JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

PAUL DAMIANI

Modèle simplifié d'une application de la théorie des jeux à la stratégie sanitaire

Journal de la société statistique de Paris, tome 115 (1974), p. 52-58

<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1974__115__52_0>

MODÈLE SIMPLIFIÉ D'UNE APPLICATION DE LA THÉORIE DES JEUX A LA STRATÉGIE SANITAIRE

The game theory has been applied to a simplified model for health planning. Statistical linkage between health factors and death rates have been measured. We have found what relative variations of these factors have to be made for a maximal decreasing mortality.

Man hat in dieser Arbeit die Theorie der Glücksspiele auf ein vereinfachtes Modell zur Planification des Gesundheitswesens angewandt. Man hat die statistischen Beziehungen berechnet, die zwischen mehreren Faktoren bestehen, die einen Einfluss auf die Gesundheit haben und gewissen Sterblichkeitscoeffizienten. Man hat die Variationen berechnet, denen diese Faktoren unterworfen werden mussen um ein Maximum in der Verminderung der Sterblickeit zu erreichen.

Tenemos, en este articulo, aplicada la teoria de fuegos a un modelo simplificado de planificación sanitaria. Hemos medido los enlaces estadisticos existentes entre diferentes factores que obran sobre la saludz y algunos cocientes de mortalidad. Hemos medido las variaciones relativas a anadir en estos factores para bajar al maximo la mortalidad.

Introduction

Planifier dans le domaine de la santé consiste à déterminer les actions à entreprendre, au cours d'une période donnée, afin d'améliorer au maximum le niveau de santé d'une population. Ce choix doit tenir compte des coûts et des contraintes auxquels sont soumises les différentes actions possibles.

La mise en équation de ce problème se heurte à de nombreuses difficultés dues principalement à l'imprécision des concepts utilisés et au défaut de renseignements statistiques dans ce domaine.

En simplifiant les données ainsi que les hypothèses de base, il est cependant possible de fournir une approche mathématique de ce problème de planification. C'est ce qu'on s'est efforcé de faire dans cette étude.

On a mesuré les liaisons statistiques existant entre sept différents facteurs agissant sur la santé et cinq quotients de mortalité représentatifs du niveau de santé. Les variations relatives à apporter à ces facteurs pour abaisser au maximum la mortalité sont évaluées en appliquant la *théorie des jeux*.

DONNÉES DE BASE

Mesure du niveau de santé

Faute de données précises sur la morbidité de la population, on a été amené à représenter le niveau de santé par les cinq quotients de mortalité par âge suivants :

y_1 : 0 à 1 an, y_2 : 1 à 15 ans, y_3 : 15 à 45 ans, y_4 : 45 à 65 ans, y_5 : 65 à 80 ans.

Ces quotients de mortalité ont été calculés, par sexe, à partir de la table de mortalité 1961-1963 établie par l'I. N. S. E. E. [2]. Ce sont des quotients pour 10 000.

On rappelle que le quotient de mortalité pour 10 000, entre l'âge i et l'âge $i + a$ est défini par :

$$y_i = 10^4 \frac{l_i - l_{i+a}}{l_i}$$

où l_i et l_{i+a} sont les nombres de survivants aux âges i et $i + a$ fournis par la table de mortalité.

On dispose pour ces variables de données départementales.

Mesure des facteurs agissant sur la santé

Parmi les statistiques disponibles, on a choisi les facteurs ayant *a priori* une influence prépondérante sur la santé, pour lesquels on disposait de données départementales suffisamment précises. On a retenu les sept variables suivantes classées suivant le facteur qu'elles représentent :

— *Équipement sanitaire*

x_1, nombre de lits d'hospitalisation pour 1 000 habitants au 1er janvier 1963 (lits exploitables du secteur hôpital des hôpitaux publics et lits des établissements sanitaires privés) [8].

x_2, nombre de médecins pour 1 000 habitants au 1er janvier 1963 (docteurs en médecine inscrits à l'Ordre des médecins) [5].

— *Structure de la population*

x_3, proportion (en %) de la population rurale au recensement de 1962 (population vivant dans des communes de moins de 2 000 habitants) [6]. On n'a pas retenu, dans ce groupe, une variable caractérisant la structure de la population par activité professionnelle, car on l'a trouvée liée de façon étroite avec la variable précédente et présentant des corrélations analogues avec les variables de mortalité.

