JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

PAUL DAMIANI

Relation entre la distance au soleil et la masse des planètes

Journal de la société statistique de Paris, tome 130, nº 1 (1989), p. 36-41

<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1989__130_1_36_0>

RELATION ENTRE LA DISTANCE AU SOLEIL ET LA MASSE DES PLANÈTES

Paul DAMIANI
administrateur de l'INSEE,
secrétaire général des Sociétés de statistique
de Paris et de France [1]

On a recherché, dans cette étude, une liaison entre la distance au Soleil et la masse des planètes. On a établi, pour cela, une relation donnant la probabilité de présence en fonction de l'énergie des planètes.

In this paper, we searched a linkage between distance to the Sun and mass of planets. For this purpose, we found a relation giving probability of presence according energy of planets.

INTRODUCTION

Les paramètres physiques des planètes ne sont pas distribués au hasard; ils obéissent à des lois qui nous sont encore inconnues. Pour faire avancer nos connaissances dans ce domaine, il nous a semblé intéressant d'étudier s'il existait une relation statistique entre la distance au Soleil et la masse des planètes.

Pour rechercher une telle relation, nous avons utilisé une méthode faisant appel à certains résultats de relativité restreinte et de mécanique quantique.

DONNÉES GÉNÉRALES [1]

Historique

On connaît depuis l'Antiquité les cinq planètes visibles à l'œil nu, qui sont : Mercure, Vénus, Mars, Jupiter, Saturne. On a découvert depuis : Uranus, Neptune et Pluton.

La loi de Titius-Bode a permis de prévoir l'existence, entre Mars et Jupiter, d'une planète dont on n'a découvert que les débris, sous forme de plusieurs milliers de petits corps appelés Petites planètes ou Astéroïdes.

A ces planètes, nous ajouterons la planète hypothétique Vulcain, située entre le Soleil et Mercure, dont l'existence avait été supposée par Le Verrier et dont nous avons repris l'hypothèse dans une étude précédente [2]. Nous avons constaté, en effet, que l'existence de Vulcain donnait un meilleur ajustement à la relation cherchée.

Classement des planètes

En appelant n le rang de classement des planètes suivant leur distance croissante au Soleil, on obtient donc : Vulcain, 1; Mercure, 2; Vénus, 3; Terre, 4; Mars, 5; Astéroïdes, 6; Jupiter, 7; Saturne, 8; Uranus, 9; Neptune, 10; Pluton, 11.

1. INSEE, 18, boulevard A.-Pinard, 75675 Paris Cedex 14.

Journal de la Société de statistique de Paris, tome 130, n° 1, 1989.

Données

On appelle, pour la planète de rang n :
— x_n, distance moyenne au Soleil, en unités astronomiques U.A., l'unité de mesure étant la distance moyenne de la Terre au Soleil,
— m_n, masse par rapport à la Terre, non compris la masse des satellites,
— T_n, période de révolution orbitale autour du Soleil, l'unité de mesure étant la période de révolution de la Terre.

D'après la 3e loi de Kepler, on a : $T_n^2 = x_n^3$ (1)

avec les unités adoptées. Il s'agit d'une formule approchée obtenue en négligeant la masse des planètes par rapport au Soleil.
— E_n, énergie cinétique de révolution autour du Soleil.

On a :

$$E_n = \frac{1}{2} m_n x_n^2 \frac{4\Pi^2}{T_n^2}$$

Il vient d'après la formule (1) :

$$E_n = 2\Pi^2 \frac{m_n}{x_n}$$

On pose comme variable auxiliaire, dans la présente étude :

$$z_n = \frac{m_n}{x_n}$$

d'où : $E_n = 2\Pi^2 z_n$

MÉTHODE DE RECHERCHE

On a recherché la liaison entre la distance au Soleil et la masse des planètes en appliquant aux planètes la relation donnant la probabilité de présence d'un atome dans un niveau quantifié d'énergie donné. Il a fallu, au préalable, définir l'énergie des planètes et calculer leur probabilité de présence dans l'espace.

ÉNERGIE DES PLANÈTES

On a utilisé certains résultats de relativité restreinte pour définir l'énergie des planètes.

Éléments de relativité restreinte [3]

Soit deux trièdres de référence K et K_o animés l'un par rapport à l'autre d'un mouvement uniforme. On appelle m et m_o les masses d'un point matériel, t et t_o les temps mesurés dans chaque trièdre.

