JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

P. THIONET

Note sur le remplissage d'un tableau à double entrée

Journal de la société statistique de Paris, tome 105 (1964), p. 228-247
<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1964__105__228_0>

V

NOTE SUR LE REMPLISSAGE D'UN TABLEAU A DOUBLE ENTRÉE

INTRODUCTION

Le présent article est un prolongement de celui que le Journal de la Société de Statistique de Paris a publié en 1961 (4e trimestre, pp. 331-345).

Il concerne un aspect peu connu des techniques statistiques en usage dans les organismes s'occupant de planification économique. S'il répond ainsi à une invitation formulée par le Secrétaire Général de la S. S. P. (éditorial du bulletin de janvier 1964) sa conception est antérieure à cette suggestion. Son but est de développer et prolonger le point IV de notre communication au congrès de l'Institut International de Statistique, Ottawa, 1963.

Une question se pose au préalable : est-ce bien encore là de la statistique? n'ai-je pas cessé d'être un vrai statisticien? (remercions en passant la S. S. P. de publier mes papiers depuis déjà vingt ans).

Il est assez effrayant de penser aux transformations que connaît la statistique ces dernières années. Jadis on a assisté à la conquête de la statistique par le calcul des probabilités, ce qui ne se fit pas sans soulever de vigoureuses protestations (notamment en Italie). Mais l'évolution actuelle est beaucoup moins bien définie. Il est à présent impossible de donner une liste limitative des chapitres de mathématique qu'il conviendrait d'apprendre pour faire de la statistique.

L'Algèbre moderne a pris une place essentielle au moins dans la théorie des plans d'expérience (avec les corps de Galois). La théorie des nombres s'introduit dans les recherches sur les nombres aléatoires, quand les machines électroniques calculent les nombres pseudo-aléatoires qu'elles utilisent au lieu de conserver une table de Tippett ou de Kendall en mémoire.

Le statisticien classique était obligé d'avoir des notions sur les équations aux dérivées partielles et le calcul des variations, sur les intégrales de Laplace et de Fourier. Mais voici qu'on lui impose la théorie de la mesure.

L'algèbre linéaire est devenue indispensable au moins pour traiter les lois de Gauss à plusieurs dimensions (encore utilise-t-on parfois des formules et théorèmes dont on trouve à peine trace dans les livres écrits par les algébristes), etc...

Les problèmes nouveaux que nous essayons de résoudre sont-ils de la statistique, de l'économétrie, de la recherche opérationnelle? A vrai dire il n'y a aucune frontière bien marquée dans la mathématique ressortissant de ces disciplines qui désignent surtout des activités professionnelles distinctes.

C'est ainsi que les processus stochastiques se sont introduits en statistique pour l'analyse des séries temporelles, question qui intéresse surtout les économètres; bien entendu il s'agit d'une extension récente du calcul des probabilités. Mais la *programmation linéaire*, qu'on considère souvent (au moins en France) comme inséparable de la Recherche Opérationnelle, a sa place dans certains cours de statistique provinciaux. Nous nous sommes jadis aperçu (*cf.* J. S. S. P., 1960, p. 99) que le problème de Goodman et Kish (en théorie des Sondages) n'était autre qu'un problème de programmation linéaire.

La théorie des équations et systèmes d'équations de récurrence linéaires (analogue à celle des équations différentielles linéaires) est enseignée dans les mathématiques pour économistes. Mais nous venons de nous apercevoir qu'elle permettait d'analyser facilement les mélanges de certaines distributions statistiques (lois géométriques, lois de Poisson, etc.) (*cf.* Publ. Institut de Statistique de l'Université de Paris, 1965).

En l'état actuel, le statisticien doit constamment étendre sa culture mathématique et ne devrait pas se contenter d'attaquer de nouveaux problèmes concrets, armé seulement (disons) de la théorie de l'estimation et la théorie des tests statistiques. C'est pourtant (semble-t-il) ce qui doit arriver si on en juge par certaines réponses à une enquête récente de l'Association des Anciens Élèves de l'Institut de statistique de l'Université de Paris; car chacun de nous répugnera toute sa vie à employer les techniques qu'il n'a pas apprises en « taupe » ou à l'Université quand il était étudiant. Mais nous postulerons que le lecteur du J. S. S. P. brûle au contraire du désir de s'informer.

Dans la suite du présent article, nous nous proposons de montrer comment une théorie mathématique nouvelle (dont l'invention revient à M. Maurice Fréchet de l'Académie des Sciences, Ancien Président de la S. S. P.) va trouver son application dans l'étude d'un problème de pratique statistique. Déjà M. Fréchet avait été fort surpris d'apprendre que sa théorie avait un champ d'application en programmation linéaire (théorie des programmes dits de transport et d'affectation). Mais le remplissage des tableaux prospectifs se fait par des techniques qui auraient tort d'ignorer la théorie des tableaux de Fréchet.

1re PARTIE

LE REMPLISSAGE DE TABLEAUX PROSPECTIFS

Le lecteur est sans doute familiarisé avec la présentation de données statistiques sous forme de tableaux à double entrée, résultat d'un double classement (autrement dit de 2 tris). Il sait ce qu'on appelle marge horizontale (ou souvent marge inférieure) et marge verticale du tableau. Il sait que les sommes des 2 marges sont égales (propriété très employée d'ailleurs pour déceler la présence d'erreurs — de confection ou de copie — dans les tableaux).

Lorsqu'un tableau représente une distribution, il arrive que certaines cases soient nécessairement garnies de zéros; par exemple la répartition d'une population (ou d'un échantillon) suivant l'âge et l'état matrimonial présente des cases vides évidentes (qu'on utilise d'ailleurs pour retrouver les cartes perforées affectées d'un décalage de colonnes). La répartition dans les autres cases est souvent assez stable quand on compare des statistiques établies à des dates différentes.

Nous nous occuperons ici d'une catégorie particulière de données : celles concernant *des flux* observés entre deux ensembles, affectés l'un aux lignes, l'autre aux colonnes du tableau.

Dans notre papier d'Ottawa, il était surtout question de tableaux d'échanges interindustriels. Il s'agit de tableaux carrés dont les lignes et les colonnes portent (dans un même ordre) le numéro des diverses branches d'activité économique. A chaque branche, considérée comme vendeuse ou productrice de biens (l'output), est affectée une ligne du tableau; à chaque branche, considérée comme acheteur ou consommatrice de divers biens (les inputs), est affectée une colonne de même tableau. Dans les tableaux d'échanges en valeur, la case

(i, j), croisement de la ligne i et de la colonne j, est garnie de la valeur (à un prix restant à préciser) de la partie de la production de la branche i qui est achetée (et usée) par la branche j.

Dans les tableaux d'échanges en quantités physiques, les cases (i, j) sont garnies de nombres représentant, par exemple :

— dans la ligne : Électricité, des kilowatts-heure;

— dans la ligne : Combustibles Minéraux solides, des tonnes de houille (ou l'équivalent etc.).

Pour les branches à productions trop hétérogènes, il est impossible de traduire la production physique par un seul nombre; et on a recours à un indicateur; la valeur de la production (à prix constants) est un assez bon indicateur de cette production.

Nous reproduisons ci-joint le tableau d'échanges interindustriels en 16 branches de l'année 1956, publié (pp. 1512-1513) dans *Statistiques et Études Financières* supplément n° 141, septembre 1960 (Les Comptes de la Nation, Volume II, les Méthodes). C'est un tableau en valeurs (en millions de NF).

La nomenclature des 16 branches est la suivante :

01 — Agriculture, sylviculture;
02 — Industries agricoles et alimentaires;
03 — Combustibles minéraux solides et gaz;
04 — Électricité, eau et divers;
05 — Pétrole, gaz naturel et carburants;
06 — Matériaux de construction et verre;
07 — Mines de fer et sidérurgie;
08 — Minerais et métaux non ferreux;
09 — Industries mécaniques et électriques;
10 — Chimie;
11 — Textile, habillement, cuir;
12 — Bois, papier et industries diverses;
13 — Bâtiment et travaux publics;
14 — Transports et télécommunications;
15 — Services de logement;
16 — Autres services.

