JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

ARTHUR VOGT

Rapide historique du problème des indices et étude de la solution de Divisia

Journal de la société statistique de Paris, tome 130, nº 1 (1989), p. 17-35

<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1989__130_1_17_0>

RAPIDE HISTORIQUE DU PROBLÈME DES INDICES ET ÉTUDE DE LA SOLUTION DE DIVISIA

Publié à l'occasion du centième anniversaire de François DIVISIA, né le 21 octobre 1889, décédé le 5 février 1964

Arthur VOGT

Office fédéral des assurances privées, Berne, Suisse

Dans cet article, nous présentons un rapide historique du problème des indices de prix et ensuite nous développons « l'indice linéaire » et « l'indice exponentiel » avec des formules approximatives. C'est justement l'indice de Divisia qui permet, par l'intégration analytique, de trouver la formule exacte pour l'indice linéaire. Une formule correspondante pour l'indice exponentiel n'a pas encore été trouvée. L'indice de Divisia peut aussi être appliqué à l'intégration numérique selon des contours donnés dans l'espace prix-quantité, ce qui est montré avec l'exemple de l'indice exponentiel.

In this paper a historical synopsis of the price index problem is given. Then approximative formulas for the "linear index" and the "exponential index" are developped. By analytic integration of the Divisia index the exact formula for the linear index is obtained. The corresponding formula for the exponential index has not yet been found. The Divisia index can also be applied to numerical integration along a given path in the price-quantity space, which is shown for the example of the exponential index.

Mots-clés :

Axiome de la conservation de l'indice de valeur — Indice de Divisia — Indice de Drobisch — Indice de Lowe — Indice exponentiel — Indice linéaire.

INTRODUCTION

L'indice de prix et de quantité ne représente qu'une petite partie de l'immense œuvre de Divisia. Il publia son indice pour la première fois en 1925 (Divisia 1925). Si l'on s'intéresse d'une manière générale à la vie et à l'œuvre du grand ingénieur, économiste et statisticien parisien Divisia, on consultera par exemple Le Roy (1937 ou 1964).

Le phénomène de l'inflation est peut-être aussi vieux que l'argent. Déjà dans l'ancien testament (Agée 1,6) on peut lire : « Le salarié reçoit son salaire dans un sac percé ». La première monographie traitant l'inflation est probablement celle du philosophe scolastique Oresme (XIVe siècle). Par « problème d'indice de prix », on entend souvent la recherche d'une mesure quantitative de l'inflation. Divisia (1927, p. 4) écrit à ce propos :

Le but de tout calculateur d'un indice général des prix est d'exprimer les variations de ce que l'on appelle le niveau général des prix; tout l'exposé qui précède suffit déjà à montrer que ce but n'est pas suffisamment *précisé. Que résulte-t-il, en définitive, de tout cela? C'est que, depuis 1627, les savants se sont évertués à résoudre un problème indéterminé; c'est comme s'ils avaient tenté de répondre à la question suivante : « Pour circuler dans Paris, quelle rue faut-il prendre? » Ils ont négligé de préciser où ils voulaient aller.*

Ainsi, avant de calculer un indice de prix, il faut préciser le nombre et le choix des marchandises considérées. Avec un indice de prix, on veut indiquer la variation du niveau des prix de celles-ci. Un indice de prix pour un seul bien ne pose pas de problème, puisqu'il est simplement le rapport p^1/p^0, c'est-à-dire le prix du bien dans la « situation considérée » p^1, *divisé par son prix dans la « situation de base »* p^0. Par exemple, si le prix a doublé, passant de p^0 à $p^1 = 2p^0$, l'indice est égal à 2.

Cependant, le problème commence dès que l'on prend en considération plus d'un bien, disons deux pour simplifier. Supposons que le prix du pain ait passé de $p_1^0 = 1$ fr (le kilo) dans la situation de base à $p_1^1 = 2$ fr dans la situation considérée et que celui du tissu ait triplé, passant de $p_2^0 = 3$ fr à $p_2^1 = 9$ fr (le pied). Quelle valeur doit-on alors attribuer à un indice de prix comprenant les 2 biens pain et tissu? Considérons d'abord quelques solutions intéressantes dans l'histoire du problème des indices. Ensuite, nous introduirons deux indices qui préparent la présentation de celui de Divisia.

I
QUELQUES SOLUTIONS TRADITIONNELLES DU PROBLÈME DES INDICES DE PRIX

Selon la citation de Divisia faite ci-dessus, des savants se seraient occupés du problème des indices déjà à partir de 1627. Ce n'est rien moins que Galilée qui est mentionné dans ce contexte. Nous voulons commencer notre rapide historique par Dutot (1738), qui a proposé de choisir la somme des prix dans la situation considérée, divisée par la somme des prix dans la situation de base. La formule correspondante est :

$$P^{dutot} = \frac{p_1^1 + p_2^1}{p_1^0 + p_2^0} = \frac{2fr + 9fr}{1fr + 3fr} = 2{,}75 \qquad (1.1)$$

Pour juger les indices de prix et de quantité, Fisher (1922) a introduit des tests, c'est-à-dire des propriétés que les indices devraient satisfaire dans la mesure du possible. Une approche moderne de ce problème consiste à construire un système d'axiomes, c'est-à-dire à choisir quelques tests de base qui définissent la conception « d'indice de prix et de quantité ». Un des tests de Fisher, introduit par Eichhorn (1978) dans son système d'axiomes, était l'axiome de commensurabilité qui exige qu'un changement des unités de mesure des biens ne doive pas modifier la valeur de l'indice.

Si dans l'indice (1.1) l'unité de mesure pour le tissu, c'est-à-dire le pied, est remplacée par le mètre, ses prix triplent dans les deux situations (si l'on admet que 1 mètre = 3 pieds) et

$$P^{dutot} = \frac{p_1^1 + p'^1_2}{p_1^0 + p'^0_2} = \frac{2fr + 27fr}{1fr + 9fr} = 2{,}9 \qquad (1.2)$$

au lieu de 2,75. L'indice de Dutot ne satisfait donc pas l'axiome de la commensurabilité (cf. annexe 2).

Carli a proposé en 1764 de choisir comme indice de prix la moyenne arithmétique des rapports de prix :

$$P^{carli} = \frac{1}{2}\left(\frac{p_1^1}{p_1^0} + \frac{p_2^1}{p_2^0}\right) = \frac{1}{2}(2 + 3) = 2{,}5 \qquad (1.3)$$

L'indice de Carli satisfait l'axiome de commensurabilité, mais il ne satisfait pas l'axiome de la « conservation de l'indice de valeur » (3.11). Les deux indices, celui de Dutot comme celui de Carli, ne tiennent pas compte de l'importance relative des biens. Dans ce but, les économistes n'ont pas seulement considéré les quatre prix p_1^0, p_2^0, p_1^1 et p_2^1, mais aussi les quantités correspondantes :

— q_1^0 quantité de pain consommée dans la situation de base,
— q_2^0 quantité de tissu consommée dans la situation de base,
— q_1^1 quantité de pain consommée dans la situation considérée et
— q_2^1 quantité de tissu consommée dans la situation considérée.

