

# JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

MARCEL BRICHLER

## Études des résultats d'agences de compagnies d'assurances

*Journal de la société statistique de Paris*, tome 102 (1961), p. 295-316

[http://www.numdam.org/item?id=JSFS\\_1961\\_\\_102\\_\\_295\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1961__102__295_0)

© Société de statistique de Paris, 1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (<http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## IV

### ÉTUDES DES RÉSULTATS D'AGENCES DE COMPAGNIES D'ASSURANCES

---

Une Société d'Assurances doit suivre de très près les résultats techniques des contrats en vue, lorsqu'il y a lieu d'ajuster les primes à la valeur réelle des risques, voire de résilier les contrats donnant des résultats anormalement mauvais. Cette opération de surveillance des risques peut s'effectuer sur chaque contrat individuellement, par des procédés divers.

Mais il est utile, en outre, de connaître les résultats d'ensemble de chaque Agent ou Courtier confiant des affaires à la Compagnie (1). Ce contrôle permet de s'assurer que les Courtiers n'apportent pas systématiquement les mauvais risques à la même Société, et que les Agents de la Compagnie ont un portefeuille équilibré, qu'ils en suivent eux-mêmes convenablement les résultats et proposent au Siège les mesures éventuellement nécessaires.

La présente étude concerne les Agents d'une Compagnie assurant contre les risques de toute nature et dont un peu plus de la moitié des encaissements se rapportent à l'Automobile.

*Définitions.* — Nous appelons « résultat brut » d'une agence, pour une année donnée, le rapport :

$$\frac{\text{coût des sinistres}}{\text{montant des primes nettes}} \times 100.$$

En fait, quand ce rapport a la valeur 100, c'est-à-dire quand le coût des sinistres égale le montant des primes, il ne correspond pas à la situation d'équilibre, car la totalité des primes perçues ne doit pas couvrir exclusivement les sinistres; une partie des primes sert, en effet, à rémunérer les Agents, sous forme de commissions, et à couvrir les frais de gestion de la Compagnie (gestion des contrats et des sinistres). Si l'on admet, en première

---

(1) Les « Agents » sont les mandataires d'une Compagnie à laquelle ils doivent, en principe, confier tous leurs contrats; au contraire, les « Courtiers » sont indépendants et peuvent travailler avec les Compagnies qu'ils désirent.

approximation, que la prime « pure », qui correspond à l'espérance mathématique du coût des sinistres, représente en moyenne 65 % de la prime nette, il est préférable de considérer le « résultat technique » défini par :

$$\frac{\text{coût des sinistres}}{\text{montant des primes nettes}} \times \frac{100}{0,65}$$

C'est ce rapport qui sera toujours utilisé ici; quand il est égal à 100 la Compagnie n'a ni bénéfice, ni perte, pour l'agence et pour l'année considérée (1).

Une méthode rapide, mais sommaire, parfois employée pour juger les résultats d'une agence sur une certaine période, 10 ans par exemple, consiste à compter le nombre de fois où le résultat annuel a dépassé 100, et à considérer comme mauvaises les agences ayant eu plus de 5 résultats sur 10 dépassant la valeur 100. Ce procédé est acceptable pour les agences très importantes, qui ont chaque année un nombre élevé de sinistres et dont la courbe de distribution des résultats est, comme nous le verrons, sensiblement symétrique avec une valeur médiane voisine de 100 (2). Mais on ne peut l'employer pour les agences moyennes et petites, les plus nombreuses. En effet, dans celles-ci, les sinistres, surtout les graves, sont rares; plus l'agence est petite, plus la courbe de distribution des résultats est dissymétrique, comme nous le préciserons ci-après, et plus la valeur médiane s'abaisse: la valeur critique à retenir n'est donc plus 100, mais une valeur qui peut être nettement plus faible et le jugement porté en utilisant la valeur 100 est faussement optimiste.

### Constitution d'un échantillon

Nous sommes donc amenés à tenir compte de l'importance des agences que nous appellerons « taille ». Le critère retenu à cet effet est le montant annuel des encaissements, critère qui paraît le plus caractéristique.

La Société étudiée comptant 555 agences métropolitaines, nous avons travaillé, pour établir les normes, sur un échantillon stratifié par taille, composé comme suit :

Groupe d'importance	Encaissement 1959 en milliers de NF	Nombre d'agences		Taux de sondage %
		Au total	Dans l'échantillon	
Bureaux locaux (1) :	Supérieur à 800	3	3	100
Agences	800 à 400	18	4	20
	n° 1 . . . . .	400 à 200	62	10
	n° 2 . . . . .	200 à 100	122	10
	n° 3 . . . . .	100 à 50	181	10
	n° 4 . . . . .	50 à 20	106	10
	n° 5 . . . . .	20 à 8	67	10
	n° 6 . . . . .	8 à 2	30	20
	n° 7 . . . . .	2 à 0,1	16	3
		555	65	

(1) Organes décentralisés dans les grandes villes et traitant plus particulièrement avec des courtiers. Il existe un bureau semblable à Paris, mais nous l'avons provisoirement exclu de l'étude.

### Influence de la croissance des agences

L'étude porte sur les 10 années de la période 1950-1959. La taille des agences a été définie en considérant l'encaissement de l'année 1959 : pour que les groupes constitués soient

(1) Précisons que dans cette première étude nous avons considéré l'ensemble des branches Accidents et Incendie (la Vie étant exclue). Le même travail pourrait se faire par branche ou groupes de branches.

(2) C'est en effet la médiane que l'on doit considérer puisqu'on recherche les Agences ayant plus de n/2 résultats dépassant la valeur critique sur n années.

relativement homogènes, il fallait d'abord s'assurer que les agences situées dans un même groupe, c'est-à-dire dans une même tranche d'encaissement en 1959, avaient subi une évolution comparable de 1950 à 1959 (sinon, on risquait de trouver dans un même groupe des agences stationnaires qui avaient, en 1950, à peu près le même encaissement qu'en 1959, et des agences en plein développement dont l'encaissement en 1950 n'était qu'une faible fraction de l'encaissement de 1959); et le problème se complique du fait de la variation de valeur de la monnaie durant cette période de 10 ans.

De 1950 à 1959, en effet, les indices de prix de gros comme ceux de prix de détail ont été multipliés par 1,7; or, on constate que la plupart des agences ont vu leur encaissement en francs courants croître, dans la même période, de 2 à 4 fois, soit en francs constants, un accroissement vrai de 1,2 à 2,4 fois; la moyenne étant un accroissement global de 3 dont 1,7 correspondant au mouvement des prix et 1,75 représentant l'accroissement vrai (ou accroissement « naturel ») moyen. Comme les limites des groupes constitués (à l'exception des deux derniers, d'ailleurs pas très significatifs), sont à peu près en progression géométrique de raison 2, nous avons admis qu'une Agence serait considérée comme n'ayant pratiquement pas changé de groupe au cours de la période si, de 1950 à 1959, elle avait au maximum doublé son encaissement vrai, c'est-à-dire si son encaissement en francs courants avait évolué entre les limites suivantes :

— limite minimale, correspondant à un accroissement naturel nul : 1,7 (= accroissement des prix);

— limite maximale, correspondant au double de l'accroissement naturel moyen :

$$\begin{array}{ccccccc} 1,7 & \times & 1,75 & \times & 2 & = & 6. \\ \text{(prix)} & & \text{(accroissement naturel moyen)} & & \text{(doublement)} & & \end{array}$$

Et nous avons supprimé les résultats (très peu nombreux) sortant de ces limites.

