Journal de la société statistique de Paris

J.-J. Rosa

Équilibre et prix du risque sur le marché à terme de la bourse de Paris

Journal de la société statistique de Paris, tome 113 (1972), p. 198-214
<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1972__113__198_0>

IV

VARIÉTÉS

ÉQUILIBRE ET PRIX DU RISQUE SUR LE MARCHÉ A TERME DE LA BOURSE DE PARIS [1]

Le progrès le plus intéressant de la théorie des choix financiers au cours des dernières années résulte du passage de la théorie normative des choix de portefeuille à la théorie positive de l'équilibre sur les marchés à risque. L'analyse des choix optimaux des placeurs entre divers actifs financiers risqués a connu des perfectionnements décisifs et l'on sait à présent définir la composition d'un portefeuille efficient au niveau microéconomique. Il est aussi possible d'aller plus loin et, à partir de l'étude des comportements individuels rationnels, de déduire les résultats qui en découlent pour le marché des capitaux tout entier et, en particulier, le rapport qui doit exister à l'équilibre entre le risque et le rendement de chaque actif.

Le poncif de la Bourse, marché parfait, est alors soumis à appréciation critique et évaluation quantitative. Il devient en effet possible de mesurer la distance qui sépare fonctionnement effectif et fonctionnement efficient du marché. Les interrogations actuelles sur le marché de Paris pourront être confrontées à une analyse rigoureuse établissant le bilan de la situation et indiquant le chemin qui reste à parcourir dans le sens d'une amélioration de son fonctionnement.

A partir d'un bref rappel de la théorie normative des choix de portefeuille, nous exposerons succintement la théorie de l'équilibre des marchés de capitaux pour vérifier ensuite empiriquement le degré d'efficience du marché du terme, c'est-à-dire la mesure dans laquelle il réalise une allocation correcte des fonds de placement grâce à un prix du risque qui reflète exactement les caractéristiques des actifs.

Un marché parfait, on le sait, est un marché qui établit un prix unique pour des produits de même qualité : en étudiant la rationnalité du prix des actions par rapport à la qualité-risque de celles-ci nous constaterons la grande imperfection du marché de Paris à cet égard.

Les conclusions à tirer intéressent plusieurs groupes d'agents économiques :

— Les autorités économiques et notamment la Commission des opérations de bourse pour laquelle une poursuite de l'effort d'analyse et d'information s'impose.

— Les analystes financiers et gestionnaires de portefeuilles dont l'activité consiste à éclairer le mieux possible les choix financiers et qui contribuent par là même à améliorer la qualité du « pricing » sur le marché.

1. Je remercie M. Edmond Malinvaud d'avoir bien voulu me faire part de ses critiques et d'avoir attiré mon attention sur certaines insuffisances d'une version initiale de ce texte ainsi que mon collègue Georges Gallais-Hamonno qui m'a fait bénéficier de ses commentaires. Les erreurs ou imprécisions qui peuvent subsister ne doivent être imputées qu'à l'auteur qui en porte toute la responsabilité.

— Les particuliers pour qui, en attendant une éventuelle rationalisation du marché, il est de la plus haute importance de recourir à des procédures normatives de choix de portefeuille. En effet ce qui est vrai aux États-Unis ne l'est pas en France. Compte tenu des différences de fonctionnement il y a ici des gains non négligeables à réaliser par une composition judicieuse du portefeuille et il est tout à fait possible de « battre le marché ». L'opposé est strictement vrai : il est fort possible, par une mauvaise sélection, de perdre beaucoup.

I. De la théorie des choix de portefeuille a la théorie des marchés d'actifs risqués

Nous rappelerons les normes qui doivent guider le choix du portefeuille au niveau microéconomique pour étudier ensuite, au niveau de l'équilibre général du marché, les résultats nécessaires que de tels comportements produiront.

A. La théorie normative microéconomique

Les actifs financiers sont caractérisés par l'incertitude de leur rendement. La théorie des choix de portefeuille développée initialement par Markowitz ([1]) tient compte explicitement de ce fait et utilise le calcul des probabilités pour déterminer la composition optimale des portefeuilles risqués. A côté des considérations de rendement et de moyenne des rendements elle introduit la considération du risque, mesuré par un indice de dispersion des rendements autour de leur moyenne. Cette innovation aboutit à mettre l'accent davantage sur les portefeuilles que sur les actifs individuels. En effet, si l'on tient compte uniquement des rendements, il suffit de classer les actifs par ordre de rendement décroissant et de ne conserver que le premier qui constitue alors à lui seul tout le portefeuille. Au mieux dans cette optique on peut envisager de détenir plusieurs actifs sans que les caractéristiques du portefeuille total ne diffèrent de la moyenne de celles des actifs le composant.

Au contraire l'introduction explicite du risque conduit à envisager les avantages de la diversification car les variations de rendement des divers actifs ne s'effectuent pas dans le même sens ni avec la même ampleur au cours d'une période donnée. La mesure du degré de parallélisme ou d'opposition dans l'évolution de deux actifs s'obtient en calculant la covariance.

C'est à partir des deux éléments du risque, fluctuations totales autour de la moyenne et fluctuations comparées d'un actif par rapport aux autres, qu'a été élaborée la théorie moderne du portefeuille.

La méthode peut être exposée de façon relativement simple dans le cas où le nombre des actifs est limité à deux. Nous prendrons ici le cas de deux actions puisque notre sujet est le marché du terme.

Rappelons que le rendement d'une action au cours d'une période t est défini comme :

$$R_t = [(D_t + (P_t - P_{t-1})]/P_{t-1}$$

Avec : D_t = dividende versé dans la période t.

P_t = cours de l'action à la fin de la période t.

P_{t-1} = cours de l'action à la fin de la période t-1.

1. Harry Markowitz, Portfolio Selection : Efficient Diversification of Investments. Wiley, 1959.

Si nous considérons un nombre suffisant de périodes, et en raison du grand nombre de facteurs qui exercent une influence sur la fixation des cours individuels, on peut admettre que le rendement est une variable aléatoire gaussienne. Les paramètres de la distribution, l'espérance mathématique et la variance du rendement s'expriment :

$$E(R) = \sum_t \text{prob}(R_t) \cdot R_t$$

$$V(R) = \sigma^2(R) = \sum_t \text{prob}(R_t) \cdot [R_t - E(R)]^2$$

Ainsi, pour deux actions A et B, nous définissons de la même façon :

Rat et Rbt : rendements de A et de B dans la période t.
Ea et Eb : espérances des rendements.
$Va = \sigma_a^2$ et $Vb = \sigma_b^2$: variances des rendements.