On attribue à Lowe l'indice suivant :

$$P^{dit\ lowe} = \frac{q_1 p_1^1 + q_2 p_2^1}{q_1 p_1^0 + q_2 p_2^0}, \tag{1.4}$$

où q_1 et q_2 sont en général deux quantités fixes telles que $q_i^0 < q_i < q_i^1$ ou $q_i^1 < q_i < q_i^0$, suivant les cas. Lowe aurait ainsi anticipé les indices de Laspeyres et de Paasche (1.10) et (1.11) dans une forme généralisée. Mais, après avoir lu Lowe (1822) et surtout les tableaux décisifs des pages 95 et 96 de l'appendice, nous ne pouvons lui attribuer que la formule

$$P^{lowe} = \frac{q_1^1 p_1^1 + q_2^1 p_2^1}{q_1^0 p_1^0 + q_2^0 p_2^0}. \tag{1.5}$$

Lowe a posé l'égalité de l'indice de prix et de l'indice de valeur. En supposant que la consommation de pain ait diminué de moitié, passant de $q_1^0 = 10$ à $q_1^1 = 5$, et que la consommation de tissu ait doublé, passant de $q_2^0 = 4$ à $q_2^1 = 8$, nous obtenons

$$P^{lowe} = \frac{5 \times 2 + 8 \times 9}{10 \times 1 + 4 \times 3} = 3{,}73\,. \tag{1.6}$$

L'indice de Lowe ne satisfait notamment pas l'axiome d'identité qui exige que l'indice de prix soit 1 lorsque les prix sont les mêmes dans les deux situations. (1.7)

La grande divergence numérique entre (1.6) et (1.1), (1.3) en est la conséquence. Mais si l'on ne considère que des situations proches dans le temps, comme proposées par Lowe, les quantités dans les deux situations ne diffèrent habituellement pas beaucoup, ce qui rend son indice plus raisonnable.

Les auteurs mentionnés jusqu'ici n'envisageaient pas de proposer un indice de prix pour des situations prix-quantité générales. Ils étaient plutôt intéressés à des valeurs numériques pour des cas spéciaux. Lowe voulait illustrer le cas général, mais il n'a pas donné explicitement un indice de prix, c'est-à-dire une fonction des prix et quantités (cf. Eichhorn (1978)).

Drobisch (1871) fut l'un des premiers à publier un tel indice :

$$\begin{aligned} P^{drobisch\ II} &= \frac{q_1^1 p_1^1 + q_2^1 p_2^1}{q_1^0 p_1^0 + q_2^0 p_2^0} \Big/ \frac{q_1^1 + q_2^1}{q_1^0 + q_2^0} \qquad (1.8) \\ &= P^{lowe} / Q^{dutot} \\ &= 3{,}73 \Big/ \frac{5+8}{10+4} = 3{,}73 / 0{,}9286 = 4{,}02 \end{aligned}$$

où Q^{dutot} est l'indice de quantité selon Dutot (cf. formule (2.5)).

L'indice II de Drobisch ne satisfait pas l'axiome d'identité.

Relevons ici que Drobisch est plus connu par l'indice

$$P^{drobisch\ I} = \frac{1}{2}\left(P^{laspeyres} + P^{paasche}\right) = \frac{1}{2}(2{,}55 + 2{,}83) = 2{,}69 \tag{1.9}$$

que par l'indice mentionné ci-dessus (1.8).

Laspeyres recommandait en 1864 de choisir comme indice de prix les dépenses fictives pour les quantités de la situation de base et les prix de la situation considérée, divisées par les dépenses effectives de la situation de base, c'est-à-dire :

$$P^{laspeyres} = \frac{q_1^0 p_1^1 + q_2^0 p_2^1}{q_1^0 p_1^0 + q_2^0 p_2^0} = \frac{10 \times 2 + 4 \times 9}{10 \times 1 + 4 \times 3} = 2{,}55 \tag{1.10}$$

Dans l'indice de prix de Laspeyres, les quantités de la situation de base apparaissent dans les deux situations. En choisissant une construction symétrique avec les quantités de la situation considérée, Paasche proposait en 1874 son indice :

$$P^{paasche} = \frac{q_1^1 p_1^1 + q_2^1 p_2^1}{q_1^1 p_1^0 + q_2^1 p_2^0} = \frac{5 \times 2 + 8 \times 9}{5 \times 1 + 8 \times 3} = 2{,}83 \tag{1.11}$$

Les deux indices de Laspeyres et de Paasche satisfont (1.2) et (1.7), mais pas le test de la réversibilité par rapport au temps (Fisher 1922) qui exige que l'indice prenne la valeur réciproque si les deux situations sont permutées. (1.12)

Par exemple, si l'indice a doublé de 1980 à 1990, il devrait être de 0,5 si l'on prend 1990 comme année de base et si l'époque considérée est 1980.

Plusieurs auteurs ont proposé des compromis [appelés « croisements » par Fisher (1922)] entre les indices de Laspeyres et de Paasche, le premier étant probablement Drobisch avec son indice (1.9). Edgeworth proposait en 1887 les moyennes arithmétiques des quantités dans les deux situations :

$$P^{edgeworth} = \frac{\frac{q_1^0 + q_1^1}{2} p_1^1 + \frac{q_2^0 + q_2^1}{2} p_2^1}{\frac{q_1^0 + q_1^1}{2} p_1^0 + \frac{q_2^0 + q_2^1}{2} p_2^0} = \frac{7\frac{1}{2}\cdot 2 + 6\cdot 9}{7\frac{1}{2}\cdot 1 + 6\cdot 3} = 2{,}71 \tag{1.13}$$

et Walsh en 1901 les moyennes géométriques analogues :

$$P^{walsh} = \frac{\sqrt{q_1^0 \cdot q_1^1}\, p_1^1 + \sqrt{q_2^0 \cdot q_2^1}\, p_2^1}{\sqrt{q_1^0 \cdot q_1^1}\, p_1^0 + \sqrt{q_2^0 \cdot q_2^1}\, p_2^0} = \frac{\sqrt{50}\cdot 2 + \sqrt{32}\cdot 9}{\sqrt{50}\cdot 1 + \sqrt{32}\cdot 3} = 2{,}71 \tag{1.14}$$

C'est parce que $q_1^1/q_1^0 = q_2^0/q_2^1$ dans notre exemple numérique que l'indice de Edgeworth et celui de Walsh donnent des résultats identiques. L'indice de Edgeworth comme celui de Walsh satisfont le test de la réversibilité par rapport au temps, mais non le test de la réversibilité par rapport aux facteurs prix et quantités (Fisher 1922) qui exige que le produit de l'indice de prix avec l'indice de quantité correspondant donne l'indice de valeur. (1.15)

Pour bien comprendre ce que ce test signifie, on peut l'exprimer dans la notation d'Eichhorn (1978), c'est-à-dire par les formules (2.5) et (3.10).

Fisher (1922) a recommandé l'indice qui porte son nom, la moyenne géométrique des indices de Laspeyres et de Paasche :

$$P^{fisher} = \sqrt{P^{laspeyres} \times P^{paasche}} = 2{,}68635\,. \tag{1.16}$$

L'indice de Fisher est le seul indice traité jusqu'ici qui satisfait les tests (1.2), (1.7), (1.12) et (1.15). Pour cette raison, Fisher l'appelait l'indice « idéal ».

On pourrait encore mentionner beaucoup de croisements entre les indices de Laspeyres et de Paasche. Et, par exemple, l'indice de Jevons qui est traité par Silva (1964). Mais nous voulons terminer cette esquisse historique en mentionnant l'indice introduit par Divisia (1965, p. 261) :

$$P_{m,n} = \left[\left(P^{laspeyres}\right)^m \times \left(P^{paasche}\right)^n\right]^{\frac{1}{m+n}} \tag{1.17}$$

Il s'agit d'une généralisation de :

$$P^{laspeyres} = P_{m,0};\ P^{paasche} = P_{0,n} \text{ et } P^{fisher} = P_{k,k}.$$

Divisia (1965, p. 261) écrit à propos de cette construction :

Ce, quels que soient m et n, ce qui donne une double infinité d'indices possibles. A moins de raison économique précise pour le choix, on est, croyons-nous, en pleine fantasmagorie algébrique.

