JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

PAUL DAMIANI

Énergie cinétique des planètes : recherche d'une loi

Journal de la société statistique de Paris, tome 130, nº 4 (1989), p. 219-223

<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1989__130_4_219_0>

ÉNERGIE CINÉTIQUE DES PLANÈTES : RECHERCHE D'UNE LOI

Paul DAMIANI

Administrateur de l'INSEE,
secrétaire général des Sociétés de statistique
de Paris et de France [1]

On propose une loi reliant l'énergie cinétique des planètes à leur rang de classement, les planètes étant classées suivant la distance croissante au Soleil. Dans deux études précédentes, on avait évalué, dans la première, une loi donnant la distance au Soleil d'un planète en fonction de son rang de classement et, dans la deuxième, une relation entre la distance au Soleil et la masse des planètes.

We searched a law giving cinetic energy of planets according to their ordering number, planets being classified according increasing distance to the Sun. In two former papers, we found, in the first, a law giving distance to the Sun of planets according their ordering number and, in the second, a linkage between distance to the Sun and mass of planets.

INTRODUCTION

Les paramètres physiques des planètes ne sont pas distribués au hasard; ils obéissent à des lois qui nous sont encore inconnues. Pour faire avancer nos connaissances dans ce domaine, nous avons été amené à évaluer, dans une première étude, une loi expérimentale entre la distance d'une planète au Soleil et son rang de classement par rapport au Soleil [1]. Nous avons, ensuite, essayé d'établir une relation entre la distance au Soleil et la masse des planètes [2].

Dans le présent article, nous complétons ces travaux en étudiant l'énergie cinétique d'une planète en fonction de son rang de classement par rapport au Soleil.

DONNÉES GÉNÉRALES [3]

Historique

On connait depuis l'Antiquité les cinq planètes visibles à l'œil nu, qui sont : Mercure, Vénus, Mars, Jupiter, Saturne. On a découvert depuis : Uranus, Neptune et Pluton.

La loi de Titius-Bode a permis de prévoir l'existence, entre Mars et Jupiter, d'une planète dont on n'a découvert que les débris, sous forme de plusieurs milliers de petits corps appelés Petites planètes ou Astéroïdes.

1. INSEE, 18, boulevard A.-Pinard, 75675 Paris Cedex 14.

Journal de la Société de statistique de Paris, tome 130, n° 4, 1989.

A ces planètes nous ajouterons la planète hypothétique Vulcain, située entre le Soleil et Mercure, dont l'existence avait été supposée par Le Verrier et dont nous avons repris l'hypothèse dans nos études précédentes. Nous avons constaté, en effet, que l'existence de Vulcain donnait un meilleur ajustement aux relations cherchées.

Classement des planètes

En appelant n le rang de classement des planètes suivant leur distance croissante au Soleil, on obtient donc : Vulcain, 1; Mercure, 2; Vénus, 3; Terre, 4; Mars, 5; Astéroïdes, 6; Jupiter, 7; Saturne, 8; Uranus, 9; Neptune, 10; Pluton, 11.

Données

On appelle, pour la planète de rang n :

x_n, distance moyenne au Soleil, en unités astronomiques U.A., l'unité de mesure étant la distance moyenne de la Terre au Soleil,

m_n, masse par rapport à la Terre, non compris la masse des satellites,

T_n, période de révolution orbitale autour du Soleil, l'unité de mesure étant la période de révolution de la Terre.

D'après la 3e loi de Kepler, on a :

$$T_n^2 = x_n^3 \tag{1}$$

avec les unités adoptées. Il s'agit d'une formule approchée obtenue en négligeant la masse des planètes par rapport à celle du Soleil.

E_n, énergie cinétique de révolution autour du Soleil.

On a :

$$E_n = \frac{1}{2} m_n \, x_n^2 \, \frac{4\,\Pi^2}{T_n^2}$$

Il vient d'après la formule (1) :

$$E_n = 2\,\Pi^2 \frac{m_n}{x_n}$$

On pose comme variable auxiliaire, dans la présente étude :

$$z_n = \frac{m_n}{x_n}$$

d'où :

$$E_n = 2\,\Pi^2 z_n$$

Remarque sur le calcul de l'énergie

Le calcul ainsi effectué de l'énergie cinétique suppose que les trajectoires des planètes sont circulaires et coplanaires. Ces hypothèses simplificatrices peuvent toutefois difficilement s'appliquer à la planète n° 11, Pluton, dont la trajectoire présente une excentricité très élevée : 0,25 et est inclinée sur l'écliptique d'un angle de 17,2 degrés. On remarquera, de plus, que Pluton peut être considérée comme une planète double, car elle possède un satellite, Charon, dont le diamètre est le tiers de son propre diamètre.