Posons :

$$Ea < Eb$$

$$Va < Vb$$

Un portefeuille est défini par les proportions des actions A et B dont il est composé, soit X_a et X_b.

Nous avons

$$X_a + X_b = 1$$

$$X_a \geqslant 0, X_b \geqslant 0$$

A tout instant le rendement du portefeuille est la moyenne pondérée des rendements des deux actions qui le composent.

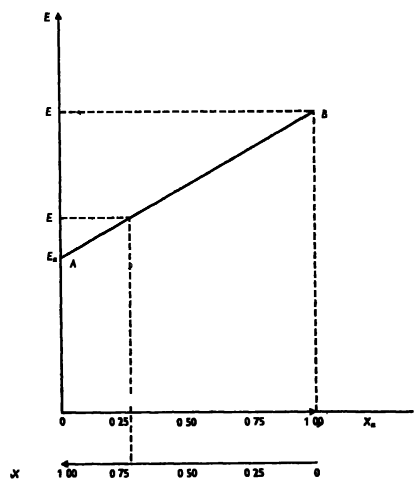
$$R_{pt} = X_a R_{at} + X_b R_{bt}$$

Il s'ensuit que le rendement du portefeuille est aussi une variable aléatoire gaussienne. L'opérateur espérance étant un opérateur linéaire nous avons :

$$E_p = X_a E_a + X_b E_b$$

L'espérance de rendement du portefeuille est linéaire en X_a et X_b ainsi que l'illustre la figure 1.

FIGURE 1



La variance du portefeuille demande un calcul un peu plus compliqué mais fondamental pour la théorie. Par définition de la variance,

$$V_p = \sigma_p^2 = \sum_t \text{prob}\,(R_{at}, R_{bt}) \cdot (R_{pt} - E_p)^2$$

Soit en développant,

$$V_p = \sum_t \text{prob}\,(R_{at}, R_{bt}) \cdot (X_a R_{at} + X_b R_{bt} - X_a E_a - X_b E_b)^2$$

ou

$$V_p = \sum_t \text{prob}\,(R_{at}, R_{bt}) \cdot [X_a(R_{at} - E_a) + X_b(R_{bt} - E_b)]^2$$

$$V_p = X_a^2 V_a + X_b^2 V_b + 2X_a X_b \sum_t \text{prob}\,(R_{at}, R_{bt}) \cdot (R_{at} - E_a)\,(R_{bt} - E_b)$$

Le dernier terme sommé est par définition la covariance de R_a et R_b.

D'autre part on sait que :

$$\rho ab = \sum_t \text{prob}\,(R_{at}, R_{bt}) \left(\frac{R_{at} - E_a}{a}\right) \left(\frac{R_{bt} - E_b}{b}\right)$$

est le coefficient de corrélation entre R_a et R_b. On remarque par conséquent que la covariance s'exprime directement en fonction du coefficient de corrélation et des écarts-types des rendements :

$$\text{Cov}\,(R_a, R_b) = \rho_{ab}\,\sigma_a\,\sigma_b$$

Il en résulte l'expression finale de la variance du portefeuille :

$$V_p = X_a^2 V_a + X_b^2 V_b + 2X_a X_b\,\rho_{ab}\,\sigma_a\,\sigma_b$$

La variance du rendement du portefeuille dépend des proportions dans lesquelles les deux actions sont détenues et, les paramètres de dispersion des distributions individuelles des rendements étant donnés, elle est porportionnelle à la covariance entre les rendements des actions composant le portefeuille.

Celle-ci a toujours une valeur comprise entre + 1 et — 1. Cela correspond à un parallélisme d'évolution systématique dans le premier cas et à une divergence systématique dans le second. Dans le premier cas la variance du portefeuille — toutes choses égales par ailleurs — sera à son maximum, tandis que le minimum de la variance sera atteint pour une valeur de la covariance égale à — 1.

La figure 2 illustre les caractéristiques de rendement espéré et de variance des portefeuilles composés des deux mêmes actions A et B dans le cas où la covariance entre les rendements des deux actifs prend successivement les valeurs + 1, + 0,5, 0, — 0,5, — 1.

Les portefeuilles contenant A et B en proportions variables se situeront sur les courbes AB correspondant au niveau donné de la covariance entre les rendements des deux actifs. Ainsi un portefeuille comportant moitié de A et moitié de B aura pour espérance la moyenne arithmétique des espérances de A et de B. Mais sa variance ne sera la moyenne des variances de R_a et de R_b que dans le cas où la covariance des rendements de A et de B sera égale à + 1. Au contraire dans le cas où la covariance égale — 1, la variance du rendement de portefeuille sera inférieure à la variance du rendement de chacune de ses composantes.

Une covariance très faible ou négative permet de réduire considérablement le risque du portefeuille par rapport à celui de chacune de ses composantes. *C'est la justification fondamentale de la technique statistique de diversification du portefeuille.*

Il résulte de ce qui précède que la connaissance *a priori*, ou plus exactement la quantification prévisionnelle, d'une matrice des covariances-variances des rendements de plusieurs actifs constituant l'univers de placement, ainsi que celle du vecteur des espérances de rendement, permettent de définir — à un moment donné — les caractéristiques de rendement et de risque de l'ensemble des portefeuilles possibles, par simple généralisation du cas particulier de deux actifs.

Le domaine comprenant l'ensemble des portefeuilles possibles est obligatoirement convexe par rapport à l'axe des espérances de rendement puisque la covariance entre deux portefeuilles quelconques Y et Z est au plus égale à 1. Dans ce cas toutes les combinaisons possibles entre les deux portefeuilles se situent dans l'espace E_p — V_p sur le segment de droite YZ. Mais dès que l'on introduit un portefeuille dont la covariance avec un des précédents est inférieure à 1, les nouvelles combinaisons se situent sur une courbe convexe par rapport à l'axe des espérances ainsi que l'illustre la figure 2 dans le cas des actions individuelles. Comme enfin on peut combiner à l'infini les portefeuilles et non seulement les actifs individuels, on finira toujours par délimiter un domaine convexe.

FIGURE 2

1. On remarque que le portefeuille composé en parts égales de A et de B a une espérance E_p égale à la moyenne des espérances E_a et E_b.

Par contre sa variance sera égale, selon les valeurs prises par Cov (R_a, R_b) respectivement aux abscisses des points C, D, F, G, H.

Enfin le point particulier M, qui bénéficie d'un rendement *certain*, est caractérisé par un niveau minimum de la variance du portefeuille pour Cov $(R_a, R_b) = -1$, comme les points N, P, Q, pour les autres valeurs de la covariance. Ces points correspondent aux valeurs particulières de X_a et de X_b qui annulent la dérivée de l'expression de la variance du portefeuille.