II
REPRÉSENTATION DU PROBLÈME DES INDICES DANS L'ESPACE PRIX-QUANTITÉ DE 2*N* DIMENSIONS

Considérons maintenant le cas général de *n* biens au lieu de 2 en utilisant la notation vectorielle d'Eichhorn (1978). Un indice de prix est alors une fonction P ($\mathbf{q}^0$, $\mathbf{p}^0$, $\mathbf{q}^1$, $\mathbf{p}^1$) de 4*n* quantités et prix dans les deux situations. Avec cette notation, nous écrivons par exemple pour (1.5), (1.10), (1.11) et (1.13) :

$$P^{lowe} = \frac{q^1 p^1}{q^0 p^0}, \tag{2.1}$$

$$P^{plaspeyres} = \frac{q^0 p^1}{q^0 p^0}, \tag{2.2}$$

$$P^{paasche} = \frac{q^1 p^1}{q^1 p^0} \tag{2.3}$$

$$\text{et } P^{edgeworth} = \frac{\frac{q^0 + q^1}{2} p^1}{\frac{q^0 + q^1}{2} p^0} = \frac{\left(q^0 + q^1\right) p^1}{\left(q^0 + q^1\right) p^0}. \tag{2.4}$$

où qp est le produit scalaire $\sum_{i=1}^{n} q_i p_i$.

Par « problème des indices », nous entendons l'ainsi-dit problème statistique des indices. Lorsqu'on permute dans un indice de prix P (q^0, p^0, q^1, p^1) les valeurs q (quantités) et les valeurs p (prix), on obtient l'indice de quantité correspondant :

$$Q\,(q^0, p^0, q^1, p^1) = P\,(p^0, q^0, p^1, q^1). \tag{2.5}$$

On peut généraliser encore ce problème en l'appliquant à des indices de fécondité démographique et de population, à des indices de salaires et de main-d'œuvre, etc. (Vogt 1979). Il est également applicable à la morbidité (Vogt 1986).

Considérons le problème des indices dans l'espace prix-quantité de $2n$ dimensions.

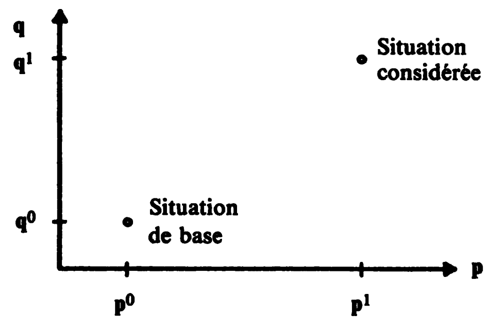

Fig. 1

Dans les figures 2, trois liens des prix de la situation de base avec ceux de la situation considérée sont représentés. Chaque lien est noté par une flèche allant des prix de la situation de base aux prix de la situation considérée :

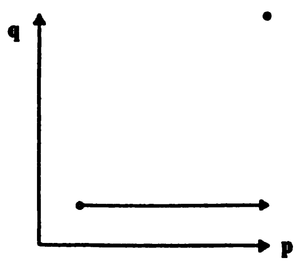

Fig. 2.1

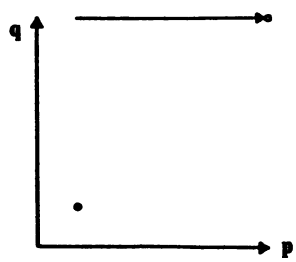

Fig. 2.2

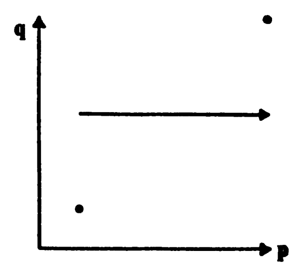

Fig. 2.3

Le rapport des valeurs des biens (valeur = Σ quantités $\times$ prix = qp).

$$\frac{\textit{valeur à la pointe de la flèche}}{\textit{valeur à l'origine de la flèche}} \tag{2.6}$$

donne trois indices déjà traités, à savoir :

— figure 2.1 l'indice de Laspeyres (1.10), (2.2),

— figure 2.2 l'indice de Paasche (1.11), (2.3) et

— figure 2.3 l'indice de Edgeworth (1.13), (2.4).

Les niveaux des quantités sont maintenus constants dans les trois cas, parce qu'avec des variations de quantités sans variations de prix, l'indice de prix doit être égal à 1 [selon l'axiome d'identité (1.7)]. Mais, contrairement au but recherché dans le problème des indices, les trois flèches ne mènent pas de la situation de base à la situation considérée.

Si, en revanche, l'on compare directement les deux situations, comme l'illustre la figure 3,

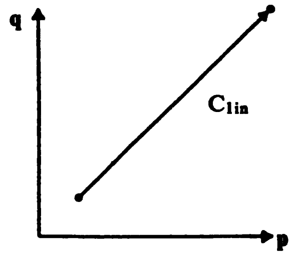

Fig. 3

la formule (2.6) donne l'indice des valeurs, c'est-à-dire P^{Lowe} selon les formules (1.5), (2.1). Comme nous l'avons déjà vu, cet indice ne satisfait pas l'axiome d'identité :

$$P\,(q^0, p^0, q^1, q^0) = 1. \tag{2.7}$$

Dans le chapitre suivant, nous développons deux indices dérivés par l'auteur.

III
L'INDICE LINÉAIRE ET L'INDICE EXPONENTIEL

Avant de présenter l'indice de Divisia, nous introduisons deux indices spéciaux qui peuvent contribuer à la compréhension de l'indice général de Divisia, tout en espérant que le lecteur ne trouvera pas qu'il s'agisse là de « fantasmagorie algébrique » (cf. citation de Divisia à la fin du chapitre I). En fait, ces indices ont une interprétation géométrique avec une signification économique précise.

1. *L'indice linéaire*

Pour satisfaire les deux conditions :

— comparaison directe de la situation de base avec la situation considérée et

— l'axiome d'identité (1.7), (2.7), nous combinons les figures 2 et 3, ce qui donne :

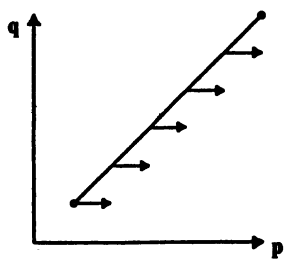

Fig. 4.1

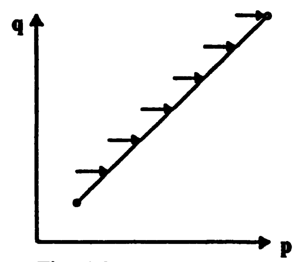

Fig. 4.2

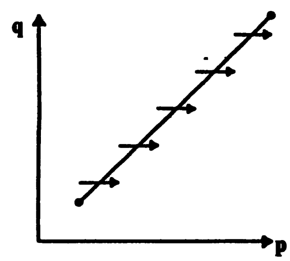

Fig. 4.3

Si l'indice de prix est calculé selon la figure 4.1, la variation totale des prix est subdivisée en plusieurs indices de Laspeyres se référant à des parties du temps total considéré. L'indice pour le temps total est alors le produit de ces indices. De manière analogue, les figures 4.2 et 4.3 mènent, respectivement, aux produits d'indices de Paasche et d'Edgeworth.