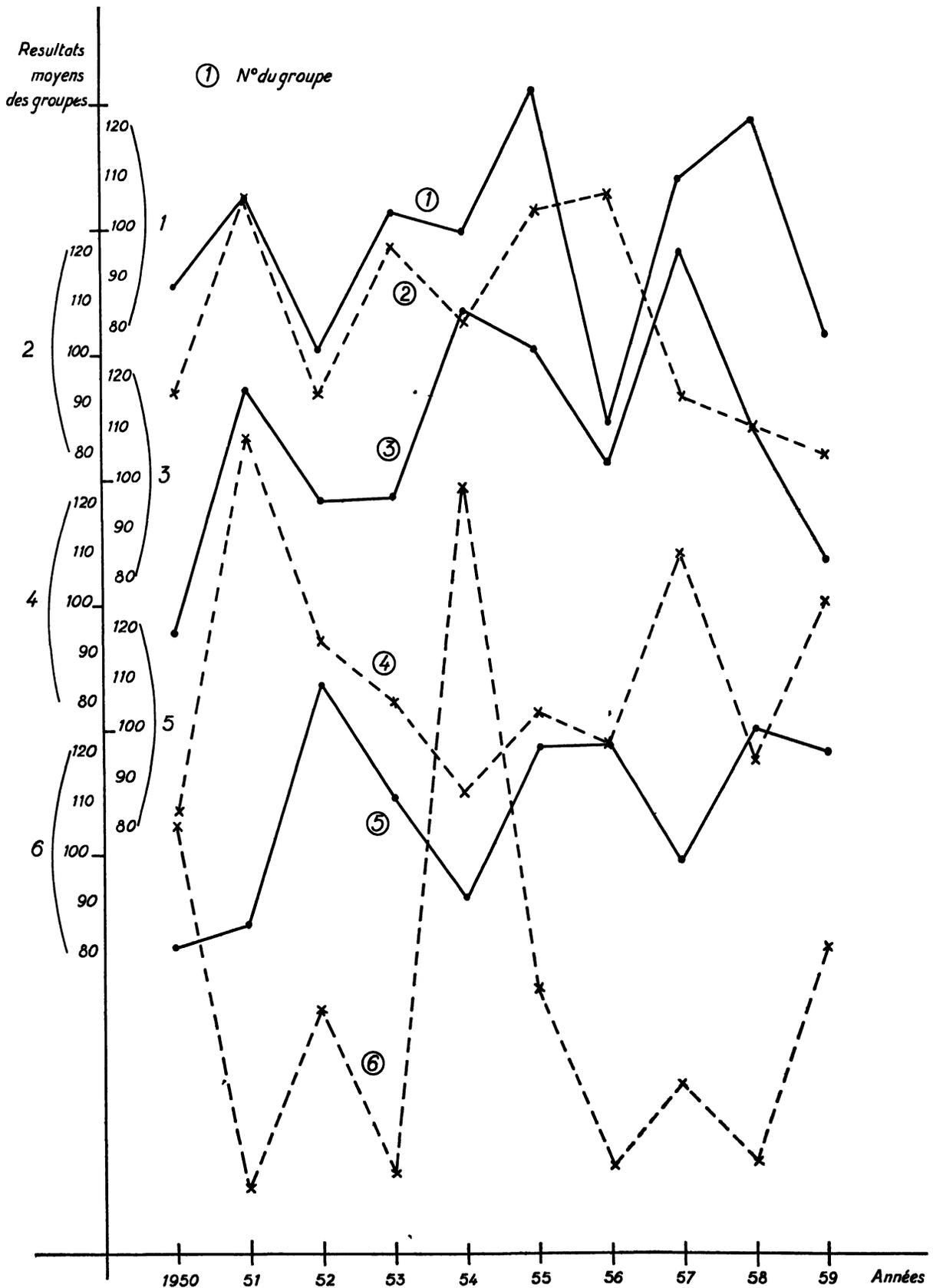
Nous avons pris cette décision pour simplifier les calculs, mais il serait certainement préférable, pour les agences ayant fortement évolué, de découper la période d'étude en plusieurs parties et de reclasser chacune d'elles dans le groupe adéquat, en tenant compte, bien entendu, de la variation de la valeur de la monnaie.

### *Résultats généraux concernant l'échantillon*

Nous allons d'abord indiquer les constatations générales qu'on peut faire sur l'échantillon, puis nous verrons comment les données recueillies permettent d'élaborer des tests applicables aux résultats individuels de toutes les agences.

#### *a) Évolution générale dans le temps.*

On peut se demander si, d'une manière générale, les résultats annuels ont varié de façon appréciable dans le temps. Le graphique I montre l'évolution des résultats moyens pour les groupes d'agences 1 à 6 de l'échantillon (groupes intéressant la presque totalité des agences) : la tendance générale est pratiquement horizontale pour la plupart de ces groupes; les groupes 2 et 4 semblent accuser une très légère amélioration dans le temps, mais les groupes 3 et 5 ont au contraire tendance à s'aggraver un peu : nous pouvons admettre qu'il est inutile d'effectuer une correction de ce chef, alors qu'il aurait fallu en apporter une si on avait décelé une tendance systématique non nulle, de façon à rapporter chaque résultat annuel à sa moyenne de groupe).



Graphique I — Évolution des résultats moyens annuels des groupes de l'échantillon.

b) *Lieu des moyennes et des médianes.*

Le graphique II montre comment se situent les moyennes et les médianes des résultats observés sur l'échantillon d'agences, en fonction de la taille de celles-ci. On vérifie que ces valeurs centrales augmentent avec l'encaissement. Cela ne signifie pas à priori que les grosses agences donnent pour la Compagnie des résultats catastrophiques comparativement aux petites agences : pour effectuer cette comparaison, il faut considérer non pas les moyennes (ou les médianes) des résultats individuels, lesquels sont des rapports, mais le résultat d'ensemble de chaque groupe, défini par :

$$\frac{\text{coût global des sinistres du groupe}}{\text{montant global des primes du groupe}} \times \frac{100}{0,65}$$

En reportant sur un graphique la ligne représentant la valeur de ce rapport en fonction de la taille des agences de chaque groupe, on obtient une courbe voisine de la courbe *m* du graphique II, montrant encore une augmentation de cette valeur quand la taille croît. Notre première constatation est donc que les petites agences donnent en moyenne des résultats meilleurs que les grosses agences (1).

c) *Corrélation entre résultats et taille.*

On peut essayer de préciser ce phénomène en calculant un coefficient de corrélation entre les résultats et la taille des agences. Le graphique III représente le nuage de corrélation, pour l'échantillon, entre ces deux grandeurs (ou, plus exactement entre le logarithme des encaissements porté en abscisses et les résultats d'ensemble de chaque agence sur 10 ans portés en ordonnées). Ce nuage est assez dispersé, mais son axe semble bien présenter la même légère pente positive que ci-dessus. On remarque d'ailleurs que la corrélation se manifeste surtout pour les groupes 2 à 7; le groupe 1 (très grosses agences) est relativement meilleur, mais les Bureaux locaux sont plus mauvais.

Bien que la corrélation n'apparaisse pas très significative, nous avons fait le calcul du coefficient de corrélation linéaire; nous avons trouvé les valeurs suivantes :

1 — Si l'on ne tient pas compte des bureaux locaux, qui ne sont pas entièrement comparables aux agences :

$$r = 0,40$$

L'application du test de signification montre que cette valeur est significative avec une probabilité supérieure à 99%; plus précisément, l'intervalle de confiance de *r* à 95 % est :

$$0,17 \text{ à } 0,60$$

2 — Si l'on tient compte des bureaux locaux, on trouve :