Ainsi pour le point M,

$$V_p = X_a^2 V_a + X_b^2 V_b - 2 X_a X_b \sigma_a \sigma_b$$

soit, en remplaçant X_b par $1 - X_a$:

$$V_p = X_a^2 V_a + (1 - X_a)^2 V_b - 2 X_a (1 - X_a) \sigma_a \sigma_b$$

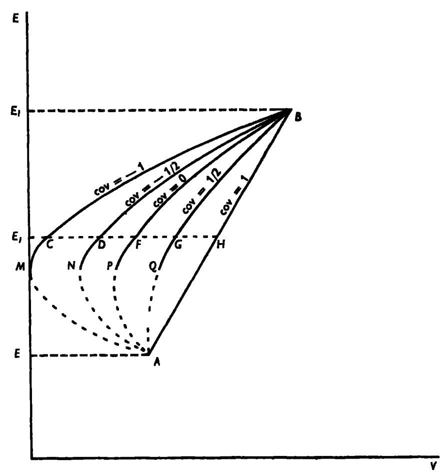
$$V_p = X_a^2 V_a + V_b - 2 X_a V_b + X_a^2 V_b - 2 X_a \sigma_a \sigma_b + 2 X_a^2 \sigma_a \sigma_b$$

La valeur optimale de X_a soit $\hat{X}_a$ est obtenue en dérivant V_p par rapport à X_a et en annulant la dérivée. Ce qui donne :

$$\partial V_p / \partial X_a = 2 X_a (\sigma_a + \sigma_b)^2 - 2 (V_a + \sigma_a \sigma_b) = 0$$

D'où $\hat{X}_a = (V_a + \sigma_a \sigma_b) / (\sigma_a + \sigma_b)^2$

et $\hat{X}_b = -\hat{X}_a + 1$



Parmi l'infinité de portefeuilles possibles de la figure 3 on distingue des portefeuilles particuliers qui se trouvent sur la frontière du domaine convexe défini. Ce sont les portefeuilles pour lesquels, à niveau donné de risque, le rendement est supérieur à celui de tout autre portefeuille de même niveau de risque, ou, à niveau donné de rendement espéré, le risque est inférieur à celui de tout autre portefeuille de même niveau de rendement espéré.

soit

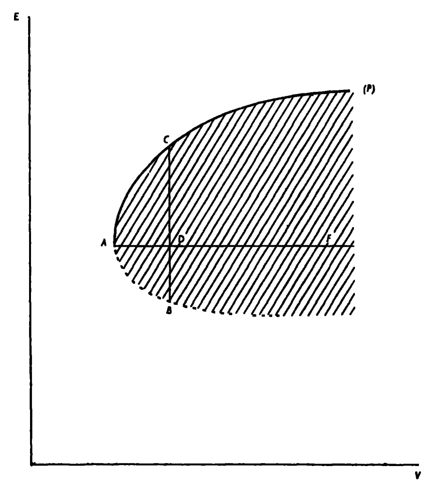
pour	$V_A = V_B$	$E_A > E_B$	$\forall B$
ou pour	$E_A = E_B$	$V_A < V_B$	$\forall B$

Ce sont les portefeuilles *efficients* ou *dominants* situés sur la *frontière de possibilité de placement à risque, P.*

Il est clair en effet que, quelles que puissent être par ailleurs les préférences du placeur concernant le niveau de risque qu'il accepte, le portefeuille C est préférable au portefeuille B ou D, et le portefeuille A préférable au portefeuille D ou F (1).

La théorie du choix de portefeuille consiste à calculer la composition d'un grand nombre de portefeuilles situés sur la frontière parmi lesquels le placeur choisira en fonction de l'utililité du rendement recherché et du niveau de risque qu'il accepte. De nombreux algorithmes d'ordinateur existent qui permettent de résoudre ce problème (2).

Figure 3



1. La portion de courbe $A(P)$ représente la frontière des possibilités de placement, c'est-à-dire le lieu des portefeuilles efficients défini en fonction du critère moyenne-variance ($M — V$ ou $E — V$). Les portefeuilles situés sur la frontière dans la portion en pointillé sont inefficients, car tout portefeuille tel que B est clairement dominé par un portefeuille tel que C.

L'ensemble du domaine des portefeuilles possibles (et inefficients) est le domaine hachuré.

B. La formation des prix sur les marchés financiers et le modèle de marché.

Jusqu'à présent nous ne disposons que d'un critère de présélection des actifs risqués qui permet au placeur d'éliminer les portefeuilles inefficients ou dominés. Dans un deuxième temps le recours à une fonction d'utilité spécifique du placeur dans l'espace E-V permet de déterminer la composition optimale de son portefeuille sur la frontière $A(P)$.

Mais nous ne savons rien encore sur les conditions d'équilibre des marchés financiers ni sur la formation du prix qui les distingue, le prix du risque.

Comme tout marché en effet, le marché financier a pour fonction de permettre la rencontre d'une offre et d'une demande en établissant un prix unique pour un produit homogène. Le produit échangé sur les marchés financiers est une perspective risquée de rendement, en bref un risque si l'on prend ce terme dans son acception à la fois positive (une perspective de gain) et négative (une perspective de perte) qui sont inséparables. Il est généralement admis de façon vague que le marché fixe le prix des actifs (et donc leur rendement) en fonction des risques afférents à ces derniers de manière que les actifs ayant une faible qualité-risque aient un prix plus faible et un rendement supérieur à celui des actifs peu risqués. Ainsi le marché établit une prime de risque pour chaque actif.

Un marché efficient, et en équilibre, est celui qui traduit fidèlement dans ses prix les différences de qualité des actifs échangés.

1. Ceci toutefois sous réserve d'un comportement « normal » à l'égard du risque, c'est-à-dire d'un comportement d'aversion pour le risque, et non pas de celui d'un « joueur ».

2. Pour une solution concernant le marché boursier français voir : J.-J. Rosa, « Le portefeuille sur mesure », revue *Banque*, mai 1972.

La théorie normative des choix de portefeuille exposée précédemment se prolonge en une théorie des marchés de capitaux qui précise les relations existant entre les portefeuilles à l'équilibre comme celles qui s'établissent entres les actifs individuels.

La démonstration théorique exige un certain nombre d'hypothèses restrictives. Celles-ci sont toutefois assez raisonnables et compatibles avec la réalité.

Hypothèse 1. Les placeurs sur les marchés financiers manifestent une aversion pour le risque, c'est-à-dire que leurs fonctions d'utilité dans l'espace *E-V* sont concaves. Pour des raisons de commodité on utilise en général une fonction d'utilité quadrarique.

