JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

J. B. SIMAIKA

Probabilité de succès d'une politique de stockage

Journal de la société statistique de Paris, tome 117 (1976), p. 93-121
<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1976__117__93_0>

II

ARTICLES

PROBABILITÉ DE SUCCÈS D'UNE POLITIQUE DE STOCKAGE

SOMMAIRE

Il est nécessaire d'instaurer un système de stockage des produits alimentaires essentiels pour faire face aux baisses de production dues aux mauvaises conditions météorologiques. Dans cet article, on propose un modèle mathématique permettant d'évaluer la probabilité de succès d'une telle politique de stockage. On montre également comment calculer cette probabilité par itération et on en donne des exemples.

Journal de la Société de statistique de Paris, tome 117, n° 2, 1976.

It is necessary to create a system of storage of basic food stuff to cope with the drops in production due to bad weather conditions. In this paper a mathematical model enabling to estimate the success probability of such a storage policy is proposed. It is too shown to assess the probability by iteration and examples are given.

Es ist nötig ein System zu finden, das ermöglicht die wichtigsten Lebensmittel in genügender Menge aufzustapeln um ihrer Unterproduktion infolge ungünstiger klimatischer Verhältnisse zu begegnen. In der vorliegenden Arbeit wird ein mathematisches Model entwickelt, das gestattet die Wahrscheinlichkeit des Erfolges einer solchen Politik der Stapelung abzuschätzen. Zu gleicher Zeit wird gezeigt, wie eine solche Wahrscheinlichkeit durch Wiederholung zu berechnen ist und der Verfasser gibt die entsprechenden Beispiele.

Introduction

Origine du problème et objectifs de l'étude

1. Durant les quelques dernières années, des conditions climatiques adverses ont provoqué des chutes brutales de la production des produits alimentaires dans plusieurs régions du monde, chutes qui se sont répercutées sur les prix, qui ont eu comme résultat un épuisement des stocks mondiaux et ont ainsi compromis l'équilibre entre la demande et les disponibilités des produits. Pour cette raison, plusieurs pays et surtout l'Organisation des Nations Unies pour l'alimentation et l'agriculture ont cherché à instaurer un système de stockage des produits alimentaires essentiels (en particulier des céréales) afin d'assurer un niveau de sécurité face à l'éventualité d'une production déficitaire.

2. En général, un système de stockage prend en considération :

— le taux de croissance de la production (composante principale des disponibilités);
— le taux de croissance de la population (et ainsi donc de la demande);
— la disponibilité de stocks.

Si, d'une part, la demande peut être prévue à moyen terme avec un certain degré de précision et pourrait donc être représentée par une fonction mathématique du temps, par contre, la production est sujette d'une année à l'autre à des fluctuations dues à des facteurs climatiques ou à d'autres causes dont certaines imputables à l'homme lui-même. Donc, cette dernière devrait être représentée par la somme de deux composantes :

— une fonction mathématique du temps;
— un terme aléatoire (positif ou négatif) et qui pourrait aussi dépendre du temps.

3. Une politique de stocks proposée par certains a été de tenir, au *début de chaque année*, un stock suffisant pour couvrir le déficit probable de l'année. Ceci implique qu'à la fin d'une année déficitaire, le stock doit être reconstitué à son niveau précédent sinon à un niveau plus élevé, tenant compte de l'accroissêment naturel de la demande. Cette politique n'est pas pratique spécialement si le déficit est universel et elle le devient encore moins dans le cas d'une séquence d'années déficitaires.

4. Le concept d'une politique de stockage devrait donc être réexaminé. Ce qu'il serait bon d'étudier est une politique qu'on pourrait désigner par une « politique de stockage et de rationnement », une politique qui devrait être planifiée à moyen terme (un certain nombre d'années) et qui prendrait en considération simultanément les deux cas de pro-

duction excédentaire et de production déficitaire. Dans le premier cas, une partie (ou éventuellement la totalité) de l'excédent est ajoutée aux stocks et dans le second, une partie (ou la totalité) du déficit est prélevée du stock et distribuée.

5. La réussite d'une telle politique consisterait dans le fait que le stock serait positif durant toute la durée de la période prévue à l'avance par le plan. Et, puisque les éléments considérés sont aléatoires, la garantie de succès serait mesurée par le degré de confiance, c'est-à-dire par la valeur de la probabilité que le stock n'est jamais négatif durant la période précitée.

6. Dans une publication antérieure (1), l'auteur avait ébauché une approche pour évaluer le stock initial pour une probabilité donnée dans des cas particuliers de politique de stockage. L'objectif principal de la présente étude est :

— de formuler un modèle mathématique qui permettrait d'évaluer la probabilité de succès de politiques de stockage dans un cas très général;
— de montrer comment la probabilité de succès peut être calculée par itération, en utilisant un petit ordinateur de bureau (Hewlett-Packard modèle 30);
— de présenter un certain nombre de tableaux montrant la probabilité de succès de différentes politiques de stockage, pour différentes durées (de 1 à 10 ans) et différentes grandeurs du stock initial (2).

Bases du modèle mathématique

7. Le processus stochastique dans cette nouvelle forme du « Problème du réservoir » est assez complexe. Les entrées sont non seulement aléatoires mais aussi fonctions du temps et de la politique de stockage et les sorties ne sont pas fixes mais dépendent du temps, de la politique de stockage et peuvent aussi dépendre des entrées ce qui y introduirait un élément aléatoire.

8. Le modèle mathématique proposé prend en considération :

— les disponibilités et en particulier le taux de croissance de la production et la fonction de distribution de l'élément aléatoire;
— la demande et en particulier son taux de croissance;
— la durée du projet;
— la grandeur des stocks existant au début du projet (stock initial);
— le type de politique de stockage et de rationnement;
— la capacité du réservoir.

9. Étant donné que les variables de base de la relation mathématique sont les suivantes :

— la probabilité de succès du projet;
— le type de politique de stockage et de rationnement;
— la durée du projet;
— le stock initial,

1. L'instabilité de la production et ses effets sur les besoins de stockage, par D. J. Casley, J. B. Simaika and R. P. Sinha. Bulletin mensuel : *Économie et statistiques agricoles*, FAO, vol. 23, No 5, mai 1974.

2. Pour ne pas alourdir la présente publication, un petit nombre de ces tableaux est donné comme illustration. Un nombre assez important de tableaux se trouve attaché, comme annexe, au document « Probability of success of a 'Stock and Allocation' Policy ». ESS/MISC/74-1, FAO, September 1974.

une solution du problème peut permettre l'évaluation de la probabilité de succès quand le type de politique, le stock initial et la durée du projet sont déterminés. Une autre solution pourrait déterminer la grandeur du stock initial nécessaire pour qu'une politique donnée puisse réussir durant une certaine période de temps avec un degré de confiance fixé à l'avance. Enfin, étant donnés le stock initial et la durée du projet, on pourrait choisir dans un ensemble de politiques d'un certain type la plus efficace, c'est-à-dire celle qui rendrait optimale la probabilité de succès.

10. Le problème étant assez complexe, il n'a pas été possible à l'auteur de donner une solution générale de la probabilité de succès du projet comme fonction explicite des trois autres variables : politique de stockage, stock initial et durée du projet. Cependant, en utilisant une loi discrète de distribution de la variable aléatoire, l'auteur a pu modifier le modèle de façon à rendre possible le calcul successif des différentes probabilités à l'aide d'un petit ordinateur de bureau. La base de calcul est une formule de récurrence qui donne la probabilité de succès du projet durant une période de N années comme fonction intégrale de la probabilité de succès durant N—1 années.

Hypothèses de base

11. Le domaine d'application du projet devrait être une région géographique compacte et à l'intérieur de laquelle une politique de stockage et de rationnement puisse être facilement applicable. Il pourrait être une région économique à l'intérieur d'un pays, un pays entier ou un groupe de pays.

12. L'exécution d'un tel projet implique l'existence des préalables suivants :

— une agence exécutive qui ait assez d'autorité pour pouvoir exécuter la politique de stockage surtout dans les périodes de production excédentaire, c'est-à-dire pouvoir contraindre les producteurs à délivrer les quantités à mettre en stock;

— des moyens de transport adéquats pour permettre la répartition rapide dans la région des produits à retirer des stocks et à distribuer durant les années de production déficitaire;

— des moyens d'emmagasinage adéquats et dont la capacité devrait être assez importante pour permettre le stockage des excédents durant une séquence de bonnes années [1]. Dans la présente étude les deux cas d'une capacité de stockage illimitée et d'une capacité de stockage limitée ont été examinés.

13. La politique de stockage est supposée fixe durant la durée du projet. Si, pour des raisons économiques, politiques ou autres. la politique était changée en cours d'exécution du projet, les résultats précédemment calculés ne seraient plus valables et il faudrait refaire à nouveau les calculs sur la base de la nouvelle situation.

14. La production est représentée par une fonction mathématique à deux termes : un terme représentant la tendance et le second l'élément aléatoire. L'élément aléatoire pourrait être assez important et, en outre, son amplitude pourrait varier avec le temps. La demande est représentée par une fonction monotone du temps.

1. Comme les produits alimentaires ne peuvent pas en général supporter un emmagasinage prolongé, il serait préférable de consommer les produits précédemment stockés et les remplacer par ceux de la production de l'exercice en cours.

15. Au début du projet, les disponibilités et la demande sont supposées être égales. Si les disponibilités étaient moindres que la demande, il faudrait les égaliser par l'importation de la différence, sinon le projet échouerait dès la première année. Si, au contraire, les disponibilités étaient plus élevées, la différence pourrait préférablement être considérée comme faisant partie du stock initial ou éventuellement être exportée.

16. Afin de simplifier les calculs et permettre l'utilisation du petit ordinateur tout en gardant une approche réaliste, la loi de distribution de l'élément aléatoire, loi utilisée pour l'obtention de la majorité des tableaux, a été la loi binomiale avec $n = 16$ et $p = q = \frac{1}{2}$. Cependant, afin de justifier ce choix, d'autres lois de distribution symétriques et asymétriques (normale, binomiale avec $p \neq q$, Poisson) ont été aussi utilisées sous les mêmes conditions et les résultats ont été comparés.

Types de politiques de stockage

17. Le concept d'une politique de stockage et de rationnement implique un contrôle efficace sur la grandeur de la différence entre les disponibilités et la demande des produits alimentaires. Précédemment (paragr. 4), le type de contrôle a été laissé assez vague et l'on a simplement mentionné que, dans le cas d'une production excédentaire, une partie de l'excédent était ajoutée aux stocks et, dans le cas d'une production déficitaire, une partie du déficit était prélevée des stocks. Pour définir une politique de stockage, il faut donc préciser séparément la valeur de chacune de ces deux parties comme fonction de la différence entre les disponibilités et la demande ou/et de la variabilité de l'élément aléatoire.

18. La décision quant au type de politique à exécuter est facultative et relève de l'agence d'exécution dans le ou les pays où les mesures de contrôle sont à renforcer. Elle se base généralement sur des considérations d'ordre économique, politique ou autres mais il est préférable qu'elle soit basée sur son degré d'efficacité et cela par le choix de la politique qui rendrait optimale la probabilité de succès. Dans ce qui suit sont donnés divers types de politiques. La liste est loin d'être exhaustive, d'autres types de politiques peuvent être élaborés.