$$r = 0,45$$

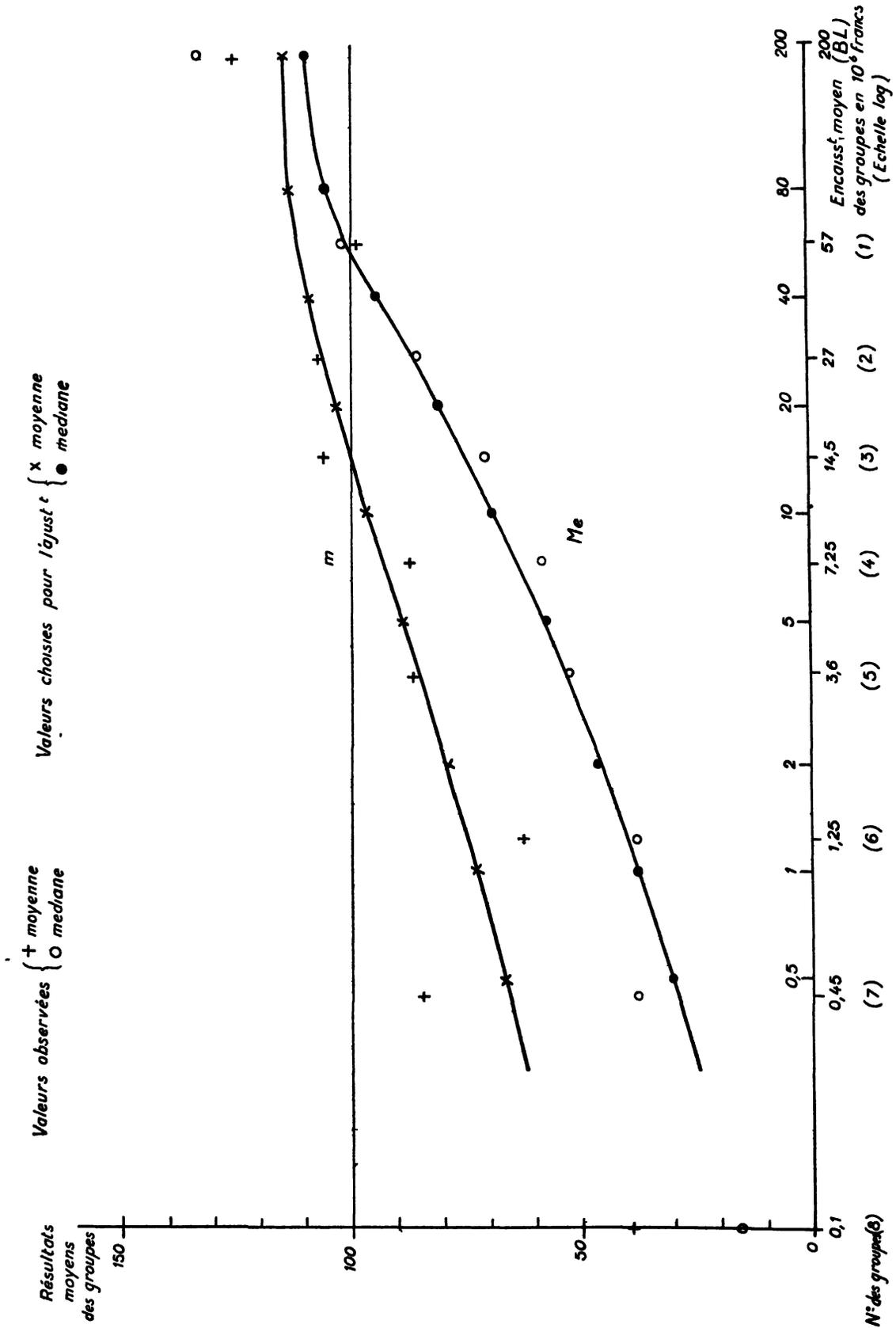
valeur également significative avec, comme intervalle de confiance à 95 % :

$$0,24 \text{ à } 0,63$$

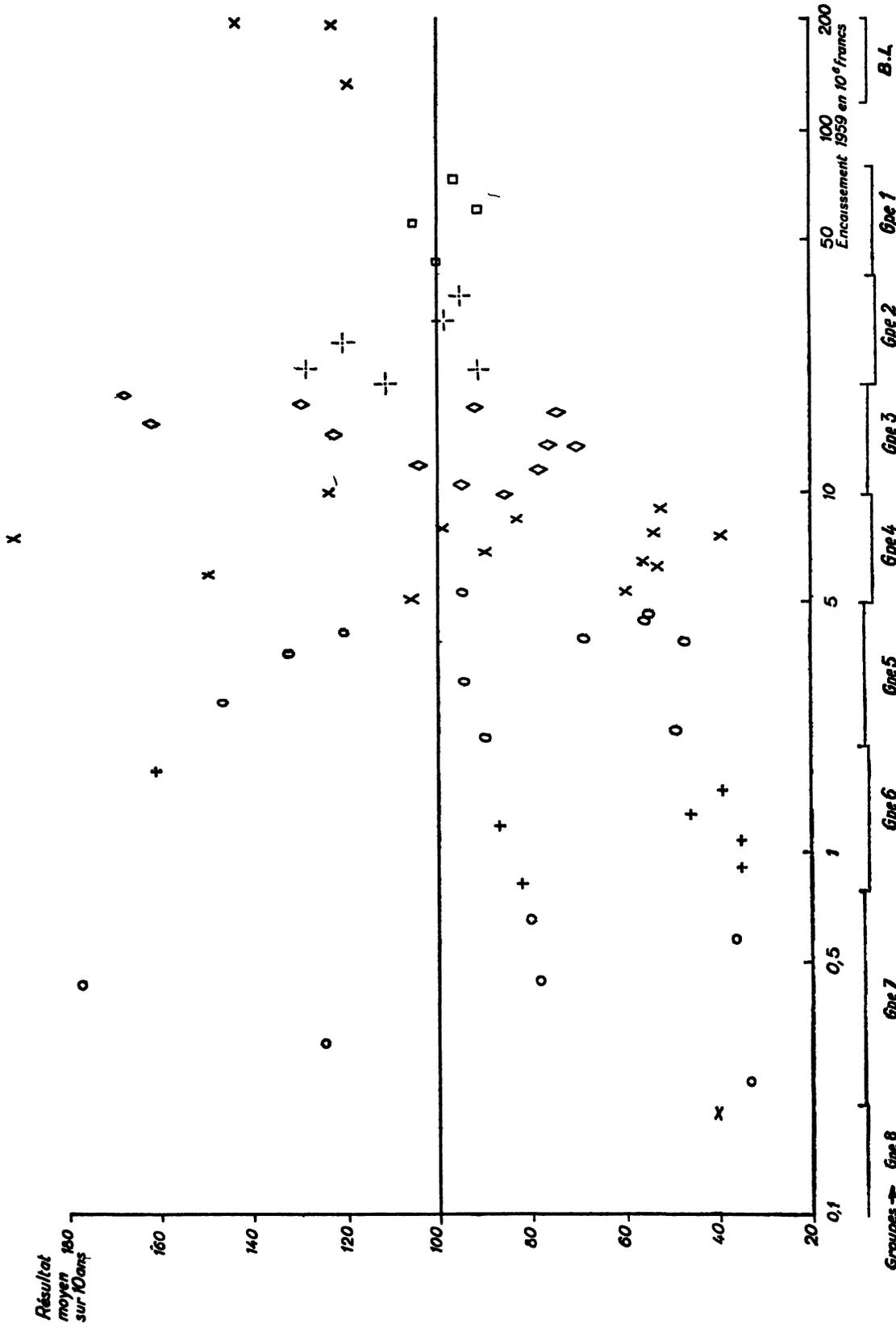
Cela confirme qu'il y a une faible corrélation entre les résultats et la taille des agences, les petites agences ayant en moyenne des résultats un peu meilleurs que les grosses agences.

---

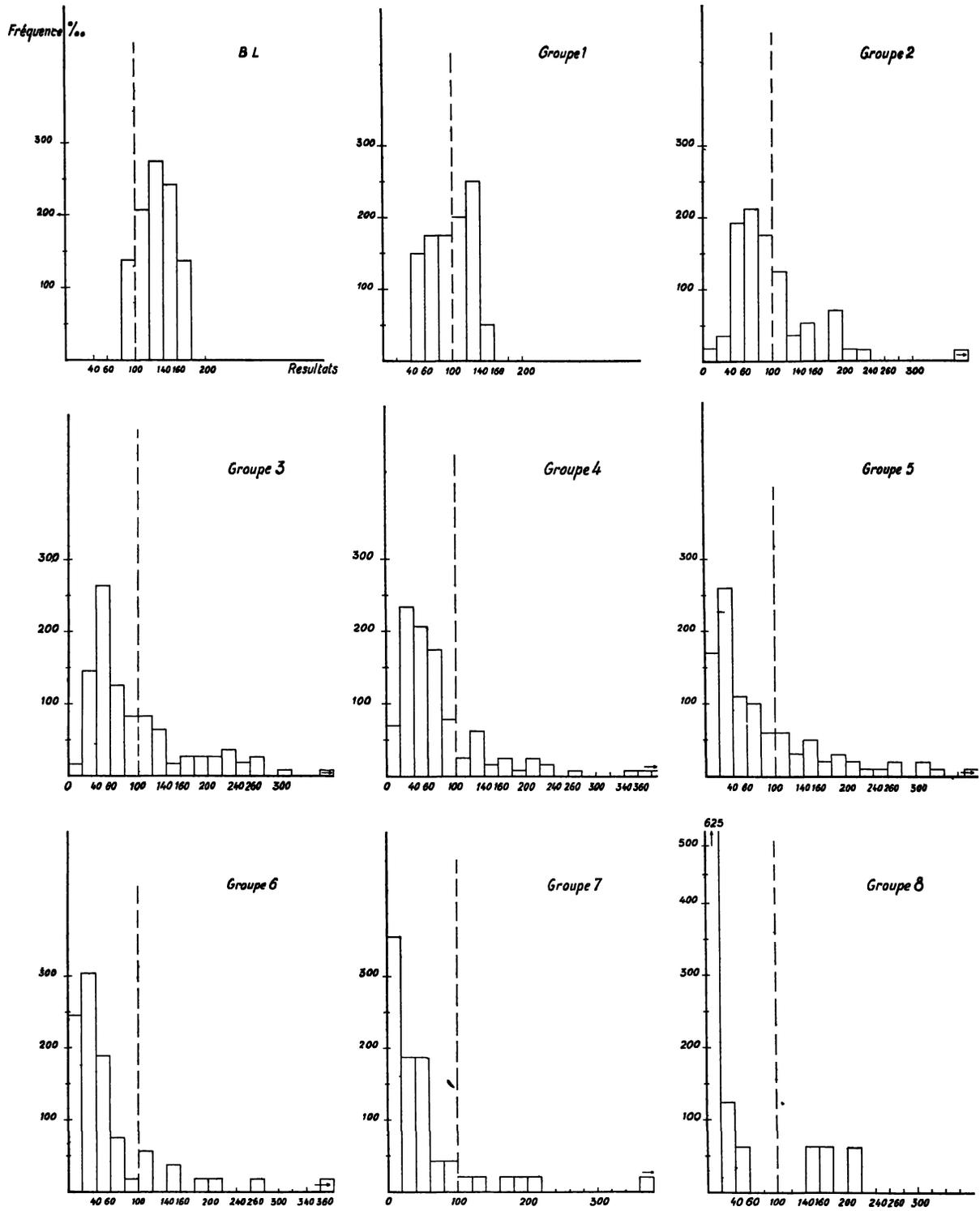
(1) Voir page 305 les valeurs numériques des moyennes et médianes des résultats annuels, et des résultats d'ensemble.



