JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

F. ROSENFELD

La mesure des résultats de la gestion des portefeuilles de titres

Journal de la société statistique de Paris, tome 111 (1970), p. 208-222
<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1970__111__208_0>

III

LA MESURE DES RÉSULTATS DE LA GESTION DES PORTEFEUILLES DE TITRES

1. Concepts et calculs de base

1.1. *Le compte de gestion et ses résultats.*

Un *compte de gestion* peut être défini comme un ensemble de capitaux d'épargne utilisés, sous la direction d'un gestionnaire, à des placements destinés à produire des revenus. L'épargnant, individuel ou collectif, personne physique ou personne morale, qui confie ses fonds à un tel compte, entend pouvoir les en retirer sans difficulté et sans perte lorsqu'il en aura besoin. Cela implique que la gestion du compte soit fondée sur les *critères* suivants :

— *le revenu :* rémunérer les capitaux placés dans le compte;
— *la sécurité :* éviter les pertes en capital;
— *la protection du pouvoir d'achat :* éviter la perte due à la dépréciation de la monnaie par l'élévation de la valeur des capitaux en espèces en rapport avec la hausse générale des prix;
— *la liquidité :* permettre de retirer facilement les capitaux.

Ces critères ne sont pas indépendants les uns des autres et parfois même s'opposent. Un emploi très liquide est généralement d'un moindre rapport qu'un placement à terme, ou fortement immobilisé. De même, les possibilités d'un gain élevé offertes par un placement spéculatif entraînent le plus souvent des risques qui en réduisent la sécurité. Le gestionnaire doit en fait se fixer une politique et établir des règles de placement qui tendent à respecter un compromis entre ces critères, compromis qui puisse satisfaire le mieux possible les motifs animant les épargnants qui lui confient leurs fonds. La *gestion d'un compte* est précisément constituée par la détermination de la politique et des règles de placement, ainsi que par leur application pratique.

Le problème qui se pose alors est de mesurer et d'évaluer les résultats de la gestion afin de s'assurer qu'ils sont conformes à ce qu'en attendent les titulaires des comptes. On peut aussi vouloir comparer les résultats de plusieurs gestionnaires, ou de plusieurs politiques et règles d'action différentes, pour en tirer le meilleur parti à l'avenir.

Ce qui suit, concernant la mesure des résultats, pourrait s'appliquer à des comptes de gestion pratiquant des placements de toutes natures : valeurs mobilières, prêts hypothécaires, investissements immobiliers, ou autres. On aura cependant à l'esprit surtout le cas des placements en valeurs mobilières, c'est-à-dire celui des portefeuilles de titres (actions et obligations), qui sont les plus courants et aussi les plus souples du point de vue des opérations.

On désignera par *résultat* d'un compte de gestion au cours d'une période allant de l'instant T_0 à l'instant T_1 le montant des revenus retirés de ce compte majoré de l'augmentation de valeur acquise par les avoirs du compte entre le début et la fin de la période considérée. Cette augmentation est comptée en valeur algébrique, toute diminution étant considérée comme une augmentation négative. Soit R_1 le résultat ainsi défini.

Si l'on représente par A_0 la valeur totale des avoirs du compte à l'instant T_0, par A_1 cette valeur à l'instant T_1 et par $\Sigma\, a_j$ la somme algébrique des apports et des retraits de fonds effectués par le titulaire du compte, le résultat s'exprime comme suit :

$$R_1 = A_1 - A_0 - \Sigma\, a_j \tag{1}$$

Le mouvement a_j effectué à l'instant t_j ($T_0 < t_j < T_1$) est compté positivement s'il s'agit d'un apport et négativement s'il s'agit d'un retrait.

Il est facile de voir que cette expression représente la somme des revenus réalisés par le compte et des plus-values obtenues (ou moins-values subies) par les avoirs contenus dans le compte.

1.2. *La rentabilité d'un compte de gestion.*

On appellera *taux de rentabilité* d'un compte de gestion au cours d'une période donnée le taux d'intérêt auquel devraient être placés les capitaux du compte pour produire un résultat identique à celui réalisé effectivement par le compte.

On vient de voir que ce résultat est déterminé à partir de la connaissance de la valeur totale du compte au début et à la fin de la période et des montants des apports et des retraits. A partir de ces mêmes éléments et aussi de la connaissance de la durée de présence des capitaux dans le compte, c'est-à-dire de l'information concernant les dates des mouvements, le taux de rentabilité s'obtient en écrivant que la valeur actualisée, calculée à ce taux à une date donnée, de tous les apports (y compris la valeur initiale des avoirs du compte) est égale à la valeur actualisée de tous les retraits (y compris la valeur finale des avoirs du compte).

Si l'on désigne par b_j les apports à l'instant t_j et par c_j les retraits à cette même époque t_j et si l'on actualise les valeurs à la date T_1 de la fin de la période considérée, le taux de rentabilité annuel r doit satisfaire l'équation suivante :

$$A_0\,(1+r)^{T_1-T_0} + \sum b_j\,(1+r)^{T_1-t_j} = A_1 + \sum c_j\,(1+r)^{T_1-t_j}$$

En considérant que les retraits sont des apports de valeur négative et en désignant comme précédemment tous les mouvements par le nombre algébrique a_j, il vient

$$A_0\,(1+r)^{T_1-T_0} + \sum a_j\,(1+r)^{T_1-t_j} = A_1 \tag{2}$$

Si l'on utilise le taux d'intérêt continu ϱ, équivalent au taux annuel r, c'est-à-dire tel que $\varrho = \mathrm{Log}_e\,(1+r)$, l'équation permettant de calculer ce taux s'écrit :

$$A_0\, e^{\varrho(T_1-T_0)} + \sum a_j\, e^{\varrho(T_1-t_j)} = A_1 \tag{2 bis}$$