Si le point matériel est fixe dans K_o, on a la relation :

$$\frac{dt}{dt_o} = \frac{m}{m_o} \qquad (2)$$

Application

On généralise la formule (2) dans le cas du mouvement des planètes, en utilisant l'énergie cinétique de révolution. On écrit cette relation sous la forme :

$$\frac{dN}{dn} = \frac{E}{E_o} \tag{3}$$

où E est l'énergie d'une planète, E_o l'énergie de la Terre.

Cette formule définit la variable *N*, qu'on appellera *rang fictif de classement.*

En utilisant la variable auxiliaire *z*, la formule (3) s'écrit :

$$\frac{dN}{dn} = z \tag{4}$$

car, pour la Terre, $z_o = 1$ avec les unités adoptées.

L'énergie de l'ensemble des planètes jusqu'au rang *i* a pour expression :

$$E_i = \int_o^i z \, dn = N_i \tag{5}$$

Probabilité de présence des planètes

On peut considérer que les trajectoires des planètes sont dans un même plan. Les probabilités de présence des planètes dans l'espace seront donc liées aux surfaces des trajectoires, supposées circulaires en première approximation.

Si on appelle x_m la distance de la planète la plus éloignée, la quantité :

$$p_i = \frac{x_{i+1}^2 - x_i^2}{x_m^2 - x_i^2} \tag{6}$$

représente la probabilité que la planète de rang *i* soit à une distance du Soleil comprise entre x_i et x_{i+i}.

Liaison entre la distance au soleil et la masse des planètes

On rappelle d'abord la relation trouvée en mécanique quantique.

Répartition des atomes entre niveaux quantifiés d'énergie [4].

La statistique de Maxwell-Boltzmann donne la répartition d'équilibre des atomes entre différents niveaux quantifiés d'énergie. On trouve que la probabilité p_i pour un atome d'être dans le niveau d'énergie E_i a pour expression : $\text{Log } p_i = k - \beta E_i$ (7)

Application

On cherche, pour les planètes, une relation de même forme.

On trouve expérimentalement l'expression suivante, représentant la liaison entre la distance au Soleil et la masse des planètes :

$$\text{Log } p_n = - a N_n \exp \{ -\gamma n \} \tag{8}$$

où p_n représente la probabilité de présence de la planète de rang n, N_n est l'énergie de l'ensemble des planètes jusqu'au rang n. Les variables p_n et N_n sont calculées suivant les formules (6) et (5) données plus haut.

Les valeurs des coefficients sont :

$$a = 702{,}8194$$
$$\gamma = 1{,}3040$$

Calcul pratique

Connaissant les distances au Soleil et les masses des planètes, on calcule

$$p \text{ et } z = \frac{m}{x}$$

Pour déterminer N_i, on considère qu'en première approximation la formule (3) s'écrit :

$$\frac{\Delta N_i}{\Delta n_i} = \frac{1}{2}\left(z_i + z_{i+1}\right)$$

On en déduit les valeurs de ΔN_i. On obtient N_i en supposant que sa valeur est nulle pour $n = o$.

On calcule, ensuite, la quantité : $u = -(\text{Log}\, p)/N$

On ajuste, enfin, le modèle de régression linéaire :

$$\text{Log}\, u = \text{Log}\, a - \gamma n$$

On a indiqué, dans le tableau 1, pour chaque planète, les valeurs de x, m, z, N et p.

Interprétation du coefficient γ

Si on compare les formules (7) et (8), on constate qu'on peut écrire :

$$\beta = a \exp\left\{-\gamma n\right\}$$

Le facteur $\exp\{-\gamma n\}$ représente une diminution de l'énergie théorique avec le rang de classement.

Validité des résultats

On a fait un certain nombre d'hypothèses simplificatrices dans cette étude : trajectoires des planètes circulaires et coplanaires. Dans le calcul de l'énergie on n'a tenu compte que de l'énergie cinétique de révolution autour du Soleil; on a négligé l'énergie cinétique de rotation des planètes autour de leur axe.

Il s'ensuit que la relation trouvée doit être considérée comme une approximation de l'expression réelle.

Comparaison avec une autre étude

Dans une étude précédente [5], on avait cherché une expression analytique représentant la loi générale de mortalité humaine; on avait appliqué la même méthode que dans la présente étude.