Politiques du type A

19. Les politiques du type A prennent en considération le fait que, durant les années de production excédentaire, la consommation est généralement supérieure à la demande théorique prévue par le plan et donc il n'est pas possible de mettre la totalité de l'excédent en stock. De même, durant les années de production déficitaire, la consommation est inférieure à la demande et il n'est pas nécessaire de combler la totalité du déficit. Les politiques du type A sont donc définies de la manière suivante :

— durant les années de production excédentaire, la quantité à mettre en stock est une fraction f_s du surplus;

— durant les années de production déficitaire, la quantité à prélever des stocks est une fraction f_d du déficit.

Les deux fractions f_s et f_d peuvent être égales ou inégales et prendre n'importe quelle valeur entre zéro et un.

Politiques du type B

20. L'un des objectifs des politiques du type B est de contenir la variation des prix de marché des produits alimentaires dans des limites fixes prévues à l'avance. Pour ce type de politique on suppose que, si l'excédent ou le déficit était inférieur à une certaine limite acceptable L_σ, l'effet sur les prix ou sur la consommation pourrait être considéré comme négligeable, et dans de tels cas, l'agence d'exécution n'interviendrait pas, c'est-à-dire les stocks resteraient inchangés. D'autre part, dans les cas où l'excédent ou le déficit était supérieur à cette limite L_σ, l'intervention de l'agence d'exécution prendrait la forme suivante :

— cas d'excédent, mettre en stock la différence entre le surplus et L_σ;
— cas de déficit, prélever des stocks la différence entre le déficit et L_σ.

21. Ceci implique que la différence entre les disponibilités et la demande serait toujours contenue entre les limites $\pm L_\sigma$ et, par conséquent, la variation des prix serait aussi limitée. La décision à prendre sur la valeur du paramètre L_σ relève de l'agence d'exécution et L_σ est calculée tenant compte des variations des prix qu'elle implique.

Politiques du type C

22. Ce type de politique est une combinaison des deux types de politiques A et B. Si la différence entre la production et la demande est inférieure en valeur absolue à L_σ, l'agence d'exécution n'intervient pas et les stocks restent inchangés. Si, au contraire, la différence en valeur absolue était supérieure à L_σ, l'intervention de l'agence d'exécution serait la suivante :

— cas d'excédent, une fraction f_s de la différence entre l'excédent et L_σ est mise en stock;
— cas de déficit, une fraction f_d de la différence entre le déficit et L_σ est prélevée des stocks.

Politiques du type D

23. Ce type de politique est spécialement adapté aux cas où le projet débute avec un réservoir vide [1] et le stock doit être constitué et dans les cas de presque épuisement des stocks. Pour ce type de politique de stockage et de rationnement, la partie de la production assignée à la consommation est toujours inférieure à la demande que ce soit durant les années de production déficitaire ou de production excédentaire. La situation est analogue à celle où on commencerait par mettre la totalité de la production en stock et puis on distribuerait une quantité fixe (qui pourrait aussi être variable) mais toujours inférieure à la demande. La grandeur de la différence Δ_σ entre la demande et la quantité distribuée doit être déterminée à l'avance par l'agence d'exécution et elle dépendrait de la variabilité de l'élément aléatoire et du temps.

24. La présente étude est limitée à ces 4 types de politiques de stockage et de rationnement. Cependant, on pourrait traiter de la même manière d'autres types de politique

1. Une telle politique a été proposée par l'auteur lors des études concernant la capacité et le remplissage du réservoir du Nil à Sad-el-Ali (barrage d'Assouan).

par exemple, une politique dérivée du type B ou C mais où il y aurait deux limites différentes $L_{e\sigma}$ et $L_{d\sigma}$ correspondant aux deux cas d'excédent et de déficit. Un autre type de politiques plus compliquées serait celui où la quantité allouée durant les années de production déficitaire serait, en plus des conditions précédentes, fonction de la grandeur des stocks existants.

Le modèle probabiliste

Symboles et notations

25. La fonction mathématique représentant la production est supposée être composée de deux termes : une fonction monotone non décroissante du temps et un élément aléatoire. qui aurait aussi une croissance parallèle, soit

$$S_N = Ae^{aN} + Xe^{aN}$$

où

- A est la production moyenne à l'origine du temps (début du projet);
- a est le taux de croissance de la production;
- X est une variable aléatoire avec une probabilité totale $F(x)$, une moyenne égale à zéro et un écart type égal à σ;
- N est le nombre d'années avec $N = 0$ au début du projet.

Les trois paramètres A, a et σ doivent être évalués sur la base de séries de données portant sur les années précédentes. Le rapport σ/A peut être considéré comme une mesure de l'instabilité de la production. Pour le calcul des tableaux, la variable aléatoire X est supposée suivre une loi binomiale avec $n = 16$ et une probabilité élémentaire

$$p(x) = {}^{16}C_{8+\frac{2x}{\sigma}} \left(\frac{1}{2}\right)^{16} \text{ pour } x = -4\sigma, -\frac{7}{2}\sigma, \ldots, -\frac{\sigma}{2}, 0, \frac{\sigma}{2}, \ldots, 4\sigma$$

26. La demande est représentée par une fonction monotone non-décroissante du temps :

$$D_N = Be^{cN}$$

Cependant, comme déjà mentionné au paragraphe 15, un projet de stockage n'aurait de sens que si à l'origine, les valeurs des disponibilités et de la demande étaient égalisées Il faudrait donc supposer que $B = A$ et la fonction mathématique de la demande devient

$$D_N = Ae^{cN}$$

où

- A comme précédemment définie et
- c est le taux de croissance de la demande à évaluer à la base de séries chronologiques.

27. Si la différence entre a et c, les taux de croissance de la production et de la demande respectivement, était large, les politiques de stockage auraient peu de valeur car, si a est bien supérieur à c, une politique de stockage est inutile, la demande étant presque toujours satisfaite. Si, au contraire, c est bien supérieur à a, la différence entre la demande et la production devient rapidement de plus en plus large et toute politique de stockage serait vouée à l'échec.

28. Il est donc raisonnable de supposer que $a = c$ ou que la différence entre a et c est extrêmement petite. Dans cette étude, le cas $a = c$ a été étudié en premier, ensuite

des modifications ont été introduites pour couvrir le cas d'une petite différence entre a et c.

29. Les notations utilisées pour l'étude des différents types de stockage sont les suivantes :

f_s est la fraction (de 0 à 1) du surplus à mettre en stock (politiques du type A et C);

f_d est la fraction (de 0 à 1) du déficit à prélever des stocks (politiques du type A et C);

f est une fraction qui est égale soit à f_s soit à f_d suivant le cas et utilisée pour simplifier la présentation, en particulier, des tableaux;

L_σ est la limite supérieure de l'excédent ou du déficit pour lequel l'agence d'exécution n'interviendrait pas (politiques du type B et C);

Δ_σ est la différence entre la demande et la quantité libérée pour la consommation (politiques du type D);

Ω_0 est le stock initial existant au début du projet (pour tous les types de politiques);

C est la capacité du réservoir et pourrait être illimitée;

$S'_N(x)$ est la production opérative de l'année N, c'est-à-dire celle qui doit être prise en considération par l'agence d'exécution. Elle est égale ou inférieure à la production réelle et dépend du type de politique. Par exemple, pour une politique du type A

$$\begin{aligned} S'_N(x) &= Ae^{cN} + f_s\, xe^{aN} \quad \text{pour } x \geqslant 0 \\ S'_N(x) &= Ae^{aN} + xe^{aN} \quad \text{pour } x < 0 \end{aligned}$$

$D'_N(x)$ est la quantité consommée durant l'année N. Elle est égale ou inférieure à la demande suivant le type de politique. Par exemple, pour une politique du type A

$$\begin{aligned} D'_N(x) &= Ae^{cN} && \text{pour } x \geqslant 0 \\ D'_N(x) &= Ae^{aN} + (1 - f_d)\, xe^{aN} && \text{pour } x < 0 \end{aligned}$$

$\Gamma_N(x)$ est le changement des stocks durant l'année N. Il est égal à $S'_N(x) - D'_N(x)$. Pour toutes les politiques de stockage étudiées, les quantités $S'_N(x)$, $D'_N(x)$ et $\Gamma_N(x)$ sont des fonctions linéaires de la variable x. En particulier, $\Gamma_N(x)$ peut être représenté par

$$\begin{aligned} \Gamma_N^+ &= \lambda^+ x + \mu^+ && \text{quand } x > + L_\sigma \\ \Gamma_N^o &= 0 && \text{quand } -L_\sigma \leqslant x \leqslant L_\sigma \\ \Gamma_N^- &= \lambda^- x + \mu^- && \text{quand } x < -L_\sigma \end{aligned}$$

$P_N(\Omega_0)$ est la probabilité de succès du projet pendant N années pour un stock initial égal à Ω_0

Ω_N est le stock à la fin de l'année N.

Formule de récurrence

30. Soit un réservoir de capacité C contenant au début du projet une quantité (stock initial) égale à $\Omega_0 (O \leqslant \Omega_0 \leqslant C)$. Durant la première année, une quantité aléatoire S'_1 est reçue et une quantité D'_1 est prélevée ce qui laisse en stock à la fin de l'année une quantité $\Omega_1 = \min(C, \Omega_0 + S'_1 - D'_1)$ ou $\Omega_1 = \min(C, \Omega_0 + \Gamma_1)$. Durant la seconde année, une quantité aléatoire S'_2 est reçue et une quantité D'_2 distribuée laissant à la fin de la seconde année un stock $\Omega_2 = \min(C, \Omega_1 + \Gamma_2)$. Et ainsi de suite. A la fin de la N^{ieme} année, le stock serait égal à $\Omega_N = \min(C, \Omega_{N-1} + \Gamma_N)$.

Pour que le projet réussisse, il faudrait que les quantités $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_N$, soit toutes supérieures ou égales à zéro.

31. Si, durant la première année,

(i) $x < -\dfrac{\Omega_0 + \mu^-}{\lambda^-}$ c'est-à-dire si $\Gamma_1 < -\Omega_0$, le projet échoue : $P_N(\Omega_0) = 0$

(ii) $-\dfrac{\Omega_0 + \mu^-}{\lambda^-} \leqslant x < -L_\sigma$ c'est-à-dire si $-\Omega_0 \leqslant \Gamma_1 < -\lambda^- L_\sigma + \mu^-$, la probabilité de succès du projet durant N années $P_N(\Omega_0) = P_{N-1}(\Omega_0 + \lambda^- x + \mu^-)$

(iii) $-L_\sigma \leqslant x \leqslant L_\sigma$ c'est-à-dire si $-\lambda^- L_\sigma + \mu^- \leqslant \Gamma_1 \leqslant \lambda^+ L_\sigma + \mu^+$, la probabilité de succès du projet durant N années $P_N(\Omega_0) = P_{N-1}(\Omega_0)$

(iv) $L_\sigma < x < \dfrac{c - \Omega_0 - \mu^+}{\lambda^+}$ c'est-à-dire si $\lambda^+ L_\sigma + \mu^+ < \Gamma_1 < C - \Omega_0$, la probabilité de succès du projet durant N années $P_N(\Omega_0) = P_{N-1}(\Omega_0 + \lambda^+ x + \mu^+)$

(v) $x \geqslant \dfrac{c - \Omega_0 - \mu^+}{\lambda^+}$ c'est-à-dire si $\Gamma_1 \geqslant C - \Omega_0$, la probabilité de succès du projet durant N années $P_N(\Omega_0) = P_{N-1}(C)$.