1.2. *La performance de la gestion*

On se pose très souvent la question de savoir dans quelle mesure le résultat obtenu, ou la rentabilité, sont dus à la qualité de la gestion plutôt qu'au mouvement d'ensemble du marché, ou encore à d'autres facteurs indépendants de la gestion. Pour répondre à cette question, un réflexe conduit à comparer le taux de rentabilité obtenu à un indice du marché boursier, mais on se rend vite compte que le recours à un tel indice est beaucoup plus complexe qu'il ne paraît au premier abord. L'analyse présentée ici même par M. Gallais

Hammono l'an dernier a été une excellente démonstration de cette complexité. Il est en particulier très difficile de trouver un indice régulièrement calculé et publié qui puisse représenter une tranche, ou une combinaison de tranches, de marché boursier correspondant au type de portefeuille géré; d'ailleurs ce portefeuille subit lui-même des variations dans sa structure et cela entraînerait à des changements dans les indices retenus pour la comparaison. La méthode proposée par M. Gallais Hamonno, qui consiste à construire lors de chaque comparaison un indice présentant la même structure que le portefeuille analysé est certainement une contribution appréciable à l'étude de ce problème.

Nous suivrons cependant ici une autre approche, pour faire le point de la question telle qu'elle a été traitée dans les milieux financiers des États-Unis au cours des dernières années. On peut considérer que les résultats d'un portefeuille résultent de l'action conjuguée de trois facteurs principaux :

a) la gestion proprement dite;

b) le mouvement d'ensemble du marché;

c) la chronologie des apports de fonds dans le portefeuille et de leurs retraits.

Pour être plus complets il faudrait prendre aussi en considération l'effet d'un quatrième facteur : la dépréciation monétaire. En fait, les conséquences de ce dernier facteur se trouvent englobées dans le mouvement d'ensemble du marché des valeurs et leur mise en évidence relève d'une analyse de ce mouvement.

On ne reprendra pas ici la distinction des effets des facteurs *a* et *b* ci-dessus, c'est-à-dire la comparaison des résultats avec les variations d'indices du marché boursier. Nous nous arrêterons davantage sur ce qui a particulièrement retenu l'attention aux États-Unis, à savoir sur la nécessité d'éliminer le troisième facteur pour mieux cerner les résultats dus à la gestion. En effet, la chronologie des apports et des retraits de fonds dépend uniquement de la volonté des titulaires des comptes; elle n'est pas le fait de celle des gestionnaires. Si les fonds affluent à un moment où les cours des valeurs sont élevés sur le marché, ou encore à la veille d'une baisse inattendue, la nécessité d'employer l'argent frais par des achats de titres aboutira à une diminution de la rentabilité; à l'inverse, le gestionnaire qui recevra des fonds à une époque de grande faiblesse du marché, aura des occasions de les investir avec profit. Les retraits demandés par les titulaires peuvent de même conduire à des ventes à des moments favorables ou à des moments défavorables.

C'est le résultat obtenu par la gestion, après élimination de ce seul facteur *c*, que les milieux financiers américains désignent par le terme de « performance ». Il est clair que la notion ainsi définie ne répond pas à l'idée plus précise que l'on peut avoir de l'efficacité de la gestion, laquelle devrait être mesurée après avoir éliminé aussi bien les autres facteurs indépendants de la gestion. Nous retiendrons néanmoins ici la définition de la « performance » telle qu'elle a été adoptée dans les milieux financiers des États-Unis (1) et nous verrons plus loin les solutions qui sont proposées pour la mesurer.

On peut déjà remarquer que si l'on considère un intervalle de temps au cours duquel aucun apport ni aucun retrait de fonds n'est effectué, la mesure de la rentabilité du portefeuille et celle de sa « performance » doivent donner des résultats identiques, puisque les seules différences sont dues à la prise en compte de la chronologie des mouvements, lesquels sont inexistants dans ce cas.

1. *Cf.* Rapport du Bank Administration Institute : Measuring the Investment Performance of Pension Funds. Park Ridge, Illinois, octobre 1968. Ce rapport a été établi sous la direction du Pr J. H. Lorie, de l'Université de Chicago.

2. Mesures approximatives du taux de rentabilité

Le calcul du taux de rentabilité d'un portefeuille devrait se faire à partir de la résolution de l'équation 2. Ce calcul est laborieux, l'équation étant un polynome en $1 + r$, comprenant de nombreux exposants fractionnaires $T_1 - t_j$. La résolution peut évidemment se faire par approximations successives et il sera le plus souvent utile d'utiliser la variable auxiliaire log $(1 + r)$ pour revenir à r à la fin des calculs. Si l'on ne dispose pas d'ordinateur scientifique, mais uniquement d'un ordinateur de gestion, ce type de calcul dépasse généralement les moyens de traitement habituels et l'on est conduit à rechercher des formules de calcul approché, à condition que la précision soit suffisante.

