JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

ARTHUR VOGT

L'indice de Divisia selon le contour droit, quelques considérations sur la théorie axiomatique des indices de prix

Journal de la société statistique de Paris, tome 130, nº 3 (1989), p. 162-170
<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1989__130_3_162_0>

© Société de statistique de Paris, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

L'INDICE DE DIVISIA SELON LE CONTOUR DROIT, QUELQUES CONSIDÉRATIONS SUR LA THÉORIE AXIOMATIQUE DES INDICES DE PRIX

Arthur VOGT

Office fédéral des Assurances privées, BERNE (Suisse)

Cet article essaye de prouver que l'homogénéité linéaire n'est pas une propriété nécessairement satisfaite par un indice raisonnable. En fait, l'indice de Divisia, selon le contour droit ne satisfait pas cette propriété, bien qu'il doive être regardé comme un indice raisonnable, même « idéal ». De plus, une présentation des propriétés de la conservation de l'indice de valeur y est faite. Ces propriétés sont trouvées grâce à des symétries entre les indices de prix, de quantité et de valeur. Enfin, des règles d'extension sont présentées permettant une liaison entre un indice pour n biens avec un indice pour (n + 1) biens. Une des règles correspond au test de l'insignifiance des biens très peu consommés.

This paper aims to prove that the linear homogeneity is not a property which necessarily is satisfied by a reasonable price index. In fact, the Divisia index on the straight line does not satisfy this property, although it is reasonable, if not "ideal". Furthermore the value-index-preserving properties are presented. These properties can be found thanks to symmetries between the price, the quantity and the value index. Finally linkage rules are presented which permit an extension of an index for n commodities to one for n + 1 commodities. One of these rules corresponds to the "irrelevance of tiny commodities" property.

Mots clés :
Axiome de la conservation de l'indice de valeur — Axiome de la proportionnalité — Faible théorème de la conservation de l'indice de valeur — Fort théorème de la conservation de l'indice de valeur — Test de l'homogénéité linéaire — Test de l'insignifiance des biens très peu consommés.

INTRODUCTION

L'indice de Divisia selon le contour droit a été présenté dans ce journal (Vogt 1989). Dans Vogt (1977b) il a été appelé — dans un élan juvénile — indice « naturel ». Dans ce même article allemand il a été démontré que cet indice ne satisfait pas le test de l'homogénéité linéaire. Ce fait a été constaté aussi en anglais dans Vogt (1978). Comme Diewert (1987) et Sato (1987) prétendent toujours que l'homogénéité linéaire « doit être satisfaite par chaque indice raisonnable », l'auteur essaie d'expliquer encore en français que l'homogénéité linéaire ne doit pas être regardée comme indispensable pour un indice raisonnable. D'ailleurs Sato (1980) a constaté que l'indice de Divisia selon le contour droit serait « idéal dans le sens de Fisher (1922) ».

Ensuite, quelques autres réflexions sur la théorie axiomatique des indices de prix sont faites. Les propriétés de la conservation de l'indice de valeur de même que le test de l'insignifiance des biens très peu consommés garantissent que l'indice de prix dépend aussi des quantités, c'est-à-dire qu'un bien important influence l'indice davantage qu'un bien peu important. Les termes « axiome », « théorème » et « test » ainsi que leur terme générique commun « propriété d'un indice » sont employés dans le sens de Vogt (1985). Un axiome est une propriété proposée à être introduite dans le système d'axiomes pour les indices, un théorème est une propriété déductible des axiomes et un test est une propriété désirable mais pas nécessaire pour un indice raisonnable.