— *Caractéristiques de logement*

x_4, proportion (en %) des logements ayant certains éléments de confort en 1962 : logements ordinaires possédant une cuisine (ou petits logements de 1 ou 2 pièces pourvus d'une installation pour faire la cuisine), immeuble construit en matériaux durs, immeuble raccordé à une canalisation d'eau, eau courante dans le logement, cabinets d'aisance à l'intérieur du logement [6].

— *Revenus*

x_5, revenu des personnes physiques par cote en 1962, en milliers de francs [5].

— *Alcool et tabac*

x_6, taux de mortalité par alcoolisme et cirrhose du foie pour 10 000 habitants du sexe masculin, du groupe d'âge 45-64 ans, moyenne 1960-1964 (taux corrigé des causes non spécifiées) [7].

Faute de données départementales sur la consommation d'alcool, on a estimé que ce taux de mortalité était statistiquement représentatif de cette consommation.

x_7, consommation de tabac en hg par habitant, en 1964 [9].

Liaisons statistiques

A partir des valeurs départementales des variables, on a calculé, par la méthode des moindres carrés, la régression linéaire liant chaque quotient de mortalité à l'ensemble des variables représentant les facteurs. Pour rendre comparables les résultats, toutes les variables ont été exprimées, au préalable, sous forme centrée réduite.

On obtient des expression de la forme :

$$y_i = \sum_j b_{ij} x_j \tag{1}$$

$(i = 1 \text{ à } 5 \text{ pour chaque sexe}, \quad j = 1 \text{ à } 7)$

Au cours de la période de temps assez courte pour laquelle est établie la planification, on peut supposer que les coefficients de régression restent constants. Si on appelle Δy_i et Δx_j les variations espérées pour ces variables, au cours de cette période, on peut donc écrire :

$$\Delta y_i = \sum_j b_{ij} \Delta x_j \tag{2}$$

Principe de la méthode

Signe des variations

On veut faire apparaître les gains réalisés sur la mortalité, c'est-à-dire les variations : $-\Delta y_i$.

Pour les variations des facteurs au cours de la période considérée, on constate que :

— les variations relatives aux variables x_1, x_2, x_4 et x_5 (équipement hospitalier, densité médicale, confort des logements et revenus) seront vraisemblablement positives, tandis que celle de x_3 (proportion de population rurale) sera sûrement négative;

— les variations des variables x_6 et x_7 (alcoolisme et tabac) doivent être négatives si l'on veut améliorer le niveau de santé de la population.

Compte tenu de ces remarques, en posant :

$p_1 = \Delta x_1, \quad p_2 = \Delta x_2, \quad p_3 = -\Delta x_3, \quad p_4 = \Delta x_4, \quad p_5 = \Delta x_5, \quad p_6 = -\Delta x_6, \quad p_7 = -\Delta x_7,$

les relations (2) s'écrivent :

$$-\Delta y_i = -b_{i1} p_1 - b_{i2} p_2 + b_{i3} p_3 - b_{i4} p_4 - b_{i5} p_5 + b_{i6} p_6 + b_{i7} p_7 \tag{3}$$

En notant :

$a_{i1} = -b_{i1}, \; a_{i2} = -b_{i2}, \; a_{i3} = b_{i3}, \; a_{i4} = -b_{i4}, \; a_{i5} = -b_{i5}, \; a_{i6} = b_{i6}, \; a_{i7} = b_{i7},$

les relations (3) deviennent :

$$-\Delta y_i = \sum_j a_{ij} p_j \tag{4}$$

Jeu

Considérons le jeu suivant à somme nulle entre deux joueurs. Le premier joueur est constitué par la « Population », le deuxième joueur par la « Mort ».

Les stratégies pures (ou tactiques) sont représentées par la possibilité d'agir, pour le premier joueur, sur un des facteurs x_j et, pour le deuxième joueur, sur un quotient de mortalité y_i.

Si le premier joueur adopte la stratégie pure x_j et le deuxième joueur la stratégie pure y_i, le gain du premier joueur sur la mortalité sera donné par le coefficient a_{ij}, en supposant : $p_j = 1$ et $p_k = 0$ pour $k \neq j$. Ce coefficient représente également la valeur de la perte du deuxième joueur.