2.1. *Mesure approximative sur de courtes périodes.*

Lorsque la durée de la période considérée est relativement courte, par exemple un mois ou un trimestre, l'on peut négliger les puissances de r supérieurs à l'unité dans le développement en série des termes $(1 + r)^{T_1 - T_0}$ et $(1 + r)^{T_1 - t_j}$. L'équation (2) devient alors :

$$A_0 [1 + (T_1 - T_0)\, r] + \sum a_j [1 + (T_1 - t_j) r] = A_1$$

Cette approximation revient à faire les calculs à intérêts simples au lieu de le faire à intérêts composés; cela est justifié dans les intervalles de temps inférieurs ou égaux à une année car dans la pratique courante les intérêts ne se capitalisent que d'une année sur l'autre. On obtient ainsi pour r la valeur :

$$r = \frac{A_1 - A_0 - \sum a_j}{A_0 (T_1 - T_0) + \sum a_j (T_1 - t_j)} \tag{3}$$

On peut aussi écrire :

$$r = \frac{R}{(T_1 - T_0)\, C}$$

$$\text{où} \qquad C = A_0 + \sum a_j (T_1 - t_j)/(T_1 - T_0)$$

C est le capital *moyen présent* pendant toute la durée de la période.

Si la durée de la période est égale à l'unité, $T_1 - T_0 = 1$, on a :

$$r = \frac{A_1 - A_0 - \sum a_j}{A_0 + \sum a_j (T_1 - t_j)} = \frac{R}{C}$$

Dans le cas où les a_j sont nombreux et ont des valeurs relativement peu élevées par rapport à A_0, on peut admettre que les mouvements se situent en moyenne au milieu de la période :

$$T_1 - t_j = \frac{1}{2} (T_1 - T_0)$$

La valeur approximative de r devient :

$$r = \frac{A_1 - A_0 - \sum a_j}{A_0 (T_1 - T_0) + \frac{1}{2} (T_1 - T_0) \sum a_j} \tag{4}$$

Si la période choisie est le mois et que le temps est compté en mois et fractions de mois, le taux mensuel de rentabilité est approximativement :

$$r_m = \frac{A_1 - A_0 - \sum a_j}{A_0 + \frac{1}{2}\sum a_j} \tag{5}$$

le taux annuel équivalent étant :

$$r = (1 + r_m)^{12} - 1 \tag{6}$$

2.2. *L'algorithme de Lawrence Fisher*

Le professeur Lawrence Fisher de l'Université de Chicago a mis au point un algorithme permettant de calculer rapidement le taux de rentabilité annuel r avec la précision désirée, quelle que soit la longueur de la période de temps envisagée $T_1 - T_0$ [1]. L'algorithme est basé sur le fait que deux estimations consécutives r_k et r_{k+1} calculées par approximations successives sont liées par une relation simple :

$$r_{k+1} = r_k + \frac{A_1 - \sum a_j (1 + r_k)^{T_1 - t_j}}{\sum (T_1 - t_j) a_j (1 + r_k)^{T_1 - t_j}} \tag{7}$$

en notant $a_0 = A_0$.

Si l'on adopte le taux d'intérêt continu, la relation prend la forme :

$$i_{k+1} = i_k + \frac{A_1 - \sum a_j e^{i_k (T_1 - t_j)}}{\sum (T_1 - t_j)\ a_j e^{i_k (T_1 - t_j)}} \tag{7 bis}$$

Ces relations se démontrent assez facilement. Dans le cas du taux continu on a :

$$A_1 = \sum a_j e^{i(T_1 - t_j)}$$

En différentiant :

$$\mathrm{d}\,A_1 = \sum (T_1 - t_j)\ a_j e^{i(T_1 - t_j)}\, \mathrm{d}i$$

ou

$$\mathrm{d}i = \mathrm{d}A \Big/ \sum (T_1 - t_j)\ a_j e^{i(T_1 - t_j)}$$

On a donc approximativement :

$$i_{k+1} - i_k \# (A_{k+1} - A_k) \Big/ \sum (T_1 - t_j)\ a_j e^{i_k (T_1 - t_j)}$$

et

$$i_{k+1} = i_k + \frac{A_{k+1} - A_k}{\sum (T_1 - t_j)\ a_j e^{i_k (T_1 - t_j)}}$$

C'est bien la relation (7 *bis*).

1. L. Fisher, An Algorithm for Finding Exact Rates of Return. The Journal of Business. The University of Chicago Press, January 1966, pp. 111-118.

Les expressions (7) et (7 *bis*) sont très rapidement convergentes. Pour calculer r (ou i), il suffit de procéder par itération, en commençant pas exemple par $r = 0$ (ou $i = 0$) et en poursuivant jusqu'à ce que la différence $r_{k+1} - r_k$ soit inférieure à l'erreur d'approximation désirée.

2.3. *Composition des taux de rentabilité de périodes successives.*

a) *Première approche : formule à validité limitée*

Il est possible de calculer une valeur approximative du taux de rentabilité d'un portefeuille sur une longue période à partir des taux de rentabilité $r_1, r_2, \ldots, r_n$ déterminés pour des courtes périodes successives de longueurs $l_1, l_2, \ldots, l_n$. Pour la courte période de rang k on aura : $l_k = T_k - T_{k-1}$.

