	$\bar{A}$
B	Colonne 1	Colonne 3
$\bar{B}$	Colonne 2	Colonne 4

2. Six reproches a priori aux diagrammes de Venn

Vingt années d'expérience de l'enseignement du calcul des probabilités à des étudiants non spécialisés en mathématiques nous permet de certifier que la méthode de démonstration exhaustive basée sur un diagramme de Venn (classique ou Edwardien) est plus facile que les méthodes basées sur les langages précédents car elle stimule la création même d'une démonstration exacte. Les diagrammes de Venn sont cependant l'objet de nombreux reproches, que nous analysons ici avant de donner une ébauche de syntaxe aussi inattaquable que possible.

Premier reproche :

Un même problème peut être représenté par des images différentes. Voici par exemple A et B, 2 parties d'un ensemble de référence R donné :

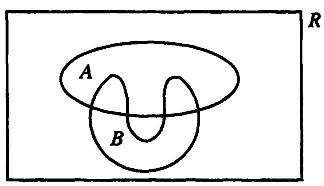


Nous répondrons qu'un diagramme de Venn, selon notre syntaxe, se définit au sens de la théorie des graphes et non au sens de la géométrie euclidienne, mis à part qu'il est impérativement bordé par un rectangle, représentant l'ensemble de référence R.

Deuxième reproche :

L'intersection de 2 parties données initialement, peut être représentée par une partie non connexe.

Exemple (observer $A \cap B$) :

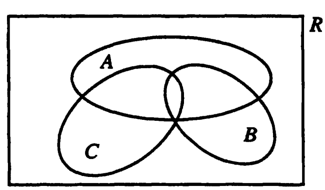


Ceci est un faux exemple : la définition d'un diagramme de Venn selon la syntaxe adoptée[1] exige la connexité de chacune des intersections de certaines parties initiales avec les complémentaires des autres.

Troisième reproche :

Certaines intersections des parties initiales, ou de leurs complémentaires, peuvent être oubliées.

Exemple :



(ici, $B \cap C \cap \overline{A}$ n'est pas représenté).

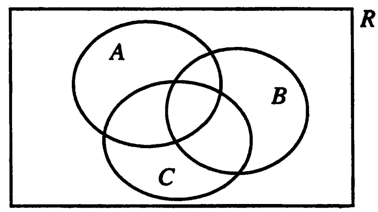
Il s'agit là encore d'un faux exemple : la définition d'un diagramme de Venn selon la syntaxe adoptée exige que chacune des intersections de certaines parties initiales avec les complémentaires des autres soit représentée par une partie connexe non vide.

1. Très proche de celle de Branko Grunbaum (7).

Quatrième reproche :

Les diagrammes de Venn ne peuvent traiter simultanément que de 3 parties initiales :

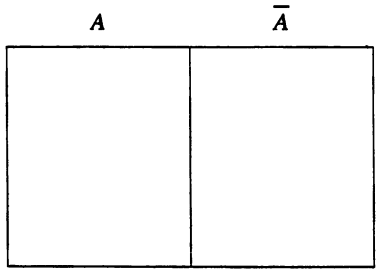
Il n'est vraiment pas pratique d'introduire ici une 4[e] partie initiale qui coupe chacune des intersections précédemment dessinées !



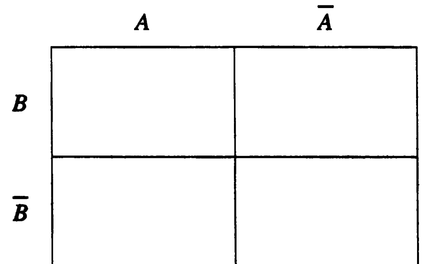
. . . .

La réponse à ce 4[e] reproche se trouve dans les travaux récents d'Anthony Edwards (6) qui présente un système de diagrammes de Venn permettant d'introduire un nombre aussi grand que l'on veut de parties initiales tout en respectant l'hypothèse d'existence et de connexité des intersections des parties initiales ou de leurs complémentaires.

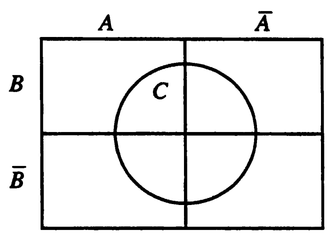
Voici les plus simples de ces diagrammes. On y voit peu à peu apparaître des sortes de roues dentées de plus en plus fines.