32. La relation fondamentale entre P_N et P_{N-1} peut donc s'écrire

$$P_N(\Omega_0) = \int_{-\frac{\Omega_0+\mu^-}{\lambda^-}}^{-L_\sigma} P_{N-1}(\Omega_0 + \lambda^- x + \mu^-)\, dF(x) + \int_{-L_\sigma}^{+L_\sigma} P_{N-1}(\Omega_0)\, dF(x) \qquad \text{(I)}$$

$$+ \int_{L_\sigma}^{\frac{c-\Omega_0-\mu^+}{\lambda^+}} P_{N-1}(\Omega_0 + \lambda^+ x + \mu^+)\, dF(x) + \int_{\frac{C-\Omega_0-\mu^+}{\lambda^+}}^{\infty} P_{N-1}(C)\, dF(x)$$

Étant donné que $P_0(\Omega_0) = 1$ pour $\Omega_0 \geqslant 0$, la formule de récurrence I permet d'évaluer successivement les valeurs de $P_1, P_2, \ldots, P_N$.

33. Une solution de $P_N(\Omega_0)$ comme fonction explicite des variables $N, \Omega_0, \Delta_\sigma$ a été donnée par l'auteur [1] pour le cas particulier où :

(i) la capacité du réservoir est illimitée;
(ii) la politique de stockage est du type D;
(iii) la production et la demande sont indépendantes du temps;
(iv) l'élément aléatoire de la production suit la première loi de distribution de Laplace avec une moyenne ξ et un écart type σ

cette solution est

$$P_N\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\eta_0\right) = 1 - A_0\, e^{-(\eta_0+\delta)} - A_1(\eta_0)\, e^{-(\eta_0+2\delta)} \quad \ldots - A_{N-1}(\eta_0)\, e^{-(\eta_0+N\delta)}$$

où $\quad \Omega_0 = \dfrac{\sigma}{\sqrt{2}}\eta_0$ et $\Delta_\sigma = \dfrac{\sigma}{\sqrt{2}}\delta$

et où $A_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour $r \geqslant 1$, $A_r(\eta_0)$ est un polynôme en η_0 de degré r et où les coefficients de η^s sont des polynômes en δ de degré $(r - s)$. Les différentes valeurs de A_r peuvent être obtenues en opérant successivement sur la quantité $\dfrac{1}{2}$ par les opérateurs :

$$\frac{1}{2D} + \frac{1}{4},\ \frac{1}{2D} + \frac{1}{4} + \frac{D}{8}, \ldots,\ \frac{1}{2D} + \frac{1}{4} + \frac{D}{8} + \ldots + \frac{D^{r-1}}{2^{r+1}}$$

1. SIMAIKA J. B., « On the Problem of Over-year Storage ». Proceedings of the Egyptian Academy of Sciences, vol. V, 1949.

où $\frac{1}{D} = \int_0^{\eta_0}$ et $D = \frac{d}{d\eta_0}$

et où la variable η_0 est remplacée par $(\eta_0 + \delta)$ après chaque opération.

Adaptation de la formule générale au type de politique

34. Le changement Γ des stocks durant une certaine année dépend de la politique de stockage et de la valeur de l'élément aléatoire. Dans ce qui suit, la valeur de Γ est donnée comme fonction linéaire de x pour les 4 types de politiques et les modifications correspondantes de la formule de récurrence. Dans tous les cas, la capacité du réservoir est supposée illimitée.

Politiques du type A

35. Durant les années déficitaires, $x < 0$ et $\Gamma_N(x) = f_d x e^{aN}$ et durant les années excédentaires, $x \geqslant 0$ et $\Gamma_N(x) = f_s x e^{aN}$.

La formule de recurrence devient

$$P_N(\Omega_0) = \int_{-\frac{\Omega_0}{f_d e^{aN}}}^{0} P_{N-1}(\Omega_0 + f_d e^{aN} x)\, dF(x) + \int_0^{\infty} P_{N-1}(\Omega_0 + f_s e^{aN} x)\, dF(x) \tag{II}$$

Posant $\Omega_0 = Kf\frac{\sigma}{2}e^{aN}$ et notant que pour la loi binomiale $x = \frac{r\sigma}{2}$ où r prend les valeurs $-8, -7, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, 8$, avec une probabilité $p_r = {}^{16}C_{8+r}\left(\frac{1}{2}\right)^{16}$, la formule de récurrence devient

$$P_N\left(Kf\frac{\sigma}{2}e^{aN}\right) = \sum_{r=-\operatorname{integ}\frac{Kf}{f_d}}^{r=-1} p_r P_{N-1}\left\{f\frac{\sigma}{2}e^{aN}\left(K + \frac{f_d}{f}r\right)\right\} + \sum_{r=0}^{8} p_r P_{N-1}\left\{f\frac{\sigma}{2}e^{aN}\left(K + \frac{f_s}{f}r\right)\right\} \tag{IIA}$$

où integ Z est la partie entière du nombre fractionnaire Z.

36. *Politiques du type B*

Pour ce type de politique, on a

$$\begin{aligned} \Gamma_N(x) &= xe^{aN} + L_\sigma \quad \text{pour} \quad x < -L_\sigma, \\ \Gamma_N(x) &= 0 \quad \text{pour} \quad -L_\sigma \leqslant x \leqslant L_\sigma \\ \text{et} \quad \Gamma_N(x) &= xe^{aN} - L_\sigma \quad \text{pour} \quad x > L_\sigma. \end{aligned}$$

La formule de récurrence devient donc :

$$P_N(\Omega_0) = \int_{-\frac{\Omega_0 + L_\sigma}{e^{aN}}}^{-L_\sigma} P_{N-1}(\Omega_0 + xe^{aN} + L_\sigma)\, dF(x) + \int_{-L_\sigma}^{L_\sigma} P_{N-1}(\Omega_0)\, dF(x) + \int_{L_\sigma}^{\infty} P_{N-1}(\Omega_0 + xe^{aN} - L_\sigma)\, dF(x)$$

Utilisant des transformations similaires à celles utilisées au paragraphe 35 et posant $L_\sigma = \Lambda\frac{\sigma}{2}e^{aN}$, la formule devient

$$\begin{aligned} P_N\left(K\frac{\sigma}{2}e^{aN}\right) = &\sum_{r=-\operatorname{integ}(K+\Lambda)}^{r=-\operatorname{integ}(\Lambda+1)} p_r P_{N-1}\left\{\frac{\sigma}{2}e^{aN}(K + \Lambda + r)\right\} + \sum_{r=-\operatorname{integ}\Lambda}^{r=\operatorname{integ}\Lambda} p_r P_{N-1}\left(K\frac{\sigma}{2}e^{aN}\right) \\ &+ \sum_{r=-\operatorname{integ}(\Lambda+1)}^{r=8} p_r P_{N-1}\left\{\frac{\sigma}{2}e^{aN}(K - \Lambda + r)\right\} \end{aligned} \tag{IIB}$$

37. *Politiques du type C*

Ici, l'on a

$$\Gamma_N(x) = f_d x e^{aN} + L_\sigma \quad \text{pour} \quad x < -L_\sigma,$$

$$\Gamma_N(x) = 0 \quad \text{pour} \quad -L_\sigma \leqslant x \leqslant L_\sigma$$

et

$$\Gamma_N(x) = f_s x e^{aN} - L_\sigma \quad \text{pour} \quad x > L_\sigma$$

Utilisant les mêmes transformations que précédemment, on a

$$P_N\left(Kf\frac{\sigma}{2}e^{aN}\right) = \sum_{r=-\mathrm{integ}\left(\frac{Kf+\Lambda}{f_d}\right)}^{r=-\mathrm{integ}(\Lambda+1)} p_r P_{N-1}\left\{f\frac{\sigma}{2}e^{aN}\left(K+\frac{\Lambda}{f}+\frac{f_d}{f}r\right)\right\} + \sum_{r=-\mathrm{integ}\,\Lambda}^{r=\mathrm{integ}\,\Lambda} p_r P_{N-1}\left(Kf\frac{\sigma}{2}e^{aN}\right) \quad \text{(IIC)}$$

$$+ \sum_{r=+\mathrm{integ}(\Lambda+1)}^{r=8} p_r P_{N-1}\left\{f\frac{\sigma}{2}e^{aN}\left(K-\frac{\Lambda}{f}+\frac{f_d}{f}r\right)\right\}$$

38. *Politiques du type D*

Pour ce type de politique,

$$\Gamma_N(x) = x e^{aN} + \Delta_\sigma \quad \text{pour toutes les valeurs de } x$$

Utilisant les mêmes transformations que précédemment et posant $\Delta_\sigma = \delta\frac{\sigma}{2}e^{aN}$, la formule de récurrence devient

$$P_N\left(K\frac{\sigma}{2}e^{aN}\right) = \sum_{r=-\mathrm{integ}(K+\delta)}^{r=8} p_r P_{N-1}\left\{\frac{\sigma}{2}e^{aN}(K+\delta+r)\right\} \quad \text{(II D)}$$

Méthodes de calcul

39. Il est évident que, dans les formules de récurrence des paragraphes précédents, chacune des probabilités $P_N(\Omega)$ est la somme de 17 produits $p_r\, P_{N-1}(\Omega)$ où les p_r sont les 17 termes de la distribution binomiale et les 17 $P_{N-1}(\Omega)$ dépendent essentiellement du type de politique.

En général,

(*i*) un sous-ensemble des $P_{N-1}(\Omega)$ sera égal à zéro;

(*ii*) dans un autre sous-ensemble des $P_{N-1}(\Omega)$, l'argument Ω sera également distancié avec un intervalle constant I;

(*iii*) dans un troisième sous-ensemble des $P_{N-1}(\Omega)$, l'argument Ω sera aussi également distancié mais avec un autre intervalle constant I';

(*iv*) dans le dernier sous-ensemble, les $P_{N-1}(\Omega)$ auront une valeur constante.

Cependant, un ou plusieurs de ces sous-ensembles pourrait être vide.

40. Afin de mieux expliquer la méthode de calcul des probabilités $P_N(\Omega)$ pour les différents types de politiques, on commencera par un cas très simple mais qui est à la base de tous les types de politiques, ensuite on introduira graduellement les modifications nécessaires pour les cas plus complexes. En outre, on commencera par l'hypothèse d'une capacité de stockage illimitée et de l'égalité entre les taux de croissance de la production et de la demande, ensuite on introduira les modifications pour couvrir les cas de capacité limitée et d'inégalité des taux de croissance.

La politique élémentaire

41. Les hypothèses de base de cette politique sont les suivantes :

— la capacité du réservoir est illimitée;
— les taux de croissance de la production et de la demande sont égaux;
— la totalité du surplus (années de production excédentaire) est mise en stock;
— la totalité du déficit (années de production déficitaire) est prélevée des stocks.