Graphique II. — Valeurs centrales des résultats annuels des groupes de l'échantillon.



Graphique III. — Corrélation entre l'encassement et la moyenne des résultats de chaque agence sur 10 ans.



Graphique IV — Distribution des résultats annuels dans chaque groupe de l'échantillon

d) *Distribution des résultats.*

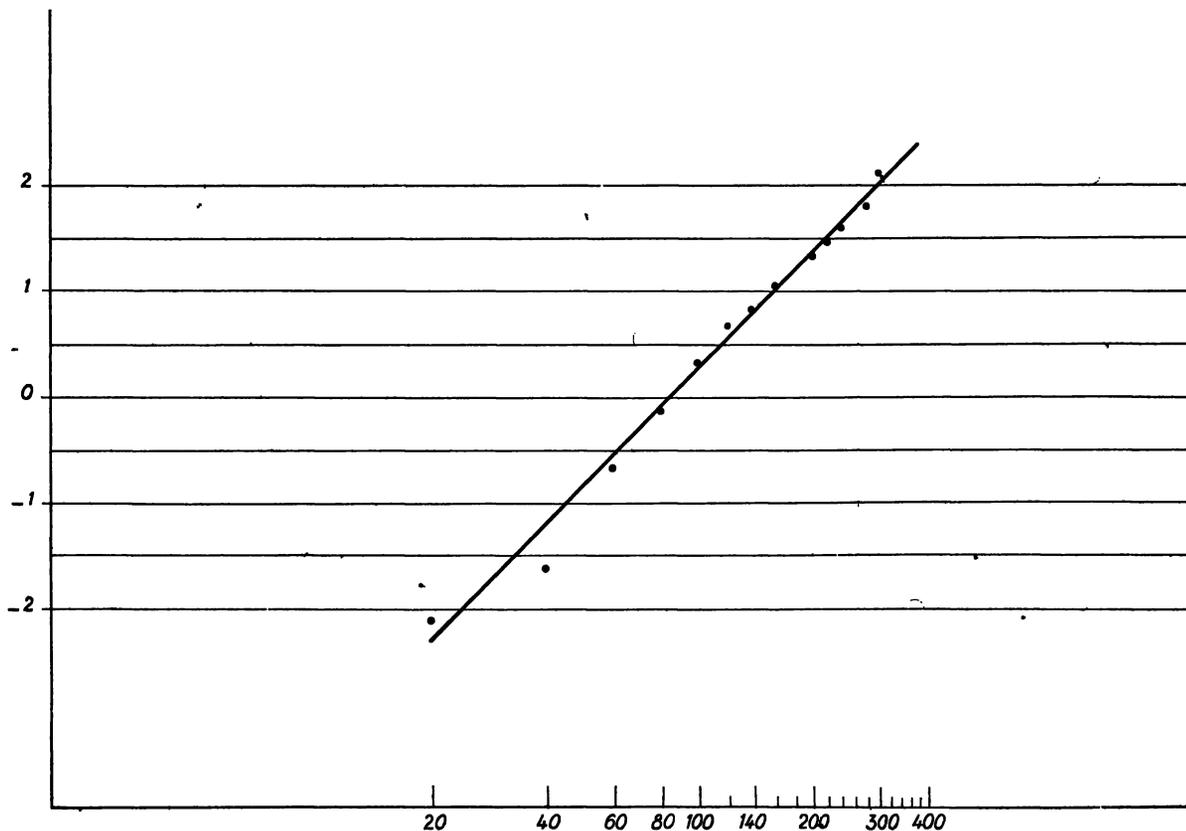
La distribution des résultats pour chacun des 9 groupes de l'échantillon est montrée par le graphique IV. La forme de ces distributions appelle, du moins, dans une première phase, l'ajustement de courbes de Galton. On vérifie que, au fur et à mesure que la taille des agences décroît, la courbe devient de plus en plus dissymétrique, le mode se déplaçant vers les plus faibles valeurs et la queue de la distribution s'allongeant vers les fortes valeurs.

Cela est normal, car on peut admettre en première approximation que la probabilité d'un sinistre — notamment d'un sinistre grave — pour un assuré donné, est indépendante de la taille de l'agence où il a passé son contrat; les petites agences ont donc peu de sinistres très graves et, la plupart des résultats annuels doivent être bons; il y a cependant, de temps en temps, quelques sinistres importants qui étalent la distribution vers la droite. Au contraire, les grosses agences ont, bon an mal an, à peu près toujours la même proportion de sinistres et la distribution les concernant tend vers une courbe symétrique axée sur une valeur voisine de 100.