Tableau d'échanges interindustriels, France, année 1956

	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16
01	—	14 564	—	—	—	—	—	—	—	112	669	807	—	—	—	1 23
02	1 044	—	—	—	62	—	—	—	—	242	93	45	—	30	—	3 38
03	—	185	—	351	—	183	1 001	30	187	292	180	112	37	326	—	19
04	80	127	14	—	16	104	72	113	374	257	196	123	46	141	—	17
05	654	356	48	110	—	216	90	31	427	214	134	221	508	995	—	55
06	34	216	5	3	13	—	87	11	208	83	—	78	3 222	57	—	—
07	—	—	50	12	—	13	—	—	4 147	61	—	—	530	36	—	—
08	—	—	—	—	—	2	479	—	1 683	107	—	112	40	—	—	—
09	100	470	275	128	50	40	59	—	—	324	162	211	1 888	544	—	58
10	1 262	202	182	7	105	192	71	76	1 586	—	947	971	525	264	—	43
11	210	50	3	6	—	—	—	—	241	323	—	283	10	64	—	15
12	15	555	105	43	65	138	40	2	583	427	503	—	704	192	—	86
13	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
14	157	819	156	69	344	217	390	31	930	341	387	488	210	—	—	69
15	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
16	3 000	764	52	97	107	82	72	5	771	232	295	315	732	517	—	—
C. I.	6 556	18 308	890	826	762	1 187	2 361	292	11 137	3 015	3 566	3 766	8 452	3 166	—	8 2

Le lecteur trouvera dans le même ouvrage (p. 1510) le tableau en 65 branches, trop volumineux pour être reproduit ici.

Pour des raisons qui apparaîtront plus loin, nous nous intéresserons essentiellement au nombre des termes nuls et à leurs positions mutuelles dans le tableau.

Le tableau d'échanges français à 16 branches compte 100 entrées nulles sur 256, mais si l'on supprime la branche 15 (ligne et colonne) ainsi que la ligne 13 il subsiste 210 termes dont 54 sont nuls, — parmi eux 14 termes diagonaux et 40 termes hors diagonale.

Le tableau d'échange à 64 branches présente, toutes proportions gardées, une densité de zéros beaucoup plus forte encore (de l'ordre de la moitié des termes). Pour une bonne part, d'ailleurs, ces zéros sont des (ε), il y a non pas absence totale d'*input* mais présence d'un input tout à fait négligeable.

Quant à la présence de zéros en diagonale, elle résulte d'une convention :

Les cases (i, i) situées sur la diagonale (principale) du tableau se rapportent aux échanges entre entreprises d'une même branche. En raison de l'intégration plus ou moins poussée des entreprises, il conviendrait d'y faire également figurer les échanges entre établissements d'une même entreprise, données qui font le plus souvent défaut. Les comptables nationaux sont de ce fait souvent partisans que ces cases diagonales soient laissées *vides*; c'est ce qu'on appelle un tableau d'échanges *consolidé*. (Le principal argument opposé à cette pratique est qu'elle perturbe la production totale d'une branche chaque fois qu'on agrège ou désagrège certaines branches d'activité dont les échanges mutuels ne sont pas nuls).

La comptabilité nationale offre bien d'autres exemples de tableaux, où un certain nombre de cases sont *nécessairement* garnies de zéros. Par exemple considérons le tableau des mouvements de fonds entre les 5 postes suivants de la Comptabilité sociale du Royaume-Uni.

1 — compte (consolidé) d'exploitation des ménages producteurs
2 — compte (consolidé) d'affectation des entreprises
3 — compte d'affectation des administrations
4 — compte (consolidé) de capital
5 — Reste du monde

D'après un article de F. E. A. Briggs, *On problems of estimation in Leontief models*, [dans *Econometrica july* 1957 — (voir tableau I p. 451)] ces flux sont les suivants pour l'année 1948 (données évaluées en fait par le Professeur Richard (Stone) :

Comptes nationaux du Royaume-Uni (1948)

(*Milliards de Livres*)

Postes	1	2	3	4	5	Total
1	0	8,408	1,761	1,396	1,983	13,548
2	11,523	0	1,270	0	0,176	12,969
3	0	3,612	0	0	0	3,612
4	0	0,915	0,539	0	0,234	1,688
5	2,025	0,034	0,042	0,292	0	2,393
TOTAL	13,548	12,969	3,612	1,688	2,393	34,210

On constate qu'un tel tableau comporte 5 termes diagonaux et 5 non diagonaux égaux à zéro, de par la définition même des comptes.

On observe cette singularité supplémentaire que les marges horizontales et verticales sont identiques si les comptes sont équilibrés (c'est ce qu'on appelle la loi de J. B. Say).

Un dernier exemple de tableau d'échanges à double entrée sera emprunté à une publication du C. E. P. R. E. L. (5 juillet 1963 : Étude d'une méthode de projection du réseau des échanges internationaux) et à travers elle à une publication du GATT (organisme international genevois). Il s'agit ici de statistiques d'échanges extérieurs entre groupes d'états et non plus de comptabilité nationale. Cette fois un seul poste diagonal est nul, car ces ligne et colonne concernent le seul Japon. Mais les termes égaux à 21, 70, 105, 130, 175, 209, 230, 300, pourraient en première approximation être assimilés à des zéros.

Valeur des échanges observés entre les régions industrielles en 1960

(millions de dollars F. O. B.)

Régions (1) exportatrices	Régions importatrices (1)					Total
	A.N.	C. E. E.	A. E. L. E.	R. E. O.	Japon	
A. N.	6 770	3 865	3 350	610	1 530	16 125
C. E. E.	2 545	10 245	6 515	1 450	209	20 965
A. E. L. E.	2 235	4 300	3 465	1 120	130	11 250
R. E. O.	300	895	1 035	105	21	2 355
Japon	1 225	175	230	70	—	1 700
TOTAL . . .	13 075	19 480	14 595	3 355	1 890	52 395

SOURCE : GATT, Le Commerce international en 1960.

(1) A. N. : Canada et États-Unis.
C. E. E. : Allemagne (Rep. Féd.), Belgique, Luxembourg, France, Italie, Pays-Bas.
A. E. L. E. : Autriche, Danemark, Norvège, Portugal, Royaume Uni, Suède, Suisse.
R. E. O. : Reste de l'Europe Occidentale : Espagne, Finlande, Grece, Irlande, Islande, Turquie, Yougoslavie.

Nous n'avons reproduit que des tableaux de *données passées.*

Il est de plus en plus fréquent que de tels tableaux fassent l'objet « d'une projection », c'est-à-dire qu'on s'en inspire pour écrire des *tableaux de prévisions* à plus ou moins court terme, disons à 2 ou 3 ans. Il convient ici de distinguer soigneusement :

Les prévisions relatives aux *marges* d'un tableau;

celles relatives aux *entrées* d'un tableau.

1º *Les marges.* Il se trouve que, très souvent, on a des idées assez précises sur les valeurs qu'on peut attribuer aux projections des marges.

a) Par exemple, pour un tableau national d'échanges interindustriels en valeurs, la marge horizontale rassemble les achats aux autres branches, la marge verticale s'appelle la consommation intermédiaire. Lorsqu'on a établi le *compte prospectif* de chaque branche, ces deux éléments ont déjà fait l'objet d'une hypothèse prospective.

b) Il en est de même en ce qui concerne les tableaux d'échanges internationaux.