Hypothèse 2. Chaque placeur agit, explicitement ou implicitement, en fonction des prévisions qu'il fait sur l'évolution future des rendements des divers actifs et en particulier en fonction des estimations des espérances de rendements et de la matrice des variances-covariances des divers actifs.

Il choisit les éléments de son portefeuille selon le critère d'efficience *E-V* exposé ci-dessus.

Hypothèse 3. La structure du marché est atomistique.

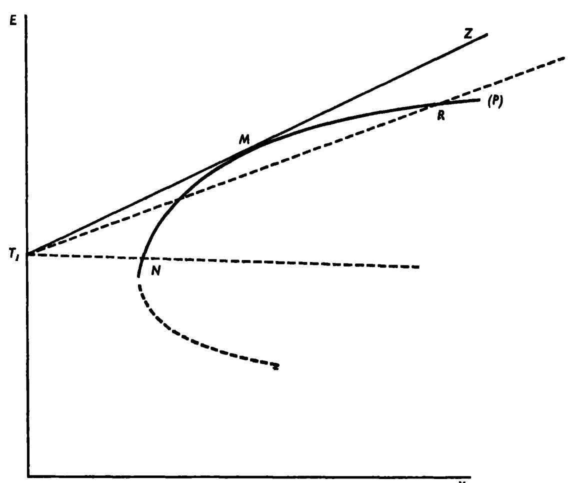
Hypothèse 4. On ne tient compte ni des coûts de transaction ni des impôts sur les valeurs mobilières ou, éventuellement, sur les gains en capital.

Hypothèse 5. La période d'investissement considérée, ou horizon décisionnel, est unique et la même pour tous les placeurs.

Hypothèse 6. Enfin on introduit un élément nouveau qui peut faire l'objet des choix des placeurs, *l'actif non risqué* qui est caractérisé par un rendement certain qualifié de taux d'intérêt « pur », c'est-à-dire ne rémunérant que la préférence pour le temps, l'abstention de consommation, sans prime de risque. A ce taux, T_p, les agents économiques peuvent prêter ou emprunter pour un montant discrétionnaire. Ce taux est unique dans une période donnée.

On montre [1] que l'introduction de l'actif non risqué modifie sensiblement les choix des placeurs. En effet les portefeuilles qui comportent un mélange d'actifs risqués situés sur la frontière $A(P)$ et de l'actif non risqué dominent nettement les portefeuilles qui ne comprennent que des actifs risqués. Sur la figure 4, la droite T_pM domine en effet la frontière $A(P)$ en ce sens que les portefeuilles situés sur T_pM sont tous plus efficients que les porte-

FIGURE 4



1. James Tobin, « Liquidity Preference as Behavior Towards Risk ». Rev. of Ec. Studies, février 1958, pp. 65-86.

feuilles de la frontière $A(P)$ compte tenu de la définition précédemment donnée du portefeuille efficient.

Entre T_p et M se trouvent les portefeuilles dont une partie est placée en actions et une partie prêtée sans risque [1], tandis qu'au-delà de M sur MZ le placeur a emprunté pour placer plus que sa richesse initiale en actions [2].

On constate également que T_pMZ domine toute série de combinaisons de T_p avec d'autres portefeuilles que M, telles que celles situées sur T_pN ou T_pR. Par conséquent tous les placeurs, qui ont un comportement rationnel par hypothèse, se situeront sur T_pMZ. Le point exact choisi dépendra de la forme de leurs courbes d'indifférence à l'égard du risque. Le « rentier » se rapprochant de T_p, tandis que le « joueur » se placera au-delà de M, mais tous détiendront le portefeuille M comme une fraction de leur portefeuille total.

Il s'ensuit une conclusion inéluctable : *A l'équilibre, la combinaison optimale d'actifs risqués (M) doit comprendre tous les actifs du marché.*

En effet, chaque placeur voudra détenir le portefeuille M. Une action qui ne serait pas comprise dans M verrait donc son prix tomber à zéro, faute d'acheteurs. Mais alors, compte tenu de l'espérance des versements de dividendes donnée et indépendante du cours de l'action, cela signifierait que son rendement espéré augmenterait considérablement. Dans ces conditions son rapport prix-gain espéré deviendra suffisamment élevé pour qu'elle soit à nouveau susceptible de figurer dans le portefeuille optimal. En termes statistiques, la baisse de son prix contribue à modifier la distribution de probabilité jointe de tous les rendements et donc à modifier la composition initiale du portefeuille initial qui, rappelons-le, ne comprenait pas cette action.

Le portefeuille M est ainsi le portefeuille de marché. *La droite T_pMZ est la droite d'équilibre des portefeuilles.*

L'équation de cette droite est immédiate :

$$E_p = T_p + pr_e \cdot V_p$$

avec : T_p = taux d'intérêt « pur »

pr_e = prix du risque pour les portefeuilles efficients, ou pente de la droite.

Il s'ensuit que si E_m et V_m sont l'espérance du rendement et la variance du rendement du marché tout entier, on a :

$$pr_e = (E_m - T_p) \,/\, V_p$$

Il s'agit donc bien du prix du risque, c'est-à-dire de l'excédent de rendement que l'on peut obtenir sur le marché en assumant une unité de risque supplémentaire [3].

1. Il y a une grande difficulté à définir pratiquement l'actif non risqué. L'exemple le plus souvent cité est celui des Bons du Trésor dans la mesure où ils ne comportent pas de risque de faillite du débiteur et garantissent un revenu certain. On peut toutefois noter qu'il existe cependant un léger risque sur le principal dû à l'inflation.

2. La possibilité d'emprunter à un taux fixe des montants illimités est évidemment irréaliste pour deux raisons : elle néglige la considération du risque de ruine du côté de l'emprunteur qui ne peut jouer sans restriction sur l'effet de levier de l'emprunt. Mais ceci apparaît dans les courbes d'indifférences dans l'espace $E—V$ qui caractérisent la fonction d'utilité du placeur. Tout dépend alors de cette fonction que nous avons laissé de côté dans nos développements. Il n'y a pas de raison *a priori* de supposer qu'elle soit telle qu'elle signifie une indifférence du placeur à l'égard du risque de ruine. Par conséquent les points les plus éloignés sur MZ seront en fait plus hypothétiques qu'effectifs, mais cela ne nuit en rien à la théorie.

D'autre part, du côté du prêteur, il est peu probable que le risque de ruine de l'emprunteur ne soit pas envisagé. Par conséquent il est aussi probable que le taux T_p ne restera pas constant au-delà d'un certain montant d'emprunt et devra incorporer une prime de risque.