La matrice d'élément général a_{ij} représente la transposée de la matrice du jeu. Les valeurs des matrices de jeu, pour chaque sexe, sont indiquées plus loin. On constate que, pour le sexe masculin, on peut supprimer dans la matrice du jeu les lignes 3 et 4 qui sont dominées par la ligne 1. Pour le sexe féminin, on peut omettre la ligne 3 dominée par la ligne 2.

Problème

Le problème consiste à déterminer la stratégie mixte (ou stratégie) que doit employer le premier joueur pour rendre maximum son gain sur la mortalité.

Les variables étant exprimées sous forme centrée réduite, leurs variations peuvent être considérées comme comparables. La stratégie mixte du premier joueur sera définie par les proportions relatives des variations des différents facteurs, c'est-à-dire par les valeurs que doivent prendre les coefficients p_j, sachant que $\sum_j p_j = 1$.

Comportement des joueurs

On suppose que les deux joueurs ont le comportement suivant, défini par Von Neumann. Pour chacune des stratégies mixtes que peut adopter le premier joueur, l'adversaire choisit comme stratégie mixte celle qui rend le gain du premier joueur minimum. Pour assurer sa sécurité, le premier joueur sera donc conduit à adopter comme stratégie mixte celle qui rend maximum ce gain minimum. Cette valeur s'appelle le maximin.

Le raisonnement du deuxième joueur est le même. Pour chacune des stratégies mixtes qu'il choisit, son adversaire suivra la stratégie mixte qui rendra sa perte maximum. Le deuxième joueur sera par suite amené à adopter la stratégie mixte qui rend minimum cette perte maximum. Cette valeur s'appelle le minimax et est égale au maximin. La valeur commune s'appelle valeur du jeu.

Résolution du problème

Le problème se résout par la méthode de l'algorithme du simplex [3], [4].

Cette méthode fournit la valeur des coefficients p_j définissant la stratégie mixte du premier joueur. Elle donne également la solution du problème dual, c'est-à-dire la stratégie mixte du deuxième joueur définie par les coefficients q_i représentant les parts respectives des différents quotients dans la mortalité avec $\sum_i q_i = 1$.

Résultats

On a indiqué ci-après, pour chaque sexe, la solution du problème et du problème dual. Les valeurs des coefficients p_j ont été transformées en variations relatives par les formules :

$$\frac{\Delta x_j}{x_j} = \pm \frac{p_j s_j}{\bar{x}_j}$$

où x_j et s_j représentent la moyenne et l'écart type de la variable x_j. On a effectué une transformation analogue pour les coefficients q_i.

Solution du problème

Variables	Sexe masculin		Sexe feminin	
	Coefficient p_j	Variation relative $\frac{\Delta x_j}{x_j}$	Coefficient p_j	Variation relative $\frac{\Delta x_j}{x_j}$
x_1	0,622	0,159	—	///
x_2	—	///	—	///
x_3	—	///	—	///
x_4	—	///	—	///
x_5	—	///	0,039	0,003
x_6	0,221	— 0,078	0,321	— 0,113
x_7	0,157	— 0,020	0,640	— 0,080
	1,000	///	1,000	///

Solution du problème dual

Variables	Sexe masculin		Sexe feminin	
	Coefficient q_i	Variation relative $\frac{\Delta y_i}{y_i}$	Coefficient q_i	Variation relative $\frac{\Delta y_i}{y_i}$
y_1	0,520	— 0,079	0,329	— 0,048
y_2	0,319	— 0,053	0,311	— 0,051
y_3	—	///	—	///
y_4	—	///	0,360	— 0,035
y_5	0,161	— 0,010	—	///
	1,000	///	1,000	///

La valeur du jeu est égale à 0,269 pour le sexe masculin et 0,285 pour le sexe féminin.

