JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

MARIE-CLAUDE WEISS

Détermination d'une variable de Gauss à plusieurs dimensions à l'aide de la fonction caractéristique

Journal de la société statistique de Paris, tome 107 (1966), p. 135-136
<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1966__107__135_0>

DÉTERMINATION D'UNE VARIABLE DE GAUSS A PLUSIEURS DIMENSIONS A L'AIDE DE LA FONCTION CARACTÉRISTIQUE

On cherche à démontrer le théorème suivant :

Si la deuxième fonction caractéristique d'une loi de probabilité à un nombre fini de dimensions est un polynôme, son ordre est au plus du second degré. Ceci caractérise une variable de Gauss ou une variable certaine.

Pour cette démonstration, on se base sur le théorème déjà existant pour une loi à une seule dimension :

Théorème B de J. Marcinkiewicz : Les seules fonctions caractéristiques entières d'ordre fini de la forme $e^{P(t)}$ *[P (t) étant un polynôme] sont des fonctions de la forme* e^{imt} *et* e^{-at^2+imt} *(c'est-à-dire celles de variables certaines ou gaussiennes).* [1]

La démonstration se fera par récurrence :

Pour une loi à deux dimensions, la deuxième fonction caractéristique qui est par hypothèse un polynôme, peut s'écrire :

$$\begin{aligned}\Psi(t, s) = {} & A_n t^n + B_n t^{n-1} s + C_n t^{n-2} s^2 + \dots + D_n s^n \\ & + A_{n-1} t^{n-1} + B_{n-1} t^{n-2} s + \dots + D_{n-1} s^{n-1} \\ & + \dots \\ & + A_2 t^2 + B_2 ts + C_2 s^2 \\ & + A_1 t + B_1 s\end{aligned}$$

en désignant par : s et t les variables réelles,

X et Y les variables aléatoires correspondantes,

A_i et B_i les coefficients, réels ou complexes du polynôme.

Cherchons la loi de probabilité de la variable $X + aY$: cela revient à projeter les masses sur la droite $y = ax$, par exemple, et à en étudier la distribution.

La deuxième fonction caractéristique de cette variable est obtenue en faisant $t = as$ (a réel, arbitraire) :

$$\begin{aligned}\Psi_a(s) = {} & (A_n a^n + B_n a^{n-1} + \dots + D_n) s^n \\ & + \dots\dots + \\ & + (A_2 a^2 + B_2 a + C_2) s^2 + (A_1 a + B_1) s\end{aligned}$$

1. Démonstration de D. Dugué : *Analycité et convexité des fonctions caractéristiques.* Ann. Inst. H. Poincaré, t. 12, p. 45.

Cf. D. Dugué : *Arithmétique des lois de probabilité*, Mémorial des Sciences mathématiques.

D'après le théorème B de Marcinkiewicz, il faut que tous les coefficients d'ordre supérieur à 2 soient nuls quel que soit a :

$$\left.\begin{array}{l} A_n a^n + B_n a^{n-1} + \ldots + D_n = 0 \\ \ldots\ldots \\ A_3 a^3 + B_3 a^2 + C_3 a + D_3 = 0 \end{array}\right\} \forall a$$

On obtient bien :

$$\begin{array}{l} A_n = A_{n-1} = \ldots = A_3 = 0 \\ \ldots \\ D_n = D_{n-1} = \ldots = D_3 = 0 \end{array}$$

Supposons maintenant le théorème établi pour $n - 1$ dimensions, et montrons que pour une loi à n dimensions dont la deuxième fonction caractéristique est un polynôme, il ne peut y avoir de terme de degré supérieur à 2.

$$\begin{aligned} \Psi(s_1, s_2, \ldots, s_n) = {} & A_{m,0,0,\ldots,0}\, s_1^m + A_{m-1,1,0,\ldots,0}\, s_1^{m-1} s_2 \\ & + A_{m-1,0,1,0,\ldots,0}\, s_1^{m-1} s_3 + \ldots \\ & + A_{0,0,\ldots,m}\, s_n^m + \ldots + A_{2,0,\ldots,0}\, s_1^2 \\ & + A_{1,1,0,\ldots,0}\, s_1 s_2 + A_{1,0,1,0,\ldots}\, s_1 s_3 + \ldots + \\ & + A_{0,0,\ldots,2}\, s_n^2 + A_{1,0,0,\ldots}\, s_1 + \ldots + A_{0,0,\ldots,1}\, s_n \end{aligned}$$

(Les $A_{r,s,\ldots}$ sont réels ou complexes; la somme de leurs indices est le degré du monôme).

Projetons la distribution sur un hyperplan à $n - 1$ dimensions, en faisant :

$$s_1 = as_2 + bs_3 + \ldots + ps_n$$

avec a, b ... p réels quelconques.

$$\begin{aligned} \Psi_{a,b,\ldots,p}(s_2, s_3, \ldots, s_n) = {} & A_{m,0,\ldots,0}\,(as_2 + bs_3 + \ldots + ps_n)^m \\ & + A_{m-1,1,0,\ldots,0}\,(as_2 + bs_3 + \ldots + ps_n)^{m-1} s_2 + \ldots \\ & + A_{0,\ldots,0,m}\, s_n^m + \ldots + A_{2,0,\ldots,0}\,(as_2 + bs_3 + \ldots + ps_n)^2 \\ & + A_{1,1,0,\ldots,0}\,(as_2 + bs_3 + \ldots + ps_n)\, s_2 + \ldots + A_{0,\ldots,0,2}\, s_n^2 \\ & + A_{1,0,\ldots,0}\,(as_2 + bs_3 + \ldots + ps_n) + \ldots + A_{0,\ldots,0,1}\, s_n \end{aligned}$$

Ce polynôme est la fonction caractéristique d'une loi à $n - 1$ dimensions. Il ne peut avoir de terme de degré supérieur à 2. En réordonnant les monômes en $s_2, s_3, \ldots, s_n$, nous voyons que les termes à annuler sont des polynômes en $a, b, \ldots, p$, avec pour coefficients les $A_{r,s,\ldots}$ assortis de coefficients combinatoires, chaque monôme en $a, b, \ldots, p$ ayant pour coefficient un seul $A_{r,s,\ldots}$ différent pour chaque terme à annuler. Les $A_{r,s,\ldots}$ sont donc tous nuls dès que :

$$r + s + \ldots > 2$$

ce qu'il fallait démontrer.

$\Psi(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ est du second degré au plus.

Marie-Claude WEISS