Dans la mesure où l'évolution future des importations et des exportations de chaque pays concerné fait déjà l'objet de prévisions (officielles ou non), on doit considérer que les marges du tableau sont données : ce sont les agrégats desdites prévisions. En pratique la somme des termes de la marge verticale risque de ne pas être égale à celle de la marge horizontale, puisqu'aucune balance commerciale nationale n'est strictement équilibrée; mais nous admettons que de légères retouches apportées aux prévisions nationales ou simplement à leur totaux permettra d'équilibrer les deux marges.

c) Le cas du tableau de Briggs est différent : sa marge (unique) fait l'objet d'une projection au moyen d'un modèle dont les coefficients sont estimés sur les données de 6 années consécutives (1948 à 1953).

2) *Les entrées*. Le cas des entrées est totalement différent.

a) Par exemple l'évolution des échanges entre deux branches d'industrie ne fait qu'exceptionnellement l'objet de prévisions spéciales.

b) De même les experts (et pour la France il s'agit de ceux du Plan, de la D. R. E. E. de l'I. N. S. E. E. et du S. E. E. F.) ne sont pas en mesure de prévoir l'évolution détaillée des échanges *bilatéraux*, par exemple entre la France et chacun des autres pays du monde.

3° Il est donc assez naturel que les entrées du tableau prévisionnel soient *évaluées* de telle sorte que :

1) leurs totaux verticaux et horizontaux coïncident avec les marges imposées;

2) leurs ordres de grandeurs *relatifs* soient le plus possible comparables à ceux du tableau statistique de départ.

Du moins en est-il ainsi lorsqu'on n'a aucune raison déterminante de prévoir un changement de structure complet des échanges, — comme c'est le cas pour les échanges extérieurs à la suite de l'établissement d'un marché commun.

Il n'entre pas dans nos intentions de faire ici l'exposé des méthodes d'ajustement plus ou moins mécaniques, par lesquelles on transforme ainsi un tableau de départ en un tableau final dont les marges sont données à l'avance. La méthode la plus employée (dite R. A. S.) procède par règles de trois et approximations successives et est appliquée par un calculateur électronique qui (généralement) écrit finalement le résultat voulu. Nous nous intéresserons surtout à elle. L'algorithme (décrit par MM. Paelinck et Waelbroeck) est le suivant :

Soit $M_0 = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$ par exemple le tableau initial.

Supposons qu'on désire en déduire un tableau M dont les termes en marge soient tous égaux à 10.

On calcule successivement

$$M_1 = \begin{bmatrix} 20/9 & 70/9 \\ 80/9 & 10/9 \end{bmatrix} \quad : \text{marge verticale} \quad \begin{bmatrix} 90/9 \\ 90/9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 2 & 70/8 \\ 2 & 10/8 \end{bmatrix} \quad : \text{marge horizontale} \quad [\,10 \quad 10\,]$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 160/86 & 700/86 \\ 640/74 & 100/74 \end{bmatrix} : \text{marge verticale} \quad \begin{bmatrix} 860/86 \\ 740/74 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

et ainsi de suite indéfiniment.

On constate qu'après un nombre suffisant d'itérations, les marges horizontales et verticales s'approchent l'une et l'autre des valeurs cherchées, et ceci de façon fort satisfaisante.

Nous pouvons d'abord nous proposer d'étudier si la suite de calculs ainsi définie est une suite finie ou infinie :

finie? le calcul s'arrête-t-il parce qu'on a le résultat voulu?
ou s'arrête-t-il parce qu'il devient impossible?

infinie? Les résultats intermédiaires tendent-ils vers une limite?
ou est-ce que la suite des résultats ne converge pas?
en particulier est-ce que cette suite oscillerait?

Nous pouvons encore sauter par dessus ces calculs, qui sont seulement un moyen (est-ce bien le meilleur?) de résoudre certains systèmes d'équations. Par exemple nous avons pu prouver (par un autre moyen) que la suite de tableaux $M_0\ M_1\ M_2\ M_3 \ldots$ ci-dessus ne pouvait converger que vers :

$$M = \begin{bmatrix} 1{,}589\,446 \ldots. & 8{,}410\,553 \ldots \\ \\ 8{,}410\,553 \ldots. & 1{,}589\,446 \ldots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{10}{1+2\sqrt{7}} & \dfrac{20\quad\sqrt{7}}{1+2\sqrt{7}} \\ \dfrac{20\quad\sqrt{7}}{1+2\sqrt{7}} & \dfrac{10}{1+2\sqrt{7}} \end{bmatrix}$$

Mais il faut se demander si le système d'équations donnant M admet bien une solution et, si oui, une solution positive et unique.

Qu'il s'agisse de la convergence des calculs numériques tels que R. A. S. ou qu'il s'agisse des solutions des équations sous-jacentes à ces calculs, il convient de penser à appliquer la théorie des tableaux dont les marges sont données (théorie de M. Fréchet). C'est ce que nous allons faire dans la 2e partie, essentiellement mathématique.

2e PARTIE

LA THÉORIE DU REMPLISSAGE DES TABLEAUX APPLIQUÉE AUX TABLEAUX PROSPECTIFS

Pour ne pas donner à cet exposé un tour trop aride, on a élagué le plus possible les démonstrations et les calculs, tout en restant précis.

Nous commencerons par rappeler les résultats de la théorie des tableaux dont nous entendons faire usage.

1. Rappel de certains résultats théoriques

Rappelons d'abord l'énoncé du problème de M. Maurice Fréchet : existe-t-il (au moins) un tableau (rectangulaire) de nombres positifs ayant des bornes supérieures connues, les marges du tableau étant données?

Dans notre précédent article (1961, fasc. 10/11/12, pp. 331-345), on trouvera la bibliographie des travaux de M. Fréchet et de plusieurs de ses élèves (de 1951 à 1960) relativement à ce problème. Des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe de tels tableaux ont été présentées alors par nous d'une façon géométrique assez utile.

La première de ces conditions (et la plus évidente) est que la somme des termes de la marge horizontale soit égale à celle des termes de la marge verticale.

On peut adopter les notations suivantes :

Soit A un tableau (une matrice) a_{ij}, $a_{ij} \geqslant 0$. $i = 12 \ldots m$
$j = 12 \ldots n$

B un tableau (une matrice) majorant A : $a_{ij} \leqslant b_{ij}$

En principe le tableau B est donné et le tableau A inconnu.

Soit a_i et $a._j$ les marges de A, supposées *données* et non nulles. Dans tout ce qui suit nous supposerons vérifiée la relation $\sum_i a_i. = \sum_j a._j \quad (= a\,..)$.

On peut facilement établir un autre ensemble de conditions nécessaires que nous appellerons *Conditions du 1er ordre*, à savoir :

les conditions nécessaires de ligne : $a_i. \leqslant b_i. \ldots (1)$

les conditions nécessaires de colonne : $a.j \leqslant b.j \ldots$ (2)
mais les conditions (2) sont en fait équivalentes aux conditions (1).

Ces relations entre termes des marges de B et A sont évidentes, mais ne sont pas triviales.

Ces conditions ne sont pas suffisantes. On peut en effet trouver d'autres conditions, éventuellement plus strictes, en regroupant 2 par 2, 3 par 3, ..., $(m - 1)$ par $(m - 1)$, les lignes (conditions) (3) — ou encore les colonnes conditions (4) — du tableau A. On peut les appeler : *conditions d'ordre supérieur.*

Les conditions concernant : les lignes — ou les $(m - 1)$ tuples de lignes, les couples de lignes — ou les $(m - 2)$ — tuples de lignes, etc. sont d'ailleurs équivalentes; ce qui permet d'arrêter les conditions (3) aux $\frac{m}{2}$ — $\left(\text{ou } \frac{m-1}{2}\right)$ — tuples. Il en est de même des conditions (4), équivalentes aux (3).

Réciproquement l'ensemble des conditions (1) (3) — ou encore l'ensemble (2) (4), — est suffisant pour qu'existe une matrice A.

La difficulté est que ces conditions sont en général très nombreuses (donc difficiles à vérifier directement en totalité) alors qu'en pratique le *plus grand nombre d'entre elles sont des redondances,* rien ne permettant de dire comment s'y prendre *en général* pour n'écrire que les conditions indispensables.