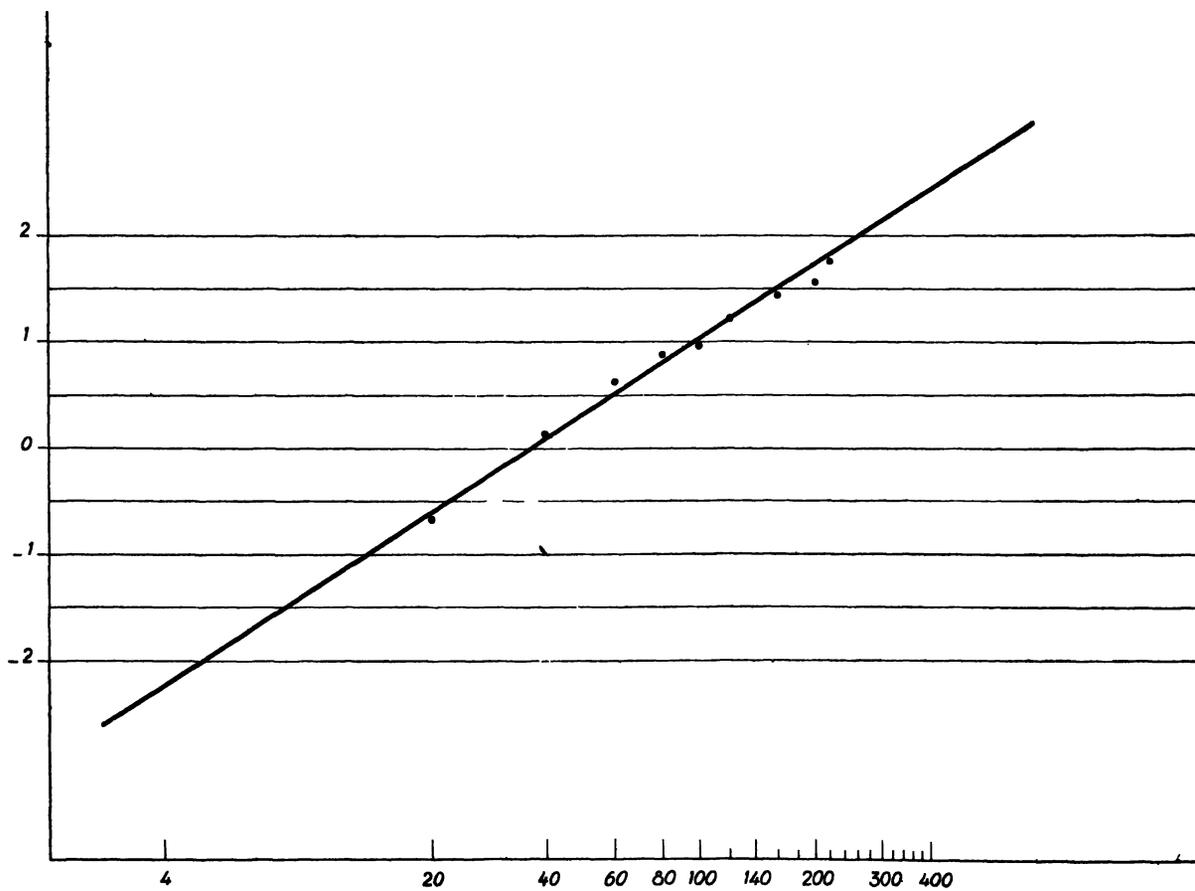
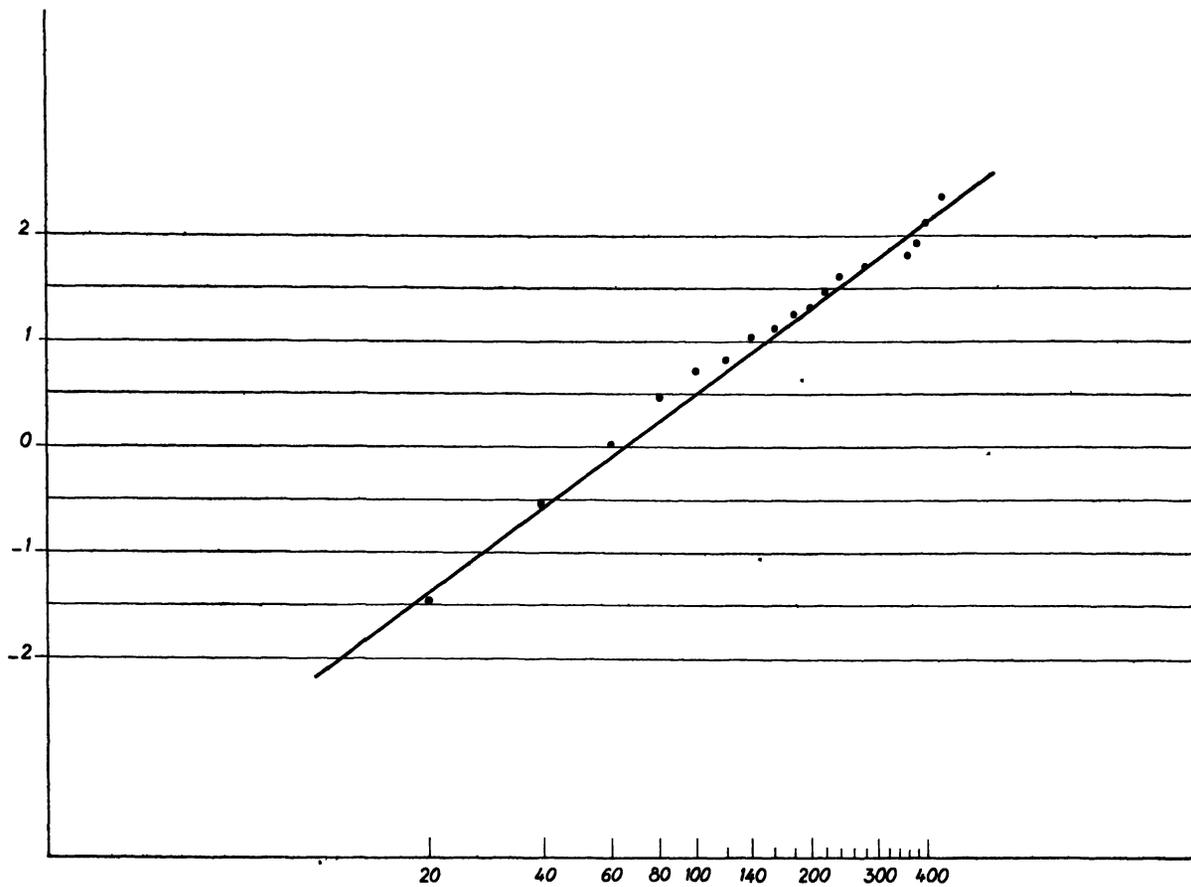
*Ajustement de distributions théoriques*

Puisque la distribution des fréquences des résultats dépend essentiellement de l'importance de l'agence, pour tester les résultats des agences de la Compagnie, il nous faut déterminer la distribution théorique correspondant à chacune d'elles en fonction de sa taille.

A cet effet, nous avons d'abord déterminé une distribution théorique moyenne pour



Graphique V. Groupe 2. — Ajustement de distribution de Galton.



Graphique V. Groupes 4 et 6. — Ajustement de distribution de Galton.

chacun des groupes constitués dans l'échantillon. L'ajustement d'une distribution de Galton est classique; on utilise la transformation :

$$z = a \log (x - x_0) + b$$

$x$  étant le résultat;  $a$ ,  $b$  et  $x_0$  étant des paramètres qu'on détermine de façon que la distribution de  $z$  soit gaussienne. L'ajustement s'opère en pratique en établissant des graphiques gaucco-logarithmiques sur lesquels les points d'abscisse  $\log (x - x_0)$  doivent sensiblement s'aligner si la distribution étudiée peut valablement être assimilée à une distribution de Galton. A titre d'exemple, on a reproduit ci-dessous en V les graphiques correspondant aux groupes nos 2, 4 et 6.

Une première détermination graphique des valeurs du paramètre  $x_0$  a donné, selon les groupes, des valeurs systématiquement voisines de zéro, tantôt positives, tantôt négatives, mais toujours faibles en valeur absolue; pour simplifier, nous avons supprimé le paramètre  $x_0$  dans la formule; le graphique V montre qu'on obtient encore des points convenablement alignés, et les droites théoriques qu'on a tracées permettent de déterminer les coefficients  $a$  et  $b$  de la formule; on a trouvé les valeurs indiquées dans le tableau suivant :