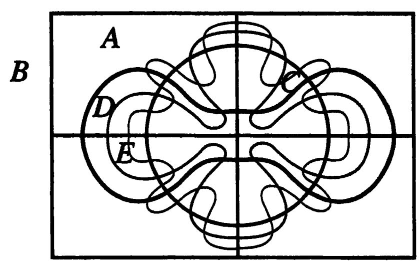
1 partie initiale
2 parties connexes



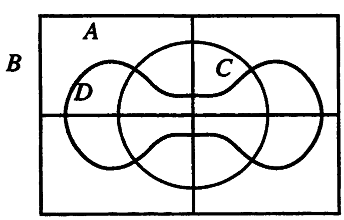
2 parties initiales
4 parties connexes



3 parties initiales
8 parties connexes



5 parties initiales
32 parties connexes
(la 6[e] partie apparaît très légèrement)



4 parties initiales
16 parties connexes

Bien sûr, pour des raisons pratiques, on ne pourra considérer la partition d'un rectangle en plus de 16, 32 ou 64 parties connexes. Mais n'étant pas borné de façon précise à un niveau quelqu'il soit, toute récurrence est possible, ce qui est très important.

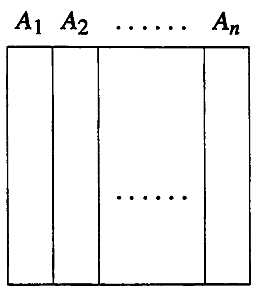
Cinquième reproche :

Les diagrammes de Venn sont inadaptés aux problèmes partitifs de façon générale, aux variables aléatoires de façon plus précises.

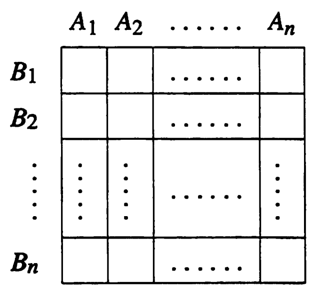
. . . .

Il s'agit là encore d'un défaut que nous qualifierons de «technique». La réponse sera elle aussi «technique».

Pour traiter tous ces problèmes si importants dans le domaine des probabilités et de la statistique, il nous faut étendre notre définition des diagrammes de Venn, en introduisant des diagrammes de Venn «structurés», de type 1, ou de type 2 (4) :



type 1



type 2

L'intitulé des lignes ou des colonnes pourra, selon le problème à traiter, correspondre à des événements chiffrés ou non chiffrés, avec regroupements par intervalles éventuels pour s'adapter à tous genres de données ou de variables aléatoires. Il va de soi par contre que l'étude de plus de 2 variables aléatoires simultanées n'est guère illustrable !

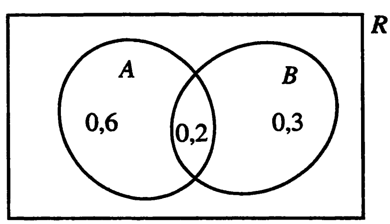
Remarque : En cas d'ambiguïté entre les diagrammes précédents (classiques ou Edwardiens), et les diagrammes structurés, nous qualifierons les premiers de «Directs».

Sixième reproche :

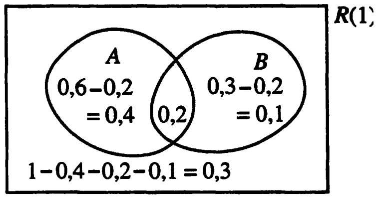
La présentation des probabilités sur un diagramme de Venn n'est pas claire.

Exemple :

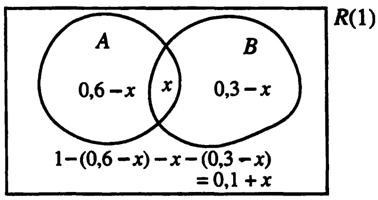
Ici, nous avons voulu représenter un événement A de probabilité 0,6, B de probabilité 0,3, avec $P\,(A \cap B) = 0{,}2$.



. . . .



Un tel diagramme est **en dehors** de notre syntaxe. Pour représenter les probabilités, nous faisons usage exclusif de «diagrammes de Venn complets», c'est-à-dire de diagrammes comportant une probabilité écrite à l'intérieur de chaque partie connexe. Le diagramme complet correspondant à l'exemple ci-contre serait ainsi le suivant :



Il est d'autre part fréquent d'utiliser au cours d'un problème des diagrammes complétés algébriquement comme ci-contre, à l'aide d'une ou plusieurs inconnues :

Remarque :

Certaines parties connexes (non vides) peuvent ainsi représenter des événements impossibles, c'est-à-dire de probabilité nulle. Ceci est en accord avec notre syntaxe que voici.