Ceci aboutirait à modifier l'allure de T_pMZ au-delà de M et à transformer la demi-droite MZ en une courbe concave par rapport à l'axe des V. Des recherches sont actuellement en cours sur cet aspect de la théorie.

3. Notons que l'on utilise aussi bien en général σ_p au lieu de V_p dans l'équation de la droite d'équilibre et dans le problème de choix de portefeuille sans altérer les conclusions.

Mais cette relation ne vaut pas pour les portefeuilles inefficients ou pour les actions individuelles qui sont de fait des portefeuilles inefficients puisque leur covariances, prises deux à deux, est en général inférieure à $+1$.

Sharpe [1] démontre qu'à l'équilibre tous les actifs risqués individuels se trouvent alignés sur une droite qu'il nomme *droite d'équilibre des titres.* L'équation de la droite d'équilibre des actions individuelles est :

$$E_i = T_p + pr_t \cdot \mathrm{Cov}\,(R_i, R_m)$$

avec : E_i = espérance du rendement de l'action i

$\mathrm{Cov}\,(R_i, R_m)$ = covariance des rendements de l'action i et du rendement du marché tout entier.

pr_t = prix du risque à l'équilibre pour les actions individuelles.

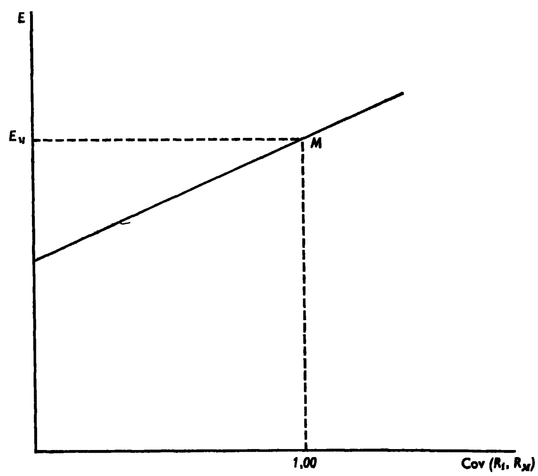
Son expression est :

$$pr_t = (E_i - T_p) \,/\, \mathrm{Cov}\,(R_i, R_m)$$

ce qui est l'expression de la pente de la droite T_pM de la figure 5.

Tous les actifs individuels (les actions du terme de la Bourse de Paris dans cette étude) doivent alors, si les conditions d'équilibre et d'efficience de marché sont respectées, se situer sur une droite semblable à celle de la figure 5.

FIGURE 5



II. La vérification empirique sur le marché a terme de la Bourse de Paris

La théorie se prête particulièrement bien à une vérification économétrique notamment sous la forme de la droite d'équilibre des titres puisqu'il existe de nombreuses données en ce domaine.

Une difficulté préalable doit être néanmoins résolue.

Dans tout ce qui précède nous avons eu recours aux anticipations subjectives des rendements de la part des placeurs, ou aux estimations des valeurs vraies des paramètres

1. William F. Sharpe, Portfolio Theory and Capital Markets, Mc Graw-Hill, 1970, Ch. 5. Nous reprenons la démonstration dans l'annexe 1.

des distributions des rendements supposées gaussiennes. Ceci ex ante. Or nous ne pouvons pas obtenir d'information directe sur ces estimations subjectives des placeurs. De plus ces estimations peuvent être erronées et le choix de portefeuille, qui était efficient ex ante, se révéler désastreux en cours de réalisation.

Nous devons en conséquence nous appuyer sur des hypothèses supplémentaires pour passer au stade de la vérification empirique.

D'une part nous supposerons que les espérances et les variances des rendements peuvent être estimées de façon satisfaisante à l'aide des échantillons de la population totale des rendements que constituent les données historiques (réalisées) sur les prix et les rendements des actions. Ainsi l'espérance du rendement sera approximée par le moment empirique qui est la moyenne des rendements historiques, et la variance sera estimée par le moment empirique qui mesure la dispersion autour de la moyenne historique. Ceci est admissible si les distributions sont réellement gaussiennes et si la population sous-jacente ne voit pas ses caractéristiques évoluer au cours des périodes pour lesquelles nous disposons de données.

D'autre part nous supposerons que les placeurs ont en général une bonne connaissance des moments réels et que leurs anticipations sont en majeure partie confirmées par les faits. Autrement dit les choix de placement sont effectués en fonction des caractéristiques vraies des actifs. Les droites d'équilibre ex ante correspondent bien aux droites d'équilibre ex post.

Ces réserves étant faites, la vérification empirique sera menée en deux étapes. Nous rejetterons d'abord, après les avoir testées, les interprétations de l'analyse du risque antérieures au « modèle de marché » de Sharpe et Lintner, puis nous estimerons la droite d'équilibre des titres et la droite d'équilibre de marché qui en découle (1).

A. L'analyse du risque antérieure au modèle de marché

Dans un article de 1969, G. Douglas (2) se propose de mesurer le risque sur le marché des actions et d'obtenir du même coup des indications quantitatives sur le degré d'efficience de celui-ci. Pour ce faire il essaie de vérifier l'hypothèse selon laquelle le marché dans son ensemble perçoit correctement le risque des actions individuelles et établit leur prix (et donc par là même leur rendement) en conséquence. Il effectue des ajustements de régression du type :

$$E_i = a + b\,\sigma_i - cV_i + u_i$$

et

$$E_i = a + bV_i - c(V_i)^2 + u_i$$

Malgré la ressemblance avec la droite d'équilibre des portefeuilles de Sharpe, cette formulation est suspecte car elle applique à des actions individuelles l'équation du lieu d'équilibre des portefeuilles efficients. Or nous savons que les actions prises isolément ne constituent que des portefeuilles inefficients.

D'ailleurs l'auteur utilise la même formule dans le cas des Mutuals Funds sans faire de différence, au plan théorique, entre ses deux tentatives. Aussi les résultats obtenus, qui ne sont pas bons du point de vue de l'ajustement statistique (le coefficient de corrélation multiple est égal à 0,37 pour la première équation et 0,03 pour la seconde), ne semblent pas significatifs économiquement.

1. On montre en effet (annexe 1) que $pr_i = pr_e/\sigma_m$.
2. Georges W. Douglas, « Risk in the Equity Markets : An Empirical Appraisal of Market Efficiency ». Yale Economic Essays, Spring 1969, pp. 3-45.

Nous avons recherché une confirmation de notre critique en effectuant des ajustements de même type sur le marché de Paris.

L'échantillon utilisé comprend les cours et les rendements de 135 actions du terme [1] disponibles sur une série de 50 mois à partir de janvier 1967. Nous avons calculé les moments empiriques, moyenne et dispersion, de chaque action pour l'ensemble de la période ainsi que ceux du rendement pondéré de l'ensemble des 135 valeurs qui constitue notre indice de marché [2].