Cette politique élémentaire correspond donc à :

— une politique du type A avec $f_s = f_d = 1$
— une politique du type B avec $L_\sigma = 0$
— une politique du type C avec $L_\sigma = 0$ et $f_s = f_d = 1$
— une politique du type D avec $\Delta_\sigma = 0$

42. La formule de récurrence peut donc s'écrire

$$P_N(K\frac{\sigma}{2}e^{aN}) = \sum_{r=-\text{integ}\,K}^{r=8} p_r P_{N-1}\left\{\frac{\sigma}{2}e^{aN}(K+r)\right\}$$

$P_N(K\frac{\sigma}{2}e^{aN})$ est donc une fonction monotone non décroissante avec des discontinuités à intervalles réguliers de longueur $\frac{\sigma}{2}e^{aN}$ correspondant aux valeurs de entières K ($K = 0$, 1, 2, ...,). Si l'on dénote $P_N(K\frac{\sigma}{2}e^{aN})$ par $\Pi_N(K)$ la formule de récurrence devient :

$$\Pi_N(K) = \sum_{r=-\text{integ}\,K}^{r=8} p_r \Pi_{N-1}\{e^a(K+r)\}$$

L'ordre de grandeur du coefficient e^a étant de 1,02, les valeurs de $\Pi_{n-1}\{e^a(K+r)\}$ sont égales à $\Pi_{N-1}(K+r)$ tant que $(K+r)$ est inférieur à 50, valeur qui ne serait atteinte que si le stock initial était de l'ordre de 20 σ ce qui, du point de vue pratique, est impensable. On peut donc en toute sécurité utiliser la formule

$$\Pi_N(K) \simeq \sum_{r=-\text{integ}\,K}^{r=8} p_r \Pi_{N-1}(K+r)$$

43. Utilisant cette dernière formule le calcul de $\Pi_N(K)$ devient très simple. On commence par calculer les $\Pi_1(K)$ pour $K = 0, 1, 2, \ldots$

$$\Pi_1(K) = \sum_{r=-k}^{8} p_r : \Pi_1(0) = \sum_{r=0}^{r=8} p_r, \Pi_1(1) = \sum_{r=-1}^{r=8} p_r, \ldots, \ \Pi_1(8) = \sum_{r=-8}^{r=8} p_r = 1, \ldots$$

ensuite, on calcule

$$\Pi_2(K) = \sum_{r=-K}^{r=8} p_r\, \Pi_1(K+r) : \Pi_2(0) = \sum_{r=0}^{r=8} p_r\, \Pi_1(r), \ \Pi_2(1) = \sum_{r=-1}^{r=8} p_r\, \Pi_1(r+1), \ldots$$

et ainsi en suite.

44. Le tableau 1 donné en annexe montre les valeurs de $\Pi_N(K)$ pour $K = 0, 1, 2, \ldots, 10$ et $N = 1, 2, \ldots, 10$. Il faut cependant observer que le stock initial pour une valeur donnée de K est égal à $K\frac{\sigma}{2}e^{aN}$. Le tableau 1 donne donc la probabilité de succès de la politique élémentaire pour les différentes valeurs de K et de N et un stock initial égal à $K\frac{\sigma}{2}e^{aN}$.

Politiques du type A *avec* $\mathrm{f_s} = \mathrm{f_d} = \mathrm{f} \neq 1$

45. La modification à introduire pour tenir compte du fait que seulement une fraction f du surplus est mise en stock et la même fraction f du déficit est prélevée des stocks est une modification mineure car elle intéresse seulement et d'une manière uniforme la valeur du stock initial pour toutes les valeurs de K et de N. Pour des valeurs données de K, de N et de la probabilité de succès d'une telle politique, le stock initial est égal à une fraction f du stock initial nécessaire, dans les mêmes conditions, pour la politique élémentaire (paragr. 41-44).

En effet, dans le cas présent, la formule de récurrence est

$$P_N\left(Kf\frac{\sigma}{2}e^{aN}\right) = \sum_{r=-\mathrm{integ}\,K}^{r=8} p_r\, P_{N-1}\left\{f\frac{\sigma}{2}e^{aN}(K+r)\right\}$$

et désignant $P_N\left(Kf\frac{\sigma}{2}e^{aN}\right)$ par $\Pi_N(K)$, on revient au cas précédent.

46. Le tableau 1 couvre donc aussi ce type de politique si l'on considère que le stock initial n'est plus $K\frac{\sigma}{2}e^{aN}$ mais qu'il est égal à $Kf\frac{\sigma}{2}e^{aN}$. Une explication intuitive de cette propriété consiste dans le fait que pratiquement l'élément aléatoire n'est plus X mais seulement $f.X$ avec un écart type égal à $f\sigma$.

Politiques du type A *avec* $\mathrm{f_s} \neq \mathrm{f_d}$

47. La formule générale de récurrence pour ce type de politique (paragr. 35) est

$$P_N\left(Kf\frac{\sigma}{2}e^{aN}\right) = \sum_{r=-\mathrm{integ}\frac{Kf}{f_d}}^{r=-1} p_r P_{N-1}\left\{f\frac{\sigma}{2}e^{aN}\left(K+\frac{f_d}{f}\right)\right\} + \sum_{r=0}^{8} p_r P_{N-1}\left\{f\frac{\sigma}{2}e^{aN}\left(K+\frac{f_s}{f}r\right)\right\} \qquad \text{(II A)}$$

Soit f la plus grande fraction f_s et f_d et soit φ le plus grand commun diviseur de f_s et f_d tel que $f_s = m\varphi$ et $f_d = n\varphi$ où m et n sont des entiers.

48. Si $m > n$, la formule de récurrence peut s'écrire

$$P_N\left(Km\varphi\frac{\sigma}{2}e^{aN}\right) = \sum_{r=-\mathrm{integ}\frac{Km}{n}}^{r=-1} p_r\, P_{N-1}\left(Km\varphi\frac{\sigma}{2}e^{aN} + rn\varphi\frac{\sigma}{2}e^{aN}\right)$$
$$+ \sum_{r=0}^{r=8} p_r\, P_{N-1}\left(Km\varphi\frac{\sigma}{2}e^{aN} + rm\varphi\frac{\sigma}{2}e^{aN}\right)$$

ou

$$P_N\left(Km\varphi\frac{\sigma}{2}e^{aN}\right) = \sum_{r=-\mathrm{integ}\frac{Km}{n}}^{r=-1} p_r\, P_{N-1}\left\{\varphi\frac{\sigma}{2}e^{a(N-1)}e^{a}(Km+rn)\right\}$$
$$+ \sum_{r=0}^{r=8} p_r\, P_{N-1}\left\{\varphi\frac{\sigma}{2}e^{a(N-1)}e^{a}(Km+rm)\right\}$$

et désignant $P_N\left(Km\varphi\frac{\sigma}{2}e^{aN}\right)$ par $\Pi_N(Km)$, elle devient

$$\Pi_N(Km) = \sum_{r=-\mathrm{integ}\frac{Km}{n}}^{r=-1} p_r\, \Pi_{N-1}\{e^{a}(Km+rn)\} + \sum_{r=0}^{r=8} p_r\, \Pi_{N-1}\{e^{a}(Km+rm)\}$$

Le facteur e^a peut être négligé pour les mêmes raisons pratiques données précédemment et l'on peut utiliser la formule

$$\Pi_N(Km) \cong \sum_{r=-\text{integ}\frac{Km}{n}}^{r=-1} p_r \Pi_{N-1}(Km+rn) + \sum_{r=0}^{r=8} p_r \Pi_{N-1}(Km+rm)$$

La probabilité $\Pi_N(Km)$ doit être calculée pour toutes les valeurs entières de Km ($Km = 0$, 1, 2, ...). Le stock initial est égal à $Km\,\varphi\frac{\sigma}{2}e^{aN}$.

49. On voit aisément que les P_{N-1} (ou Π_{N-1}) utilisées dans le calcul de P_N (ou Π_N) ne sont pas successives mais également espacées : chaque n^{ieme} pour $r \leqslant 0$ et chaque m^{ieme} pour $r \geqslant 0$. Ce qui revient à insérer entre les termes successifs de la distribution binomiale un nombre $(n-1)$ de zéros pour les termes p_r où $r \leqslant 0$ et un nombre $(m-1)$ de zéros pour les termes p_r où $r \geqslant 0$.

Par exemple, si $n = 2$ et $m = 3$, les termes de la loi de distribution seraient :

$$p_{-8},\ 0,\ p_{-7},\ 0,\ \ldots,\ p_{-1},\ 0,\ p_0,\ 0,\ 0,\ p_1,\ 0,\ 0,\ p_2,\ \ldots,\ p_8$$

50. Le tableau 2 en annexe est illustratif de ce genre de situation. Il donne les probabilités de succès d'une politique du type A avec

$$\frac{f_s}{f_d} = \frac{4}{3}(m = 4,\ n = 3)$$

pour différentes périodes $N = 1, 2, \ldots, 10$ et différentes valeurs de K, $K = 0, 1, 2, \ldots, 10$.

Le stock initial est égal à $K4\,\varphi\frac{\sigma}{2}e^{aN}$. où $4\,\varphi = f_s \leqslant 1$. Le tableau est donc valable pour toutes les valeurs positives de $\varphi \leqslant \frac{1}{4}$ et en particulier par exemple pour les politiques du type A avec

$$f_s = 1\quad,\ f_d = 0{,}75 \quad \text{et} \quad \varphi = 0{,}25$$
$$f_s = 0{,}80,\ f_d = 0{,}60 \quad \text{et} \quad \varphi = 0{,}20$$
$$f_s = 0{,}60,\ f_d = 0{,}45 \quad \text{et} \quad \varphi = 0{,}15$$

51. Le cas de $m < n$ n'est pas très différent du précédent sauf que la valeur de f est maintenant égale à $n\,\varphi$ et la formule de récurrence devient

$$\Pi_N(Kn) \cong \sum_{r=-\text{integ}\,K}^{r=-1} p_r \Pi_{N-1}(Kn+rn) + \sum_{r=0}^{r=8} p_r \Pi_{N-1}(Kn+rm)$$

qui devrait être calculée pour toutes les valeurs entières de Kn ($Kn = 0, 1, 2, \ldots,$). Le stock initial est égal à $Kn\,\varphi\frac{\sigma}{2}e^{aN}$.

52. Les probabilités de succès dans ce dernier cas sont relativement petites et il n'a pas été jugé utile de donner ici un tableau pour illustrer ce cas. Cependant, deux tableaux pour $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$ et $\frac{m}{n} = \frac{3}{4}$ se trouvent dans la publication auparavant mentionnée « Probability of success of a Stock and Allocation Policy ».

Politiques du type B

53. Posant $\Lambda = \frac{m}{n}$, où $\frac{m}{n}$ est réduit à sa simple expression, la formule de récurrence IIB devient

$$P_N\left(Kn\cdot\frac{1}{n}\frac{\sigma}{2}e^{aN}\right) = \sum_{r=-\text{integ}\left(K+\frac{m}{n}\right)}^{r=-\text{integ}\left(1+\frac{m}{n}\right)} p_r P_{N-1}\left\{\frac{1}{n}\frac{\sigma}{2}e^{a(N-1)}\cdot e^a(Kn+rn+m)\right\}$$
$$+\sum_{r=-\text{integ}\frac{m}{n}}^{r=\text{integ}\frac{m}{n}} p_r P_{N-1}\left(Kn\frac{1}{n}\frac{\sigma}{2}e^{aN}\right)$$
$$+\sum_{r=\text{integ}\left(1+\frac{m}{n}\right)}^{r=8} p_r P_{N-1}\left\{\frac{1}{n}\frac{\sigma}{2}e^{a(N-1)}e^a(Kn+rn-m)\right\}$$

Désignant $P_N\left(Kn\cdot\frac{1}{n}\frac{\sigma}{2}e^{aN}\right)$ par $\Pi_N(Kn)$ et negligeant le facteur e^a, on obtient

$$\Pi_N(Kn) \cong \sum_{r=-\text{integ}\left(K+\frac{m}{n}\right)}^{r=-\text{integ}\left(1+\frac{m}{n}\right)} p_r\Pi_{N-1}(Kn+rn+m) + \sum_{r=-\text{integ}\frac{m}{n}}^{r=\text{integ}\frac{m}{n}} p_r\Pi_{N-1}(Kn)$$
$$+\sum_{r=\text{integ}\left(1+\frac{m}{n}\right)}^{r=8} p_r\Pi_{N-1}(Kn+rn-m)$$

Les probabilités $\Pi_N(Kn)$ doivent être calculées pour les valeurs entières de Kn ($Kn = 0, 1, 2, \ldots$).