I

L'INDICE DE DIVISIA SELON LE CONTOUR DROIT ET L'HOMOGÉNÉITÉ LINÉAIRE

Eichhorn et Voeller (1976) ont introduit la propriété suivante pour un indice de prix, le :

test de l'homogénéité linéaire

$$P(\boldsymbol{q}^0, \boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{q}^1, \lambda\boldsymbol{p}^1) = \lambda P(\boldsymbol{q}^0, \boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{q}^1, \boldsymbol{p}^1). \tag{1.1}$$

En 1976, ils pouvaient encore écrire avec raison que « tous les indices connus dans la pratique et la littérature spécialisée satisfont l'homogénéité linéaire ». Mais l'indice de Divisia selon le contour droit introduit dans Vogt (1977a) (formule (5.4) dans Vogt (1989)) ne satisfait pas cette propriété. Pour concevoir cela regardons la propriété plus forte, le

test de la circularité (Fisher 1922)

$$P(\boldsymbol{q}^0, \boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{q}^2, \boldsymbol{p}^2) = P(\boldsymbol{q}^0, \boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{q}^1, \boldsymbol{p}^1)\, P(\boldsymbol{q}^1, \boldsymbol{p}^1, \boldsymbol{q}^2, \boldsymbol{p}^2). \tag{1.2}$$

Fisher (1922) n'avait pas d'estime pour ce test parce que seulement des indices de prix ne dépendant pas des quantités satisfont ce test (et pas, comme prétendu par Samuelson et Swamy (1974), parce que son indice « idéal » ne le satisfait pas, cf. Vogt (1979, p. 68 ff.)). Comme nous voulons que l'indice des prix dépende aussi des quantités, il faut rejeter la circularité (1.2).

L'homogénéité linéaire (1.1) est le cas spécial de la circularité (1.2) dans lequel

$\boldsymbol{q}^2 = \boldsymbol{q}^1$ et $\boldsymbol{p}^2 = \lambda\boldsymbol{p}^1$.

Pour exprimer le test de la circularité on peut regarder le triangle suivant dans l'espace prix-quantités :

$T_c = ((\boldsymbol{q}^0, \boldsymbol{p}^0), (\boldsymbol{q}^1, \boldsymbol{p}^1), (\boldsymbol{q}^2, \boldsymbol{p}^2))$

et pour le test de l'homogénéité linéaire le triangle :

$T_h = ((\boldsymbol{q}^0, \boldsymbol{p}^0), (\boldsymbol{q}^1, \boldsymbol{p}^1), (\boldsymbol{q}^1, \lambda\boldsymbol{p}^1))$.

On peut représenter ces deux triangles et les tests (1.1) et (1.2) dans l'espace prix-quantité comme dans les figures 2, 3 et 4 dans Vogt (1989) :