De plus nous avons calculé, conformément au modèle de marché, ou modèle « diagonal », les covariances des rendements de chacune des actions avec le rendement du marché.

A partir de ces données nous effectuons les ajustements linéaires qui figurent au tableau 1. On constate que les résultats ne présentent aucune signification statistique, ce qui tend à confirmer la critique de Douglas que nous venons de faire.

TABLEAU 1

Le prix du risque selon la méthode de Douglas

Forme de l'equation testée	Constante	Variables explicatives utilisées			R^2	F
		σ_i	V_i	$(V_i)^2$		
$E_i = f(\sigma_i)$	3,75 (15,27)	0,38 (2,65)			0,05	7,04
$E_i = f(\sigma_i + V_i)$	3,64 (9,24)	0,51 (1,27)	— 0,02 (0,38)		0,05	3,57
$E_i = f(V_i)^2$	4,28 (27,68)			0,0009 (1,46)	0,01	2,13
$E_i = f(V_i)$	4,14 (32,31)		0,06 (2,28)		0,03	5,21
$E_i = f(\sigma_i + (V_i)^2)$	3,69 (12,56)	0,43 (2,22)		— 0,0003 (0,37)	0,05	3,57
$E_i = f(V_i + (V_i)^2)$	4,01 (22,13)		0,12 (2,14)	— 0,001 (1,24)	0,04	3,39

N. B.. Les valeurs du t de Student figurent entre parentheses sous les coefficients de regression.

B. Le test de la droite d'équilibre des titres

A partir du même échantillon nous avons effectué l'ajustement de régression correspondant au modèle théoriquement correct de la droite d'équilibre des titres. On obtient :

$$E_i = 3{,}88 + \underset{(3,38)}{0{,}058} \cdot \text{Cov}\,(R_i, R_m)$$

$$R^2 = 0{,}281$$

$$F = 11{,}43 \text{ avec 134 degrés de liberté}$$

1. Les 135 actions ont été choisies en raison de la continuité des données statistiques dans la période retenue, 1967-1970. En éliminant les actions dont la cotation était interrompue au cours de la période, le plus souvent en raison d'une absorption ou d'une fusion de société, nous introduisons un certain biais dans les résultats puisque nous éliminons de notre échantillon le risque de perte plus ou moins total du capital qui est aussi une composante du risque global d'une action mais qu'il est difficile d'évaluer en toute rigueur.

2. La pondération retenue utilise pour chaque période mensuelle la capitalisation boursière de l'action comme poids de celle-ci.

Ces résultats appellent deux remarques :

1. La qualité de l'ajustement est statistiquement mauvaise et la valeur du coefficient de corrélation est très faible. Toutefois, par rapport aux précédentes régressions il est nettement plus élevé ce qui laisse supposer que la formulation théorique de Sharpe est supérieure à celle de Douglas.

Il reste que le prix du risque, 0,058, n'a qu'une signification très imprécise compte tenu du mauvais ajustement de la droite à travers le nuage des points observés. Cela permet de penser que la réalité n'est pas caractérisée par un prix du risque unique sur le marché comme ce serait le cas si tous les points observés étaient alignés. En d'autres termes, dans le cadre de la théorie qui a été présentée, le marché n'est pas efficient : le rendement des actions n'est pas proportionnel au risque, la prime de risque n'est pas en général établie de façon correcte par le marché. Toutefois ces affirmations ne valent que pour autant que la théorie représente bien les éléments essentiels de la réalité.

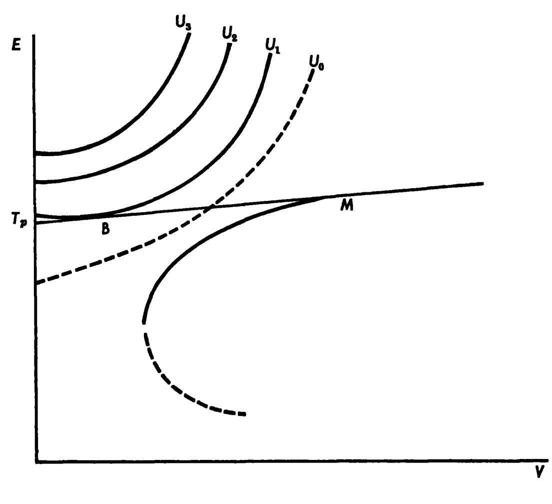
2. Nous pouvons facilement passer de l'estimation de pr_t à celle de pr_e lorsqu'on connaît la variance du marché.

Celle-ci étant de 6,61 pour notre échantillon, nous avons l'estimation suivante de la droite d'équilibre des portefeuilles :

$$E_p = 3{,}88 + 0{,}0043\ T_p$$

C'est une droite pratiquement horizontale.

FIGURE 6

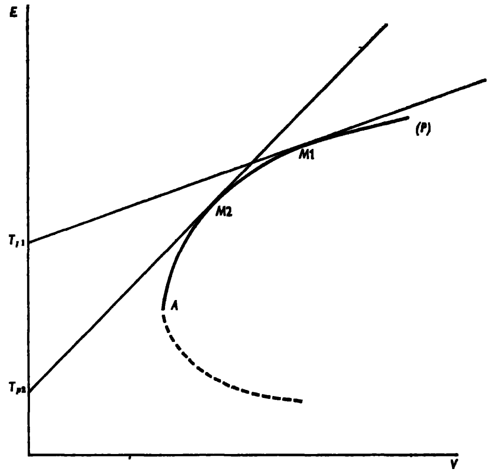


Le prix du risque, dont nous avons constaté le peu de signification; est de surcroît très faible. C'est-à-dire que l'acceptation de beaucoup de risque supplémentaire ne conduit pas à une espérance de rendement plus élevée, même pour des portefeuilles efficients.

Dans ces conditions, et pour un système de courbes d'indifférence donné, il est rationnel de donner dans le portefeuille une part prépondérante à l'actif non risqué au détriment des actions puisque les espérances de rendement sont sensiblement identiques.

Aussi les placeurs à gros portefeuille, qui de ce fait ont une composition de portefeuille qui se rapproche de celle du marché tout entier, n'ont pas intérêt à placer leurs fonds en actions.

FIGURE 7



On constate aussi que B est le portefeuille optimal pour le placeur ayant la fonction d'utilité U et se trouvant confronté à une droite d'équilibre des portefeuilles T_pM. Pour U donnée, une pente plus forte de T_pM déplacerait B vers la droite en le rapprochant de M.