Pour examiner le comportement numérique de ces trois produits quand le nombre des facteurs augmente, chaque facteur s'approchant de 1, ils sont calculés en doublant successivement le nombre de pas, chaque pas étant de la même longueur. La limite serait la même avec des pas de longueurs

Approximations type Laspeyres | **Approximations type Paasche** | **Approximations type Edgeworth**

K = 1

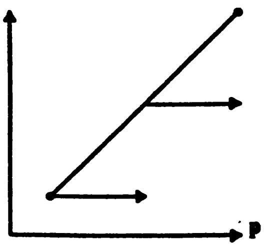

Fig. 5.1.1

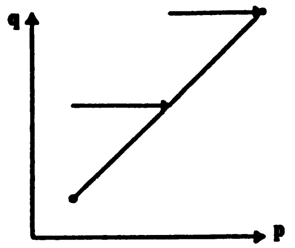

Fig. 5.1.2

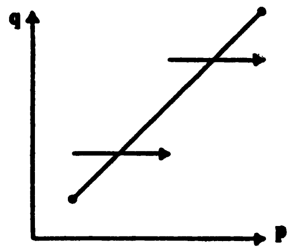

Fig. 5.1.3

K = 2

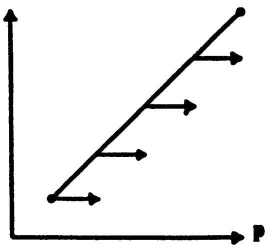

Fig. 5.2.1

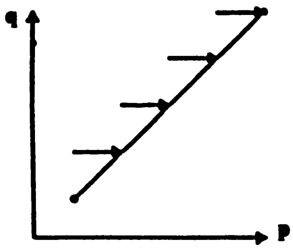

Fig. 5.2.2

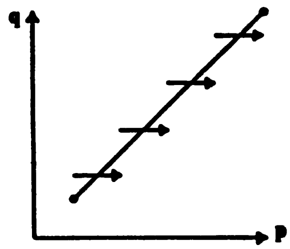

Fig. 5.2.3

K = 3

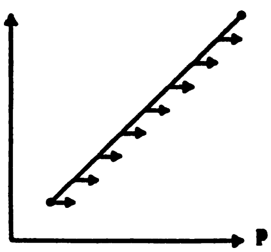

Fig. 5.3.1

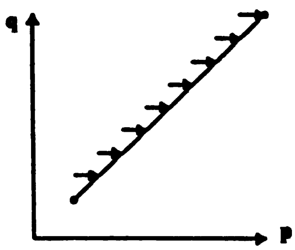

Fig. 5.3.2

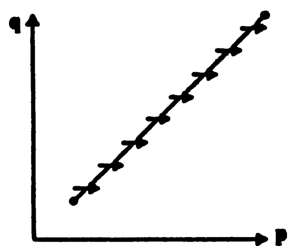

Fig. 5.3.3

K = 4

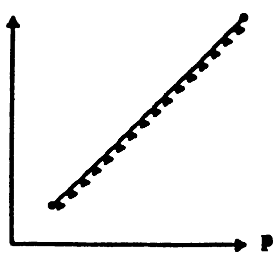

Fig. 5.4.1

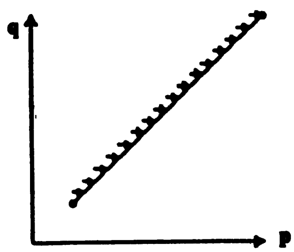

Fig. 5.4.2

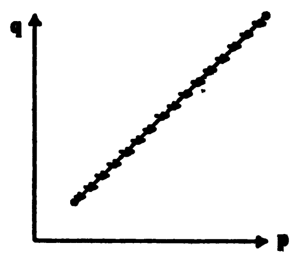

Fig. 5.4.3

différentes, tant que la longueur même du plus grand devient infiniment petite. Ce procédé est illustré dans les figures 5. Les figures 2 montrent une première approximation avec un seul pas ($k = 0$). Dans la deuxième approximation des figures 5.1, il y a 2 pas, dans la troisième 4, etc. Dans la k^{eme} approximation, il y a 2^k pas. Les formules pour les indices de prix correspondants sont les suivantes :

$$P_K^{laspeyres} = \prod_{m=0}^{2^k-1} \frac{\left(\frac{2^k-m}{2^k} q^0 + \frac{m}{2^k} q^1\right)\left(\frac{2^k-m-1}{2^k} p^0 + \frac{m+1}{2^k} p^1\right)}{\left(\frac{2^k-m}{2^k} q^0 + \frac{m}{2^k} q^1\right)\left(\frac{2^k-m}{2^k} p^0 + \frac{m}{2^k} p^1\right)} \tag{3.1}$$

$$P_K^{paasche} = \prod_{m=0}^{2^k-1} \frac{\left(\frac{2^k-m-1}{2^k} q^0 + \frac{m+1}{2^k} q^1\right)\left(\frac{2^k-m-1}{2^k} p^0 + \frac{m+1}{2^k} p^1\right)}{\left(\frac{2^k-m-1}{2^k} q^0 + \frac{m+1}{2^k} q^1\right)\left(\frac{2^k-m}{2^k} p^0 + \frac{m}{2^k} p^1\right)} \tag{3.2}$$

$$P_K^{edgeworth} = \prod_{m=0}^{2^k-1} \frac{\frac{\left(\frac{2^k-m}{2^k} q^0 + \frac{m}{2^k} q^1\right) + \left(\frac{2^k-m-1}{2^k} q^0 + \frac{m+1}{2^k} q^1\right)}{2}\left(\frac{2^k-m-1}{2^k} p^0 + \frac{m+1}{2^k} p^1\right)}{\frac{\left(\frac{2^k-m}{2^k} q^0 + \frac{m}{2^k} q^1\right) + \left(\frac{2^k-m-1}{2^k} q^0 + \frac{m+1}{2^k} q^1\right)}{2}\left(\frac{2^k-m}{2^k} p^0 + \frac{m}{2^k} p^1\right)} \tag{3.3}$$

Dans ces formules, le facteur 2^k pourrait être réduit. Nous ne l'avons pas fait pour mieux montrer la correspondance entre les formules et les figures 5.

L'intuition géométrique montre que ces trois produits s'approchent de la même limite. Nous voulons appeler cette limite commune l'indice linéaire P^{lin} :

$$P^{lin} = \lim_{K \to \infty} P_K^{laspeyres} = \lim_{K \to \infty} P_K^{paasche} = \lim_{K \to \infty} P_K^{edgeworth} \tag{3.4}$$

Dans l'annexe 1, les formules (3.1), (3.2) et (3.3) sont appliquées à l'exemple numérique du chapitre I pour montrer comment $P_k^{laspeyres}$, $P_k^{paasche}$ et $P_k^{edgeworth}$ convergent à la limite commune $P_{Clin}^{divisia}$ selon la formule (5.4).