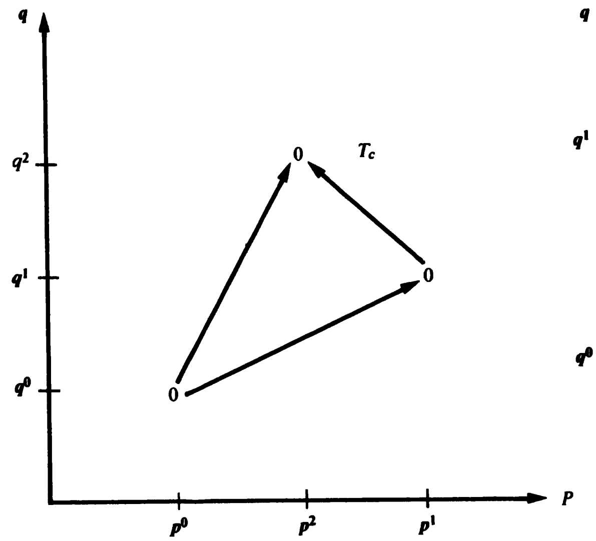

Fig. 1

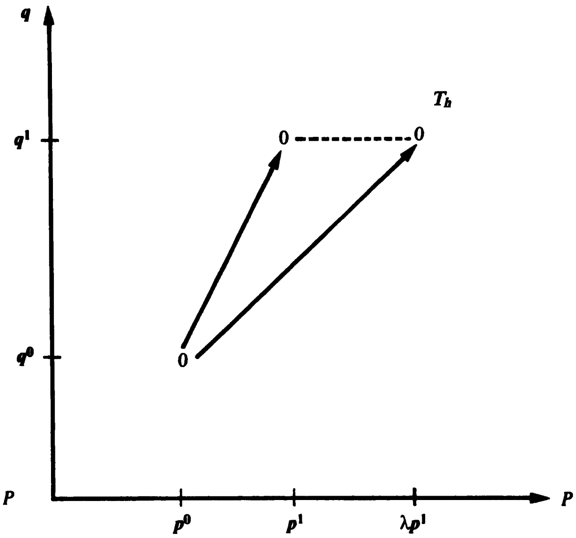

Fig 2

Pour que l'indice de Divisia selon le contour droit satisfasse les tests (1.1) et (1.2), l'intégrale de Divisia (*cf.* formule (4.1) dans Vogt (1989))

$$\oint_T \frac{q(t)\,\dot{p}(t)}{q(t)\,p(t)}\,dt \tag{1.3}$$

devrait être zéro selon les triangles T_c et respectivement T_h. Comme nous avons vu dans Vogt (1989) que l'intégrand de (5.1) n'est pas une différentielle exacte, contraire à celui de (5.2), (1.3) n'est pas zéro. (1.3) est zéro quand les trois points (q^0, p^0), (q^1, p^1), et (q^2, p^2) sont sur une ligne droite (la surface du triangle étant zéro, une généralisation du théorème de Stokes peut être appliqué (Vogt 1977a)) ou quand le triangle T_c est dans un sous-espace qui est parallèle à l'espace-prix $(p_1, ..., p_n)$. De cela, il peut être conclu que l'indice de Divisia selon le contour droit satisfait le

faible test de l'homogénéité linéaire

$$P(q^0, p^0, q^0, \lambda p^1) = \lambda P(q^0, p^0, q^0, p^1). \tag{1.4}$$

Concernant la terminologie il est à mentionner que Diewert (1987) et Sato (1987) appellent (1.1) « test de la proportionnalité ». Historiquement, en se basant sur Fisher (1922), ce n'est pas correct. Fisher (1922) définit proportionnalité par « un indice de prix devrait être égal aux proportions des prix si celles-ci sont égales entre elles ». Employant la notation de Eichhorn et Voeller (1976), on peut exprimer ce test (ou axiome selon Vogt (1985)) :

axiome de la proportionnalité

$$P(q^0, p^0, q^1, \lambda p^0) = \lambda. \tag{1.5}$$

La faute de terminologie peut s'expliquer par le fait que Fisher (1911) lui-même écrit que la proportionnalité (1.5) impliquerait (1.1), ce qui apparemment est faux. L'indice de Divisia selon le contour droit satisfait (1.5), mais pas (1.1)!

Il est à remarquer que l'indice de Divisia selon le contour exponentiel - contrairement à celui selon le contour linéaire - satisfait le test de l'homogénéité linéaire (1.1). D'ailleurs cette intégrale a été évaluée aussi analytiquement, quoique seulement pour deux biens (Fässler et Vogt, 1989).

II

LES PROPRIÉTÉS DE LA CONSERVATION DE L'INDICE DE VALEUR

Pour obtenir l'indice de valeur qui correspond à l'indice de prix $P(\boldsymbol{q}^0, \boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{q}^1, \boldsymbol{p}^1)$, on doit éliminer les q_i^j en les remplaçant par v_i^j/p_i^j, v_i^j signifiant la valeur de la commodité i dans la situation j (valeur égale au prix multiplié par la quantité). Ensuite on doit remplacer p_i^j par v_i^j. Ayant fait ces deux pas, on obtient l'indice de valeur V suivant :

$$V = P(1, \boldsymbol{v}^0, 1, \boldsymbol{v}^1). \tag{2.1}$$

Mais contrairement aux indices de prix et quantités il existe un indice de valeur idéal, à savoir :

$$V^{dutot} = \frac{\boldsymbol{q}^1 \boldsymbol{p}^1}{\boldsymbol{q}^0 \boldsymbol{p}^0} = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^1}{\sum_{i=1}^{n} v_i^0}. \tag{2.2}$$