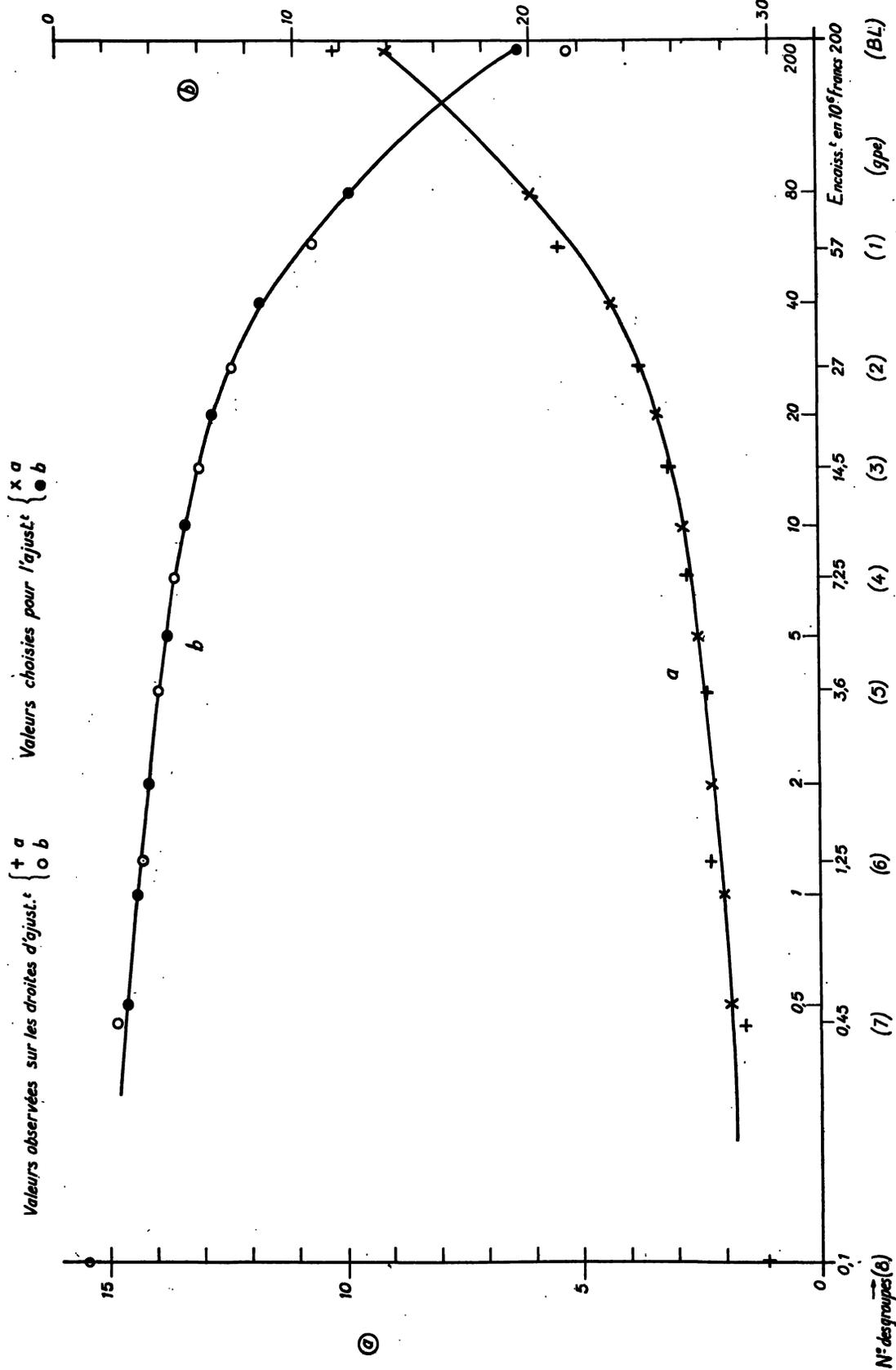
Groupe n°	Valeurs lues sur les droites d'ajustement		Valeurs observées (cf. graphique II)		
	a	b	Résultats annuels		Résultats d'ensemble des groupes sur 10 ans
			Moyenne	Médiane	
B L . . . . .	10,2	— 21,5	125,7	133	129,7
1. . . . .	5,4	— 10,8	98,2	100	97,6
2. . . . .	3,8	— 7,3	107,0	86	99,1
3. . . . .	3,2	— 6,0	106,2	71,5	110,2
4. . . . .	2,7	— 4,8	87,7	59	85,9
5. . . . .	2,4	— 4,0	87,4	53	88,5
6. . . . .	2,2	— 3,5	62,7	38	71,0
7. . . . .	1,6	— 2,4	84,8	18	89,4
8. . . . .	1,1	— 1,1	39,7	16	47,2

Les valeurs expérimentales trouvées pour  $a$  et  $b$  varient de façon sensiblement continue avec la taille, ce qui conduit à établir le graphique VI destiné à préciser la loi de variation de  $a$  et  $b$  en fonction de la taille (la taille figure en abscisse, avec une échelle logarithmique; on a affecté les valeurs trouvées pour  $a$  et  $b$  au centre de chaque classe). On voit sur ce graphique qu'il est effectivement raisonnable de tracer, pour  $a$  et pour  $b$ , une courbe de variation continue. La forme régulière de ces courbes suggère l'existence d'une fonction entre, respectivement,  $a$  et  $b$ , et la taille; nous n'avons pas cherché à expliciter ces fonctions théoriques, nous nous contentons d'en déterminer graphiquement les valeurs.

Chacune des courbes représentant la variation de  $a$  et de  $b$  est presque rectiligne et varie peu jusqu'à un encaissement d'environ 200 000 NF, puis s'infléchit sensiblement au delà; et les points représentant les bureaux locaux (qui ne sont pas absolument comparables aux agences comme on l'a dit plus haut) se trouvent cependant approximativement sur le prolongement des deux courbes tracées à l'aide des points figurant les agences. Pourquoi trouve-t-on cette « cassure » à partir d'un certain encaissement? On peut suggérer diverses explications, par exemple celles-ci :

1 — Quand la taille de l'agence s'accroît au-delà d'une certaine limite, l'Agent connaît moins bien ses assurés, il ne sélectionne pas les risques de façon aussi efficace.

2 — La valeur critique de l'encaissement correspond en gros à la distinction des agences situées dans de petites villes, de celles situées dans de grandes agglomérations. Or, on



Graphique VI. — Variations des paramètres *a* et *b* en fonction de la taille.

peut aussi penser que la structure du portefeuille est différente dans les grandes agglomérations, que les risques y sont moins bons, que les tarifs sont moins bien adaptés à la réalité.

### Détermination des normes

Il est logique d'admettre que les valeurs théoriques des paramètres  $a$  et  $b$  varient effectivement de façon rigoureusement continue en fonction de l'encaissement et de substituer les valeurs lues sur les courbes aux valeurs trouvées expérimentalement, qui sont entachées d'erreurs dues notamment à la petitesse de notre échantillon.

C'est ce que nous avons fait, en abandonnant d'ailleurs la notion de groupe d'agences et en déterminant les valeurs de  $a$  et de  $b$  correspondant aux valeurs rondes suivantes de l'encaissement :

(en milliers de NF.) : 2 000, 800, 400, 200, 100, 50, 20, 10 et 5.

Précisons que pour déterminer les valeurs de  $a$  et  $b$ , nous nous sommes également servi des courbes figurant l'évolution des moyennes et médianes en fonction de la taille (voir ci-dessus graphique II); en effet, la lecture graphique de  $a$  et  $b$  sur les courbes ajustées de la figure VI n'est pas suffisamment précise et de faibles variations de ces paramètres peuvent entraîner des variations importantes sur la moyenne et la médiane; or, ces caractéristiques doivent, elles, aussi, varier de façon continue; c'est donc finalement en utilisant les quatre courbes tracées que nous avons déterminé les valeurs de  $a$  et de  $b$ . On peut considérer que les valeurs ainsi choisies sont les normes théoriques que l'on décide d'adopter pour tester les résultats des agences de la Compagnie.

Les valeurs choisies en définitive ont été les suivantes :

Encaissement en NF	Paramètres		Valeurs correspondantes de :	
	$a$	$b$	M (médiane)	m (moyenne arithmétique)
2 000 . . . . .	9,50	— 19,40	110	114
800 . . . . .	6,00	— 12,30	106	114
400 . . . . .	4,30	— 8,50	95	109
200 . . . . .	3,36	— 6,42	81	103
100 . . . . .	2,87	— 5,30	70	97
50 . . . . .	2,55	— 4,50	58	89
20 . . . . .	2,22	— 3,70	47	79
10 . . . . .	1,98	— 3,12	38	73
5 . . . . .	1,84	— 2,74	31	67

### Utilisation pratique des normes établies

#### a) Première méthode

Les normes établies déterminent, notamment, la médiane théorique en fonction de l'encaissement ; la méthode la plus simple consiste, pour chaque agence que l'on désire tester, à préciser la valeur théorique de la médiane correspondant à son encaissement et à voir si, sur 10 années par exemple, on a plus de 5 résultats dépassant cette valeur. C'est au fond la méthode signalée au début — avec, toutefois, l'amélioration consistant à prendre pour référence la médiane théorique adaptée à la taille de chaque agence et non la valeur uniforme 100 (et le tableau ci-dessus montre que la valeur théorique de la médiane décroît notablement quand la taille diminue).

La valeur théorique de la médiane pour une agence donnée se lit facilement sur un abaque se présentant comme le graphique II, en ne conservant que la courbe inférieure relative

à la médiane. Vu la façon dont les normes ont été établies, c'est, bien entendu, l'encaissement en 1959 qu'il faut considérer pour définir la taille.

Cette méthode est d'application rapide et facile à comprendre, elle peut suffire pour une première analyse des résultats. Mais elle reste sommaire en ce sens qu'elle ne permet pas de juger objectivement la gravité des mauvais résultats.

#### b) Deuxième méthode

Les courbes de Galton ajustées permettent de calculer la probabilité qu'un résultat atteigne une valeur donnée; et, puisque nous disposons des résultats de 10 années, nous pouvons calculer la probabilité d'obtenir un ensemble donné de 10 résultats. La connaissance de cette probabilité permet de porter un meilleur jugement sur les résultats des agences.

En fait, plutôt que de calculer à chaque fois la probabilité d'obtenir un ensemble observé de résultats, nous avons établi des abaques indiquant, en fonction de la taille, les valeurs que peuvent atteindre les résultats avec les probabilités  $P$  suivantes : 10 %, 5 %, 1 %, 0,1 % (c'est-à-dire  $1/1000^e$ ) et 0,01 % ( $1/10\ 000^e$ ).