Enfin, dans le calcul de l'énergie, on n'a tenu compte que de l'énergie cinétique de révolution autour du Soleil; on a négligé l'énergie cinétique de rotation des planètes autour de leur axe.

Énergie des planètes

On a utilisé certains résultats de relativité restreinte pour définir l'énergie cumulée des planètes.

Éléments de relativité restreinte [4]

Soit deux trièdres de référence K et K_o animés l'un par rapport à l'autre d'un mouvement uniforme. On appelle m et m_o les masses d'un point matériel, t et t_o les temps mesurés dans chaque trièdre.

Si le point matériel est fixe dans K_o, on a la relation :

$$\frac{dt}{dt_o} = \frac{m}{m_o} \tag{2}$$

Application

On généralise la formule (2) dans le cas du mouvement des planètes, en utilisant l'énergie cinétique de révolution. On écrit cette relation sous la forme :

$$\frac{dN}{dn} = \frac{E}{E_o} \tag{3}$$

où E est l'énergie d'une planète, E_o l'énergie de la Terre.

Cette formule définit la variable N, qu'on appellera *rang fictif de classement*.

En utilisant la variable auxiliaire z, la formule (3) s'écrit :

$$\frac{dN}{dn} = z \tag{4}$$

car, pour la Terre, $z_o = 1$ avec les unités adoptées.

On peut écrire :

$$N_i = \int_o^i z dn$$

La variable N_i représente donc l'*énergie cumulée* des planètes jusqu'au rang i.

C'est cette variable que nous allons étudier.

Calcul pratique de N

Connaissant les distances au Soleil et les masses des planètes, on calcule les valeurs de $z = m/x$. Pour déterminer l'énergie cumulée N_i correspondant à la planète de rang i, on considère qu'en première approximation la formule (4) s'écrit :

$$\frac{\Delta N_i}{\Delta n_i} = \frac{1}{2}(z_i + z_{i+1})$$

On en déduit les valeurs de ΔN_i. On obtient N_i en supposant que sa valeur est nulle pour $i = o$.

Les valeurs données par cette formule peuvent être considérées comme suffisamment précises, sauf pour $n = 2$ et 7, car on ignore, pour ces deux planètes, l'énergie des planètes de rang précédent.

On suppose donc que les énergies N_2 et N_7 sont inconnues et on calcule, à partir de celles-ci, celles des autres planètes. Les valeurs ainsi obtenues, appelées valeurs observées, figurent dans le tableau 1, avec les valeurs des variables x, m et z.

Loi des énergies des planètes

Expression de la loi

Dans une étude précédente [1], la loi que nous avions proposée pour la distance au Soleil des planètes en fonction du rang de classement était le produit d'une exponentielle par une somme de sinusoïdes. Nous avons cherché une loi de même forme pour représenter l'énergie cinétique cumulée N des planètes.

Après de nombreux essais, nous avons retenu l'expression suivante :

$$N_n = e^{\lambda n} \left\{ a \sin n\alpha - F_n \sin n \frac{\Pi}{2} \right\} \quad (5)$$

avec :

$$F_n = k + b_1 \sin (n + 1) \frac{\Pi}{12} + b_2 \sin^2 (n + 1) \frac{\Pi}{12} \quad (6)$$

Les valeurs trouvées pour les paramètres sont :

$$\begin{aligned} \lambda &= 1{,}1135 \\ \alpha &= \Pi/10{,}2355 \\ a &= 0{,}0225 \\ k &= 0{,}0057 \\ b_1 &= -0{,}0170 \\ b_2 &= 0{,}0248 \end{aligned}$$

Calcul pratique des paramètres

On opère en deux étapes :

1) Calcul sur les valeurs paires de n

Pour les valeurs paires de n, on a :

$$N_n = a\, e^{\lambda n} \sin n\alpha$$

Il y a 5 inconnues N_2, N_7, λ, a, α et 4 équations correspondant à $n = 2$, 4, 8 et 10.

Pour une valeur donnée de N_2, ces équations permettent de calculer les valeurs correspondantes des autres paramètres. Les calculs sont faits pour différentes valeurs de N_2.