2. *L'indice exponentiel*

Traitant de l'indice (5.4) avec le contour linéaire, Köves (1981) propose de choisir plutôt le contour exponentiel sur lequel les prix et les quantités augmentent (ou diminuent) à des taux constants. Balk (1983) exprime ce contour par

$$\left.\begin{aligned} \log q_i &= \log q_i^0 + t\left(\log q_i^1 - \log q_i^0\right) \\ \log p_i &= \log p_i^0 + t\left(\log p_i^1 - \log p_i^0\right) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &i = 1, 2, \ldots, n \\ &t \in [0,1]. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Nous transformons (3.5) en

$$\left.\begin{aligned} q_i(t) &= q_i^0\left(\frac{q_i^1}{q_i^0}\right)^t \\ p_i(t) &= p_i^0\left(\frac{p_i^1}{p_i^0}\right)^t \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &i = 1, 2, \dots, n \\ &t \in [0,1]. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Nous appliquons ensuite le même procédé que pour l'indice linéaire. Au lieu de la figure 5.2.3 par exemple, nous avons :

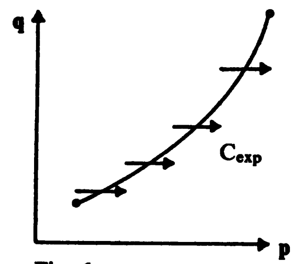

Fig. 6

La formule correspondant à la formule (3.3) est la suivante :

$$P_k^{walsh} = \prod_{m=0}^{2^k-1} \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i^0\left(\frac{q_i^1}{q_i^0}\right)^{\frac{1+2m}{2^{k+1}}} p_i^0\left(\frac{p_i^1}{p_i^0}\right)^{\frac{m+1}{2^k}}}{\sum_{i=1}^{n} q_i^0\left(\frac{q_i^1}{q_i^0}\right)^{\frac{1+2m}{2^{k+1}}} p_i^0\left(\frac{p_i^1}{p_i^0}\right)^{\frac{m}{2^k}}}. \tag{3.7}$$

Nous employons la notation P_k^{walsh} dans (3.7) parce que $P_0^{walsh} = P^{walsh}$ selon (1.14). Finalement, nous pouvons exprimer l'indice cherché par Köves (1981) et Balk (1983) par :

$$P^{exp} = \lim_{k \to \infty} P_k^{walsh}. \tag{3.8}$$

L'annexe 1 contient l'exemple numérique du chapitre I de P_k^{walsh} pour $k = 0$ à 10.

Les deux indices, l'indice linéaire et l'indice exponentiel, satisfont, comme on peut le concevoir à l'aide des figures, entre autres les deux tests de réversibilité (1.12) et (1.15). Ces « great tests », selon Fisher (1922), s'expriment par les équations fonctionnelles suivantes :

Test de la réversibilité par rapport au temps :

$$P\left(q^0, p^0, q^1, p^1\right) = \frac{1}{P\left(q^1, p^1, q^0, p^0\right)} \tag{3.9}$$

Test de la réversibilité par rapport aux facteurs prix et quantités :

$$P\,(q^0, p^0, q^1, p^1) \times P\,(p^0, q^0, p^1, q^1) = \frac{q^1 p^1}{q^0 p^0}. \tag{3.10}$$

De même, nous voulons exprimer un axiome mentionné dans le chapitre I : l'axiome de la conservation de l'indice de valeur :

$$P\,(q^0, p^0, \lambda q^0, p^1) = \frac{q^0 p^1}{q^0 p^0}. \tag{3.11}$$

Le nom de ce test (« Wertindextreue-Test » dans Vogt (1979) et « Value-Index-Preserving-Axioma » dans Vogt (1987)) s'explique comme suit : Un indice de valeur correspondant à un indice de prix qui satisfait cet axiome est égal à l'unique indice de valeur raisonnable, soit :

$$V = \frac{q^1 p^1}{q^0 p^0} \tag{3.12}$$

IV
L'INDICE DE DIVISIA

Jusqu'ici, nous avons traité des contours fictifs. Par contre, l'indice de Divisia dépend du contour empirique C qui est tracé du point de base (q^0, p^0) au point considéré (q^1, p^1) :

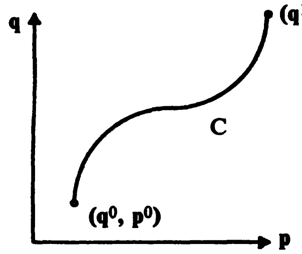

Fig. 7

Divisia (1925, p. 1964) définit son indice de prix par :

$$P_C^{divisia} = exp \int_C \frac{q\,(t)\, \dot{p}\,(t)}{q\,(t)\, p\,(t)}\, dt \tag{4.1}$$

et son indice de quantité (ce qui se déduit de la formule (2.5)) par :

$$Q_C^{divisia} = exp \int_C \frac{\dot{q}\,(t)\, p\,(t)}{q\,(t)\, p\,(t)}\, dt \tag{4.2}$$

où $[q\,(t), p\,(t)]$ est une paramétrisation du contour C avec :

$q(t_0) = q^0$, $p(t_0) = p^0$, $q(t_1) = q^1$ et $p(t_1) = p^1$

$t \in [t_0, t_1]$ = « paramètre de temps »

et $\dot{q}(t)$ et $\dot{p}(t)$ sont les dérivés de $q(t)$ et $p(t)$ par rapport à t.

Dans la pratique, l'indice de Divisia de l'année n par rapport à l'année de base 0 s'obtient en calculant l'indice de l'année i par rapport à l'année $i-1$ ($i = 1,...,n$) et en effectuant le produit de tous ces indices intermédiaires; peu importe que les indices intermédiaires soient calculés selon Paasche ou selon Laspeyres car la différence disparaît dans le passage à la limite (i.e. on calcule l'indice d'un jour par rapport au jour précédent ou même d'une minute par rapport à la minute précédente comme pratiqué pour des indices boursiers).

Selon Samuelson et Swamy (1974), Divisia aurait ignoré la dépendance du contour de son indice. Ils se trompent manifestement, comme le montre le passage suivant (Divisia 1925, p. 1006):

La valeur actuelle de la rançon de François Ier dépend du règne de Louis XIV, des encyclopédistes et de la Révolution, de la découverte de la pomme de terre, de l'invention de la vapeur... Et ainsi, notre indice monétaire, l'intégrale curviligne, nous paraît mériter beaucoup mieux le nom d'indice historique que...

Verne (1889), dans l'année de naissance de Divisia, n'extrapole pas vers le passé, mais vers l'avenir, il se porte en l'an 2889 et propose des accumulateurs « qui condensent... la force contenue dans les rayons solaires... », le transformateur et le « piano-compteur-électrique » (l'ordinateur). C'est à ces instruments que l'on devrait « la production incessante de l'électricité sans piles ni machines, la lumière sans combustion ni incandescence, et enfin cette intarissable source d'énergie, qui a centuplé la production industrielle ». Verne s'est seulement trompé au sujet du temps qu'il fallait pour centupler la productivité. Il est à remarquer que dans ce cas non seulement les quantités q augmentent, mais aussi que — ceteris paribus — les prix p diminuent dans figure 7, si l'économie passe du point de base au point considéré.

Divisia (1965, p. 262) a également écrit (dans notre notation):

Si le contour de C est indéterminé, $Q_C^{divisia}$ et $P_C^{divisia}$ sont ce que nous avons appelé dans notre jeunesse (dans un travail de mathématiques non publié [1]) des fonctions curviformes...
Sur le plan économique, le problème est apparemment de savoir selon quel contour C ces intégrales doivent être calculées. Il nous a paru jadis, et il nous paraît encore, que ce doit être le contour historique décrivant comment se sont accompagnées, de l'époque de départ à l'époque d'arrivée, les quantités et les prix.
A défaut de pouvoir le faire, on peut sans doute se contenter d'intégrer le long d'un des deux contours rectangulaires $((q^0, p^0), ((q^0, p^1), (q^1, p^1)), ((q^0, p^0), (q^1, p^0), (q^1, p^1))$, ce qui donne, sauf erreur, les formules de Laspeyres et Paasche, et procure vraisemblablement deux limites entre lesquelles se cantonnent toutes les valeurs de l'intégrale prises le long d'un contour quelconque intérieur au rectangle...