54. Dans cette dernière formule, les 17 produits ne sont pas également espacés mais forment un dessin symétrique autour du produit central $p_0\,\Pi_{N-1}(Kn)$, dessin qui dépend du rapport $\frac{m}{n}$ et des valeurs de m et de n. Dans ce qui suit, on étudiera la forme de ce dessin dans les deux cas $0 < \frac{m}{n} < 1$ et $1 \leqslant \frac{m}{n} < 2$ et on en déduira la forme du dessin dans le cas général $s \leqslant \frac{m}{n} < s+1$, où s est un entier inférieur à 7.

55. Cas 1 : $0 < \frac{m}{n} < 1$

La somme centrale de la formule de récurrence se réduit à un seul terme $p_0\,\Pi_{N-1}(Kn)$. Les deux produits qui l'entourent sont $p_{-1}\,\Pi_{N-1}(Kn-n+m)$ et $p_1(Kn+n-m)$, ce qui implique un saut de longueur $n-m$. Tous les autres produits sont également espacés et l'intervalle entre deux produits consécutifs est égal à n. La suite des probabilités élémentaires peut donc être modifiée par l'insertion de :

$n-m-1$ zéros entre p_{-1} et p_0 et aussi entre p_0 et p_1,

$n-1$ zéros entre p_r et p_{r+1} pour toutes les autres valeurs de r.

Par exemple, si $\frac{m}{n} = \frac{2}{5}$, le dessin des p_r serait :

$$p_{-80}\,000\,p_{-7}\,0000\,p_{-6},\ \ldots,\ p_{-2}\,0000\,p_{-1}\,00\,p_0\,00\,p_1\,0000\,p_2,\ \ldots,\ p_7\,0000\,p_8$$

56. Cas 2 : $1 \leqslant \frac{m}{n} < 2$

Dans ce cas, la somme centrale de la formule de récurrence est composée de trois produits :

$$p_{-1}\, \Pi_{N-1}(Kn) + p_0\, \Pi_{N-1}(Kn) + p_1\, \Pi_{N-1}(Kn)$$

qui peut s'écrire :

$$(p_{-1} + p_0 + p_1)\, \Pi_{N-1}(Kn) \quad \text{ou} \quad q_0\, \Pi_{N-1}(Kn)$$

Les deux produits entourant cette partie centrale sont

$$p_{-2}\, \Pi_{N-1}(Kn - 2\,n + m) \quad \text{et} \quad p_2\, \Pi_{N-1}(Kn + 2\,n - m)$$

ce qui implique un saut de longueur $2\,n - m$. Les autres produits sont également espacés avec un intervalle de longueur n. On pourrait donc insérer :

$2\,n - m - 1$ zéros entre p_{-2} et q_0 et aussi entre q_0 et p_2,

$n - 1$ zéros entre les autres p_r.

Par exemple, dans le cas où $\frac{m}{n} = \frac{4}{3}$, le dessin des p_r serait :

$$p_{-8}\, 00\, p_{-7}\, 00\, p_{-6},\ \ldots,\ p_{-3}\, 00\, p_{-2}\, 0\, (p_{-1} + p_0 + p_1)\, 0\, p_2\, 00\, p_3,\ \ldots,\ p_7\, 00\, p_8$$

57. Cas général : $s \leqslant \frac{m}{n} < s + 1$

Dans ce cas la somme centrale de la formule de récurrence est :

$$(p_{-s} + p_{-s+1} + \ldots + p_{-1} + p_0 + p_1 + \ldots + p_s)\, \Pi_{N-1}(Kn) \text{ ou } q_0\, \Pi_{N-1}(Kn)$$

Les deux produits qui l'entourent sont $p_{-s-1}\, \Pi_{N-1}\,[Kn - (s + 1)n + m]$ et $p_{s+1}\, \Pi_{N-1}\,[Kn + (s + 1)n - m]$ impliquant un saut de $(s + 1)n - m$. Les autres produits sont également espacés avec une intervalle n. Donc on pourrait insérer $(s + 1)n - m - 1$ zéros entre p_{-s-1} et q_0 et entre q_0 et p_{s+1} et $n - 1$ zéros partout ailleurs.

Par exemple : si $\frac{m}{n} = \frac{9}{2}$, le dessin des p_r serait

$$p_{-8},\ 0,\ p_{-7},\ 0,\ p_{-6},\ 0,\ p_{-5},\ (p_{-4} + p_{-3} + p_{-2} + p_{-1} + p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4),\ p_5,\ 0,\ p_6,\ 0,\ p_7,\ 0,\ p_8.$$

58. Le tableau 3 en annexe donne la probabilité de succès d'une politique de stockage du type B pour $K = 0, 1, 2, \ldots, 10$, $N = 1, 2, \ldots, 10$ et une valeur limite de non-intervention de l'agence d'exécution $L_\sigma = \frac{\sigma}{2} e^{aN}$. Le stock initial est égal à $K \frac{\sigma}{2} e^{aN}$.

Politiques du type C

59. Ce type de politique est une combinaison des deux types de politiques A et B. Pour effectuer les calculs, on commence par la composante B correspondant à L_σ, la limite de non-intervention de l'agence d'exécution et l'on détermine le dessin de la suite des probabilités élémentaires comme précédemment (paragr. 54 à 57); ensuite on introduit les modifications nécessaires pour la composante A, qui correspondent aux deux fractions f_s et f_d, de la même manière que précédemment (paragr. 45 à 51) quand on a modifié la politique élémentaire en une politique du type A.

60. Comme, dans ce type de politique, il y a deux facteurs limitatifs : L_σ, la quantité au-dessous de laquelle un surplus ou un déficit n'est pas touché par l'agence d'exécution du projet, et les deux fractions f_s et f_d du surplus et du déficit correspondant aux entrées et sorties du stock, il serait raisonnable de prendre une L_σ assez petite par exemple inférieure à σe^{aN}) et des fractions f_s et f_d assez voisines de l'unité.

61. Le tableau 4 en annexe donne la probabilité de succès d'une politique du type C pour $K = 0, 1, 2, \ldots, 10$ et $N = 1, 2, \ldots, 10$ et cela pour une limite de non-intervention $L_\sigma = \frac{\sigma}{2} e^{aN}$ et des fractions f_s et f_d égales à 1 et 0,8 respectivement. Le stock initial, dans ce cas, est égal à $K \frac{\sigma}{2} e^{aN}$. Le tableau est aussi valable pour toutes les politiques du type C avec $L_\sigma = \frac{\sigma}{2} e^{aN}$ et $\frac{f_s}{f_d} = \frac{5}{4}$ mais avec la modification du stock initial en $K f_s \frac{\sigma}{2} e^{aN}$.

Politiques du type D

62. Posant $\delta = \frac{m}{n}$ où $\frac{m}{n}$ est réduite à sa plus simple expression, la formule de récurrence (*IID*) devient

$$P_N\left(Kn \cdot \frac{1}{n} \frac{\sigma}{2} e^{aN}\right) = \sum_{r=-\operatorname{integ}\left(K+\frac{m}{n}\right)}^{r=8} p_r P_{N-1}\left\{\frac{1}{n} \frac{\sigma}{2} e^{a(N-1)} \cdot e^a (Kn + rn + m)\right\}$$

Utilisant comme précédemment la transformation :

$$\Pi_N(Kn) = P_N\left(Kn \cdot \frac{1}{n} \frac{\sigma}{2} e^{aN}\right)$$

et négligeant le facteur e^a, on obtient :

$$\Pi_N(Kn) \simeq \sum_{r=-\operatorname{integ}\left(K+\frac{m}{n}\right)}^{r=8} p_r \Pi_{N-1}(Kn + rn + m)$$

La probabilité $\Pi_N(Kn)$ devra être calculée pour les valeurs entières de Kn ($Kn = 0, 1, 2, \ldots$). Dans ce cas, les produits $p_r \Pi_{N-1}$ sont également espacés avec un intervalle de longueur n. Il suffit donc d'insérer constamment un nombre $(n - 1)$ de zéros entre les p_r consécutifs.

63. Le tableau 5 en annexe donne la probabilité de succès d'une politique du type D pour $K = 0, 1, 2, \ldots, 10$ et $N = 0, 1, 2, \ldots, 10$ avec $\Delta_\sigma = 3/10\, \sigma e^{aN}$. Le stock initial est égal à $K \frac{\sigma}{2} e^{aN}$.

Modification pour une capacité limitée

64. Quand la capacité du réservoir est supposée illimitée, la probabilité de succès des différentes politiques durant N années est une fonction monotone non décroissante du stock initial avec une asymptote $P_N = 1$. Dans le cas où la capacité du réservoir a une limite supérieure C, le stock initial est aussi limité et la probabilité de succès, toujours une

fonction monotone non décroissante du stock initial, a cependant une asymptote $P_N(C)$ généralement inférieure à l'unité.

65. Dans le cas d'une capacité illimitée, la règle donnée plus haut était de calculer successivement pour une certaine année N, les probabilités Π_N (ou P_N) pour la suite des valeurs entières d'un certain paramètre (Kn par exemple), suite qui correspond à un stock initial de plus en plus grand. Cette suite de probabilités Π_N était ensuite utilisée pour le calcul des probabilités Π_{N+1} de l'année suivante. Dans le cas d'une capacité limitée C, les calculs devraient s'arrêter à la valeur entière du paramètre qui rendrait le stock initial aussi voisin que possible de (mais inférieur à) la capacité du réservoir C. Et, pour le calcul des probabilités de l'année suivante $N + 1$, l'on assignerait aux probabilités Π_N suivantes une valeur constante égale à la dernière probabilité calculée, celle qui correspond à un stock initial voisin de C.

66. Le point de coupure diffère suivant le type de politique. Ci-après est donnée la valeur du paramètre après laquelle les Π_N (ou P_N) restent constantes.

1. Pour la politique élémentaire,

$$K \frac{\sigma}{2} e^{aN} \leqslant C \qquad \text{et} \qquad K = \text{integ}\, \frac{2C}{\sigma} e^{-aN}$$

2. Pour une politique du type A avec

$$f_s = f_d = f < 1,\ Kf \frac{\sigma}{2} e^{aN} \leqslant C \text{ et } K = \text{integ}\, \frac{2C}{\sigma f} e^{aN}$$

3. Pour une politique du type A avec

$$f_s > f_d,\ K_m \varphi \frac{\sigma}{2} e^{aN} \leqslant C \text{ et } K_m = \text{integ}\, \frac{2C}{\sigma\varphi} e^{-aN}$$

4. Pour une politique du type A avec

$$f_s < f_d,\ Kn\, \varphi \frac{\sigma}{2} e^{aN} \leqslant C \text{ et } Kn = \text{integ}\, \frac{2C}{\sigma\varphi} e^{-aN}$$

5. Pour une politique du type B avec

$$Kn \cdot \frac{1}{n} \frac{\sigma}{2} e^{aN} \leqslant C \text{ et } Kn = \text{integ}\, \frac{2nC}{\sigma} e^{-aN}$$

6. Pour une politique du type D avec

$$Kn \cdot \frac{1}{n} \frac{\sigma}{2} e^{aN} \leqslant C \text{ et } Kn = \text{integ}\, \frac{2nC}{\sigma} e^{-aN}$$

67. Un certain nombre de tableaux ont été produits dans l'hypothèse d'une capacité limitée du réservoir mais cependant une capacité assez grande : $C = 5\,\sigma\, e^{aN}$. Les résultats ont été sensiblement les mêmes que ceux obtenus dans l'hypothèse d'une capacité illimitée et l'on n'a pas jugé utile de publier ces tableaux.