Soient $a_{j,\,k}$ les mouvements (apports ou retraits) ayant lieu dans la période de rang k, et $l_{j,\,k}$ le temps qui sépare l'époque $t_{j,k}$ du mouvement $a_{j,\,k}$ de la fin de cette période. On a :

$$l_{j,k} = T_k - t_{j,k}$$

On a pour les différentes périodes élémentaires les équations suivantes :

$$\begin{aligned} A_0\,(1 + r_1)^{l_1} + \sum a_{j,1}\,(1 + r_1)^{l_{j,1}} &= A_1 \\ A_1\,(1 + r_1)^{l_2} + \sum a_{j,2}\,(1 + r_2)^{l_{j,2}} &= A_2 \\ \ldots\qquad\qquad \ldots\qquad\qquad &\ldots \\ A_{k-1}\,(1 + r_k)^{l_k} + \sum a_{j,k}\,(1 + r_k)^{l_{j,k}} &= A_k \\ \ldots\qquad\qquad \ldots\qquad\qquad &\ldots \\ A_{n-1}\,(1 + r_n)^{l_n} + \sum a_{j,n}\,(1 + r_n)^{l_{j,n}} &= A_n \end{aligned} \tag{8}$$

Les périodes élémentaires étant courtes (inférieures ou égales à l'année), il est légitime d'employer à l'intérieur de chacune d'elles les intérêts simples au lieu des intérêts composés et le taux de rentabilité de la période k s'obtient par le rapport :

$$r_k = \frac{A_k - A_{k-1} - \sum a_{j,k}}{A_{k-1} l_k + \sum a_{j,k} l_{j,k}} = \frac{R_k}{l_k C_k} \tag{9}$$

C_k étant le capital moyen présent pendant la période k :

$$C_k = A_{k-1} + \sum a_{jk} l_{jk} / l_k \tag{10}$$

En éliminant successivement $A_1, A_2 \ldots A_{n-1}$ dans le système d'équations (8), il vient :

$$A_n = A_0 \prod_{k=1}^{n} (1 + r_k)^{l_k} + \sum a_{j,1}\,(1 + r_1)^{l_{j,1}} \prod_{2}^{n} (1 + r_k)^{l_k} + \ldots + \sum a_{j,n}\,(1 + r_n)^{l_{j,n}}$$

ou

$$A_n = A_0 \prod_{k=1}^{n} (1 + r_k)^{l_k} + \sum_k \sum_j a_{j,k}\,(1 + r_k)^{l_{j,k}} \prod_{k+1}^{n} (1 + r_p)^{l_p} \tag{11}$$

La composition des r_k sur l'ensemble de la durée comprenant toutes les périodes successives consiste à rechercher un taux annuel constant r qui appliqué aux mêmes capitaux, pendant les mêmes durées élémentaires et totales donnerait le même résultat final et, par conséquent la même valeur finale A_n. On doit donc avoir :

$$A_n = A_0 (1 + r)^{\Sigma l_k} + \sum_k \sum_j a_{j,k} (1 + r)^{l_{j,k} + \sum_{k+1}^{n} l_p} \tag{12}$$

L'égalité des deuxièmes membres des deux équations (11) et (12) définit la valeur de r en fonction des r_k. On obtient une équation dont la résolution apparaît laborieuse.

Dans le cas particulier où les a_{jk} sont nuls, c'est-à-dire dans le cas où le capital géré est apporté une fois pour toutes, et où il n'y a pas de distribution de dividendes, on a :

$$(1 + r)^{\Sigma l_k} = \pi (1 + r)^{l_k} \tag{13}$$

Cette formule de composition à intérêts composés très connue et très employée n'est en réalité valable que dans le cas particulier où le capital géré demeure sans modification due à des apports ou à des retraits pendant toute la durée de la gestion. Un autre cas de validité serait celui où les sommations doubles des deux équations arriveraient à être égales, mais la probabilité d'un tel événement est certainement négligeable.

En prenant les logarithmes des deux membres de l'équation (13), il vient :

$$\sum l_k \log (1 + r) = \sum l_k \log (1 + r_k)$$

ou

$$\log (1 + r) = \frac{\sum \Sigma l_k \log (1 + r_k)}{\sum l_k}$$

Cette expression signifie que le logarithme de $1 + r$, r étant le taux de rentabilité composé sur l'ensemble de la gestion, est égal à la moyenne pondérée par les durées l_k des logarithmes des quantités $1 + r_k$.

Reprenons les mêmes raisonnements en taux continus, i_k. Le système d'équations (8) devient ici :

$$\begin{array}{rcl} A_0 e^{i_1 l_1} + \sum a_{j,1} e^{i_1 l_{j,1}} & = & A_1 \\ A^l e^{i_2 l_2} + \sum a_{j,2} e^{i_2 l_{j,2}} & = & A_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{k-1} e^{i_k l_k} + \sum a_{j,k} e^{i_k l_{j,k}} & = & A_k \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n-1} e^{i_n l_n} + \sum a_{j,n} e^{i_n l_{j,n}} & = & A_n \end{array} \tag{8 bis}$$

En éliminant successivement A_1, A_2, ..., A_{n-1} dans ces équations, il reste :

$$A_n = A_0 e^{\Sigma i_k l_k} + \sum_k \sum_j a_{j,k} e^{i_k l_{j,k} + \sum_{p=k+1}^{n} i_p l_p} \tag{11 bis}$$

Le taux constant i équivalent à l'ensemble des taux i_k appliqués aux périodes de longueurs l_k doit vérifier l'équation :

$$A_n = A_0 e^{\Sigma i l^k} + \sum_k \sum_j a_{jk} e^{i l_{j,k} + \sum_{p=k+1}^{n} i l_p} \tag{12 bis}$$

Comme précédemment, si les sommes doubles des deuxièmes membres des équations (11 *bis*) et (12 *bis*) sont égales, ce qui est très improbable, ou si tous les a_{jk} sont nuls (cas où il n'y a aucun mouvement de fonds), on tire

$$A_0 e^{\Sigma i_k l_k} = A_0 e^{\Sigma i l_k}$$

ou

$$i \sum l_k = \sum i_k l_k$$

ou encore

$$i = \frac{\sum i_k l_k}{\sum l_k} \qquad (13\ bis)$$

Dans ce cas particulier, le taux instantané moyen de rentabilité est égal à la moyenne arithmétique pondérée par les durées l_k, des taux de rentabilité instantanés i_k des diverses périodes consécutives. C'est une moyenne pondérée par le temps : time-weighted average. Ici encore il faut souligner que cette formule n'est valable que dans le cas particulier où aucun mouvement de fonds ne se produit entre le compte et son titulaire.