2) Calcul sur les valeurs impaires de n

Pour une valeur donnée de N_2, connaissant les valeurs des paramètres précédents, on calcule, pour les valeurs impaires de n, la fonction F_n :

$$F_n = -\frac{N_n e^{-\lambda n} - a \sin n\alpha}{\sin n \frac{\Pi}{2}}$$

On dispose de 5 équations correspondant à $n = 3$, 5, 7, 9 et 11. Pour une valeur donnée de N_2, on détermine la valeur des variables k, b_1, b_2 par la méthode des moindres carrés. On retient la valeur de N_2 donnant le meilleur ajustement.

Tableau 1. — Valeurs des paramètres physiques des planètes

Planètes	Rang n	Données (1)		Énergie $z = \frac{m}{x}$	Énergie cumulée N	
		x (2)	m (3)		observée	calculée
Vulcain	1	...	...	...		
Mercure	2	0,3871	0,0558	0,1441	N_2	0,1200
Vénus	3	0,7233	0,8150	1,1267	$N_2 +$ 0,6354	0,7764
Terre	4	1	1	1	$N_2 +$ 1,6988	1,8188
Mars	5	1,5237	0,1074	0,0705	$N_2 +$ 2,2341	2,3541
Astéroïdes	6	...	...	...		
Jupiter	7	5,2028	317,893	61,1003	N_7	68,9329
Saturne	8	9,5388	95,147	9,9747	$N_7 +$ 35,5375	105,3642
Uranus	9	19,1819	14,54	0,7580	$N_7 +$ 40,9039	110,7306
Neptune	10	30,0578	17,23	0,5732	$N_7 +$ 41,5695	111,3962
Pluton	11	39,4400	0,0017	ε	$N_7 +$ 41,8561	111,6828

1. D'après « Le grand atlas de l'astronomie » sous la responsabilité de Jean Audouze et Guy Israël.
2. Distance moyenne au Soleil en u.a.
3. Masse par rapport à la Terre (satellites exclus).
Pour Pluton, la valeur de la masse est incertaine à plus de 10 p. 100.

ε = valeur inférieure à $0{,}5 \cdot 10^{-4}$.

Résultats

Si dans le calcul des valeurs observées, on remplace N_2 et N_7 par les valeurs trouvées par la méthode précédente, soit $N_2 = 0,12$ et $N_7 = 69,8267$, on constate que les valeurs calculées sont égales aux valeurs observées ainsi complétées, sauf pour $n = 3$ et $n = 7$. On note, pour ces deux planètes, une erreur relative de 2,8 p. 100 et $-1,3$ p. 100 respectivement.

Les valeurs calculées figurent dans le tableau 1.

Remarque

La loi proposée est une loi établie de façon expérimentale à partir des données, elle n'a pas de fondement théorique. Parmi toutes les formes possibles d'une telle loi, nous avons choisi l'expression indiquée car elle nous a semblé assez simple.

CONCLUSION

Nous pensons que la détermination de lois expérimentales, comme celle proposée dans cette étude, peut aider à la recherche de la loi théorique qui est le but final de la science. En essayant d'ajuster des formules empiriques sur les données observées, on constate, en effet, l'existence d'invariants de structure qui peuvent permettre de faire mieux comprendre les phénomènes étudiés.

RÉFÉRENCES

[1] DAMIANI Paul — Distances des planètes au Soleil : recherche d'une loi. Journal de la Société de statistique de Paris, tome 124, n° 2, 1983, 129-133.

[2] DAMIANI P. — Relation entre la distance au Soleil et la masse des planètes. Journal de la Société de statistique de Paris, tome 130, n° 1, 1989, 36-41.

[3] FLAMMARION Camille — Astronomie populaire. Édition refaite sous la direction de Gabrielle Camille FLAMMARION et André DANJON. Flammarion, 1955.

- HOYLE Fred — Astronomy and cosmology. W.H. FREEMAN and Co. San Francisco, USA, 1975
- LEQUEUX James — Planètes et satellites. Que sais-je? n° 383. P.U.F., 1964.
- Atlas d'astronomie. Édition française, Stock, 1976
- Le grand atlas de l'astronomie, sous la responsabilité de Jean AUDOUZE et Guy ISRAEL. Encyclopaedia universalis, France, 1985
- Encyclopédie d'astronomie de Cambridge, supervisée par Simon MITTON et Jean AUDOUZE. Éditions du Fanal, 1980
- Grand Larousse encyclopédique. 10 volumes. Larousse, 1964.

[4] ARZELIES H. — La dynamique relativiste et ses applications — Fascicule 1 : Dynamique du point lentement accéléré — Fascicule 2 : Problème du mouvement en dynamique du point faiblement accéléré. Gauthier-Villars, 1957-1958.