Cet indice de valeur correspond à l'indice de prix de Dutot datant de 1738 :

$$P^{dutot}\left(\boldsymbol{q}^0, \boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{q}^1, \boldsymbol{p}^1\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i^1}{\sum_{i=1}^{n} p_i^0}. \tag{2.3}$$

L'indice de Laspeyres

$$P^{laspeyres}\left(\boldsymbol{q}^0, \boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{q}^1, \boldsymbol{p}^1\right) = \frac{\boldsymbol{q}^0 \boldsymbol{p}^1}{\boldsymbol{q}^0 \boldsymbol{p}^0} \tag{2.4}$$

peut être écrit comme moyenne arithmétique pondérée des proportions de prix p_i^1/p_i^0, les poids étant les quotes-parts des valeurs

$$\frac{q_i^0 p_i^0}{\boldsymbol{q}^0 \boldsymbol{p}^0} = \frac{v_i^0}{\sum_{i=1}^{n} v_i^0}$$

dans la situation de base :

$$P^{laspeyres} = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i^0 p_i^0}{\boldsymbol{q}^0 \boldsymbol{p}^0} \frac{p_i^1}{p_i^0}. \tag{2.5}$$

De même l'indice de Paasche

$$P^{paasche}\left(\boldsymbol{q}^0, \boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{q}^1, \boldsymbol{p}^1\right) = \frac{\boldsymbol{q}^1 \boldsymbol{p}^1}{\boldsymbol{q}^1 \boldsymbol{p}^0} \tag{2.6}$$

peut être écrit comme moyenne harmonique pondérée des proportions de prix, les poids étant les quotes-parts des valeurs

$$\frac{q_i^1 p_i^1}{\mathbf{q}^1 \mathbf{p}^1} = \frac{v_i^1}{\sum_{i=1}^{n} v_i^1}$$

dans la situation observée :

$$P^{paasche} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{q_i^1 p_i^1 / \mathbf{q}^1 \mathbf{p}^1}{p_i^1 / p_i^0}}. \tag{2.7}$$

On peut aussi considérer la moyenne arithmétique pondérée, les poids étant les quotes-parts des valeurs dans la situation observée. En fait, cet indice était proposé par Palgrave en 1886 :

$$P^{palgrave} = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i^1 p_i^1}{\mathbf{q}^1 \mathbf{p}^1} \frac{p_i^1}{p_i^0}. \tag{2.8}$$

La moyenne harmonique, ayant comme poids les quotes-parts des valeurs dans la situation de base, porte le numéro 13 dans la liste des indices de Fisher (1922) :

$$P^{13} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{q_i^0 p_i^0 / \mathbf{q}^0 \mathbf{p}^0}{p_i^1 / p_i^0}}. \tag{2.9}$$

Les indices ci-dessus sont généralisées dans Vogt (1985) par :

$$P_k^{(j)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i^j p_i^j \left(\frac{p_i^1}{p_i^0}\right)^{k+1}}{\sum_{i=1}^{n} q_i^j p_i^j \left(\frac{p_i^1}{p_i^0}\right)^{k}} \qquad \begin{cases} j = 0, 1 \\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases} \tag{2.10}$$

$k = 0$ donne la moyenne arithmétique, $k = -1$ la moyenne harmonique et $k = 1$ la moyenne ainsi dite contraharmonique des proportions de prix p_i^1/p_i^0.