b) *Deuxième approche : formule plus générale, mais approximative.*

Un autre calcul permet d'obtenir une formule de composition plus générale que la formule (13), mais approximative. On peut considérer que le capital moyen présent C_1 de la première période demeure présent jusqu'à la fin de la durée totale considérée, à condition d'admettre qu'à l'instant T_1 il s'y ajoute un apport $C_2 - C_1$. Ce montant lui-même sera considéré comme présent jusqu'en T_n pourvu de prendre en compte en T_2 un apport $C_3 - C_2$, et ainsi de suite. On peut alors écrire que la valeur finale A_n est égale à la somme des termes capitalisés suivants :

$$\begin{array}{r} C_1 (1 + r_1)^{l_1} (1 + r_2)^{l_2} \ldots\ldots (1 + r_n)^{l_n} \\ (C_2 - C_1) (1 + r_2)^{l_2} \ldots\ldots (1 + r_n)^{l_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (C_n - C_{n-1}) (1 + r_n)^{l_n} \end{array}$$

ou

$$A_n = C_1 \overset{n}{\underset{1}{\pi}} (1 + r_k)^{l_k} + (C_2 - C_1) \overset{n}{\underset{2}{\pi}} (1 + r_k)^{l_k} + \ldots + (C_n - C_{n-1}) (1+r_n)^{l_n} \qquad (14)$$

On a d'autre part en utilisant le taux constant équivalent r :

$$A_n = C_1 (1 + r)^{\sum_1^n l_k} + (C_2 - C_1) (1 + r)^{\sum_2^n l_k} + \ldots + (C_n - C_{n-1}) (1 + r)^{l_n} \qquad (15)$$

En développant les binomes des expressions (14) et (15) et en ne retenant que les termes du premier ordre en r ou en r_k, il vient :

$$\sum C_k + \sum C_k r_k l_k = \sum C_k + r \sum C_k l_k$$

d'où

$$r = \frac{\sum C_k l_k r_k}{\sum C_k l_k} \qquad (16)$$

Une valeur approximative du taux de rentabilité moyen pour l'ensemble de la durée étudiée s'obtient donc par la moyenne arithmétique pondérée des taux des diverses périodes composantes, la pondération se faisant par le produit de la *durée* de chaque période par le *capital moyen* présent de la période (dollar-time weighted average).

3. Mesure de la performance

La performance a été définie plus haut, dans la section 1.3, comme étant la rentabilité d'un compte obtenue indépendamment des effets des mouvements d'apport ou de retrait de fonds; c'est donc la rentabilité d'un compte qui ne subirait pas de tels mouvements. Partant de cette définition, plusieurs méthodes se présentent pour la mesurer, soit de manière exacte, soit de manière approximative.

3.1. *Composition des performances successives.*

Une première méthode consiste à calculer chaque performance réalisée pendant l'intervalle séparant deux mouvements consécutifs d'apport ou de retrait et de composer les performances ainsi obtenues sur la période totale considérée. Dans chaque intervalle élémentaire la performance est égale à la rentabilité r_k. La composition de ces termes r_k peut ensuite se faire au moyen de la formule (13) établie précédemment qui est ici applicable puisque l'on doit faire abstraction des variations du capital géré. On a donc :

$$(1 + r)^{\Sigma l_k} = \pi\,(1 + r_k)^{l_k}$$

En développant les binômes et en se limitant aux termes de premier ordre en r et en r_k il vient :

$$1 + r \sum l_k = 1 + \sum r_k l_k$$

d'où :

$$r = \frac{\sum r_k l_k}{\sum l_k} \qquad (17)$$

La performance sur toute la période est égale à la moyenne pondérée par les durées des performances des intervalles élémentaires.

L'emploi des taux d'intérêt continus conduit à une formule analogue, mais sans qu'il soit besoin de se limiter aux termes du 1er ordre. On a en effet :

$$e^{i\,\Sigma l_k} = e^{\,\Sigma i_k l_k}$$

d'où

$$i = \frac{\sum i_k l_k}{\sum l_k} \qquad (17\ bis)$$

C'est la formule (13 *bis*) trouvée précédemment.

Ces formules viennent d'être établies en considérant que les intervalles élémentaires sont ceux qui séparent deux mouvements consécutifs d'apport ou de retrait, de sorte que le capital géré soit constant à l'intérieur de chaque intervalle. Si tel n'est pas le cas, ces formules peuvent néanmoins donner des valeurs approximatives des r_k et de r (ou encore des i_k et de i), à condition que les intervalles soient relativement courts. Une recherche empirique effectuée aux États-Unis sur plusieurs fonds de retraites a conduit aux résultats suivants pour l'erreur moyenne par rapport à la valeur exacte de i, suivant les durées l_k des intervalles (tous égaux entre eux) et la précision de la date attribuée aux mouvements $a_{j,k}$:

Erreur moyenne, en points de taux d'intérêt pour cent :

Date attribuée aux mouvements \ l_k	Mois	Trimestre	Semestre	Année
Jour du mouvement	0,04	0,45	0,56	0,60
Milieu du mois	0,12	0,48	0,59	0,62
Milieu du trimestre		0,51	0,61	0,64
Milieu du semestre			0,67	0,62
Milieu de l'année				0,69

Ces résultats montrent qu'en opérant par intervalles mensuels la précision est suffisante, même si l'on situe tous les mouvements au milieu de chaque mois.