Modification pour $a \neq c$

68. Dans ce qui précède, on a supposé que les taux de croissance de la production et de la demande étaient égaux $a = c$ ou que la différence pouvait être incorporée dans les paramètres des politiques de stockage. Dans les cas où cette hypothèse n'est pas valable, il est nécessaire d'introduire des modifications qui tiendraient compte de cette nouvelle situation.

69. Quand a est différent de c, à la quantité en stock devrait s'ajouter durant l'année N une quantité égale à $Ae^{aN} - Ae^{cN}$ et qui pourrait être positive ou négative. Mais, comme la différence entre a et c est assez petite (de l'ordre de 10^{-3}), cette quantité est sensiblement égale à $Ae^{aN}(a - c)N$ et serait représentée par $\gamma \frac{\sigma}{2} Ne^{aN}$ où $\gamma = \frac{2A(a - c)}{\sigma}$
γ dépend des valeurs de A, σ, a et c et peut être négative ou positive. La valeur de γ qu'on a rencontrée dans des cas pratiques variait en valeur absolue entre 0,05 et 0,20.

70. La présence d'un tel terme dans l'argument des P_{N-1} a comme conséquence une translation des p_r et aussi d'autres sauts (ou insertion de zéros entre les p_r) dans la suite des produits $p\,\Pi_{N-1}$. La translation des p_r a une longueur proportionnelle à N et elle est vers la droite pour $a < c$ et vers la gauche pour $a > c$.

71. Dans ce qui suit, on donne les modifications à introduire dans les formules de récurrence pour le calcul des probabilités de succès des différentes politiques. En outre, pour une politique du type A, les détails du calcul et un exemple numérique sont donnés.

72. *Politiques du type A avec* $f_s \neq f_d$

La formule de récurrence pour une politique du type A avec $a = c$ a été donnée au paragraphe 47. Afin de tenir compte de la différence entre a et c, il faut ajouter le terme $\gamma \frac{\sigma}{2} e^{aN} N$ à l'argument des P_{N-1} et la formule devient :

$$P_N\left(Kf\frac{\sigma}{2}e^{aN}\right) = \sum_{r=-\text{integ}\frac{Kf+\gamma N}{f_d}}^{r=-1} p_r P_{N-1}\left\{Kf\frac{\sigma}{2}e^{aN} + rf_d\frac{\sigma}{2}e^{aN} + \gamma\frac{\sigma}{2}e^{aN}N\right\}$$
$$+ \sum_{r=0}^{r=8} p_r P_{N-1}\left\{Kf\frac{\sigma}{2}e^{aN} + rf_s\frac{\sigma}{2}e^{aN} + \gamma\frac{\sigma}{2}e^{aN}N\right\}$$

Prenant le cas $f_s > f_d$ (donc $f = f_s$) et soit Ψ le plus grand commun facteur de $f = f_s$, f_d et γ de telle façon que $f = f_s = R\,\Psi$, $f_d = S\,\Psi$ et $\gamma = T\,\Psi$, la formule de récurrence devient :

$$P_N\left\{KR\left(\Psi\frac{\sigma}{2}e^{aN}\right)\right\} = \sum_{r=-\text{integ}\frac{KR+TN}{S}}^{r=-1} p_r P_{N-1}\left\{\Psi\frac{\sigma}{2}e^{aN}(KR + rS + NT)\right\}$$
$$+ \sum_{r=0}^{r=8} p_r P_{N-1}\left\{\Psi\frac{\sigma}{2}e^{aN}(KR + rR + NT)\right\}$$

et utilisant les mêmes transformations des P en Π que précédemment, on obtient

$$\Pi_N(KR) \simeq \sum_{r=-\text{integ}\frac{KT+TN}{S}}^{r=-1} p_r\Pi_{N-1}(KR + rS + NT) + \sum_{r=0}^{r=8} p_r\Pi_{N-1}(KR + rR - NT)$$

Les probabilités $\Pi_N(KR)$ doivent être calculées pour les valeurs entières de KR ($KR = 0, 1, 2, \ldots$). Il est évident qu'il y a une translation des p_r égale à $\frac{TN}{S}$ (proportionnelle à N); si $a > c$, T est positive et la translation est à droite et si $a < c$, T est négative et la translation est à gauche. Les sauts ont une longueur égale à S (insertion de $S - 1$ zéros) quand $r < 0$ et une longueur égale à R (insertion de $R - 1$ zéros) quand $r > 0$. Si $f_d > f_s$, $f = f_d = S\,\Psi$ et la formule de récurrence est toujours valable mais avec le changement du coefficient de K qui devient S (et non R) partout dans la formule.

73. *Exemple numérique*

Soit $A = 100\,000$ tonnes, $\sigma = 5\,000$ tonnes, $a = 0{,}025$, $c = 0{,}020$ et la politique de stockage du type A avec $f = f_s = 0{,}9$ et $f_a = 0{,}6$.

On déduit

$$\gamma = \frac{2 \times 100000}{5000}(0{,}025 - 0{,}020) = 0{,}2,\ \Psi = 0{,}1,\ R = 9,\ S = 6,\ \text{et}\ T = 2.$$

La formule de récurrence devient :

$$\Pi_N(KR) \simeq \sum_{r=-\text{integ}\frac{KR+2N}{6}}^{r=-1} p_r \Pi_{N-1}(KR + 6r + 2N) + \sum_{0}^{r=8} p_r \Pi_{N-1}(KR + 9R + 2N)$$

Prenant $KR = 11$, par exemple, on trouve :

$$\Pi_1(11) = p_{-2}\ \Pi_0(1) + p_{-1}\ \Pi_0(7) + p_0\ \Pi_0(13) + p_1\ \Pi_0(22) + \ldots + p_8\ \Pi_0(85)$$
$$\Pi_2(11) = p_{-2}\ \Pi_1(3) + p_{-1}\ \Pi_1(9) + p_0\ \Pi_1(15) + p_1\ \Pi_1(24) + \ldots + p_8\ \Pi_1(87)$$
$$\Pi_3(11) = p_{-2}\ \Pi_2(5) + p_{-1}\ \Pi_2(11) + p_0\ \Pi_2(17) + p_1\ \Pi_2(26) + \ldots + p_8\ \Pi_2(89)$$
$$\Pi_4(11) = p_{-3}\ \Pi_3(1) + p_{-2}\ \Pi_3(7) + p_{-1}\ \Pi_3(13) + p_0\ \Pi_3(19 + p_1\ \Pi_3(28) + \ldots + p_8\ \Pi_3(91)$$

. . . .

$$\Pi_{10}(11) = p_{-5}\ \Pi_9(1) + p_{-4}\ \Pi_9(7) + \ldots + p_0\ \Pi_9(31) + p_1\ \Pi_9(40) + \ldots + p_8\ \Pi_9(103)$$

Si l'on échange les valeurs de a et de c, γ devient négative et $T = -2$. Dans un tel cas, les valeurs des $\Pi_N(11)$ deviennent :

$$\Pi_1(11) = p_{-1}\ \Pi_0(3) + p_0\ \Pi_0(9) + p_1\ \Pi_0(18) + \ldots + p_8\ \Pi_0(81)$$
$$\Pi_2(11) = p_{-1}\ \Pi_1(1) + p_0\ \Pi_1(7) + p_1\ \Pi_1(16) + \ldots + p_8\ \Pi_1(79)$$
$$\Pi_3(11) = p_0\ \Pi_2(5) + p_1\ \Pi_2(14) + \ldots + p_8\ \Pi_2(77)$$

. . . .

$$\Pi_{10}(11) = p_1\ \Pi_9(0) + \ldots + p_8\ \Pi_9(63)$$

74. *Politiques du type B*

Pour une politique du type B, la formule de récurrence donnée au paragraphe 36 devient

$$P_N\left(K\frac{\sigma}{2}e^{aN}\right) = \sum_{r=-\text{integ}(K+\Lambda+\gamma N)}^{r=-\text{integ}(\Lambda+1)} p_r P_{N-1}\left\{\frac{\sigma}{2}e^{aN}(K + \Lambda + r + \gamma N)\right\}$$
$$+ \sum_{r=-\text{integ}(\Lambda+1)}^{r=\text{integ}(\Lambda+1)} p_r P_{N-1}\left\{\frac{\sigma}{2}e^{aN}(K + \gamma N)\right\}$$
$$+ \sum_{r=\text{integ}(\Lambda+1)}^{r=8} p_r P_{N-1}\left\{\frac{\sigma}{2}e^{aN}(K - \Lambda + r + \gamma N)\right\}$$

Soit Ψ le plus grand facteur commun entre 1 (l'unité), Λ et γ de telle sorte que $1 = R\Psi$, $\Lambda = S\Psi$ et $\gamma = T\Psi$, la formule de récurrence devient

$$P_N\left(KR\Psi\frac{\sigma}{2}e^{aN}\right) = \sum_{r=-\text{integ}(K+\Lambda+\gamma N)}^{r=-\text{integ}(\Lambda+\gamma N+1)} p_r P_{N-1}\left\{\Psi\frac{\sigma}{2}e^{aN}(KR + S + rR + TN)\right\}$$
$$+ \sum_{r=-\text{integ}(\Lambda+\gamma N)}^{r=\text{integ}(\Lambda-\gamma N)} p_r P_{N-1}\left\{\Psi\frac{\sigma}{2}e^{aN}(KR)\right\}$$
$$+ \sum_{r=\text{integ}(\Lambda-\gamma N+1)}^{r=8} p_r P_{N-1}\left\{\Psi\frac{\sigma}{2}e^{aN}(KR - S + rR + TN)\right\}$$

ou comme précédemment :

$$\Pi_N(KR) = \sum_{r=-\mathrm{integ}(K+\Lambda+\gamma N)}^{r=-\mathrm{integ}(\Lambda+\gamma N+1)} p_r \Pi_{N-1}(KR + S + rR + TN)$$

$$+ \sum_{r=-\mathrm{integ}(\gamma+N)}^{r=\mathrm{integ}(\Lambda-\gamma N)} p_r \Pi_{N-1}(KR)$$

$$+ \sum_{r=\mathrm{integ}(\Lambda-\gamma N+1)}^{r=8} p_r \Pi_{N-1}(KR - S + rR + TN)$$

Les probabilités $\Pi_N(KR)$ doivent être calculées pour les valeurs entières de KR ($KR = 0$, 1, 2, ...).

75. *Politiques du type D*

Dans ce cas, la formule de récurrence du paragraphe 38 devient :

$$P_N\left(K\frac{\sigma}{2}e^{aN}\right) = \sum_{r=-\mathrm{integ}(K+\delta+\gamma N)}^{r=8} p_r P_{N-1}\left\{\frac{\sigma}{2}e^{aN}(K + \delta + r + \gamma N)\right\}$$

De nouveau, soit Ψ le plus grand facteur commun entre 1 (l'unité), δ et γ de telle sorte que $1 = R\Psi$, $\delta = S\Psi$ et $\gamma = T\Psi$, la formule de récurrence devient

$$P_N\left(KR\Psi\frac{\sigma}{2}e^{aN}\right) = \sum_{r=-\mathrm{integ}(K+\delta+\gamma N)}^{8} p_r P_{N-1}\left\{\Psi\frac{\sigma}{2}e^{aN}(KR + S + rR + TN)\right\}$$

ou

$$\Pi_N(KR) \simeq \sum_{r=-\mathrm{integ}(K+\delta+\gamma N)}^{8} p_r \Pi_{N-1}(KR + S + rR + TN)$$

les probabilités $\Pi_N(KR)$ doivent être calculées pour les valeurs entières de KR ($KR = 0$, 1, 2, ...).