Tableau 1 — Valeurs des paramètres physiques des planètes

Planètes	Rang n	Données[1] x [2]	Données[1] m [3]	Énergie $z = \frac{m}{x}$	Rang fictif N	Probabilité de présence p
Vulcain	1	...	...	...	—	...
Mercure	2	0,3871	0,0558	0,1441	0,1441	0,00024
Vénus	3	0,7233	0,8150	1,1267	0,7795	0,00031
Terre	4	1	1	1	1,8429	0,00085
Mars	5	1,5237	0,1074	0,0705	2,3782	0,01593
Astéroïdes	6	...	...	...	...	...
Jupiter	7	5,2028	317,893	61,1003	63,5490	0,04182
Saturne	8	9,5388	95,147	9,9747	99,0865	0,18911
Uranus	9	19,1819	14,54	0,7580	104,4529	0,45094
Neptune	10	30,0578	17,23	0,5732	105,1185	1
Pluton	11	39,4400	0,0017	ε	105,4051	...

1. D'après « Le grand atlas de l'astronomie » sous la responsabilité de Jean Audouze et Guy Israël.
2. Distance moyenne au Soleil en u.a.
3. Masse par rapport à la Terre (satellites exclus).
ε : valeur inférieure à $0,5 \cdot 10^{-4}$.

On avait écrit la formule (2) sous la forme :

$$\frac{dt}{dt_0} = \frac{P}{P_0} \tag{9}$$

définissant ainsi un *temps propre* t_o, en fonction du temps observé t et des poids P et P_o à l'âge t et à la naissance. Avec cette formule l'énergie à l'âge i est égale à t_i.

On avait retenu d'étudier la probabilité q_i pour un individu d'âge i de mourir avant l'âge $i + 1$. En cherchant une expression analogue à la relation (7), on avait trouvé la relation suivante :

$$\text{Log } q_{oi} = - c t_i \exp\left\{-\gamma t_{oi}\right\} \tag{10}$$

où q_{oi} est la transformée de la probabilité q_i dans l'échelle t_o.
Les valeurs trouvées pour les coefficients sont :

$c = 12,8942$

$\lambda = 1,130$

On remarquera l'existence du facteur $\exp\{-\lambda t_{oi}\}$ représentant la diminution de l'énergie réelle t_i avec l'âge.

La formule trouvée pour la loi générale de mortalité humaine est donc tout à fait analogue avec celle obtenue dans la présente étude.

Conclusion

En appliquant certains résultats de relativité restreinte et de mécanique quantique, on a obtenu une relation entre la distance au Soleil et la masse des planètes. Cette relation présente la même forme que la loi générale de mortalité trouvée dans une étude antérieure. L'existence de ces relations vérifiées expérimentalement justifie les hypothèses et les généralisations faites dans ces applications.

RÉFÉRENCES

[1] FLAMMARION Camille. Astronomie populaire. Édition refaite sous la direction de Gabrielle Camille FLAMMARION et André DANJON. Flammarion, 1955.

HOYLE Fred. Astronomy and cosmology. W. H. FREEMAN and Co. San Francisco, USA, 1975.

LEQUEUX James. Planètes et satellites. Que sais-je? nº 383. P.U.F., 1964.

Atlas d'astronomie. Édition française, Stock, 1976.

Le grand atlas de l'astronomie, sous la responsabilité de Jean AUDOUZE et Guy ISRAEL. Encyclopaedia universalis, France, 1985.

Encyclopédie d'astronomie de Cambridge, supervisée par Simon MITTON et Jean AUDOUZE. Éditions du Fanal, 1980.

Grand Larousse encyclopédique. 10 volumes. Larousse, 1964.

[2] DAMIANI P. Distance des planètes au Soleil : recherche d'une loi. Journal de la Société de statistique de Paris, tome 124, nº 2, 1983, 129-133.

[3] ARZELIES H. La dynamique relativiste et ses applications — Fascicule 1 : Dynamique du point lentement accéléré — Fascicule 2 : Problème du mouvement en dynamique du point faiblement accéléré. Gauthier-Villars, 1957-1958.

[4] BERNARD M.-Y. Initiation à la mécanique quantique et à la physique statistique. 2e édition. Hachette, 1960.

[5] DAMIANI P. Recherche d'une loi générale de mortalité. Journal de la Société de statistique de Paris, tome 126, nº 2, 1985, 63-76.

DAMIANI P. Loi de mortalité générale, accidents inclus : expression analytique et variations dans le temps. Journal de la Société de statistique de Paris, tome 129, nº 3, 1988, 170-180.