III. CONCLUSION

On peut trouver plusieurs raisons au manque d'efficience constaté du marché du terme :

— On peut s'interroger tout d'abord sur la stabilité du taux d'intérêt pur dans la période considérée. Les amples fluctuations des taux nominaux au cours des dernières années pourraient expliquer des déplacements fréquents de la droite d'équilibre des portefeuilles comme il est indiqué sur la figure 7. Dans ce cas les portefeuilles optimaux se déplacent constamment et la régression sur quatre ans ne constitue qu'une moyenne sans signification qui passe à travers un nuage de points très dispersés. Mais on peut objecter que les variations des taux d'intérêt nominaux ne constituent en fait qu'une réponse aux variations de prix en incorporant une « prime d'inflation » qui laisserait inchangé le taux d'intérêt pur correspondant à la préférence pour le temps. Les travaux de Yohe et Karnosky mettent bien en évidence une remarquable stabilité des taux réels (1). Il n'empêche qu'un ajustement effectué sur les données nominales et non réelles doit être considérablement biaisé. Pourtant un ajustement sur les données nominales des Mutuals Funds fait par Sharpe aux États-Unis est très satisfaisant (2) du point de vue statistique. Il semble donc que le marché de Paris soit fondamentalement peu efficient.

1. W. P. YOHE et D. S. KARNOSKY, « Interest Rates and Price Level Changes », Review of the Federal Reserve Bank of St Louis, décembre 1969, pp. 19-36.

2. W. F. SHARPE, « Mutual Fund Performance », Journal of Business, janvier 1966, pp. 119-138.

— Une seconde explication est plus satisfaisante d'un point de vue théorique : elle résulte de l'abandon de l'hypothèse selon laquelle les taux d'intérêts débiteurs et créditeurs sont identiques et que, de plus, les taux sont les mêmes pour tous les emprunteurs et tous les prêteurs. On sait la diversité et l'inégalité des conditions de banque. Ceci détermine la coexistence de multiples taux T et par conséquent la multiplication des droites d'équilibres. Il n'y a plus de prix unique du risque ni de portefeuille optimal de marché.

— Une troisième explication tient à l'insuffisance des connaissances des placeurs en ce qui concerne les caractéristiques de risque-rendement des actions. Le prix de celles-ci ne reflète plus alors leurs caractéristiques réelles puisqu'un bon nombre de placeurs font des choix sous-optimaux et acceptent de conserver des portefeuilles dominés. De ce fait les prix ne s'ajustent pas et plusieurs prix du risque peuvent coexister durablement.

Ce type de comportement peut d'ailleurs s'expliquer de deux façons : soit erreur dans les prévisions d'évolution des prix et des rendements de la part d'un certain nombre de placeurs. Il s'agit alors d'un mauvais calcul économique et le marché n'est pas en équilibre puisque les portefeuilles individuels ne sont pas optimaux. Soit au contraire un calcul rationnel de la part des placeurs qui tiennent compte du coût de l'information nécessaire pour effectuer une appréciation et une prévision correctes. Leur portefeuille, quoique sous-optimal par rapport aux possibilités offertes par le marché est optimal du point de vue du calcul économique individuel. Il y a alors autant de frontières de possibilité de placement P que d'investisseurs ce qui contribue également à faire disparaître la possibilité d'une droite unique d'équilibre des portefeuilles.

En tout état de cause il faut constater la faible rationnalité du processus de fixation des prix sur le marché du terme.

Ceci a des conséquences pratiques importantes :

— On a souvent soutenu aux États-Unis que l'on ne pouvait au mieux que réaliser une performance de placement identique à celle du marché tout entier. On ne pouvait en d'autres termes « battre le marché ». C'est sans doute vrai dans un marché très informé où les arbitrages fréquents et systématiques induisent une formation des prix qui reflète fidèlement les caractéristiques de risque et de rendement des actions. Alors tous les portefeuilles se rapprochent de la droite d'équilibre des portefeuilles.

Mais ce n'est plus vrai sur un marché peu efficient dans lequel le portefeuille d'ensemble du marché n'est pas situé sur la frontière de possibilité de placement à risque. Le portefeuille de marché est sous-optimal parce qu'un certain nombre de portefeuilles sont très sous-optimaux, ce qui implique qu'il y ait par ailleurs des portefeuilles dominant nettement le marché.

A Paris, à condition de ne pas avoir de portefeuille de trop grande dimension par rapport au marché, on peut *réaliser une performance supérieure à celle du marché* ([1]) mais bien évidemment aussi il est probable que, faute d'information suffisante, on réalisera une performance très inférieure à celle du marché.

— Il convient donc de suivre une stratégie très différente de celle qui s'impose à New York.

Sur cette dernière place on peut concevoir une diversification aléatoire qui permet de réaliser une performance analogue à celle du marché ou même à celle de la plupart des Mutuals Funds. On a montré en effet ([2]) qu'à partir d'un nombre de 10 à 15 actions en portefeuille

1. J.-J. Rosa, *op. cit.*
2. John L. Evans, Diversification and the Reduction of Dispersion : An Empirical Analysis. Ph. D. Dissertation, Seattle, 1968.

le risque total du portefeuille était pratiquement égal au risque « systématique » qui est le risque de l'indice de rendement du marché tout entier. On peut donc espérer réaliser, sur une série de périodes, une performance analogue à celle de l'indice en tirant au sort une quinzaine d'actions parmi la cote.

Au contraire, à Paris, il y aurait tout intérêt à composer son portefeuille selon les règles de décision s'appuyant sur des données précises et une information plus élaborée. La perspective de gain vient justement de l'imperfection du marché — de son incapacité à absorber rationnellement l'information disponible — et par conséquent de l'avantage dont dispose celui qui utilise cette information.

Le rapport perspective de gain/coût de l'information et de la prévision est donc particulièrement élevé à Paris, ce qui pourrait peut-être expliquer la faveur nouvelle de la place auprès des investisseurs étrangers.

En revanche les risques de perte pour le placeur amateur sont élevés puisqu'aussi bien ce que gagnent les uns est payé par les autres.