3.2. *Méthode de la valeur unitaire.*

Dans le cas des fonds de placement, la performance réalisée peut se calculer à partir de la variation de la valeur des parts. Un fonds de placement est un portefeuille collectif divisé en parts égales réparties entre de nombreux titulaires. Un fonds de placement ouvert, telles les SICAV (Sociétés d'investissement à capital variable), peut à tout moment recevoir de nouveaux apports ou subir des retraits. Tout apport entraîne la création de parts nouvelles; tout retrait conduit à la diminution du nombre de parts.

Soit A_j la valeur du fonds de placement à l'instant t_j, avant l'apport a_j effectué à ce moment et soit N_{j-1} le nombre de parts avant l'apport. La valeur de la part au moment t_j avant l'apport, ou *valeur unitaire*, est

$$P_j = \frac{A_j}{N_{j-1}}$$

L'apport (ou retrait) a_j conduit à la création (ou à la suppression) d'un nombre de parts n_j tel que :

$$n_j = a_j/P_j = N_{j-1}\frac{a_j}{A_j}$$

Le nombre de parts après l'apport sera donc :

$$N_j = N_{j-1} + n_j = N_{j-1}(1 + a_j/A_j).$$

Le problème qui se pose est celui de mesurer la performance du fonds dans une période de temps t_0, t_n. La valeur du fonds est passée de A_0 à A_n et celui de la part de P_0 $P_0 = A_0/N_0$ à $P_n = A_n/N_n$. D'après ce qui précède on a :

$$N_n = N_0 \prod_{j=1}^{n} (1 + a_j/A_j)$$

et

$$P_n = A_n/N_0 \,\pi\, (1 + a_j/A_j).$$

La part représente une quantité de capital ne subissant pas d'apports ni de retraits, à l'exception des dividendes reçus par le titulaire qui équivalent à des retraits. Dans une période de temps ne dépassant pas l'année, la rentabilité de la part peut se calculer approximativement par la formule (13). Son application donne ici :

$$r = \frac{P_n - P_0 + d}{P_0\,(t_n - t_0) - d\,(t_n - t_u)} \tag{18}$$

où t_u est le moment du paiement du dividende d.

On calcule aussi la performance d'un fonds comme suit :

$$p = \frac{P_n - P_0 + d}{P_0} \tag{19}$$

Ceci signifie que l'on prend comme unité de temps la période considérée et que l'on fait abstraction du terme $d\,(t_n - t_u)/(t_n - t_0)$. Cette dernière formule ne devrait donner une bonne approximation de la performance que si la période considérée ne dépasse pas un an et si le terme négligé est petit par rapport à P_0.

Il importe de remarquer que le calcul de la performance par la méthode de la valeur unitaire exige la connaissance de P_n, laquelle ne peut se déterminer que si l'on connaît l'évaluation du portefeuille A_j à toutes les époques t_j où se produisent les mouvements d'apport ou de retrait. L'expression (18) peut en effet s'écrire :

$$r = \frac{A_n/N_0\,\pi\,(1 + a_j/A_j) - A_0/N_0 + d}{A_0\,(t_n - t_0)/N_0 - d\,(t_0 - t_u)}$$

ou

$$r = \frac{A_n - (A_0 - d\,N_0)\,\pi\,(1 + a_j/A_j)}{[A_0\,(t_n - t_0) - d\,N_0\,(t_0 - t_u)]\,\pi\,(1 + a_j/A_j)} \tag{20}$$

La valeur approximative de la performance donnée par (19) s'écrit pour sa part :

$$p = \frac{A_n - (A_0 - d\,N_0)\,\pi\,(1 + a_j/A_j)}{A_0\,\pi\,(1 + a_j/A_j)} \tag{21}$$

En fait les évaluations A_j sont effectivement calculées pour les fonds de placement ouverts chaque fois que des mouvements ont lieu, de manière à déterminer précisément le nombre de parts correspondantes à créer ou à supprimer. Les valeurs unitaires P_j sont donc bien calculées de proche en proche et il n'y a pas de difficulté à appliquer les formules (18) ou (19). Il n'en est pas de même pour un portefeuille de nature différente, pour lequel l'évaluation n'est pas nécessaire lors de chaque mouvement; il n'a donc pas intérêt à procéder fréquemment à cette évaluation qui est toujours une opération coûteuse et de ce fait la méthode de la valeur unitaire n'est plus applicable.

3.3. *Méthode de régression.*

Tout comme la méthode de la valeur unitaire qui vient d'être exposée, le calcul de la performance par la composition des rentabilités déterminées sur des intervalles élémentaires (section 3.1. ci-dessus) exige l'évaluation fréquente du portefeuille. En effet, le calcul de la rentabilité d'un intervalle élémentaire nécessite la connaissance de la valeur du portefeuille au début et à la fin de l'intervalle. Pour éviter d'avoir à procéder à ces fréquentes évaluations, une méthode a été élaborée, se basant sur la relation de régression observée dans le passé, entre le taux de variation du portefeuille et celui d'un indice du marché boursier. L'équation de régression permet de calculer des valeurs approximatives du portefeuille à divers moments intermédiaires entre le début et la fin de la période considérée et d'appliquer l'une des formules de la performance présentées dans les deux sections 3.1 et 3.2 qui précèdent.