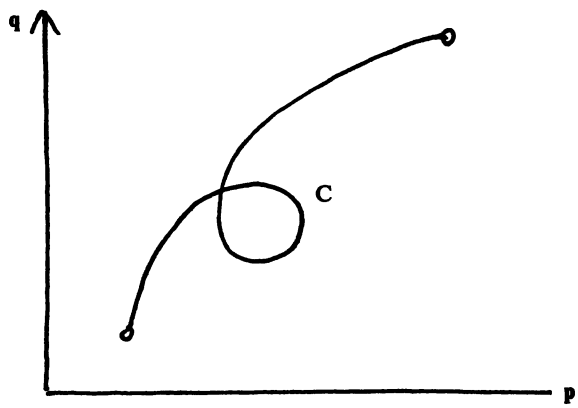

Fig. 8

(1) Nous avons effectué des recherches sans succès pour trouver ce travail non publié dans différentes institutions parisiennes. La seule chance de le retrouver semble être par la famille Divisia.

Ceci appelle trois remarques. Premièrement, l'intégration le long des contours mentionnés par Divisia donne en fait les formules de Laspeyres et de Paasche. Pour s'en rendre compte, il suffit de remplacer la formule (5.1) par (5.2). Deuxièmement, il n'est pas dit que le contour historique soit compris dans le rectangle $[(q^0, p^0), (q^0, p^1), (q^1, p^1), (q^1, p^0)]$. Troisièmement, il ne suffit pas qu'on exige que le contour soit contenu dans ce rectangle pour que l'intégrale (4.1) soit entre les deux limites $P^{laspeyres}$ et $P^{paasche}$, mais également qu'aucun croisement comme dans la figure suivante, selon Bidard (1976) n'ait lieu, et que les fonctions q (t) et p (t) soient monotones. Par exemple, avec la série des contours non-monotones ci-dessous, les calculs numériques montrent que la valeur de $P_C^{divisia}$ ne reste pas entre $P^{laspeyres}$ et $P^{paasche}$:

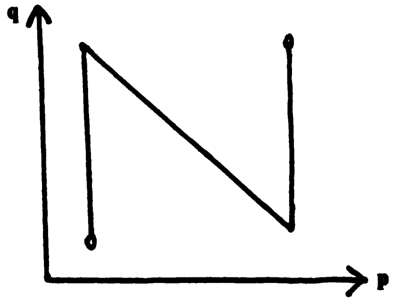

Fig. 9.1

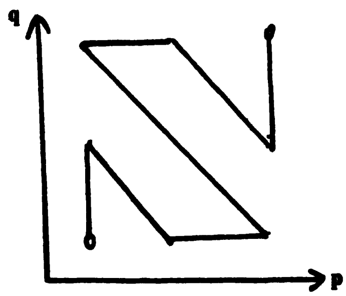

Fig. 9.2

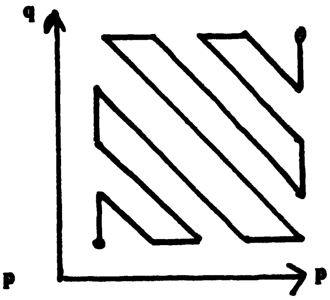

Fig. 9.3

Pour calculer l'indice de Divisia selon les contours des figures 9, nous avons utilisé la formule (5.4) pour chaque segment.

V
DEUX APPLICATIONS DE L'INDICE DE DIVISIA

1. *L'évaluation d'une formule directe pour l'indice linéaire*

Pour appliquer l'intégrale de Divisia à l'indice linéaire, il faut compléter les figures par des éléments verticaux, ce qui donne pour les figures 5.2 :

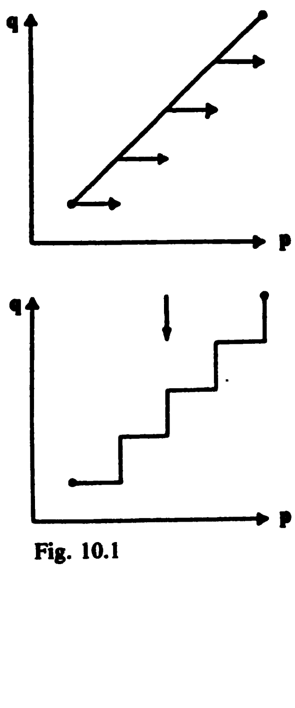

Fig. 10.1

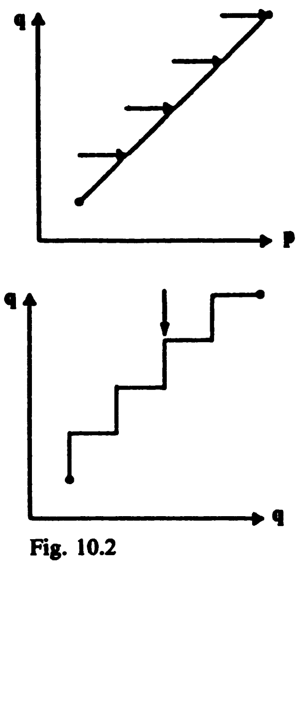

Fig. 10.2

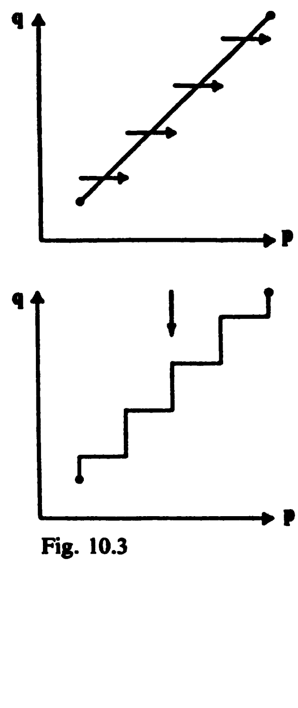

Fig. 10.3

Afin de calculer l'intégrale (4.1) le long de ces éléments verticaux, nous employons le fait que les prix n'y varient pas. Pour cette raison, $\dot{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{0}$ et $P_C^{divisia} = 1$ sur ces éléments. Pour calculer $P_C^{divisia}$ le long des éléments horizontaux, nous appliquons un artifice de calcul :

Au lieu de calculer :

$$exp \int_C \frac{\mathbf{q}(t)\,\dot{\mathbf{p}}(t)}{\mathbf{q}(t)\,\mathbf{p}(t)}\,dt, \tag{5.1}$$

nous calculons :

$$exp \int_C \frac{\mathbf{q}(t)\,\dot{\mathbf{p}}(t) + \dot{\mathbf{q}}(t)\,\mathbf{p}(t)}{\mathbf{q}(t)\,\mathbf{p}(t)}\,dt, \tag{5.2}$$

parce que (5.2) est égal à (5.1) le long d'un élément horizontal où $\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{0}$. Nous procédons de cette manière car l'intégrand de (5.2) est une différentielle exacte et l'intégrale d'une telle différentielle est indépendante du contour. En fait, l'intégrand de (5.2) est la dérivée logarithmique de $\mathbf{qp}$, c'est-à-dire de la valeur (valeur = prix × quantité). Pour cette raison, nous avons sur un élément horizontal C_h :

$$\begin{aligned}
P_{C_h}^{divisia} &= exp \int_{C_h} \frac{\mathbf{q}\,\dot{\mathbf{p}}}{\mathbf{q}\,\mathbf{p}}\,dt = exp \int_{C_h} \frac{\mathbf{q}\,\dot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{q}}\,\mathbf{p}}{\mathbf{q}\,\mathbf{p}} \\
&= exp \int_{C_h} \frac{d}{dt} \log(\mathbf{q}\,\mathbf{p})\,dt \\
&= exp \left(\log(\mathbf{q}\,\mathbf{p}) \Big|_{\text{point de départ de } C_h}^{\text{point d'arrivée de } C_h} \right) \\
&= exp \left\{ \log(\text{valeur du point d'arrivée de } C_h) \right. \\
&\qquad \left. - \log(\text{valeur du point de départ de } C_h) \right\} \\
&= \frac{\text{valeur au point d'arrivée de } C_h}{\text{valeur au point de départ de } C_h}.
\end{aligned} \tag{5.3}$$