En supposant, pour chaque agence, les 10 résultats classés par ordre de valeurs décroissantes, nous avons déterminé les valeurs à ne pas dépasser pour le 1<sup>er</sup> résultat (c'est-à-dire le plus mauvais des 10 résultats), puis pour le second résultat, etc... jusqu'au 10<sup>e</sup> résultat.

#### Calcul de l'abaque pour le premier résultat

Ayant 10 résultats par agence, la valeur  $x$  que ne doit pas dépasser le plus mauvais résultat avec la probabilité  $P$ , est celle qui, sur la courbe de fréquence correspondant à l'encaissement de l'agence, laisse à sa droite une aire  $A$  égale à  $\frac{P}{10}$  (figure VII).

Pour chacune des 5 valeurs  $P_h$  de  $P$  retenues comme il est indiqué ci-dessus, la



Graphique VII. — Courbe de Galton.

table II (t) donne la valeur  $z_h$  de  $z$  correspondant à l'aire A. Puis, pour chaque encaissement  $E_t$ , auquel correspondent les valeurs  $a_t$  et  $b_t$  théoriques (voir plus haut), on détermine la valeur  $x_{th}$  en appliquant la formule :

$$z_h = a_t \log x_{th} + b_t$$

d'où

$$\log x_{th} = \frac{z_h - b_t}{a_t}$$

Parmi les diverses présentations possibles pour l'abaque, nous avons adopté celle qui est reproduite par le graphique VIII, qui donne l'abaque à utiliser pour le premier résultat (le plus mauvais) et pour le dernier résultat (le meilleur); les autres abaques, non reproduits, se présentent sous des formes intermédiaires.

En abscisses, figurent les résultats (échelle logarithmique); en ordonnées, les seuils de probabilité (également en échelle logarithmique). A chaque valeur de l'encaissement correspond une courbe indiquant la valeur que le  $n^{\text{me}}$  des 10 résultats ne doit pas dépasser ( $n$  allant de 1 à 10).

L'abaque s'emploie comme suit : soit, par exemple, une agence encaissant 150 000 NF et dont le plus mauvais résultat est 1 000; en interpolant entre les courbes correspondant aux encaissements 100 000 et 200 000, on voit que la probabilité d'atteindre ce résultat est comprise entre  $1/100^{\text{e}}$  et  $1/1\ 000^{\text{e}}$ .

#### *Calcul des abaques pour les résultats suivants*

Soit à tester le second résultat d'une agence (les résultats étant classés par ordre de valeurs décroissantes comme nous avons dit). Nous devons déterminer  $x$  de façon que la probabilité d'avoir simultanément 2 points au delà soit égale à P. Or, le nombre des couples de points possible pour une Agence est :

$$C_{10}^2 = 45$$

et la probabilité de sortie d'un couple avec la probabilité P est  $\frac{P}{45}$ ; d'autre part, si  $x$  est la valeur limite cherchée, qui laisse à sa droite sur la courbe de fréquence une aire A, la probabilité qu'un résultat soit supérieur à  $x$  est A, et la probabilité que 2 résultats soient simultanément supérieurs à  $x$  est  $A^2$ ; en définition,  $x$  est déterminé par la relation :

$$A^2 = \frac{P}{C_{10}^2}$$

Comme ci-dessus, pour chacune des 5 valeurs  $P_h$  de P retenues, la table II (t) donne  $z_h$  d'où l'on tire, pour chaque valeur d'encaissement  $E_t$ , la limite  $x_{th}$ .

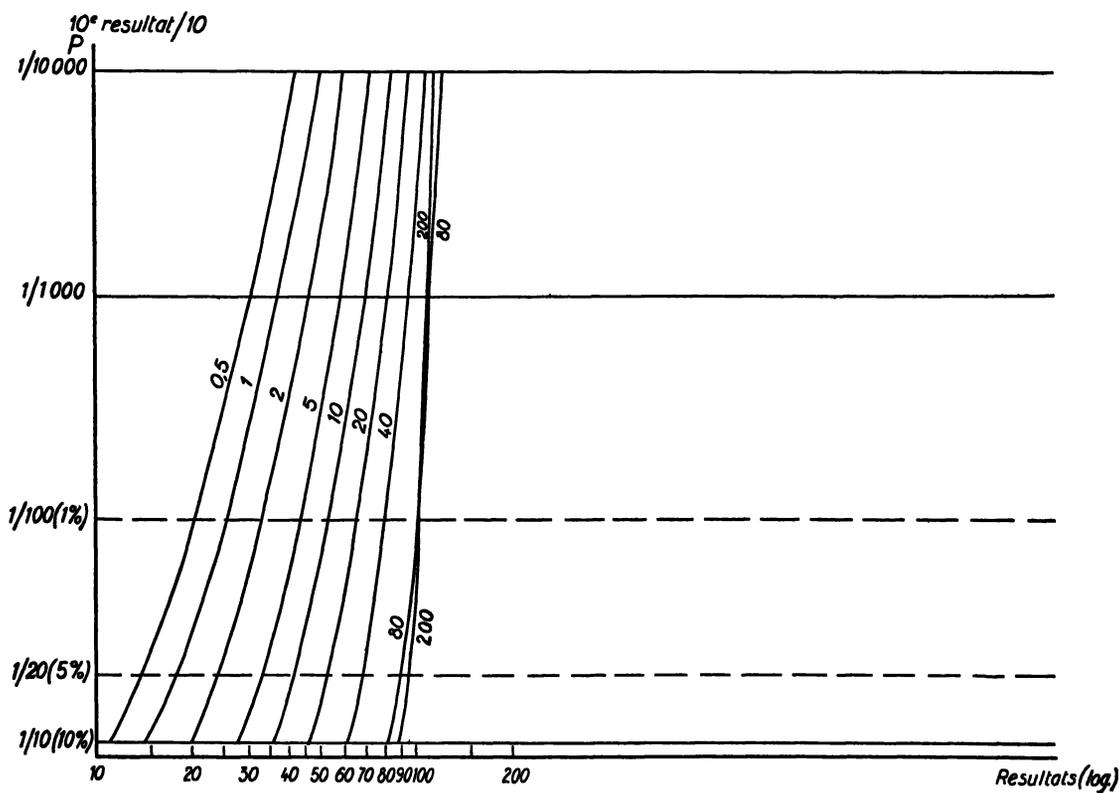
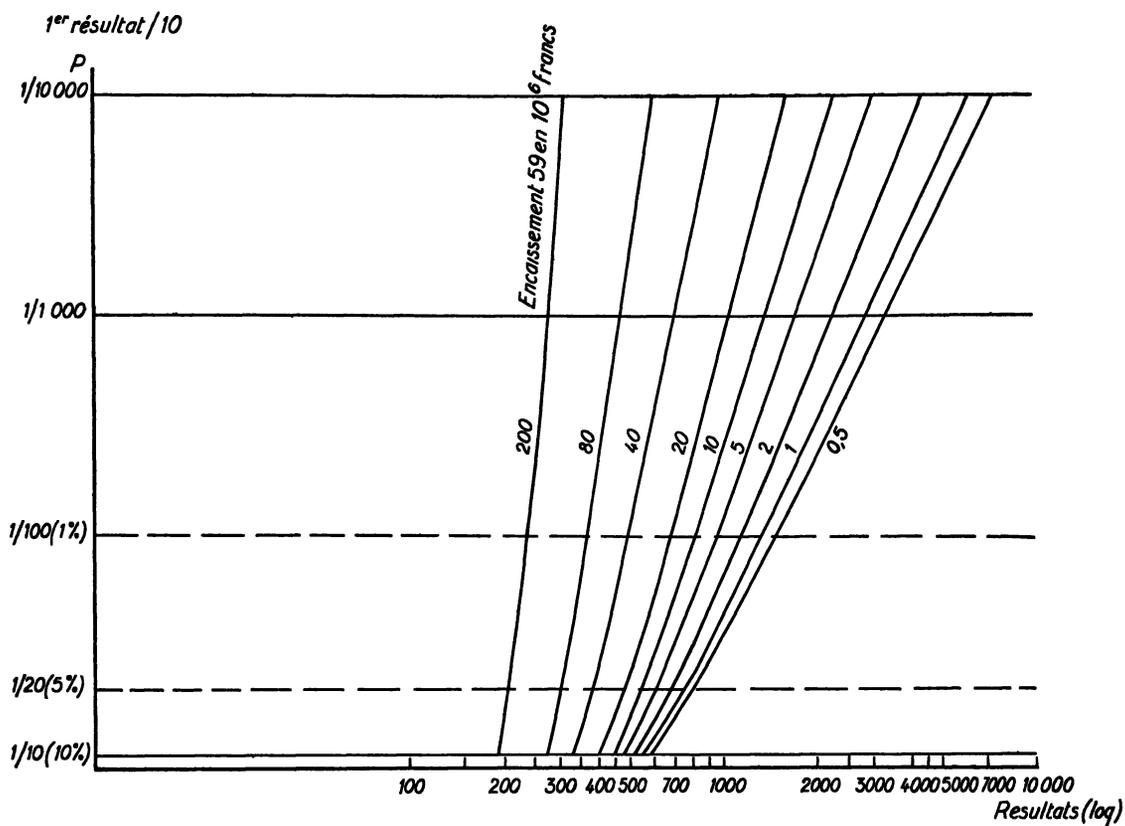
Pour tester le 3<sup>e</sup> résultat de chaque Agence, nous déterminerons de même  $x$  défini par :

$$A^3 = \frac{P}{C_{10}^3}$$

et ainsi de suite jusqu'au 10<sup>e</sup> résultat.