ANNEXE

De la droite d'équilibre des portefeuilles à la droite d'équilibre des titres

La droite d'équilibre des portefeuilles a pour équation :

$$E_p = T_p + pr_e \cdot \sigma_p \tag{1}$$

Comme elle passe obligatoirement par le portefeuille de marché M dont les coordonnées sont E_m et σ_m, ainsi que le montre la figure 4, ainsi que par le point T_p, on voit que :

$$pr_e = (E_m - T_p) / \sigma_m \tag{2}$$

Peut-on passer de cette formulation des rapports d'équilibre entre les portefeuilles à une définition des rapports d'équilibre entre les actions individuelles? Pour cela étudions les portefeuilles composés d'une action i quelconque et du portefeuille de marché, M. Ces portefeuilles se trouvent sur la courbe iM et leur situation exacte dépend des proportions X_i et X_m qui entrent dans leur composition. On a :

$$X_i \geqslant 0, \qquad X_m \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad X_i + X_m = 1$$

Soit B un tel portefeuille.

$$E_B = X_i E_i + X_m E_m \tag{3}$$

$$V_B = X_i^2 V_i + X_m^2 V_m + 2 X_i X_m \rho_{im} \sigma_i \sigma_m \tag{4}$$

avec

E_i = espérance du rendement de i,

E_m = espérance du rendement du marché,

V_i = variance du rendement de i,

V_m = variance du rendement du marché,

ρ_{im} = coefficient de corrélation entre R_i et R_m.

En remplaçant X_m, proportion du portefeuille B qui est investie dans le portefeuille de marché M, par sa valeur, soit $1 - X_i$, et en rappelant que l'écart-type du rendement du portefeuille est la racine carrée de la variance, on obtient :

$$\sigma_B = [X_i^2 \sigma_i^2 + (1 - X_i)^2 \sigma_m^2 + 2X_i (1 - X_i) C_{im}]^{\frac{1}{2}} \tag{5}$$

avec

$$\begin{aligned} C_{im} &= \text{covariance du rendement de } i \text{ et du rendement de marché.} \\ &= \Sigma \text{ prob } (R_i, R_m) (R_i - E_i) (R_m - E_m) \\ &= \rho_{im} \sigma_i \sigma_m \end{aligned}$$

On obtient d'autre part l'expression de E_B :

$$E_B = X_i E_i + (1 - X_i) E_m \tag{6}$$

Nous avons introduit les caractéristiques d'une action isolée i, et les avons mises en rapport avec celles du marché tout entier M à travers les moments du portefeuille B. Examinons maintenant ce que sont ces relations à l'équilibre.

Sur un marché en équilibre la courbe iM de la figure 8 est obligatoirement tangente à la droite de marché T_pM au point M. S'il n'en était pas ainsi il y aurait des points de cette courbe, tels que A, qui domineraient la droite de marché. Or nous avons précédemment défini cette dernière comme le lieu des portefeuilles efficients. Il n'est donc pas possible qu'un portefeuille tel que A existe.

Puisque iM est tangente à T_pM au point M, les pentes de T_pM et de la tangente à la courbe iM en M sont égales par définition. Nous avons donc :

$$pr_e = s_m$$

s_m étant la pente de la tangente à la courbe iM.

Développons l'expression de s_m à partir de (5) et (6) puisque :

$$s_m = \partial E_B / \partial \sigma_B$$

Nous avons, par différentiation de σ_B^2 :

$$\partial \sigma_B^2 / \partial X_i = 2\sigma_B \sigma'_B \qquad \text{donc} \qquad \sigma'_B = (\partial \sigma_B^2 / \partial X_i) / 2\sigma_B \tag{7}$$

Soit, par application de (7) à (5) :

$$\partial \sigma_B / \partial X_i = [X_i (\sigma_i^2 + \sigma_m^2 - 2C_{im}) + C_{im} - \sigma_m^2] / \sigma_B \tag{8}$$

D'autre part :

$$\partial E_B / \partial X_i = E_i - E_m \tag{9}$$

$$\begin{aligned} s_m &= \partial E_B / \partial \sigma_B = (\partial E_B / \partial X_i) / (\partial \sigma_B / \partial X_i) \\ &= (E_i - E_m) / [(X_i (\sigma_i^2 + \sigma_m^2 - 2C_{im}) + C_{im} - \sigma_m^2) / \sigma_B] \end{aligned} \tag{10}$$

Au point M, $X_i = 0$ et $\sigma_B = \sigma_M$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} s_m &= (E_i - E_m) / [(C_{im} - \sigma_m^2) / \sigma_m] \\ &= (E_i - E_m) \sigma_m / (C_{im} - \sigma_m^2) \end{aligned} \tag{11}$$

Puisque $s_m = pr_e$ nous avons :

$$(E_i - E_m) \sigma_m / (C_{im} - \sigma_m^2) = (E_m - T_p) / \sigma_m \tag{12}$$

et :

$$E_i - T_p = [(E_m - T_p) / \sigma_m^2] C_{im}$$

c'est-à-dire :

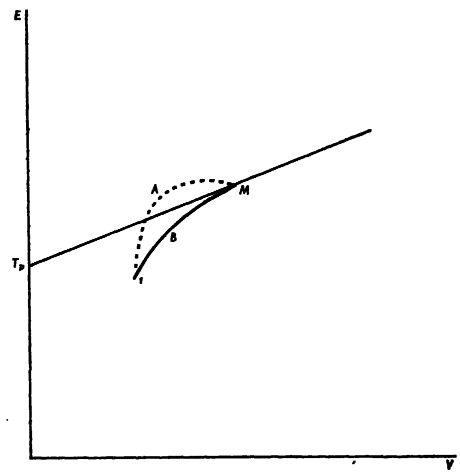
$$E_t = T_p + pr_t \cdot C_{tm} \tag{13}$$

puisque nous savons que :

$$pr_t = (E_m - T_p) / \sigma_m^2$$

(*13*) *est la droite d'équilibre des titres*, qui exprime les relations qui doivent exister, dans un marché efficient en équilibre, entre l'espérance de rendement et le risque de toutes les actions individuelles.

FIGURE 8



J.-J. ROSA

Maître de conférence agrégé de Sciences économiques

BIBLIOGRAPHIE

DOUGLAS G. W. — « Risk in the Equity Market : An Empirical Appraisal of Market Efficiency ». Yale Economic Essays, Spring 1969, pp. 3-45.

EVANS J. L. — Diversification and the Reduction of Dispersion : An Empirical Analysis. Ph. D. Dissertation, Seattle, 1968.

MARKOWITZ H. — Portfolio Selection : Efficient Diversification of Investments. Wiley, 1959.

ROSA J. J. — « Le portefeuille sur mesure », *Banque*, mai 1972.

SHARPE W. F. — « Mutual Fund Performance », Journal of Business, janvier 1966, pp. 119-138.

SHARPE W. F. — Portfolio Theory and Capital Markets. Mc Graw-Hill, 1970.

TOBIN J. — « Liquidity Preference as a Behavior Towards Risk », Rev. of Ec. Studies, février 1958, pp. 65-86.

YOCHE et KARNOSKY. — « Interest Rates and Price Level Changes » Review of the Federal Reserve Bank of St Louis, décembre 1969, pp. 19-36.