Fisher (1922) a qualifié les indices de Laspeyres et de Paasche, i.e. $P_0^{(0)}$et $P_{-1}^{(1)}$, comme « très bons », les indices (2.8) et (2.9), i.e. $P_0^{(1)}$et $P_{-1}^{(0)}$ comme « pauvres ». Pourquoi le faisait-il? Comme motivation postérieure on peut proposer les propriétés de la conservation de l'indice de valeurs suivantes. En construisant les indices de valeurs analogues aux indices de prix (2.5), (2.7), (2.8), (2.9) et (2.10), on obtient :

$$V^{laspeyres} = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i^0 p_i^0}{\mathbf{q}^0 \mathbf{p}^0} \frac{v_i^1}{v_i^0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{v_i^0}{\sum_{i=1}^{n} v_i^0} \frac{v_i^1}{v_i^0} = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^1}{\sum_{i=1}^{n} v_i^0}, \tag{2.11}$$

$$V^{paasche} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{q_i^1 p_i^1 / q^1 p^1}{v_i^1 / v_i^0}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{v_i^1 / \sum_{i=1}^{n} v_i^1}{v_i^1 / v_i^0}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^1}{\sum_{i=1}^{n} v_i^0}, \tag{2.12}$$

$$V^{\text{palgrave}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i^1 p_i^1}{q^1 p^1} \frac{v_i^1}{v_i^0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{v_i^1}{\sum_{i=1}^{n} v_i^1} \frac{v_i^1}{v_i^0}, \tag{2.13}$$

$$V^{13} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{q_i^0 p_i^0 / q^0 p^0}{v_i^1 / v_i^0}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{v_i^0 / \sum_{i=1}^{n} v_i^0}{v_i^1 / v_i^0}}, \tag{2.14}$$

$$V_k^{(j)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i^j p_i^j \left(\frac{v_i^1}{v_i^0}\right)^{k+1}}{\sum_{i=1}^{n} q_i^j p_i^j \left(\frac{v_i^1}{v_i^0}\right)^{k}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^j \left(\frac{v_i^1}{v_i^0}\right)^{k+1}}{\sum_{i=1}^{n} v_i^j \left(\frac{v_i^1}{v_i^0}\right)^{k}}. \tag{2.15}$$

Mais l'indice de valeur est, contrairement aux indices de prix et de quantités, déterminé uniquement par (2.2). Cet indice de valeur unique idéal correspond aux indices (2.11) et (2.12). Pour cette raison, seulement les indices de prix correspondant de Laspeyres et de Paasche satisfont la propriété de la conservation de l'indice de valeur. Par contre (2.8), (2.9) et tous les autres $P_k^{(j)}$ ne la satisfont pas. Nous voulons exprimer cette « propriété de la conservation de l'indice de valeur » par une équation fonctionnelle : l'indice de prix $P(\boldsymbol{q}^0, \boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{q}^1, \boldsymbol{p}^1)$, devrait être tel, que l'indice de valeur (2.1) correspondant, soit égal à l'indice de valeur de Dutot (2.2). Ainsi on obtient le

faible théorème de la conservation de l'indice de valeur

$$P\left(1, \boldsymbol{p}^0, 1, \boldsymbol{p}^1\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i^1}{\sum_{i=1}^{n} p_i^0}. \tag{2.16}$$

Avec l'

axiome de commensurabilité

$$P\left(\frac{q_1^0}{\lambda_1}, \ldots, \frac{q_n^0}{\lambda_n}, \lambda_1 p_1^0, \ldots, \lambda_n p_n^0, \frac{q_1^1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{q_n^1}{\lambda_n}, \lambda_1 p_1^1, \ldots, \lambda_n p_n^1\right) = P\left(\boldsymbol{q}^0, \boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{q}^1, \boldsymbol{p}^1\right) \tag{2.17}$$

on passe du faible au

fort théorème de la conservation de l'indice de valeur

$$P\left(q^0, p^0, q^0, p^1\right) = \frac{q^0 p^1}{q^0 p^0}. \tag{2.18}$$

L'indice de Dutot (2.3) est un indice qui satisfait le faible, mais pas le fort théorème de la conservation de l'indice de valeur. Vogt (1985) propose de mettre au rang d'axiome l'

axiome de la conservation de l'indice de valeur

$$P\left(q^0, p^0, \lambda q^0, p^1\right) = \frac{q^0 p^1}{q^0 p^0}. \tag{2.19}$$

Tous les indices connus par l'auteur satisfont soit les deux propriétés (2.18) et (2.19) ou bien aucune.