C'est pourquoi l'indice de Divisia sur un élément horizontal C_h est calculé selon l'expression (2.6). Si nous ne considérons pas seulement un élément horizontal C_h, mais toute une échelle comme indiquée dans les figures 10.1, 10.2 et 10.3, nous arrivons aux produits (3.1) (3.2) et (3.3), respectivement. Si nous augmentons le nombre des pas comme dans les figures 5.1 à 5.4 etc., nous arrivons finalement au contour linéaire C_{lin}, montré dans la figure 3.

Nous avons évalué l'intégrale de Divisia le long du contour C_{lin} (Vogt 1978, 1979), ce qui donne

$$P_{C_{Lin}}^{divisia} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{q^1 p^1}{q^0 p^0}} \left(\dfrac{q^0 p^1 + q^1 p^0 + \sqrt{D}}{q^0 p^1 + q^1 p^0 - \sqrt{D}} \right)^{\frac{q^0 p^1 + q^1 p^0}{2\sqrt{D}}} & D > 0 \\ \sqrt{\dfrac{q^1 p^1}{q^0 p^0}} \; exp \; \dfrac{q^0 p^1 - q^1 p^0}{q^0 p^1 + q^1 p^0} & D = 0 \\ \sqrt{\dfrac{q^1 p^1}{q^0 p^0}} \; exp \left(\dfrac{q^0 p^1 - q^1 p^0}{\sqrt{-D}} \; artg \; \dfrac{\sqrt{-D}}{q^0 p^1 + q^1 p^0} \right) & D < 0 \end{cases} \qquad (5.4)$$

où :

$$D = (q^o p^1 + q^1 p^o)^2 - 4\, q^o p^o q^1 p^1.$$

La preuve que :

$$P^{lin} = P_{C_{lin}}^{divisia}, \; P^{lin} \quad \text{selon (3.1) à (3.4)}$$

semble être difficile pour un mathématicien qui ne connaît pas l'indice de Divisia!

L'expression analogue pour P^{exp} selon la formule (3.8), c'est-à-dire l'évaluation de $P_{C_{exp}}^{divisia}$, n'a pas encore été trouvée à ce jour.

2. *Intégration numérique de l'indice de Divisia*

Aujourd'hui, à l'ère des ordinateurs, l'évaluation analytique des intégrales, comme traitée dans le chapitre V.1, n'est souvent plus aussi importante. Dans beaucoup de cas, on se contente d'intégrations numériques. La formule (4.1) de Divisia peut être appliquée directement dans ce but.

Nous ne voulons pas exécuter l'intégration numérique le long du contour C_{lin} de la figure 3, parce que pour ce contour nous avons déjà deux formules, à savoir (3.4) et (5.4), qui donnent les résultats numériques identiques de l'annexe 1 ($P_{10}^{edgeworth}$ = 2,652805 et $P_{C_{lin}}^{divisia}$ = 2,652805). L'identité de ces deux résultats est une confirmation que ces formules sont justes. Mais pour le contour C_{exp} selon figure 6 nous avons seulement formule (3.8) et pas l'évaluation analytique de l'intégrale. Pour cette raison, nous voulons choisir le contour C_{exp} comme exemple d'intégration numérique. La paramétrisation (3.6) de ce contour, mise dans l'indice de Divisia (4.1), donne :

$$P^{divisia}_{C_{exp}} = exp \int_0^1 \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i^0 \left(\frac{q_i^1}{q_i^0}\right)^t p_i^0 \left(\frac{p_i^1}{p_i^0}\right)^t ln\left(\frac{q_i^1}{q_i^0}\right)}{\sum_{i=1}^{n} q_i^0 \left(\frac{q_i^1}{q_i^0}\right)^t p_i^0 \left(\frac{p_i^1}{p_i^0}\right)^t} dt$$

$$= exp \int_0^1 \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i^0 p_i^0 \left(\frac{q_i^1 p_i^1}{q_i^0 p_i^0}\right)^t ln\left(\frac{p_i^1}{p_i^0}\right)}{\sum_{i=1}^{n} q_i^0 p_i^0 \cdot \left(\frac{q_i^1 p_i^1}{q_i^0 p_i^0}\right)^t} dt \tag{5.6}$$

Nous calculons (5.6) avec la règle de trapézoide. Nous dénotons le résultat :
avec 1 trapézoide : P_0^{trap},
avec 2 trapézoides : P_1^{trap} et
avec 2^k trapézoides : P_k^{trap}.
où

$$P_0^{trap} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} q_i^0 \ p_i^0 \ ln\left(\frac{p_i^1}{p_i^0}\right)}{\sum_{i=1}^{n} q_i^0 \ p_i^0} + \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i^1 \ p_i^1 \ ln\left(\frac{p_i^1}{p_i^0}\right)}{\sum_{i=1}^{n} q_i^1 \ p_i^1}\right) \tag{5.7}$$

(5.7)

$$P_1^{trap} = \frac{1}{4}\left(2P_0^{trap} + 2\,\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(q_i^0 \ p_i^0\right)^{1/2} \left(q_i^1 \ p_i^1\right)^{1/2} ln\left(\frac{p_i^1}{p_i^0}\right)}{\sum_{i=1}^{n} \left(q_i^0 \ p_i^0\right)^{1/2} \left(q_i^1 \ p_i^1\right)^{1/2}}\right) \tag{5.8}$$

(5.8)

$$P_K^{trap} = \frac{1}{2^{k+1}} \left(2P_0^{trap} + 2 \sum_{\tau=1}^{2^k-1} \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i^0 \; p_i^0 \left(\frac{q_i^1 \; p_i^1}{q_i^0 \; p_i^0} \right)^{\tau/2^K} \ln \left(\frac{p_i^1}{p_i^0} \right)}{\sum_{i=1}^{n} q_i^0 \; p_i^0 \left(\frac{q_i^1 \; p_i^1}{q_i^0 \; p_i^0} \right)^{\tau/2^K}} \right) \tag{5.9}$$

avec :

(5.10) $$P_{C_{exp}}^{divisia} = \lim_{K \to \infty} P_k^{trap}$$

Dans l'annexe 1, nous donnons P_k^{trap} pour k = 0,1,..,10 pour l'exemple du chapitre I. L'identité de P_{10}^{trap} = 2,6935969 et P_{10}^{wals} selon la formule (3.7) est de nouveau une confirmation que ces deux formules sont justes.