3. Ébauche d'une syntaxe

Après avoir considéré les 6 pseudo-reproches précédents, nous adoptons les définitions suivantes :

Un **diagramme de Venn direct** est l'illustration d'un certain ensemble de référence R, et de n parties $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ dites «initiales» de ce même ensemble R telle que :

1. L'ensemble de référence R soit représenté par une surface rectangle.
2. Chacune des n parties initiales $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ soit représentée par une surface bordée par un contour fermé intérieur à ce rectangle (ou le bordant partiellement).
3. Chacune des intersections formée par certaines partie initiales

$$\{A_{i1}, A_{i2}, ..., A_{im}\}$$

et les parties complémentaires des autres $\{\overline{A}_{j1}, \overline{A}_{j2}, ..., \overline{A}_{jn-m}\}$ soit représentée par une partie connexe non vide.

Autrement dit :

Soit : $I \in \mathcal{P}(\{1, 2, ..., n)\}$.

Posons : $B_I = (\bigcap_{i \in I} A_i) \cap (\bigcap_{j \in \overline{I}} \overline{A}_j)$[1].

1. Intersection généralisée.

B_I est une partie connexe non vide du rectangle représentant R.

L'ensemble de ces parties connexes forme, ce que nous appelons, la **base d'un diagramme de Venn direct.**

Il y a autant d'éléments dans la base que de parties de $\{1, 2, ..., n\}$ c'est-à-dire : 2^n.

Un **diagramme de Venn structuré de degré 1** est l'illustration d'un certain ensemble de référence R, muni d'une partition $\mathscr{A} = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ telle que :

1. L'ensemble de référence R soit représenté par une surface rectangle.
2. La partition $\mathscr{A}$ soit représentée par une série de colonnes divisant ce rectangle.

L'ensemble de ces colonnes forme la **base d'un diagramme structuré de degré 1.**

Un **diagramme de Venn structuré de degré 2** est l'illustration d'un certain ensemble de référence R, muni de 2 partitions :

$$\mathscr{A} = \{A_1, A_2, ..., A_n\} \quad \text{et} \quad \mathscr{B} = \{B_1, B_2, ..., B_m\}$$

telle que :

1. L'ensemble de référence R soit représenté par une surface rectangle.
2. La partition $\mathscr{A}$ soit représentée par une série de colonnes divisant ce rectangle.
3. La partition $\mathscr{B}$ soit représentée par une série de lignes divisant ce rectangle.

Une case est l'intersection d'une ligne et d'une colonne. L'ensemble des cases forme la **base d'un diagramme de Venn structuré de degré 2.**

Dans tout diagramme de Venn, direct ou structuré, l'ensemble des parties connexes forme la **base de ce diagramme.**

On appelle **diagramme de Venn complet** un diagramme de Venn où dans chaque partie connexe, est écrite une valeur positive ou nulle.

Si cette valeur positive ou nulle représente un effectif, le diagramme de Venn sera dit **statistique.**

Si au contraire la somme des valeurs positives ou nulles écrites dans chaque partie connexe fait 1, le diagramme de Venn sera dit **cohérent.**

On appelle **diagramme de Venn complet algébriquement** un diagramme de Venn ou dans chaque partie connexe est écrite une fonction d'une ou plusieurs variables.

On appelle **diagramme de Venn algébriquement cohérent** un diagramme de Venn complet algébriquement tel que la somme des fonctions écrites dans chaque partie connexe fasse 1.

On appelle **diagramme de Venn marqué,** un diagramme de Venn où certaines parties connexes ont été marquées avec des hachures d'un certain type (verticales, horizontales, NO-SE, ou NE-SO), ou encore par un gros point de couleur particulière.

Ces différentes indications doivent pouvoir se superposer.

Pour qu'un diagramme de Venn illustre un problème de probabilités, il doit avoir les propriétés suivantes :

1. Etre cohérent ou algébriquement cohérent.
2. Que chacun des cas possibles en probabilité soit représenté par une partie connexe différente.

Remarques :

1. Certaines parties connexes peuvent éventuellement représenter des événements impossibles.
2. Tout événement sera représenté par une réunion de parties connexes.

Une **méthode exhaustive** est une méthode qui étudie tous les cas possibles dans un contexte donné.

Une méthode qui étudie toutes les parties connexes d'une représentation par diagramme de Venn d'un problème de probabilités, est donc a fortiori **exhaustive.**

On appelle **algorithme exhaustif illustré pour les probabilités** la méthode qui consiste à illustrer un problème de probabilités en respectant les règles ci-dessus, afin de faire apparaître très rapidement la solution finale.