2. Application

Appliquons à présent ces quelques résultats au problème de statistique économique décrit dans la 1re partie.

La matrice A est justement le tableau prospectif cherché; ses marges (1) sont $a_i. = h_i$, $a.j = kj$.

On impose : $\sum_i h_i = \sum_j k_j \ (= a..)$.

Bien entendu si la loi de J. B. SAY devait être respectée, on imposerait la condition beaucoup plus stricte : $h_i = k_i \ (\forall i)$.

En règle générale les a_{ij} cherchés doivent être positifs, mais aucune limite b_{ij} ne leur est (à proprement parler) imposée. Toutefois nous allons admettre que les *termes nuls* de A sont connus d'avance; pour eux on a donc $b_{ij} = 0$.

Cette hypothèse découle du fait que le procédé R. A. S. appliqué à un tableau donné *en conserve les zéros.* Nous nous intéressons plus généralement à tout procédé conservant les zéros quand on passe du tableau des données passées au tableau analogue prospectif.

Quant aux termes *non nuls* a_{ij} ils sont bornés, indirectement, par le plus petit des deux termes marginaux h_i ou k_j. On se retrouve bien dans les conditions du problème de Fréchet; ce qui s'écrira :

$$a_{ij} = 0 \rightarrow b_{ij} = 0$$
$$a_{ij} > 0 \rightarrow a_{ij} \leqslant a.j = b_{ij} \text{ pour exprimer (1)}$$
$$a_{ij} \leqslant a_{ij} = b_{ij} \text{ pour exprimer (2)}$$

Dès lors, c'est la présence des termes nuls qui importe, et elle seule.

On désignera dans ce qui suit par $\mathscr{C}$ l'ensemble des cases dont le contenu est astreint à rester nul par hypothèse.

(1) On va admettre qu'aucune des valeurs imposées en marge n'est nulle.

3. Cas ou l'ensemble $\mathscr{C}$ est vide (1)

Le cas où $\mathscr{C}$ est vide, c'est-à-dire où aucun a_{ij} n'est obligatoirement nul, présente cette particularité que toutes les conditions imposées (1) (2) (3) (4) pour l'existence de A *s'évanouissent.*

Subsiste seule la condition :

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i.} = \sum_{j=1}^{n} a_{.j}.$$

Alors (et alors seulement) il est légitime d'ignorer les conditions (1 2 3 4), comme les utilisateurs du R. A. S. semblent le faire.

On démontre alors facilement ce qui suit :

Proposition 1 : Il existe toujours au moins un tableau A (soit A^1)

On l'établira en construisant de proche en proche en diagonale la solution de base du programme de transport classique correspondant;

Exemple :

1				1
1	3	1		5
		1		1
		1	2	3
2	3	3	2	

Proposition 2. A partir du tableau A^1, on peut construire une infinité d'autres tableaux A.

On l'établira à partir d'un couple (ij), (kh) de cases garnies d'éléments strictement positifs dans le tableau A^1, ce qui est toujours possible (puisqu'il est exclu que tous les $a_{i.}$ sauf un soient nuls).

Remarque : Ce cas n'est guère utile en pratique, sauf pour certains tableaux d'échanges internationaux très agrégés.

Nous allons donc rechercher l'influence des zéros dans le tableau, d'abord sur un cas assez peu réaliste : présence d'un seul zéro, — puis dans le cas d'une diagonale de zéros (à l'exclusion d'autres zéros), — puis dans le cas général.

Le cas d'une diagonale de zéros présente déjà un réel intérêt pratique.

Si une seule case est garnie d'un zéro, on peut toujours (par permutations des lignes et des colonnes) supposer qu'il s'agit de la case (1,1).

4. Cas ou un certain élément du tableau est astreint a rester nul

Soit $a_{11} = b_{11} = 0$ l'élément supposé nul. $\mathscr{C} = \{ 1{,}1 \}$

Il vient $a_{1.} = a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1n}$

$$= a_{12} + \dots + a_{1n}$$

avec $b_{1j} = a_{.j}$, $j = 2 \dots n$

d'où $a_{1.} \leqslant \sum_{2}^{n} a_{.j} = a_{..} - a_{.1}$

ou $\boxed{a_{1.} + a_{.1} \leqslant a_{..}}$

(1) Rappelons qu'aucun des termes des marges (h_i et k_j) ne doit être nul.

Remarque

1. Cette condition symétrique par rapport aux lignes et aux colonnes traduit aussi bien la condition (1) que la condition (2).

2. Ce n'est pas une condition banale :

Exemple

0			4
			1
			2
4	2	1	7
			7

problème impossible

3. Les conditions de type (3) et (4) sont des redondances.

En effet : si l'on considère des p—tuples de lignes (de colonnes) ne comprenant pas la ligne (colonne) renfermant le 0, il est clair qu'on est ramené au cas du nº 3 où les conditions s'évanouissent.

Si le p-tuple considéré renferme le 0, la condition est encore banale.

Exemple :
$$\begin{aligned} a_{1\cdot} + a_{2\cdot} &= a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1n} \\ &\quad + a_{21} + a_{22} + \dots + a_{2n} \\ &\leqslant a_{\cdot 1} + a_{\cdot 2} + \dots + a_{\cdot n} = a_{\cdot\cdot} \end{aligned}$$

4. Si l'on est dans un cas où la loi de J. B. SAY s'applique, la condition s'écrit :

$$a_{1\cdot} \leqslant \frac{1}{2} a_{\cdot\cdot}$$

5. Cas où $\mathscr{C}$ est formé de cases dont 2 ne sont jamais dans la même ligne ni dans la même colonne

En particulier : Cas où A est carrée et $\mathscr{C}$ formé de cases diagonales (ii).

Comme on l'a dit au début, si A est un tableau d'échanges (entre branches ou entre nations), les termes diagonaux correspondent à des échanges internes qu'on supprime souvent des comptabilisations (par exemple si on n'a aucun moyen de les enregistrer). Ainsi le cas examiné ici présente-t-il un réel intérêt pratique.

Il découle du § 4 qu'on a $\quad a_{i\cdot} + a_{\cdot j} \leqslant a_{\cdot\cdot}$

condition *nécessaire* pour tous les couples (ij) tels que la case (ij) renferme un zéro. En particulier, pour les tableaux d'échanges :

$$a_{i\cdot} + a_{\cdot i} \leqslant a_{\cdot\cdot},\ i = 12 \dots n$$

Si $\mathscr{C}$ ne renferme aucun autre élément, ces conditions nécessaires sont aussi suffisantes, car (voir § 4) les conditions de type (3) (4) sont vérifiées d'elles-mêmes.

6. Cas ou $\mathscr{C}$ comprend plusieurs cases de la même ligne (ou colonne)

Ce sera à vrai dire le cas général dans la pratique.

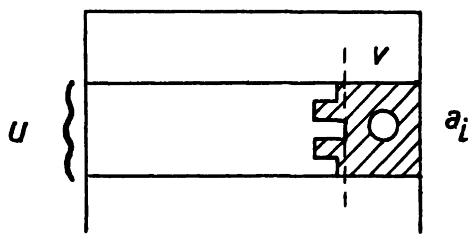
On va donner un énoncé général concernant les lignes. Celui pour les colonnes est analogue.

Étant donné l'ensemble des $m = C_m^1$ lignes
— des C_m^2 paires de lignes
— des C_m^3 triplets de lignes, etc.

Considérons l'ensemble U de ces $C_m^1 + C_m^2 + C_m^3 + \ldots = (2^m - 1)$ éléments désignés par u.

A chaque u faisons correspondre l'ensemble v des colonnes entièrement garnies de zéros, autrement dit $\{ v;\ a_{ij} = 0,\ \forall\, i \in u,\ j \in v \}$.

On définit donc une application $u \rightarrow v$.