On constate que, pour le sexe masculin, la stratégie mixte du premier joueur (la « Population ») est constituée par les variations relatives suivantes de trois facteurs :

x_1, équipement hospitalier . . . . . . + 15,9 %
x_6, consommation d'alcool . . . . . . — 7,8 %
x_7, consommation de tabac . . . . . — 2,0 %

Pour le sexe féminin, la stratégie mixte du premier joueur est la suivante :

x_5, revenus . . . . + 0,3 %
x_6, consommation d'alcool . . . . . . — 11,3 %
x_7, consommation de tabac . . . . . — 0,8 %

Si l'on considère le problème dual, la stratégie mixte du deuxième joueur (la « Mort ») s'applique, pour le sexe masculin, aux quotients de mortalité y_1, y_2 et y_5 (0-1 an, 1-15 ans, 65-80 ans) et, pour le sexe féminin, aux quotients y_1, y_2 et y_4 (0-1 an, 1-15 ans, 45-65 ans).

Validité des résultats

Observations concernant les données

Pour le niveau de santé, bien qu'on ait montré par ailleurs la représentativité des quotients de mortalité générale [1], il serait intéressant d'introduire la mortalité par cause; il faudrait également pouvoir utiliser des variables mesurant, notamment, la morbidité de la population.

Le nombre de facteurs agissant sur la santé utilisé dans le modèle devrait être complété (facteur ayant une action sur la mortalité par accidents d'automobiles, par exemple).

Observation sur la méthode

La méthode adoptée peut être critiquée, en particulier sur les points suivants : le comportement des joueurs n'est pas celui indiqué par Von Neumann; les coefficients de régression, supposés mesurer l'action d'un facteur sur chaque quotient de mortalité, dépendent des facteurs choisis; il faudrait ajouter au modèle les contraintes liant entre eux les différents facteurs.

Conclusion

Cette étude avait pour but de montrer la possibilité d'appliquer la théorie des jeux à un problème de planification dans le domaine de la santé et de faire apparaître l'intérêt que pouvait présenter cette méthode. Pour cela, on a été amené à présenter un modèle volontairement simplifié qu'il serait nécessaire de perfectionner par la suite. Les résultats ainsi obtenus soulignent l'influence de la consommation d'alcool et de tabac sur la mortalité; ils chiffrent l'importance des objectifs à atteindre pour une planification dans le domaine de la santé.

Paul Damiani
Administrateur à l'I. N. S. E. E.

Matrices des jeux

Sexe masculin

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
p_1	0,26358	0,33496	0,09707	0,17241	0,15289
p_2	0,31174	0,20342	0,14417	-0,06214	0,01736
p_3	-0,41687	-0,16868	0,09289	-0,25256	-0,30645
p_4	0,11774	-0,20033	-0,15154	-0,04617	0,06375
p_5	0,23713	0,35666	0,00409	0,18683	0,14785
p_6	0,18476	0,14918	0,79544	0,91130	0,77493
p_7	0,40663	0,17340	0,35055	0,20168	0,01124

Sexe féminin

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
p_1	0,38106	-0,04875	0,30121	0,10939	0,11400
p_2	0,31982	0,19088	0,16044	0,26019	0,31018
p_3	-0,49480	0,09223	-0,24293	-0,98650	-0,19320
p_4	-0,11028	0,07216	0,02379	0,45866	-0,08010
p_5	0,42149	0,20912	-0,05147	0,22524	0,15955
p_6	0,18734	-0,02426	0,54659	0,64145	0,68884
p_7	0,32528	0,44432	0,26406	0,10947	0,09896

RÉFÉRENCES

[1] Damiani P., La mesure du niveau de santé. *Journal de la Société de statistique de Paris*, n° 2 1973.

[2] Labat J.-C., Données de démographie régionale, 1962. Collection D5, I. N. S. E. E., mars 1970.

[3] Owen G., Game theory. W. B. Saunders Co. Philadelphia, U. S. A., 1968.

[4] Vajda S., Théorie des jeux et programmation linéaire. Dunod, Paris, 1959.

[5] I. N. S. E. E., Annuaire statistique.

[6] I. N. S. E. E., Recensement de 1962. Population de la France. Population, ménages, logements.

[7] I. N. S. E. E., Statistique des causes de décès. Volumes biannuels.

[8] Ministère des Affaires sociales. Bulletins « Statistiques », *Santé publique et population*, n° 1, 1966 et nos 3-4, 1966.

[9] S. E. I. T. A., La consommation de tabac en France, 1964.