Cette méthode, qui est en définitive assez complexe, a été recommandée dans le rapport du Comité consultatif du Bank Administration Institute, publié en octobre 1968 (*cf.* Section 1.3 ci-dessus). La vérification empirique effectuée à cette occasion a montré que l'approximation obtenue était meilleure que celle réalisée par la composition des taux de rentabilité calculés sur des intervalles élémentaires.

4. Prise en compte du risque

La gestion d'un portefeuille comporte des aléas. S'il est vrai que le gestionnaire poursuit des objectifs de rendement et de plus-value qui se traduisent pour chaque période par un résultat, il n'est pas moins vrai que ce résultat n'est pas certain à l'avance et que toute gestion comporte même le risque de ne pas réaliser de résultat positif, c'est-à-dire de conduire à des pertes. Même autour d'un résultat moyen positif sur une durée assez longue, par exemple autour d'une rentabilité moyenne de 12 % par an sur 5 ans, les résultats annuels ou trimestriels peuvent osciller de manière plus ou moins prononcée, par exemple entre des taux de — 10 % et + 25 %, ou encore entre — 2 % et + 18 %. Il est intuitif d'admettre que la gestion a pris plus de risques dans le premier cas que dans le second.

On retient généralement qu'une mesure de *la variabilité* du taux de rentabilité ou de la performance est un indicateur acceptable pour le risque. Parmi ceux que l'on prend en considération citons :

— l'écart type;
— l'écart moyen;
— le semi écart type (moyenne quadratique des écarts négatifs à la moyenne) [1];
— la probabilité de perte (fréquence des résultats inférieurs à un objectif donné);
— le coefficient de régression de la valeur du portefeuille par rapport à un indice du marché boursier.

Les recherches conduites à ce jour en cette matière ne sont pas très nombreuses et il est difficile de dire lequel de ces indicatieurs du risque est préférable aux autres. Sans doute l'écart type et l'écart moyen sont-ils les plus commodes pour les développements mathématiques.

Lorsque l'on aura choisi une mesure du risque, il se présentera ici comme dans le cas de la détermination de la rentabilité le problème du passage du risque encouru dans des périodes élémentaires successives à celui de la période totale qui les englobe toutes.

Si l'on retient à la fois la mesure du résultat et celle du risque comme les deux principales caractéristiques d'une gestion, il faut les combiner pour représenter la qualité d'ensemble de la gestion. C'est la recherche de la meilleure satisfaction de deux critères combinés, résultat et risque, qui est actuellement à la base d'une théorie de la gestion des portefeuilles.

Il faut cependant reconnaître que les études concernant le risque sont encore très récentes et n'ont pas abouti à des conclusions suffisantes pour donner lieu à des applications susceptibles d'être largement adoptées en pratique. Au stade actuel, les données empiriques sont accumulées et donnent lieu à des recherches suivies, notamment aux États-Unis; il est vraisemblable que des résultats intéressants pourront être dégagés dans un proche avenir.

1. Proposé par H. Markowitz, auteur de l'ouvrage Portfolio Selection. Efficient Diversification of Investments, New York, J. Wiley, 1959.

5. Conclusions

Au terme de cet exposé, quelques conclusions se dégagent :

a) La notion de rentabilité des capitaux gérés dans un portefeuille est claire et répond à une définition précise, alors que celle de performance apparaît encore insuffisamment définie.

b) La rentabilité peut être mesurée par des formules approximatives relativement simples sur de courtes périodes.

c) Sur une longue période, la rentabilité peut être calculée par la moyenne des rentabilités des périodes élémentaires pondérées par les capitaux et le temps.

d) Si la performance est considérée comme le résultat réalisé indépendamment de la chronologie des apports et des retraits, sa mesure approximative peut s'obtenir :
- — soit par la moyenne des rentabilités de courtes périodes, pondérées seulement par le temps;
- — soit par la méthode des valeurs unitaires (dans le cas des fonds mutuels);
- — soit par une méthode de régression.

e) L'appréciation de la qualité de la gestion pourrait être complétée par la mesure du risque encouru. Cette notion n'est pas encore suffisamment affinée, mais elle sert de base avec la notion de résultat à l'élaboration d'une théorie de la gestion des portefeuilles.

F. Rosenfeld

DISCUSSION

M. Gourland. — Toute définition du risque exige en principe la connaissance de la loi de répartition des bénéfices futurs. Le risque est alors défini par une grandeur mesurant la dispersion de la distribution (variance, somme de carrés des écarts négatifs, etc.). N'est-il pas possible de donner une définition plus élaborée du risque, par analogie avec les erreurs de première et de deuxième espèce, qui ferait intervenir notamment une fonction de gain (et de perte) non linéaire?

Mlle De Menditte. — Les difficultés de mesure de résultat des portefeuilles me paraissent localisées essentiellement à 2 niveaux :

1) celui de la « *Valeur* » *globale du portefeuille* parce que celle-ci intègre dans sa définition :

— des éléments acquis (dividendes);

— et des éléments d'estimation (valeur moyenne ou au cours du jour des titres en portefeuille) dont rien ne dit qu'ils augmenteront, ni même qu'ils se maintiendront au niveau estimé.

2) celui de l'*appréhension de la valeur de chaque titre* composant le portefeuille.

A cet égard il y a lieu de rappeler que 3 facteurs au moins interviennent pour faire fluctuer le cours des actions :

— l'étroitesse du marché boursier qui sensibilise à l'extrême les cours;

— la politique de distribution des entreprises pas obligatoirement liée à des résultats d'exploitation mais découlant souvent d'une politique délibérée (cas des grandes entreprises) ou des conditions relevant du marché boursier (marché étroit, conjoncture molle, mauvais calendrier, etc...);

— les difficultés d'appréhender « LE DEVENIR » des entreprises.