Remarques générales et conclusions

Comparaison des politiques de stockage

76. Afin de pouvoir comparer l'effet des différents types de politique sur la dimension du stock initial qui assurerait le succès de la politique de stockage avec un degré de confiance donné à l'avance, il est essentiel de garder, pour tous les types de politique, les mêmes conditions de base :

— la production moyenne au début du projet : A;
— les taux de croissance de la production et de la demande : a et c;
— la même loi de probabilité de l'élément aléatoire et en particulier, la valeur de l'écart type : σ.

Une comparaison de la valeur de la probabilité de succès des différentes politiques pour un stock initial donné peut être obtenue presque immédiatement des tableaux donnés en annexe.

77. Dans le tableau A qui suit, on a supposé que :

A = la production moyenne au début du projet = 100 000 tonnes;

σ = l'écart type de l'élément aléatoire = 8 000 tonnes;

a et c = les taux de croissance de la production et de la demande $a = c = 0{,}025$ et l'on a pris la valeur de la probabilité de succès du projet aussi proche que possible de 0,90 et cela pour les deux périodes $N = 5$ années et $N = 10$ années. Le tableau montre la grandeur du stock initial nécessaire pour un sous-ensemble des politiques étudiées.

78. *Tableau A*

Stock initial pour différentes politiques

A = 100 000 tonnes, σ = 8 000 tonnes, $a = c =$ 0,025. Probabilité de succès $\simeq$ 0,90

Type	Conditions spécifiques	Stock initial	
		N = 5 années	N = 10 années
	La politique élémentaire	25 800	45 600
A	$f_s = \frac{1}{2} \quad f_d = 1$	28 800	55 100
A	$f_s = f_d = 3/4$	19 400	34 200
A	$f_s = 0{,}8 \quad f_d = 0{,}6$	16 100	26 500
A	$f_s = 1 \quad f_d = 0{,}6$	16 000	24 400
B	$L\sigma = 1/4\, \sigma\, e^{aN}$	21 800	37 400
B	$L\sigma = 1/2\, \sigma\, e^{aN}$	15 900	27 600
B	$L\sigma = \sigma\, e^{aN}$	8 200	14 900
C	$\Delta\sigma = 1/2\, \sigma\, e^{aN} \quad f_s = 0{,}6 \quad f_d = 0{,}8$	14 200	24 500
C	$L\sigma = 1/2\, \sigma\, e^{aN} \quad f_s = 1 \quad f_d = 0{,}8$	14 000	23 200
C	$L\sigma = 1/2\, \sigma\, e^{aN}$	10 000	16 100
D	$\Delta\sigma = 1/10\, \sigma\, e^{aN}$	24 500	40 100
D	$\Delta\sigma = 3/10\, \sigma\, e^{aN}$	18 000	25 800
D	$\Delta\sigma = 5/10\, \sigma\, e^{aN}$	10 100	10 900

79. De ce tableau on peut voir que la politique élémentaire n'est pas très bonne car elle nécessite un stock initial très important. Naturellement, les politiques du type A avec $f_s < f_d$ (la fraction du surplus à mettre en stock est inférieure à la fraction du déficit à prélever des stocks) sont encore moins bonnes. Les politiques qui semblent être raisonnables, c'est-à-dire pas très mauvaises pour les consommateurs et cependant ne nécessitant pas un trop grand stock initial, sont celles qu'on a soulignées dans le tableau A. Cependant, la sélection d'une politique de stockage dépend souvent de contraintes socio-économiques ou politiques.

Effet de la limitation de la capacité du réservoir

80. Pour les produits alimentaires et en particulier pour les céréales, on a remarqué qu'en général, le coefficient d'instabilité de la production σ/A, duquel dépendent la grandeur du stock initial et aussi la capacité du réservoir, est assez élevé sauf, évidemment, dans le cas où le projet couvre une région plus étendue (plusieurs pays producteurs). Par ailleurs, si le coût de construction des moyens de stockage est assez important ce qui nécessiterait une limitation de la capacité du réservoir, il est essentiel d'étudier l'effet de cette limitation (mesurée en σ) sur la probabilité de succès d'un projet de stockage.

81. Afin d'étudier l'effet d'une limitation de la capacité du réservoir sur la probabilité de succès d'une politique de stockage, un certain nombre de tableaux ont été établis

pour différentes grandeurs de la capacité du réservoir et pour les différents types de politiques. Les tableaux ci-dessous illustrent l'effet d'une réduction de plus en plus forte de la capacité du réservoir sur la probabilité de succès du projet. Le tableau B correspond à une politique du type A avec $f_s = f_d = f$; des capacités de réservoir : illimitée, égale à $5\,f\,\sigma\,e^{aN}$, à $4\,f\,\sigma\,e^{aN}$, à $3\,f\,\sigma\,e^{aN}$ et à $2\,f\,\sigma\,e^{aN}$ et pour $K = 0, 1, 2, \ldots, 10$ et $N = 5$ années et 10 années. Le tableau C correspond à une politique du type B avec $L_\sigma = \frac{\sigma}{2}e^{aN}$; des capacités de réservoir : illimitée, égale à $5\,\sigma\,e^{aN}$ et à $\frac{5}{2}\sigma e^{aN}$ et pour $K = 0, 1, 2, \ldots, 10$ et $N = 4$ années, 7 années et 10 années. Les lignes incomplètes dans ces tableaux sont dues au fait que le stock initial est inférieur ou égal à la capacité du réservoir.

82. *Tableau B*

Effet de la limitation de la capacité sur la probabilité de succès du projet

(en pour 1 000)

Politique du type A
$f_s = f_a = f < 1$
Stock initial : $Kf\frac{\sigma}{2}e^{aN}$

N = nombre d'années

N	Capacité \ K	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	illimitée	312	447	578	693	785	855	906	942	966	980	989
	$5\,f\sigma\,e^{aN}$	312	447	578	693	785	855	906	942	965	980	988
5	$4\,f\sigma\,e^{aN}$	312	447	578	692	784	854	904	938	959		
	$3\,f\sigma\,e^{aN}$	312	446	576	688	776	840	881				
	$2\,f\sigma\,e^{aN}$	304	431	550	645	712						
	illimitée	226	329	436	536	626	704	770	825	870	905	932
	$5\,f\sigma\,e^{aN}$	226	329	435	535	624	701	765	817	858	887	906
10	$4\,f\sigma\,e^{aN}$	224	327	431	528	614	685	742	784	813		
	$3\,f\sigma\,e^{aN}$	216	312	408	495	566	621	658				
	$2\,f\sigma\,e^{aN}$	199	283	362	426	471						

83. *Tableau C*

Effet de la limitation de la capacité sur la probabilité de succès du projet

(en pour 1 000)

Politique du type B
$L_\sigma = \frac{\sigma}{2}e^{aN}$
Sotck initial : $K\frac{\sigma}{2}e^{aN}$

N = nombre d'années

N	Capacité \ K	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	illimitée	478	669	811	902	952	978	991	996	999	1 000	1 000
	$5\sigma\,e^{aN}$	478	669	811	902	952	978	991	996	999	1 000	1 000
	$5/2\,\sigma\,e^{aN}$	478	669	811	901	951	976					
	illimitée	369	544	694	807	884	934	964	981	991	996	998
7	$5\,\sigma\,e^{aN}$	369	544	694	807	884	934	964	981	991	995	998
	$5/2\,\sigma\,e^{aN}$	368	543	692	803	875	918					
	illimitée	311	468	612	729	819	883	928	957	975	986	992
10	$5\,\sigma\,e^{aN}$	311	468	612	729	819	883	928	957	975	985	991
	$5/2\,\sigma\,e^{aN}$	309	464	605	716	795	844					

84. De ces tableaux on peut déduire qu'une capacité limitée à 4 ou 5 σ n'affecte que très légèrement la probabilité de succès. Par conséquent, dans le cas où l'instabilité est inférieure à 10 % de la production, un réservoir de capacité égale à la moitié de la production annuelle aurait la même probabilité de succès que celle qu'on trouve dans le cas d'une capacité illimitée et les tableaux donnés en annexe couvriraient aussi ce cas sans aucune modification.

Effet d'une différence entre a *et* c

85. Au paragraphe 27, il a été mentionné que si la différence entre les taux de croissance de la production et de la demande était significative, les projets à long ou moyen termes de politique de stockage perdaient leur raison d'être. Pour justifier cette déclaration et illustrer l'effet qu'aurait même une petite différence de $\pm 0{,}005$ entre a et c sur la probabilité de succès, le tableau D ci-dessous couvre le cas d'une politique de stockage du type A avec f_s, la fraction du surplus à mettre en stock, égale à 0,90 et f_d, la fraction du déficit à retirer des stocks, égale à 0,6. La probabilité de succès du projet y est donnée pour les trois cas : $a - c = +0{,}005$, zéro et $-0{,}005$ et cela pour $K = 0, 1, 2, \ldots, 10$ et $N = 5$ années et 10 années.

86. *Tableau D*

Effet d'une différence entre a et c sur la probabilité de succès du projet

(en pour 1 000)

Type de politique A
Capacité : illimitée
Entrees : 0,9 du surplus
Sorties : 0,6 du déficit
Stock initial · $K \cdot \frac{0{,}9}{2} \sigma e^{aN}$

N = nombre d'années

Différence $a - c$	N \ K	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
+0,005	5	469	720	845	928	968	987	995	998	999	1 000	
zéro		355	514	715	818	912	950	981	990	997	999	1 000
—0,005		192	318	498	652	777	870	927	967	983	995	998
+0,005	10	686	875	943	977	989	995	998	999	1 000		
zéro		295	433	610	717	817	877	925	953	974	985	993
—0,005		036	075	144	222	313	416	514	612	701	777	842

87. On peut voir sur ce tableau que, pour un projet de stockage d'une durée de 10 années, les probabilités de succès quand la différence $a - c$ est égale à 0,005, zéro et $-0{,}005$ sont respectivement 0,989, 0,817 et 0,313. Il est donc évident que, si la différence est positive, le succès du projet est assuré; par contre, si la différence est négative, il est peu probable que le projet puisse réussir à moins qu'un système permanent d'importations, pour combler le déficit dû à la différence entre a et c, ne soit établi.

Effet d'un changement de la loi de probabilité

88. Dans cette étude, on a supposé que la loi de probabilité de l'élément aléatoire de la production était la distribution binomiale symétrique avec $p = q = \frac{1}{2}$, $n = 16$ et

où la moyenne était prise comme origine. Une telle loi paraissait assez raisonnable, cependant toute autre loi de probabilité aurait pu être utilisée surtout si elle s'ajustait mieux à la série chronologique de la production. Afin d'examiner l'effet que produirait un changement de la loi de distribution sur la probabilité de succès d'un projet de stockage, on a recalculé certains tableaux avec différentes hypothèses de loi de distribution de l'élément aléatoire. Les lois choisies pour cet examen sont les suivantes :

— la distribution normale,

— la loi binomiale asymétrique avec $p = \frac{1}{5}$, $q = \frac{4}{5}$ et $n = 25$,

— la distribution de Poisson avec $\lambda = 4$

— la distribution de Poisson avec $\lambda = 9$.