Comme q_i^j est remplacé par v_i^j/p_i^j lorsqu'on exprime les propriétés de conservation de l'indice de valeur (*cf.* (2.1)), ces propriétés se basent sur l'identité
valeur = prix × quantité.

Le
test de la réversibilité par rapport aux facteurs prix et quantités (Fisher 1922)

$$P\left(q^0, p^0, q^1, p^1\right) \times P\left(p^0, q^0, p^1, q^1\right) = \frac{q^1 p^1}{q^0 p^0} \tag{2.20}$$

est basé sur la même identité, car il exprime que l'indice de prix, multiplié par l'indice de quantité correspondant, donne l'indice de valeur (2.2). Ce test est plus fort, car par exemple les indices de Laspeyres et de Paasche ne le satisfont pas. En employant l'axiome de proportionnalité (1.5), (2.19) est déductible de (2.20), car dans (2.20) le deuxième facteur avec $q^1 = \lambda q^0$ est égal à λ à cause de l'axiome de proportionnalité, et (2.20) donne l'axiome de la conservation de l'indice de valeur.

III

EXTENSION DU CALCUL DE L'INDICE DE N BIENS A UN NOMBRE QUELCONQUE DE BIENS

Eichhorn et Pfingsten (1984) traitent le problème que l'indice P_n (q^0, p^0, q^1, p^1) pour n biens devrait aussi être défini pour un nombre quelconque de biens m = 1, 2, ..., n − 1, n + 1, ... Il y a des propriétés d'indices qui sont basées sur cette généralisation, par exemple déjà le

test de l'addition ou suppression d'une marchandise (Fisher 1922)

$$P_n\,(q^0, p^0, q^1, p^1) =$$
$$P_{n+1}\,(q^0, q^0_{n+1}; p^0, p^0_{n+1}; q^1, q^1_{n+1}; p^1, p^0_{n+1}\ P_n\,(q^0, p^0, q^1, p^1)). \tag{3.1}$$

Eichhorn et Pfingsten (1984) mentionnent les « règles d'extension » (extension de n biens à $n + 1$ biens)

$$P_{n+1}\left(q^0, q^0_{n+1}, p^0, p^0_{n+1}, q^1, q^1_{n+1}, p^1, p^1_{n+1}\right) = F_{n+1}\left(P_n\left(q^0, p^0, q^1, p^1\right), q^0_{n+1}, p^0_{n+1}, q^1_{n+1}, p^1_{n+1}\right) \tag{3.2}$$

et

$$P_{n+1}\left(q^0, o, p^0, p^0_{n+1}, q^1, o, p^1, p^1_{n+1}\right) = P_n\left(q^0, p^0, q^1, p^1\right) \tag{3.3}$$

Concernant (3.3) ils se réfèrent à une communication privée de l'auteur, publiée plus tard (Vogt 1985). Diewert (1987) introduit l'équivalent suivant de (3.3) et l'appelle

test de l'insignifiance des biens très peu consommés

$$\lim_{\substack{q^0_{n+1} \to 0 \\ q^1_{n+1} \to 0}} P_{n+1}\left(q^0, q^0_{n+1}, p^0, p^0_{n+1}, q^1, q^1_{n+1}, p^1, p^1_{n+1}\right) = P_n\left(q^0, p^0, q^1, p^1\right) \tag{3.4}$$

Avec ce test il parvient à éliminer les indices ne dépendant pas des quantités, comme par exemple l'indice de Dutot (2.3). Le même but peut être atteint avec les propriétés de conservation de l'indice de valeur (2.18) et (2.19).