Notons que le **programme correspondant** a été établi par des étudiants de l'Ecole Centrale de Paris (Andreani et Bonnot, dans le laboratoire du Professeur Dejax ; voir (2)).

4. Le septième reproche

L'utilisation systématisée des diagrammes de Venn renverse un mythe. Elle rend en effet le calcul des probabilités d'une simplicité choquante, mettant à la retraite anticipée de glorieux théorèmes, cessant de réserver cette brillante discipline à une élite initiée, les seules difficultés inchangées étant celles des grands outils probabilistes, l'algèbre combinatoire et l'analyse.

....

Il est beaucoup plus difficile de répondre à cette accusation qu'aux 6 précédentes. Il est évident que la majorité des élèves ou des étudiants qui touchent au calcul des probabilités ne comprennent pas véritablement leur fondement.

Certains d'entre eux se précipitent sur les disciplines-outils, combinatoire ou analyse. D'autres n'arrivent à s'y intéresser que par le parallèle avec l'expérience statistique.

Voici quelques-unes des réflexions que nous avons pu entendre de la part d'étudiants titulaires du baccalauréat, dans des options comportant du calcul des probabilités :

«Les probabilités, c'est combien de boules noires on attrape.»

«Je connais les formules par cœur, tous les C_n^p, les A_n^p mais je ne sais jamais s'il faut les additionner ou les multiplier.»

«En Probabilités, c'est facile d'apprendre les théorèmes mais on ne sait jamais lequel il faut appliquer.»

«En maths, avec les fonctions et les dérivées, je me débrouille, mais en probabilités, je n'ai jamais rien pu comprendre.»

Ceci est la réalité. La compréhension fondamentale du calcul des probabilités est aujourd'hui réservée à une élite. L'utilisation systématisée de diagrammes de Venn cohérents ou algébriquement cohérents permettrait au contraire à la majorité de la population de notre pays de comprendre les fondements de cette discipline, source de sagesse quotidienne. Bien sûr, une telle facilité de raisonnement peut être considérée comme regrettable. Les théorèmes de Bayes, Poincaré, etc., tout comme les lois qui régissent les différents opérateurs booléens, sont à bien des égards magnifiques. Mais, prenons l'analogie de l'addition. La grosse majorité des français savent faire des additions, même sans calculateur électronique. Ils utilisent pour cela l'algorithme qu'on leur a appris au cours élémentaire et s'en débrouillent fort bien. Si on leur demandait plutôt d'utiliser les belles lois arithmétiques correspondantes, quel est le pourcentage de ceux qui y arriveraient encore ?

Si les opérations arithmétiques ont ainsi été mises à la portée de tous, pourquoi les probabilités ne le seraient-elles pas ? Nous retrouvons d'ailleurs ici, avec joie, la pensée de Borel (5) :

«Les calculs des probabilités est une des branches les plus attrayantes et les moins ardues de la mathématique. C'est simplement pour des raisons de routine, l'on n'ose écrire de paresse, que les éléments de ce calcul ne figurent pas au programme de l'enseignement secondaire où ils remplaceraient avantageusement bien des disciplines qui y subsistent pour le seul motif que personne ne se donne la peine de les y supprimer.»

BIBLIOGRAPHIE

(1) ADAMS James, *Conceptual Blockbusting,* Addison Wesley, 1966.

(2) ANDREANI Philippe et BONNOT Stéphane, *Vers une résolution automatisée des exercices de probabilité,* Ecole Centrale de Paris, sous la responsabilité des professeurs Pierre Dejax et Marie Berrondo-Agrell. Juin 1991.

(3) BARWISE Jon and ETCHEMENDY John, Visual Information and Valid Reasoning, *in* Zimmerman and Cunningham, 1991.

(4) BERRONDO-AGRELL Marie et FOURASTIE Jacqueline, *B.A.BA des Probas,* Dunod, à paraître en 1993.

(5) BOREL Emile, *Probabilités Erreurs,* Masson, 1926.

(6) EDWARDS Anthony, Venn Diagrammes for Many Sets, *New Scientist* Jan 9th. 1989.

(7) GRUNBAUM Branko, The Construction of Venn Diagrammes, *in College Mathematical Journal,* 1984, vol. 15.

(8) HOENIG Alan, *Applied Finite Mathematics,* Mac Graw Hill, 1990.

(9) LACOMBE Daniel, *Cours de Logique Mathématique,* Document interne, Université Paris-Jussieu, 1968.

(10) VENN John, *Symbolic Logic,* MacMillan, London, 1881.