On a $\sum\limits_{u} a_{i\cdot} \leqslant \sum\limits_{v'} a_{\cdot j}$

v' étant le complémentaire de v

autrement dit $\boxed{\sum\limits_{u} a_{i\cdot} + \sum\limits_{v} a_{\cdot j} \leqslant a_{\cdot\cdot}}$

Mais bon nombre de ces $(2^m - 1)$ inégalités sont des redondances :

1) Celle relative à l'ensemble de toutes les lignes est superflue.
Celles relatives aux $(m - 1)$ — tuples de lignes font double emploi avec celles relatives aux lignes, etc.

et il reste au maximum $\dfrac{2^m - 2}{2} = (2^{m-1} - 1)$ inégalités.

2) Chaque fois que $v\,(u_1)$ et $v\,(u_2)$ coïncident, avec $u_2 \subset u_1$, l'inégalité relative à u_2 et $v\,(u_2)$ est inutile parce que moins stricte que celle relative à u_1 et $v\,(u_1)$.

Exemple : $a_{1\cdot} + a_{\cdot 1} \leqslant a_{\cdot\cdot}\ (a_{11} = 0)$
$a_{1\cdot} + a_{\cdot 2} \leqslant a_{\cdot\cdot}\ (a_{12} = 0)$

$$\left|\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right.$$

sont inutiles car moins strictes que $a_{1\cdot} + a_{2\cdot} + a_{\cdot 1} \leqslant a_{\cdot\cdot}$

Nota : Partant d'un ensemble v de colonnes, on pourrait de même définir $v \rightarrow u$ afin d'écrire les conditions de colonnes (on retrouverait les mêmes).

7. Particularisations diverses

En étudiant quelques cas particuliers, la signification de l'énoncé général apparaît plus clairement.

Comme on peut permuter lignes ou colonnes sans altérer l'existence de A, on essayera de regrouper ainsi les zéros.

7. 1. *Exemple :* $a_{11} = a_{21} = a_{31} = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots \\ 0 & a_{22} & \cdots \\ 0 & a_{32} & \cdots\cdots \\ \hline a_{41} & a_{42} & \cdots\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots \end{bmatrix}$$

Pour le triplet des 3 premières lignes, la condition (3) s'écrit :

$$\left.\begin{array}{l} a_{12} + a_{13} + \dots \\ + a_{22} + a_{23} + \dots \\ + a_{32} + a_{33} + \dots \end{array}\right] \leqslant a_{\cdot 2} + a_{\cdot 3} + \dots = a_{\cdot\cdot} - a_{\cdot 1}$$

Autrement dit : $a_{1\cdot} + a_{2\cdot} + a_{3\cdot} \leqslant \sum_{2}^{n} a_{\cdot j}$

équivalent à : $a_{\cdot 1} \leqslant \sum_{4}^{n} a_{i\cdot}$

7. 2. *Extension au cas où il existe (au moins) une sous-matrice de zéros*

$$(p \times q);\ p + q = m = n.$$

$$A = \begin{array}{|c|c|} \hline .\mathrm{P} & \mathrm{O} \\ \hline \mathrm{R} & \mathrm{Q} \\ \hline \end{array}\ \begin{array}{c} p \\ q \end{array} \qquad \begin{array}{l} a_{ij} \leqslant a_{\cdot j} \Rightarrow a_{i\cdot} \leqslant \sum_{j=1}^{p} a_{\cdot j};\ i = 12 \,..\, p \\ a_{ij} \leqslant a_{i\cdot} \Rightarrow a_{\cdot j} \leqslant \sum_{i=p+1}^{n} a_{i\cdot};\ j = p + 1, \,.n \end{array}$$

Telles sont les conditions nécessaires (de ligne, de colonne) non banales.

Ou encore :
$$\left| \begin{array}{l|l} a_{i\cdot} + \sum_{j=p+1}^{n} a_{\cdot j} \leqslant a_{\cdot\cdot} & i = 1,2 \,..\, p \\ a_{\cdot j} + \sum_{i=1}^{p} a_{i\cdot} \leqslant a_{\cdot\cdot} & j = p + 1, \,..\, n \end{array} \right.$$

Conditions pour couples de lignes, triplets de lignes, etc.
On a de même, pour les lignes 1,2 : $1{,}2 \in \{ p \}$

$$a_{1j} + a_{2j} \leqslant a_{\cdot j} \Rightarrow a_{1\cdot} + a_{2\cdot} \leqslant \sum_{j=1}^{p} a_{\cdot j} \tag{3}$$

etc.

d'où la *condition la plus stricte :*

$$\sum_{i=1}^{p} a_{i\cdot} \leqslant \sum_{j=1}^{p} a_{\cdot j} \dots \tag{3'}$$

de même :

$$a_{\cdot n} + a_{\cdot n-1} \leqslant \sum_{i=p+1}^{n} a_{i\cdot} \tag{3}$$

d'où :

$$\sum_{j=p+1}^{n} a_{\cdot j} \leqslant \sum_{i=p+1}^{n} a_{i\cdot} \tag{4'}$$

Mais (4') est une redondance : elle équivaut à (3').

Restent les combinaisons (de lignes et de colonnes) à cheval sur les 2 sous-ensembles $i = 1, 2 \dots p$, et $i = p + 1, \dots n$. Mais alors les conditions qui en découlent sont banales.

7. 3. *Autre exemple :* $a_{11} = a_{12} = a_{21} = 0$

$$\begin{array}{|ccc} \hline 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots \end{array}$$

Il vient, en utilisant la ligne (1) et la colonne (1), les conditions suivantes :

$$\begin{array}{l|l} a_{1\cdot} + a_{\cdot 1} + a_{\cdot 2} \leqslant a_{\cdot\cdot} & \text{type (1)} \\ a_{1\cdot} + a_{\cdot 2} + a_{2\cdot} \leqslant a_{\cdot\cdot} & \text{type (2)} \end{array}$$

Les conditions de type (3) (4) ne sont pas plus strictes que celles de type (1) (2), avec le couple 1-2 de lignes ou de colonnes. (Elles seraient plus strictes si a_{22} était également nul).

7. 4. *Cas où le nombre des zéros est très élevé.*

Si la matrice A doit renfermer un nombre élevé de zéros, il devient a priori peu pratique de rechercher si toutes les conditions (1) (2) (3) (4) sont vérifiées.

On peut parfois espérer se trouver dans quelque cas particulier commode. En voici deux exemples.

1) Cas où il existe un couple : ligne (i) colonne (j), dont les termes sont nuls sauf a_{ij}.

Alors $\left|\begin{array}{l} \text{si } a_{i.} = a_{j.} \text{ impossibilité} \\ \text{sinon : } a_{ij} = a_{i.} = a_{.j} \end{array}\right.$

2) *Cas où le problème se décompose* (extension du cas précédent)

$$\begin{array}{c|c|c|} & q & n\text{-}q \\ \hline p & \mathrm{P} & 0 \\ \hline m\text{-}p & 0 & \mathrm{Q} \\ \hline \end{array}$$

Il arrive que par des permutations convenables des lignes et des colonnes A puisse se mettre sous la forme ci-contre : 2 sous-matrices de zéros et 2 sous-matrices P, Q, lesquelles ont (bien entendu) leurs marges connues. A leur tour P ou Q (ou les deux) peuvent se décomposer, etc.

Si à la partition de A par les sous-matrices 0 ne correspond pas la même partition des marges $\left(\sum_{i=1}^{p} a_{i.} = \sum_{j=1}^{q} a_{.j}\right)$, il y a impossibilité.

3e PARTIE

CONFRONTATION ENTRE LES CONDITIONS D'EXISTENCE ET LES MÉTHODES DE CONSTRUCTION DES TABLEAUX

1. Introduction

Dans la 2e partie nous avons donné des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe au moins un tableau d'échanges prospectif; en général il en existera alors une infinité.

A la fin de la 1re partie nous avons vu comment on s'arrangeait pour construire l'un de ces tableaux, le tableau R. A. S., calculé de proche en proche.