En étendant le calcul de l'indice de n biens à un nombre quelconque, l'auteur juge très important qu'on le fasse d'une manière uniforme. Alors il propose d'éliminer par exemple l'indice

$$P_n\left(q^0, p^0, q^1, p^1\right) = \begin{cases} P^{laspeyres} = \dfrac{q^0 p^1}{q^0 p^0} & n = 2, 4, 6, \ldots \\[2ex] P^{\text{paasche}} = \dfrac{q^1 p^1}{q^1 p^0} & n = 1, 3, 5, \ldots \end{cases} \tag{3.5}$$

qui est admis par Eichhorn et Pfingsten (1984). Car avec (3.5) l'autorité calculant l'indice de prix pourrait manipuler en introduisant une $(n + 1)$. ième « bien fantôme » avec $q^0_{n+1} = 0$ et $q^1_{n+1} = 0$ (Vogt 1985).

BIBLIOGRAPHIE

DIEWERT W.E. (1987) : Index Numbers, Article dans The New Palgrave (1987).

EICHHORN W. et PFINGSTEN A. (1984) : Sequences of Mechanistic Price Indices, in HAUPTMANN H., KRELLE W. et MOSLER K.C. (1984).

EICHHORN W. et VOELLER J. (1976) : Funktionalgleichungen in der Theorie des Preisindex, Aequationes Mathematicae, tome 14, 203-205.

EICHHORN W., HENNE R., OPITZ O. et SHEPHARD R.W. (éditeurs) (1978) : Theory and Applications of Economic Indices, Procédés d'un séminaire international à l'université de Karlsruhe, avril-mai 1976, Physika-Verlag, Würzburg, Wien.

FÄSSLER A. et VOGT A. (1989) : Analytic Integration of the Divisia Price Index on the Exponential Path for two Commodities, Communications in Statistics, Theory Meth., tome 18.

FISHER I. (1911) : The Purchasing Power of Money, London, Macmillan. La traduction allemande de 1916 a été employée.

FISHER I. (1922) : The Making of Index Numbers, Reprint de la troisième édition 1927, August M. Kelley, New York 1967.

HAUPTMANN H., KRELLE W. et MOSLER K.C. (1984) : Operation Research and Economic Theory, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg.

SAMUELSON P.A. et SWAMY S. (1974) : Invariant Economic Index Numbers and Canonical Duality : Survey and Synthesis, American Economic Review, tome 64, 566 593.

SATO K. (1980) : The "Natural" Index and Utility Functions, Statistische Hefte, tome 21, 117 126.

SATO K. (1987) : Ideal Indexes, Article dans The New Palgrave (1987).

THE NEW PALGRAVE (1987) : A Dictionary of Economics, The Macmillan Press.

VOGT A. (1977a) : Zum Indexproblem : Geometrische Darstellung sowie eine neue Formel, Revue suisse d'Économie politique et de Statistique, tome 113, 73-88.

VOGT A. (1977b) : Das Homogenitätsaxiom und der natürliche Index, Revue suisse d'Économie politique et de Statistique, tome 113, 193 194.

VOGT A. (1978) : Divisia Indices on Different Paths, dans EICHHORN W., HENN R., OPITZ O. et SHEPHARD R.W. (1978).

VOGT A. (1979) : Das statistische Indexproblem im Zwei-Situationen Fall, Thèse à l'école polytechnique de Zurich, Diss ETH 6448.

VOGT A. (1985) : Some Suggestions Concerning an Axiom System for Statistical Price and Quantity Indices, article présenté au quatrième séminaire sur Measurement in Economics à Karlsruhe, publié en 1987 dans : Communications in Statistics, Theory Meth., tome 16, n° 12, 3641-3663.

VOGT A. (1989) : Rapide historique du problème des indices et étude de la solution de Divisia, Journal de la Société de statistique de Paris, tome 130.