89. Le tableau E ci-dessous donne la probabilité de succès d'un projet de stockage pour ces différentes lois de probabilité et pour une politique du type A avec $f_s = f_d = f$ et les valeurs de K : 0, 1, 2, ..., 10 et une durée du projet de $N = 5$ années et $N = 10$ années. On voit aisément que les probabilités de succès varient très peu d'une loi de probabilité à l'autre et, par conséquent, que le changement de la loi de distribution de l'élément aléatoire n'a qu'un effet négligeable sur la probabilité de succès qui dépend essentiellement de la valeur σ de l'écart type de la distribution.

Tableau E

Effet d'un changement de la loi de probabilité sur la probabilité de succès du projet
(en pour 1 000)

Type de politique A
Capacité : illimitée, $a = c$,
$f_s = f_d = f$
Stock initial $Kf\frac{\sigma}{2}e^{a\lambda}$

N = nombre d'années

Loi de probabilité	N \ K	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Binomiale $p = 1/2$ $q = 1/2$ $n = 16$	5	312	447	578	693	785	855	906	942	966	980	989
Normale		312	446	576	688	780	850	902	938	963	978	988
Binomiale $p = 1/5$ $q = 4/5$ $n = 25$		327	461	587	696	783	851	901	936	960	976	986
Poisson avec $\lambda = 4$		337	470	594	699	785	850	899	934	958	974	985
Poisson avec $\lambda = 9$		304		567		769		893		956		984
Binomiale $p = 1/2$ $q = 1/2$ $n = 16$	10	226	329	436	536	626	704	770	825	870	905	932
Normale		226	328	433	531	621	698	764	819	864	900	928
Binomiale $p = 1/5$ $q = 4/5$ $n = 25$		237	341	445	542	629	705	769	822	866	900	927
Poisson avec $\lambda = 4$		245	350	453	548	634	708	771	823	866	900	926
Poisson avec $\lambda = 9$		220		427		615		758		859		923

Estimation des paramètres

91. Avant de formuler une politique de stockage et de rationnement, il est nécessaire d'estimer la valeur d'un certain nombre de paramètres pour la région à l'intérieur de laquelle le projet est à exécuter. Pour être valable, cette estimation devrait être basée sur une assez longue série de données statistiques ce qui permettrait l'évaluation des tendances et de la variabilité avec un degré de précision acceptable. Les paramètres qui devraient être estimés de cette manière sont :

A = la production moyenne au début du projet. Elle serait basée sur l'extrapolation de la tendance calculée pour au moins les dix années précédentes.

B = la demande au début du projet. Si cette demande est supérieure à la production moyenne, il faudrait importer la différence afin qu'au début du projet les disponibilités et la demande soient au même niveau.

a = le taux de croissance des disponibilités (production plus importations). Ce taux est la somme du taux de croissance de la production à calculer comme pour A et éventuellement du taux de croissance des importations.

c = le taux de croissance de la demande. Il devrait être basé sur le taux de croissance de la population, l'élasticité de la demande, etc.

σ/A = le coefficient d'instabilité de la production ou l'écart type σ de l'élément aléatoire de la production. Il serait calculé à partir des valeurs des écarts entre la production réelle et la tendance pour un nombre d'années précédant le projet.

92. Les valeurs des autres paramètres utilisés dans cette étude sont plus ou moins arbitraires et dépendent de l'option prise quant à la politique de stockage et de rationnement. Elles relèvent essentiellement des planificateurs ou de l'agence d'exécution du projet. Ces paramètres sont les suivants :

f_s = la fraction du surplus à mettre en stock.

f_d = la fraction du déficit à prélever des stocks.

L_σ = la limite supérieure du surplus ou du déficit au-dessous de laquelle l'agence d'exécution du projet n'intervient pas (les stocks restant au même niveau).

Δ_σ = la différence entre la demande et la quantité mise à la disposition des consommateurs.

Résumé des conclusions

93. Les principales conclusions qu'on peut tirer de cette étude sont les suivantes :

1. Dans le cas où la valeur moyenne des disponibilités est égale à la demande, une politique de stockage par laquelle la demande est totalement satisfaite (la totalité du déficit est prélevée des stocks, c'est-à-dire quand $f_d = 1$ et $L_\sigma = \Delta_0 = 0$) a peu de chance de réussir. Dans ce cas, un type de rationnement est nécessaire.

2. Les politiques de stockage et de rationnement ci-dessous ont une probabilité de succès de 90 % pour une durée de 5 années avec un stock initial d'environ 2σ (deux fois l'écart type de l'élément aléatoire) et pour une durée de 10 années avec un stock initial d'environ 3σ :

Politique du type A avec $f_s = 0{,}8$ et $f_d = 0{,}6$.

Politique du type B avec $L_\sigma = \frac{1}{2}\sigma e^{aN}$.

Politique du type C avec $L_\sigma = \frac{1}{2}\sigma e^{aN}$, $f_s = 1$ et $f_d = 0{,}8$.

Politique du type D avec $\Delta_\sigma = \frac{3}{10}\sigma e^{aN}$.

3. La limitation de la capacité des moyens de stockage ne présente pas en général un grand problème. Une capacité égale à la moitié de la production annuelle est dans la plupart des cas amplement suffisante.

4. Le type de loi de distribution de l'élément aléatoire de la production n'influe pas beaucoup sur la probabilité de succès du projet. Ce qui est essentiel c'est de déterminer avec assez de précision la valeur de l'écart type de la variable.

5. Si le taux de croissance de la demande est supérieur au taux de croissance de la production, une politique de stockage ne peut réussir que si un système d'importations était établi qui permette de combler la différence entre la demande et la production moyenne.

J. B. Simaika
expert auprès de l'Organisation des Nations Unies pour l'alimentation et l'agriculture

Annexe

Tableau I. — *Probabilité de succès de la « Politique élémentaire »* (1)
(en pour 1 000)

Capacité : illimitée, $a = c$,
Entrées : totalité du surplus
Sorties : totalité du déficit
Stock initial : $K\frac{\sigma}{2}e^{aN}$

N = nombre d'années

N \ K	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	598	773	895	962	989	998	1 000				
2	464	634	777	879	941	974	990	997	999	1 000	
3	392	549	692	804	884	936	967	984	993	997	999
4	346	491	628	743	831	895	938	965	981	991	996
5	312	447	578	693	785	855	906	942	966	980	989
6	287	414	539	651	744	819	876	918	947	968	981
7	267	387	507	615	709	785	846	893	928	953	970
8	251	364	479	585	678	756	819	869	908	937	958
9	237	346	456	559	650	728	794	847	889	921	945
10	226	329	436	536	626	704	770	825	870	905	932

1. Ce tableau est aussi valable pour les politiques du type A avec $f_s = f_d = f$ avec la modification : stock initial $= Kf\frac{\sigma}{2}e^{aN}$ (paragr. 46).

Tableau II. — *Probabilité de succès d'une politique du type A* (1)

(en pour 1 000)

Capacité : illimitée, $a = c$,
Entrées : 4/5 du surplus
Sorties : 3/5 du déficit
Stock initial : $K \frac{4}{5} \frac{\sigma}{2} e^{aN}$

N = nombre d'années

N \ K	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	598	773	895	989	998	1 000					
2	466	638	783	941	974	990	999	1 000			
3	399	563	716	885	937	968	993	997	999	1 000	
4	359	516	668	833	898	943	981	991	996	999	1 000
5	333	482	631	790	864	920	966	981	990	997	999
6	313	456	600	755	836	898	949	970	984	994	997
7	298	435	575	727	811	877	931	958	976	989	994
8	285	418	555	703	789	858	915	946	968	984	991
9	275	404	537	683	769	840	900	934	959	977	987
10	266	392	522	666	752	824	886	923	951	971	982

1. Ce tableau est aussi valable pour toutes les politiques de type A avec $\frac{f_s}{f_d} = \frac{4}{3}$ avec la modification : stock initial $= K f_s \frac{\sigma}{2} e^{aN}$ (paragr. 50).

Tableau III. — *Probabilité de succès d'une politique du type B*

(en pour 1 000)

Capacité : illimitée, $a = c$,
Limite de non-intervention : $L_\sigma = \frac{\sigma}{2} e^{aN}$
Entrées : surplus $- L_\sigma$
Sorties : déficit $- L_\sigma$
Stock initial : $K \frac{\sigma}{2} e^{aN}$

N = nombre d'années

N \ K	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	773	895	962	989	998	1 000					
2	663	804	911	965	988	996	999	1 000			
3	542	730	860	935	972	989	996	999	1 000		
4	478	669	811	902	952	978	991	996	999	1 000	
5	432	620	768	869	930	965	984	993	997	999	1 000
6	397	579	729	937	907	950	974	988	994	997	999
7	369	544	694	807	884	934	964	981	991	996	998
8	346	515	663	779	862	917	953	974	986	993	997
9	327	490	636	753	840	900	940	966	981	990	995
10	311	468	612	729	819	883	928	957	975	986	992

Tableau IV. — *Probabilité de succès d'une politique du type C* (1)

(en pour 1 000)

Capacité : illimitée, $a = c$,
Limite de non-intervention : $L_0 = \frac{\sigma}{2} e^{aN}$
Entrées : surplus $-L_\sigma$
Sorties : 4/5 (déficit $-L_\sigma$)
Stock initial : $K \frac{\sigma}{2} e^{aN}$

N = nombre d'années

N \ K	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	773	895	962	989	1 000						
2	633	805	911	966	996	999	1 000				
3	542	730	861	937	989	996	999	1 000			
4	479	670	814	907	978	991	996	999	1 000		
5	433	622	773	880	965	984	993	997	1 000		
6	398	583	738	854	950	975	988	995	999	1 000	
7	372	551	709	831	934	964	982	992	998	999	1 000
8	350	525	683	810	918	953	975	988	997	998	999
9	333	503	661	791	901	942	968	984	995	998	999
10	319	485	641	773	885	930	960	980	993	996	998

1. Ce tableau est aussi valable pour toutes les politiques du type C avec $L_\sigma = \frac{\sigma}{2} e^{aN}$ et $\frac{f_s}{f_d} = \frac{5}{4}$ avec la modification : stock initial $= K f_s \frac{\sigma}{2} e^{aN}$ (paragr. 61).

Tableau V. — *Probabilité de succès d'une politique du type D*

(en pour 1 000)

Capacité : illimitée, $a = c$,
Entrées : surplus $+3/10\ \sigma\ e^{aN}$
Sorties : déficit $-3/10\ \sigma\ e^{aN}$
Stock initial : $K \frac{\sigma}{2} e^{aN}$

N = nombres d'années

N \ K	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	598	773	895	962	989	998	1 000				
2	530	704	839	924	969	989	996	999	1 000		
3	468	635	773	871	932	966	984	993	997	999	1 000
4	446	609	747	848	914	953	976	988	995	998	999
5	434	594	732	834	902	944	969	984	992	996	998
6	417	573	709	812	883	929	958	976	987	993	996
7	410	564	698	801	873	921	952	972	984	991	995
8	399	550	683	786	859	909	942	964	978	987	993
9	394	544	676	778	852	903	937	960	975	985	991
10	391	539	671	773	847	899	934	958	973	984	990