Ce tableau peut être défini à priori de la façon suivante, dans l'exemple donné plus haut de tableau (2 × 2).

Partant de : $\mathrm{M} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$; $h = k = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}$

trouver 4 nombres x y u v, tels que la matrice

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,ux & 7\,vx \\ 8\,uy & 1\,vy \end{pmatrix}$$

ait les marges h et k'; d'où les 4 équations :

$$\begin{array}{ll|ll} 2\,u + 7\,v = 10/x & & 2\,x + 8\,y = 10/u \\ 8\,u + v \;\; = 10/y & & 7\,x + \;\; y = 10/v \end{array}$$

On en tire

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{10}{x} = \dfrac{20}{2\,x + 8\,y} + \dfrac{70}{7\,x + y} \\ \dfrac{10}{y} = \dfrac{80}{2\,x + 8\,y} + \dfrac{10}{7\,x + y} \end{array}\right.$$

ou

$$\left|\begin{array}{l} 10\,(2x + 8y)\,(7x + y) = (280\,x + 580\,y)\,x \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\;\; = (580\,x + 160\,y)\,y \end{array}\right.$$

qui se réduit à $280\,x^2 = 160\,y^2$

d'où $\qquad y = \sqrt{7}\,x\,/2$ (solution positive)

On trouve de même $\qquad u = \sqrt{7}\,v\,/4$

$$\left|\begin{array}{l} ux = 10/(2 + 4\sqrt{7}) = 5/(1 + 2\sqrt{7}) \\ vx = 20/(\sqrt{7}\,(1 + 2\sqrt{7}) \end{array}\right.$$

d'où la limite M_∞ de la suite $M_0\,M_1\,M_2\,\ldots$ de matrices :

$$M_\infty = \frac{1}{1 + 2\sqrt{7}} \begin{pmatrix} 10 & 20\sqrt{7} \\ 20\sqrt{7} & 10 \end{pmatrix}$$

Il est évident que le calcul serait inextricable avec un tableau plus grand, ou même si l'on n'avait pas choisi $h_1 = h_2 = k_1 = k_2$ ($= 10$). Mais le système d'équations envisagé ne manque pas d'intérêt dans le cas général; il nous a été signalé par M^lle Florenzano, mathématicienne du C. E. P. R. E. L.

2. Problème général

Le problème suivant nous a été posé par M^lle Florenzano, en juin 1963.

Soit $(a_{ij}) = A$ une matrice carrée $(n \times n)$ donnée;

$(h_i) = h$ et $(k_j) = k$, 2 vecteurs $(n \times l)$ donnés,

$a_{ij} \geqslant 0$, $h_i > 0$, $k_{2j} > 0$

Soit $(x_i) = x$ et $(y_j) = y$ 2 vecteurs inconnus, positifs $x_i > 0$, $y_j > 0$. satisfaisant aux 2 équations matricielles

$\hat{x}\,Ay = h$

$x'\,A\,\hat{y} = k'$

x' étant le transposé de x, et $\hat{x}$ la matrice diagonale Z. $\left\{\begin{array}{l} z_{ii} = x_i \\ z_{ij} = 0 \end{array}\right.$

autrement dit : 2 n équations à 2 n inconnues :

$$\text{(I)} \left\{\begin{array}{l} \Sigma_j\,x_i\,a_{ij}\,y_j = h_i \\ \Sigma_i\,x_i\,a_{ij}\,y_j = k_j \end{array}\right\} \begin{array}{l} (i = 12\,\ldots\,n) \\ (j = 12\,\ldots\,n) \end{array}$$

On se propose d'étudier l'*existence* et l'*unicité* des solutions *positives* de ces équations.

1. Il est clair qu'à toute solution $(x^o{}_i,\, y^o{}_j)$ correspond l'infinité de solutions $(tx^o{}_i,\, y^o{}_j/t)$, avec $t > 0$ quelconque.

2. Si les données satisfont à la condition (d'égalité des sommes de marges du tableau des $x_i\,a_{ij}\,y_j$) : $\qquad \Sigma_i\,h_i = \Sigma_j\,k_j$

il n'y a plus que $(2\,n - 1)$ équations et $(2\,n - 1)$ inconnues.

Effectivement on déduit de (1) :

$$\Sigma_i\, h_i = \Sigma_i\, \Sigma_j\, x_i\, a_{ij}\, y_j$$
$$\Sigma_j\, k_j = \Sigma_j\, \Sigma_i\, x_i\, a_{ij}\, y_j$$

et ces deux expressions sont identiques (car on peut permuter les 2 symboles de sommation).

Il est évident que x et y n'existent que si $\Sigma_i\, h_i = \Sigma_j\, k_j$.

L'égalité du nombre de conditions et du nombre d'inconnues n'est (on le sait) ni une condition nécessaire, ni une condition suffisante pour l'existence (l'unicité, la positivité) des solutions; c'est seulement un élément en faveur d'une telle présomption.

Des considérations inspirées par la théorie de Fréchet sur les tableaux dont les marges sont données (1) nous apprennent que la solution x, y (positive) n'existe qu'autant que certaines inégalités entre les h_i et k_j sont également vérifiées, inégalités liées à l'*existence* et à la *position* des termes a_{ij} *nuls*.

3. Exemple : $n = 3$

Considérons le cas suivant :

$$\text{I}\begin{cases} x\;\;(ay + by' + cy'') = h \\ x'\;\;(a'y + b'y' + c'y'') = h' \\ x''\;\;(a''y + b''y' + c''y'') = h'' \end{cases} \qquad \left|\quad \begin{aligned} (xa + x'a' + x''a'')\, y &= k \\ (xb + x'b' + x''b'')\, y' &= k' \\ (xc + x'c' + x''c'')\, y'' &= k'' \end{aligned}\right.$$

Supposons $a = b' = c'' = 0$ (diagonale nulle) et tous les autres termes strictement positifs.

La théorie précédente nous apprend que $(x\ x'\ x''\ y\ y'\ y'')$ positifs n'existent pas si les inégalités suivantes ne sont pas satisfaites :

$$\left.\begin{aligned} h + k &\leqslant s \\ h' + k' &\leqslant s' \\ h'' + k'' &\leqslant s'' \end{aligned}\quad\right| \quad \text{avec } s = h + h' + h'' = k + k' + k''$$

Car si $x\, x'\, x''\, y\, y'\, y''$ (positifs) existent, les xay, xby', etc. (positifs) existent aussi et constituent une solution au problème de Fréchet (traité dans notre 2e partie).

Essayons de retrouver directement ces inégalités.

En éliminant $x\ x'\ x''$, le système (I) se réduit à :

$$\text{(II)}\quad \left|\quad \frac{k}{y} = \frac{h'a'}{a'y + c'y''} + \frac{h''a''}{a''y + b''y'}\right.$$

(et 2 équations analogues)

autrement dit :

$$\text{(II)}\quad \left|\quad \begin{aligned} k &= 0.\, h + \frac{a'y}{a'y + c'y''}\, h' + \frac{a''y}{a''y + b''y'}\, h'' \\ k' &= \frac{by'}{by' + cy''}\, h + 0\, h' + \frac{b''y'}{a''y + b''y'}\, h'' \\ k'' &= \frac{cy''}{by' + cy''}\, h + \frac{c'y''}{a'y + c'y''}\, h' + 0h'' \end{aligned}\right.$$

On vérifie bien entendu que

$$k + k' + k'' = h + h' + h''$$

(1) Voir notre 2e partie.

Mais on voit aussi sur ces expressions qu'on a

$$h + k = 1 . h + \alpha h' + \beta h''$$

en désignant par α et β des coefficients positifs *inférieurs à l'unité;* donc :

$$h + k < h + h' + h''$$

De même on voit que

$$\begin{aligned} h' + k' &< h + h' + h'' \\ h'' + k'' &< h + h' + h'' \end{aligned}$$

Il s'agit d'ailleurs *d'inégalités strictes*; l'égalité :

$$h + k = h + h' + h''$$

suppose $\alpha = \beta = 1$, c'est-à-dire :

$$c'y'' = 0, \; b''y' = 0,$$

ce qui est contraire aux hypothèses.