REMARQUE FINALE

Nous avons vu des exemples d'indices qui peuvent être obtenus comme indices de Divisia selon certains contours fictifs dans l'espace prix-quantité, c'est-à-dire les indices de Laspeyres, Paasche, Edgeworth-Marshall, Walsh et les indices linéaire et exponentiel. On pourrait encore élargir cette liste peut-être avec beaucoup d'indices déjà connus ou à découvrir encore. Pour terminer nous voulons mentionner ici que Van Yzeren (1986) a trouvé un contour spécial qu'il appelle « inflationné linéaire » dont l'indice de Divisia mène à l'indice de Fisher (1.16). Cette connexion entre ces deux grands économistes qui se sont occupés du problème des indices est enrichi par Le Roy (1964) : « (François Divisia) se fondant sur l'équation générale des échanges qu'il avait découverte pour son propre compte sans connaître l'œuvre de Irving Fisher... »

Exemple du chapitre I

Annexe 1

i	q_i^0	p_i^0	q_i^1	p_i^1
1	10	1	5	2
2	4	3	8	9

k	Formule et numéro				
	$P_k^{laspeyres}$	$P_k^{paasche}$	$P_k^{edgeworth}$	P_k^{walsh}	P_k^{trap}
	(3.1)	(3.2)	(3.3)	(3.7)	(5.9)
0	2,5455 = (1.10)	2,8276 = (1.11)	2,7059 = (1.13)	2,7059 = (1.14)	2,6877704
1	2,5887	2,7377	2,6685	2,6964	2,6921562
2	2,6178	2,6934	2,6569	2,6943	2,6932377
3	2,6345	2,6725	2,6539	2,6938	2,6935072
4	2,6435	2,6625	2,6531	2,6936395	2,6935745
5	2,6481	2,6576	2,6529	2,6936076	2,6935913
6	2,6504	2,6552	2,652821	2,6935996	2,6935955
7	2,6516	2,6540	2,652809	2,6935976	2,6935966
8	2,6522	2,6534	2,652806	2,6935971	2,6935969
9	2,6525	2,6531	2,652805	2,6935970	2,6935969
10	2,6527	2,6530	2,652805	2,6935969	2,6935969

$P_{C_{lin}}^{divisia}$ selon (5.4) = 2,652805

Annexe 2

Les indices et leurs propriétés (tests ou axiomes) mentionnés dans cet article
Quel indice a quelles propriétés?
+ L'indice a la propriété — L'indice n'a pas la propriété

Indices	Propriétés	Commen-surabilité	Identité	Réversibilité par rapport au temps	Réversibilité par rapport aux facteurs	Conservation de l'indice de valeur
	Formules	1.2	1.7 et 2.7	1.12 et 3.9	1.15 et 3.10	3.11
Dutot	1.1	−	+	+	−	+
Carli	1.3	+	+	−	−	−
Dit Lowe	1.4	+	+	+	−	+
Lowe	1.5 et 2.1	+	−	+	−	+
Drobisch II	1.8	−	−	+	−	+
Drobisch I	1.9	+	+	−	−	+
Laspeyres	1.10 et 2.2	+	+	−	−	+
Paasche	1.11 et 2.3	+	+	−	−	+
Edgeworth	1.13 et 2.4	+	+	+	−	+
Walsh	1.14	+	+	+	−	+
Fisher	1.16	+	+	+	+	+
Linéaire	3.4 et 5.4	+	+	+	+	+
Exponentiel	3.8 et (5.10)	+	+	+	+	+
Divisia	4.1	+	−	+	+	−

NB : Étant un indice dépendant d'une infinité de situations, l'indice de Divisia ne peut pas être jugé sans autre par ces propriétés introduites pour des indices dépendant de deux situations [cf. par exemple Eichhorn (1978)].

BIBLIOGRAPHIE

B. BALK (1983) : *Integral Price and Quantity Indices,* Papier interne du Bureau Central de Statistique des Pays-Bas.

C. BIDARD (1976) : *Sur l'indice de Divisia,* Revue d'économie politique, tome 86, 437-449.

F. DIVISIA (1925) : *L'indice monétaire et la théorie de la monnaie,* Revue d'économie politique, tome 39, 842-861, 980-1008 et 1121-1151.

F. DIVISIA (1927) : *Les problèmes de l'indice général des prix,* Revue générale des sciences, 15-30 septembre, 1-8.

F. DIVISIA (1965) : *Assise pour les études et techniques monétaires,* Dunod, Paris.

M.W. DROBISCH (1871) : Ueber Mittelgrössen und die Anwendbarkeit derselben auf die Berechnung des Steigens und Sinkens des Geldwertes, Berichte über die Verhandlung der Königlich sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physikalische Classe, 23. Band. 25-48.

DUTOT (1738) : *Réflexions politiques sur les finances et le commerce,* Édition intégrale publiée pour la première fois par Paul Harsin, Liège et P., Droz, 1953, Édition originale, la Haye.

W. EICHHORN (1978) : *What is an Economic Index?* An Attempt on an Answer, dans Eichhorn W., Henn R., Optiz O. et Shephard R.W. (1978).

W. EICHHORN, R. HENN, O. OPITZ et R.W. SHEPHARD (éditeurs) (1978) : *Theory and Applications of Economic Indices,* Procédés d'un séminaire international à l'université de Karlsruhe, avril-mai 1976, Physica-Verlag, Würzburg, Wien.

I. FISHER (1922) : *The Making of Index Numbers,* Reprint de la troisième édition 1927, August M. Kelley, New York 1967.

P. KOVES (1981) : Indexmélet és közgazdaság valóság, Akadémiai Kiadó, Budapest. English Translation : Index Theory and Economic Reality, Akadémiai Kiadó, Budapest 1983.

J. LOWE (1822) : *The Present State of England,* Londres.

N. ORESME (14e siècle) : *De mutatione monetarum : tractatus,* édition latino-allemande, édité par Schorer E., Verlag von Gustav Fischer, Jena, 1937.

R. ROY (1937) : François Divisia, article dans l'*Encyclopaedia of the Social Sciences,* Macmillan Company, New York.

R. ROY (1964) : *Note sur la vie et les travaux de François Divisia,* Journal de la Société de Statistique de Paris, tome 105, nº 3, 131-134.

A. SAMPAIO et al. (éditeurs) (1964) : *Quelques aspects fondamentaux de l'économie moderne,* ouvrage rédigé en hommage au Professeur F. Divisia par un groupe d'économistes et de statisticiens brésiliens, Dunod, Paris.

P.A. SAMUELSON et S. SWAMY (1974) : Invariant Economic Index Numbers and Canonical Duality : Survey and Synthesis, American Economic Review, tome 64, 566-593.

O.N. SILVA (1964) : *Valeur de la monnaie et unité de pouvoir d'achat,* dans Sampiao A. et al. (1964).

Jules VERNE (1889) : *La journée d'un journaliste américain en 2889,* paru pour la première fois en anglais, en février 1889, dans la Revue américaine The Forum, Gallimard, 1978.

A. VOGT (1978) : *Divisia Indices on Different Paths,* dans Eichhorn W., Henn R., Opitz O. et Shephard R.W. (1978).

A. VOGT (1979) : *Das statistische Indexproblem im Zwei-Situationen-Fall,* Thèse à l'école polytechnique de Zurich, Diss. ETH 6448.

A. VOGT (1986) : *Eine Formel zur Ursachenanalyse der Kostensteigerung im Gesundheitswesen,* Bulletin de l'Association des Actuaires suisses, tome 86, 95-105.

A. VOGT (1987) : Some Suggestions Concerning an Axiom System for Statistical Price and Quantity Indices, Communications in Statistics, Theory Meth., tome 16, nº 12, 3641-3663.

J. van YZEREN (1986) : Fisher's Ideal Index Numbers as Natural Divisia Results, Statistische Hefte, tome 27, 89-99.