Les analyses boursières sont trop axées sur les seules analyses financières (importantes certes) et boursières passées; et pas assez sur les différents compartiments d'activité des entreprises, leur politique commerciale, leurs investissements *productifs*, leurs services de recherche, leurs liaisons financières et leurs filiales, toutes considérations qui conditionnent leur avenir.

Par ailleurs, *le classement des entreprises est effectué à l'activité dominante* (n° I.N.S.E.E.) à laquelle on impute la totalité des résultats de la firme. La comparaison inter-entreprise sur la base de leur classement boursier devient donc erronée.

La Banque de France au sein de la centrale de bilans récemment créées procède actuellement à des études de bilans portant sur un échantillon de 30 000 entreprises. Les activités sont classées par « secteurs » scindés en famille de fabrication. Il est prévu, après la 1re année en cours d'étendre les observations aux activités multiples relevant de plusieurs « secteurs ».

Les obligations faites aux Sociétés côtées de produire des renseignements sur les grandes masses d'activité des entreprises permettra une meilleure connaissance de ces dernières.

A noter que, d'autre part, des possibilités de recherche de modèles sur la dynamique de fonctionnement des entreprises deviendront possibles et amélioreront considérablement la prévision boursière.

M. Maurice Dumas demande à quoi doivent servir les mesures chiffrées comme il a été dit. Si, comme il le pense, il s'agit en particulier d'apprécier l'habilité d'un gestionnaire de portefeuilles titres, ne serait-il pas indiqué de pousser à fond l'étude du résultat d'une opération de bourse isolée, afin de permettre, ensuite, d'opérer par sondage parmi toutes les opérations décidées par ce gestionnaire.

M. Max Lacroix. — Avec tous ceux qui s'intéressent aux calculs financiers, je voudrais remercier M. Rosenfeld de nous avoir exposé de manière si instructive les bases de la mesure des résultats de gestion des portefeuilles de titres.

Il semble qu'il y ait accord unanime sur l'utilité d'une définition précise et acceptée de cette mesure. A mon avis, il faut souligner qu'une définition uniforme est d'autant plus nécessaire que les résultats de gestion dont il s'agit intéressent un public très large et non spécialisé. Ce public serait égaré par des comparaisons qui ne reposeraient pas sur la même définition et qui, par conséquent, feraient ressortir non pas les différences entre résultats de gestion mais la résultante de ces différences et de variations, non significatives, dues aux définitions utilisées explicitement ou implicitement.

Mesurer les résultats du passé conduit, tout naturellement, à s'interroger sur ceux de l'avenir et, par conséquent, sur la valeur prédictive des résultats de gestion des portefeuilles, Question délicate; il semblerait, en effet, que les études sur les séries historiques des cours de valeurs mobilières, très utiles pour comprendre le passé, n'aient pas une très grande valeur prédictive. Mais notre conférencier a une rare expérience en ces matières, il serait donc très intéressant d'avoir son avis sur ce point.

Réponses de M. Rosenfeld. — Les différentes remarques et questions qui viennent d'être présentées me paraissent apporter un complément très utile à mon exposé. L'idée de M. Gourland de rechercher une définition plus élaborée du risque par analogie aux erreurs de premier type et de deuxième type de la théorie de la vérification des hypothèses doit certainement être très constructive. L'erreur du premier type consisterait à acheter (ou garder) ce qu'il faudrait vendre celle du deuxième type consisterait à vendre ce qu'il faudrait garder (ou acheter). Il faudrait étudier si les deux types d'erreurs entraînent des conséquences du même ordre, ou au contraire de dimensions très différentes. Je dois répéter ici que l'étude du risque me paraît être encore à ses débuts et qu'il y a là un domaine de recherche vaste et intéressant à explorer.

Mademoiselle de Menditte relève avec raison que l'estimation de la valeur d'un portefeuille à un moment donné laisse néanmoins une marge d'incertitude sur sa valeur à venir. Il faut répondre néanmoins que la mesure d'un résultat porte sur le passé. Pour ce qui concerne l'analyse des entreprises en vue d'en choisir les titres pour la composition des portefeuilles, l'effet des analystes porte bien sur les perspectives d'avenir et ne se limite pas aux aspects. purement financiers. Les recherches profiteront certainement des travaux effectués par la Centrale des Bilans de la Banque de France et par la plus grande publicité imposée aux sociétés par la réglementation récente.

La question de M. Dumas porte sur l'utilité de la mesure des résultats de la gestion et sur celle des opérations boursières isolées. Effectivement la mesure des résultats permet d'apprécier la qualité des gestionnaires, ou des SICAV; le jugement porte sur les résultats passés mais permet de mieux choisir l'instrument de gestion pour l'avenir. Mais on peut aussi faire des expériences, simuler des portefeuilles en adoptant différentes politiques de gestion, globales ou partielles, et choisir celles qui ont donné les meilleurs résultats. Mais encore faut-il savoir mesurer correctement ces résultats, et c'était là l'objet de l'exposé.

M. Lacroix pose une question voisine de la précédente, mais voudrait de plus que la mesure des résultats ait à la fois une valeur prédictive et une valeur comparative. Pour la valeur comparative il faut en effet que les spécialistes soient très explicites sur la nature et la signification de l'instrument de mesure qu'ils emploient; on est encore loin de rencontrer cela dans la pratique. Pour ce qui est de la valeur prédictive, il ne faut rien demander de parfait aux modèles prévisionnels en matière économique et financière; des progrès sont certainement possibles et il serait utile que la recherche s'engage plus activement dans ce domaine.