Conclusion: Si $(y\,y'\,y'')$ existent, c'est qu'on a $\boxed{h + k < s}$ et analogues.

Si $h + k < s$ n'est pas vérifiée, c'est que $(y\,y'\,y'')$, s'ils existent, ne sont pas tous positifs.

4. Généralisation

Le calcul précédent s'étend immédiatement. Il vient

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} x_i = h_i \left(\sum_j a_{ij} y_j\right)^{-1} \\ \sum_i x_i\, a_{iJ} = k_J / y_J \end{cases}$$

$$(\mathrm{II}) \quad \frac{k_J}{y_J} = \sum_i \frac{h_i\, a_{iJ}}{\sum_j a_{ij} y_j}$$

$$(\mathrm{II'}) \quad k_J = \sum_i h_i \frac{a_{iJ}\, y_J}{\Sigma_j\, a_{ij}\, y_j}$$

Soit alors a_{iJ} nul pour $i = 1, 2, 3$, (par exemple), il vient

$$h_1 + h_2 + h_3 + k_J = \sum_i h_i\, \alpha_i$$

avec

$$\begin{cases} i = 1, 2, 3 : \alpha_i = 1 \\ i > 3 \quad\;\; : \alpha_i < 1 \end{cases}$$

donc

$$h_1 + h_2 + h_3 + k_J < \sum_i h_i = s$$

Telles sont les conditions *nécessaires* fournies par chaque colonne J du tableau (a) en considérant les éléments nuls de cette colonne. En échangeant les rôles des lignes et des colonnes, on obtient d'autres conditions (équivalentes en fait aux précédentes).

En regroupant les colonnes par paire, par triplet, etc., on peut obtenir certaines conditions qui ne soient pas déjà contenues dans les précédentes.

Par exemple soit :

$$k_1 = \sum_i h_i \frac{a_{i1}\, y_1}{\Sigma_j\, a_{ij}\, y_j} \qquad k_2 = \sum_i h_i \frac{a_{i2}\, y_2}{\Sigma_j\, a_{ij}\, y_j}$$

avec $a_{11} = a_{21} = 0 \qquad a_{12} = a_{22} = 0$

$$\Rightarrow k_1 + k_2 = \sum_i h_i \frac{a_{i1}\, y_1 + a_{i2}\, y_2}{\Sigma_j\, a_{ij}\, y_j}$$

$$h_1 + h_2 + k_1 + k_2 = \sum_i h_i\, \alpha_i < \sum_i h_i = s$$

(avec $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$; $\alpha_i \leqslant 1$ si $i \geqslant 3$) *c.q.f.d.*

	1	2		
1	0	0		h_1
2	0	0		h_2
	k_1	k_2		

Conclusion : Nous avons retrouvé directement toutes les conditions inspirées de Fréchet, comme *conditions nécessaires* pour qu'il existe (au moins) une solution positive $(x_1 \ldots x_n, y_1 \ldots y_n)$ au problème de M^lle^ Florenzano.

Nous savons que ces conditions inspirées de Fréchet sont d'ailleurs *suffisantes* pour que le problème de Fréchet ait une solution; mais nous devinons qu'elles doivent aussi être suffisantes pour le problème de M^lle^ Florenzano.

5. Considérations relatives aux points fixes

On note que (I) exprime une application de l'orthant positif Ω des $\mathcal{Y}$ (ou des $\mathcal{X}$) sur lui-même; de sorte qu'un théorème de point fixe devrait fournir la preuve de l'existence de la solution de (I). Malheureusement cette existence étant subordonnée aux inégalités trouvées dans la 2^e^ partie, dès que la matrice (a_{ij}) renferme des termes nuls; il ne faut s'attendre à trouver une justification simple et correcte que dans *le cas où aucun* a_{ij} n'est nul.

Effectivement on constate facilement que : si (a_{ij}) n'a aucun élément nul, les équations (I) appliquent Ω (frontière comprise) sur lui-même. Le théorème de point fixe de Brouwer (adapté par les économètres) entraîne l'existence d'une solution *au moins* (positive) pour (I).

Ceci ne permet pas d'affirmer l'unicité de la solution (encore qu'elle paraisse vraisemblable).

Nous sommes ainsi conduit à regarder de plus près les équations II. Faisons-le pour $n = 3$ et *une diagonale de zéros*, par exemple :

Posons $y'/y = t$, $y''/y = t'$; il vient

$$\text{II} \quad \left| \begin{array}{l} k = \dfrac{a'}{a' + c'\, t'}\, h' + \dfrac{a''}{a'' + b''\, t}\, h'' \equiv \varphi\,(t, t') \\[2ex] k' = \dfrac{bt}{bt + ct'}\, h + \dfrac{b''\, t}{a'' + b'' t}\, h'' \equiv \psi\,(t, t') \\[2ex] \text{et une 3}^{\text{e}} \text{ relation équivalente à} \end{array} \right.$$

$$k + k' + k'' = h + h' + h''$$

On a : $\quad \dfrac{bt}{bt + ct'} \equiv 1 - \dfrac{ct'}{bt + ct'} \qquad \dfrac{b''t}{a'' + b''t} \equiv 1 - \dfrac{a''}{a'' + b''t}$

d'où :

$\varphi\,(t, t')$ est fonction (continue) uniformément décroissante de t et t';

$\psi\,(t, t')$ est fonction (continue) uniformément croissante de t et uniformément décroissante de t'.

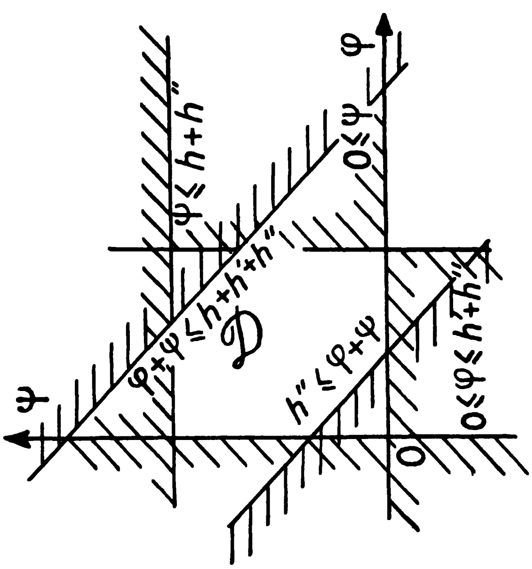
Nous ne nous intéressons qu'aux valeurs *positives* de $y\ y'\ y''$, donc de t et t'.

Les seconds membres des équations II définissent une « *bijection* », c'est-à-dire une application du 1[er] quadrant ($0 \leqslant t$, $0 \leqslant t'$) sur un certain domaine $\mathscr{D}$ du point (φ, ψ) ***dans son plan, et une application du domaine*** $\mathscr{D}$ ***sur le 1[er] quadrant.***

$$\begin{array}{l|llll}
t' = 0 & \varphi = h' + \dfrac{a''}{a'' + b''t}\, h''; & \psi = h & = \dfrac{b''\, t}{a'' + b''\, t}\, h'' \\[2ex]
t' \quad \infty & \varphi = & \dfrac{a''}{a'' + b''t}\, h''; & \psi \quad = & \dfrac{b''\, t}{a'' + b''t}\, h'' \\[2ex]
t = 0 & \varphi = \dfrac{a'}{a' + c't'}\, h' + h''; & \psi = 0 \\[2ex]
t \quad \infty & \varphi = \dfrac{a'}{a' + c't'}\, h'; & \psi = h + h''
\end{array}$$

(Si $t = t' = \infty$, *simultanément :* indétermination)

Les équations II n'ont de solution que si le point ($k\ k'$) appartient au domaine $\mathscr{D}$ (Alors la solution positive est unique).



Le domaine $\mathscr{D}$ est défini par

$$\begin{aligned}
h'' \leqslant \varphi + \psi &\leqslant h + h' + h'' \\
0 \leqslant \varphi &\leqslant h' + h'' \\
0 \leqslant \psi &\leqslant h\ + h''
\end{aligned}$$

On reconnaît l'hexagone de notre article du J. S. S. P. (1961). La condition : (kk') $\in \mathscr{D}$ (le point kk' appartient au domaine $\mathscr{D}$) n'est pas autre chose que l'ensemble des *conditions de Fréchet* (nécessaires et suffisantes).

6. Cas général : n quelconque; ensemble $\mathscr{C}$ de zéros quelconque

On montrerait de même que :
Le système d'équations II équivaut à n équations

$$f_j\ (t_2\, t_3 \ldots\, t_n) = k_j \qquad \text{avec } t_i = y_i/y_1$$

seulement liées par la relation

$$\sum_j f_j = h_1 + \ldots .\ h_n$$

les fonctions f_j étant strictement uniformes en t_i (c'est-à-dire soit strictement *croissantes*, soit strictement *décroissantes*).

Proposition : Le système II définit une certaine application bijective continue de l'orthant positif Ω des ($t_2 \ldots t_n$) sur un domaine $\mathscr{D}$ pour le point (f). Si le point (k) appartient à $\mathscr{D}$, c'est-à-dire si les conditions de Fréchet sont vérifiées, il résulte d'un théorème (1) de Wald (1934) que II *admet une solution positive et unique.*

Telle est la réponse au problème de Mlle Florenzano.

7. Convergence de l'algorithme R. A. S.

Dans notre communication au congrès d'Ottawa (1963) nous avons écrit (aux notations près) :

Soit $(a^0{}_{ij})$ le tableau initial. Par une séquence de règles de trois (en ligne et en colonne, alternativement) on construit un tableau (a^*_{ij}) tel que

$$a_{i\cdot} = b_i,\ a_{\cdot j} = k_j$$

L'algorithme R. A. S. est :

$$\begin{cases} a_{ij}^{(n)} = a_{ij}^{(n-1)}\, k_j/\sum_i a_{ij}^{(n-1)} \\ a_{ij}^{(n+1)} = a_{ij}^{(n)}\, h_i/\sum_j a_{ij}^{(n)} \end{cases}$$

Considérons les matrices

$$(a_{ij}^{n}) = \alpha \qquad (a_{ij}^{n+1}) = \beta \qquad (a_{ij}^{n+2}) = \gamma$$

où α et γ ont la marge k, et β la marge h.

Le problème de convergence consiste ici à voir si les marges $\alpha_{i\cdot}$ et $\gamma_{i\cdot}$ se rapprochent des h_i, donc si $(\gamma_{i\cdot})$ ressemble plus à (h_i) que $(\alpha_{i\cdot})$.

Il est assez facile de prouver que

$$\min_\rho \frac{\alpha_{\rho\cdot}}{h_\rho} \leqslant \frac{\gamma_{i\cdot}}{h_i} \leqslant \max_\rho \frac{\alpha_\rho}{h_\rho}$$

parce que $(\gamma_{i\cdot}/h_i)$ est une moyenne des $(\alpha_{\rho\cdot}/h_\rho)$ pondérés par des poids positifs ou nuls (comme les α_{ij}). Et si l'on exclut le cas d'une ligne de zéros et d'une colonne de zéros se croisant en (ij), — cas déjà évoqué, — il s'agit en fait d'inégalités strictes :

$$\min_\rho \frac{\alpha_{\rho\cdot}}{h_\rho} < \frac{\gamma_{i\cdot}}{h_i} < \max_\rho \frac{\alpha_{\rho\cdot}}{h_\rho}$$

donc les suites $\min_\rho \left(\frac{\alpha_{\rho\cdot}^{(n)}}{b_\rho}\right)$ et $\max_\rho \left(\frac{\alpha_{\rho\cdot}^{(n)}}{b_\rho}\right)$ convergent, respectivement vers l et L, avec $l \leqslant$ L.

1 Si $l =$ L, la matrice (a_{ij}^{n}) converge; on a nécessairement $l =$ L $= 1$.

2 Si $l <$ L, la matrice ne converge pas; (a^*_{ij}) n'existe pas,

Exemple :

$$(a^0) = \begin{pmatrix} 0\,2\,3 \\ 1\,0\,0 \\ 1\,1\,0 \end{pmatrix} \qquad k = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad k = (3\ 3\ 3)$$

(1) Il s'agit d'une adaptation d'un théorème sur les ensembles au problème de l'équilibre économique : *Bericht über des Kolloquium* 1934-1935 (Wien); A. Wald : *Über die Produktionsgleichungen der ökonomischen Wertlehre* (II. Mitteilung).

$3 + 3 + 3 > 8$. On sait que (a^*) n'existe pas (: problème de M. Fréchet). Il vient avec $h = (323)$:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 2{,}4 & 3{,}6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1{,}5 & 2{,}9 & 3{,}6 & 8 \end{matrix} \quad ; \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1{,}65 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0{,}35 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 4{,}65 \\ 2 \\ 1{,}35 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 3 & 2{,}0 & 3 & 8 \end{matrix} \quad ; \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & 2{,}13 & 3{,}87 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0{,}74 & 0{,}26 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1{,}74 & 2{,}39 & 3{,}87 & 8 \end{matrix}$$

$$\frac{\alpha_\rho}{h_\rho} = (0{,}5;\, 1{,}45;\, 1{,}20);\ \frac{\gamma_\rho}{h_\rho} = (0{,}58;\, 1{,}20;\, 1{,}29)$$

On a bien :

$$0{,}50 < (0{,}58;\, 1{,}20;\, 1{,}29) < 1{,}45$$
$$\left.\begin{matrix} 0{,}50 < 0{,}58 < \ldots \to l \\ 1{,}45 < 1{,}29 < \ldots \to L \end{matrix}\right\} l \leqslant L$$

Il serait intéressant de savoir si les conditions d'existence impliquent bien la convergence (ce qui nous paraît très vraisemblable). »

Nous ne prétendons pas avoir établi à présent cette convergence; mais si l'algorithme R. A. S. converge il ne peut donner que la solution de M[lle] Florenzano.

RÉSUMÉ

La méthode R. A. S. permet le calcul par itération de la solution positive d'un certain système d'équations (si elle existe).

Cette solution positive existe et est unique si et seulement si les conditions de Fréchet correspondantes sont vérifiées;

C'est-à-dire que : *le tableau prospectif* cherché *existe* et est *unique*, si et seulement si les conditions de Fréchet sont vérifiées.

P. Thionet

RÉFÉRENCES

Thionet (P.). — Sur le remplissage d'un tableau à double entré. *Journ. Soc. Stat. Paris* (1961, 10-11-12), p. 331-345.

Thionet (P.). — Sur certaines variantes des projections du tableau d'échanges interindustriels (Ottawa 1963), *Bull. Inst. Intern. Stat.* 40-1, 119-132.

C. E. P. R. E. L. — Étude d'une méthode de projection du réseau des échanges interindustriels (Ronéo, juillet 1963); et notamment :

Florenzano. — Ch. II : Problèmes mathématiques soulevés par la méthode RAS.

C. E. P. R. E. L. — Note de travail (Ronéo) : illustration de méthodes dues à Frechet (7 janvier 1963).
Dans cette note, la méthode RAS est indiqué (sans autre référence) comme due à Deming et Brown.

Gorman. — Le C. E. P. R. E. L. nous a communiqué photocopie du draft d'une intervention de Gorman à une réunion de statisticiens anglais; d'où il ressort que ses préoccupations sont (à la même époque) très voisins des nôtres. Mais nous ignorons où ce texte à paru.

P. Thionet