Les abaques correspondants sont établis comme le premier. On y vérifie, en particulier, les règles suivantes.

1 — *Test du 1<sup>er</sup> résultat* : la limite  $x$  est d'autant plus large que l'encaissement est



Graphiques VIII — Abaques indiquant les valeurs que peuvent atteindre les résultats d'un rang donne avec une probabilité  $P = 1/10^e, 1/20^e, \text{etc.}$

faible; par exemple, au niveau de probabilité  $P = 1/100^e$ , les valeurs de résultat à ne pas dépasser sont indiquées dans le tableau ci-après.

2 — Pour les résultats suivants, les limites se resserrent rapidement et celles qui correspondent aux faibles encaissements diminuent plus rapidement que les autres et finissent par prendre des valeurs inférieures.

3 — Pour le 10<sup>e</sup> résultat, l'ordre des limites est entièrement inversé.

Ci-dessous les limites pour le 1<sup>er</sup>, le 6<sup>e</sup> et le 10<sup>e</sup> résultats, toujours au niveau  $P = 1/100^e$ .

Encaissement	Valeurs limites pour le		
	1 <sup>er</sup> résultat	6 <sup>e</sup> résultat	10 <sup>e</sup> résultat
2 000 . . . . .	233	136	101
800 . . . . .	368	157	98,5
200 . . . . .	495	161	79
100 . . . . .	676	148	64,5
100 . . . . .	887	142	58,5
50 . . . . .	946	128	43
20 . . . . .	1 140	115	32,5
10 . . . . .	1 370	104	25,5
5 . . . . .	1 470	92	20

Les résultats du calcul sont donc bien conformes à ce qu'on attendait. Pour une grosse agence, le résultat le plus mauvais (1<sup>er</sup> résultat) ne doit pas dépasser une valeur relativement faible (233 pour l'encaissement 2 000), tandis qu'il peut atteindre des valeurs élevées pour les petites agences (1 470 pour l'encaissement 5). En revanche pour le 10<sup>e</sup> résultat (le meilleur), on admet la valeur 101 pour la grosse agence, tandis qu'on exige 20 pour la très petite agence.

#### Utilisation des abaques — « Note » d'agence .

Les résultats de chaque agence de la Compagnie étant classés dans l'ordre décroissant, on peut lire sur les 10 abaques successifs la probabilité d'obtenir ces résultats ; ou bien, on peut seulement mettre en évidence ceux des résultats qui dépassent le seuil de probabilité qu'on s'est fixé à l'avance (1).

Nous avons opté pour la méthode intermédiaire suivante : nous cherchons à quelle tranche de probabilité correspond chaque résultat et nous attribuons une « mauvaise note » selon le barème ci-dessous.

En deçà de $1/10^e$ . . . . .	Note	0
Entre $1/10^e$ et $1/20^e$ . . . . .	Note	1
Entre $1/20^e$ et $1/100^e$ . . . . .	Note	2 1/2
Entre $1/100^e$ et $1/1.000^e$ . . . . .	Note	5
Entre $1/1.000$ et $1/10.000^e$ . . . . .	Note	8
Au delà de $1/10.000^e$ . . . . .	Note	11

Ces notes ont été fixées de façon à croître comme le logarithme de l'inverse de la probabilité, une augmentation de 3 points correspondant à une probabilité 10 fois plus faible (2).

(1) Les abaques sont établis en supposant que l'on a 10 résultats; or, pour certaines agences, on en a moins (agences nouvelles, par exemple). Des réglottes se plaçant sur l'abaque permettent d'effectuer les corrections nécessaires dans ce cas.

(2) L'échelle choisie est arbitraire, on pourrait évidemment en utiliser d'autres.

Pour les résultats situés près de la limite de deux tranches consécutives, c'est-à-dire voisines d'une probabilité ronde, nous avons adopté des valeurs intermédiaires :

Au voisinage de 1/10 <sup>e</sup>	. . .	Note	1/2
Au voisinage de 1/20 <sup>e</sup>	. . .	Note	1 1/2
Au voisinage de 1/100 <sup>e</sup>	. . .	Note	3 1/2
Au voisinage de 1/1.000 <sup>e</sup>	. . .	Note	6 1/2
Au voisinage de 1/10.000 <sup>e</sup>	. . .	Note	9 1/2

Puis, pour chaque agence, nous avons totalisé les mauvaises notes correspondant aux divers résultats et obtenu une note globale permettant de juger l'ensemble des résultats sur 10 ans. On remarquera que la totalisation des notes, lesquelles sont proportionnelles (à une constante près) aux logarithmes des inverses des probabilités, revient à faire le produit des dites probabilités, donc correspond bien à la probabilité de l'ensemble des 10 résultats.

Sur les 550 agences métropolitaines de la Compagnie, les résultats finaux ont été les suivants :

Valeur des notes	Probabilité globale correspondante	Nombre d'agences
note > 35	prob. < 1 %	3
35 > note > 15	1 % < prob. < 5 %	25
15 > note > 5	5 % < prob. < 10 %	32

En cumulant le nombre d'agences, on peut comparer les résultats obtenus avec les résultats théoriques auxquels on doit s'attendre sur 550 agences :

Seuil	Nombre d'agences	
	Théorique	Trouvé
Probabilité inférieure ou égale à 1 % . . . . .	5,5	3
Probabilité inférieure ou égale à 5 % . . . . .	27,5	28
Probabilité inférieure ou égale à 10 % . . . . .	55	60

L'accord est apparemment bon. Les résultats détaillés pour les 28 agences les moins bonnes sont donnés en annexe (1).

#### *Cas des agences d'Afrique du Nord*

Si l'on applique aux agences d'Afrique du Nord les normes définies ci-dessus à partir d'un échantillon d'agences métropolitaines, on obtient les résultats suivants :

Nombre total d'agences : 45		
Valeur des notes	Probabilité globale correspondante	Nombre d'agences
note > 35	prob. < 1 %	1
35 > note > 15	1 % < prob. < 5 %	1
15 > note > 5	5 % < prob. < 10 %	12

La comparaison avec les résultats théoriques donne :

Seuil	Nombre d'agences	
	Théorique	Trouvé
Probabilité inférieure ou égale à 1 % . . . . .	0,45	1
Probabilité inférieure ou égale à 5 % . . . . .	2,25	2
Probabilité inférieure ou égale à 10 % . . . . .	4,5	14

(1) Comme nous l'avons signalé au début, pour ne conserver que des résultats comparables, nous avons éliminé de l'échantillon tous les résultats situés en dehors de la fourchette indiquée (variation de l'encaissement, de 1950 à 1959, comprise entre 1,7 et 6 fois). Nous avons opéré de même pour les agences testées, c'est pourquoi le nombre des résultats est parfois inférieur à 10 — sans parler des agences nouvellement créées ; et, dans ce cas, la note globale a été corrigée (division par le nombre effectif de résultats et multiplication par 10).

Le nombre des agences présentant des résultats médiocres est supérieur à celui qui correspond à l'application des normes métropolitaines : il faut vraisemblablement en chercher l'explication dans les mauvais résultats de la branche Accidents du travail en Algérie.

*Interprétation des résultats*

Le rôle du statisticien se borne à désigner les agences donnant des résultats mauvais par rapport aux normes établies. Mais dans chaque cas, il faut chercher s'il n'y a pas une explication particulière avant d'incriminer la qualité du portefeuille de l'agence. Notamment,

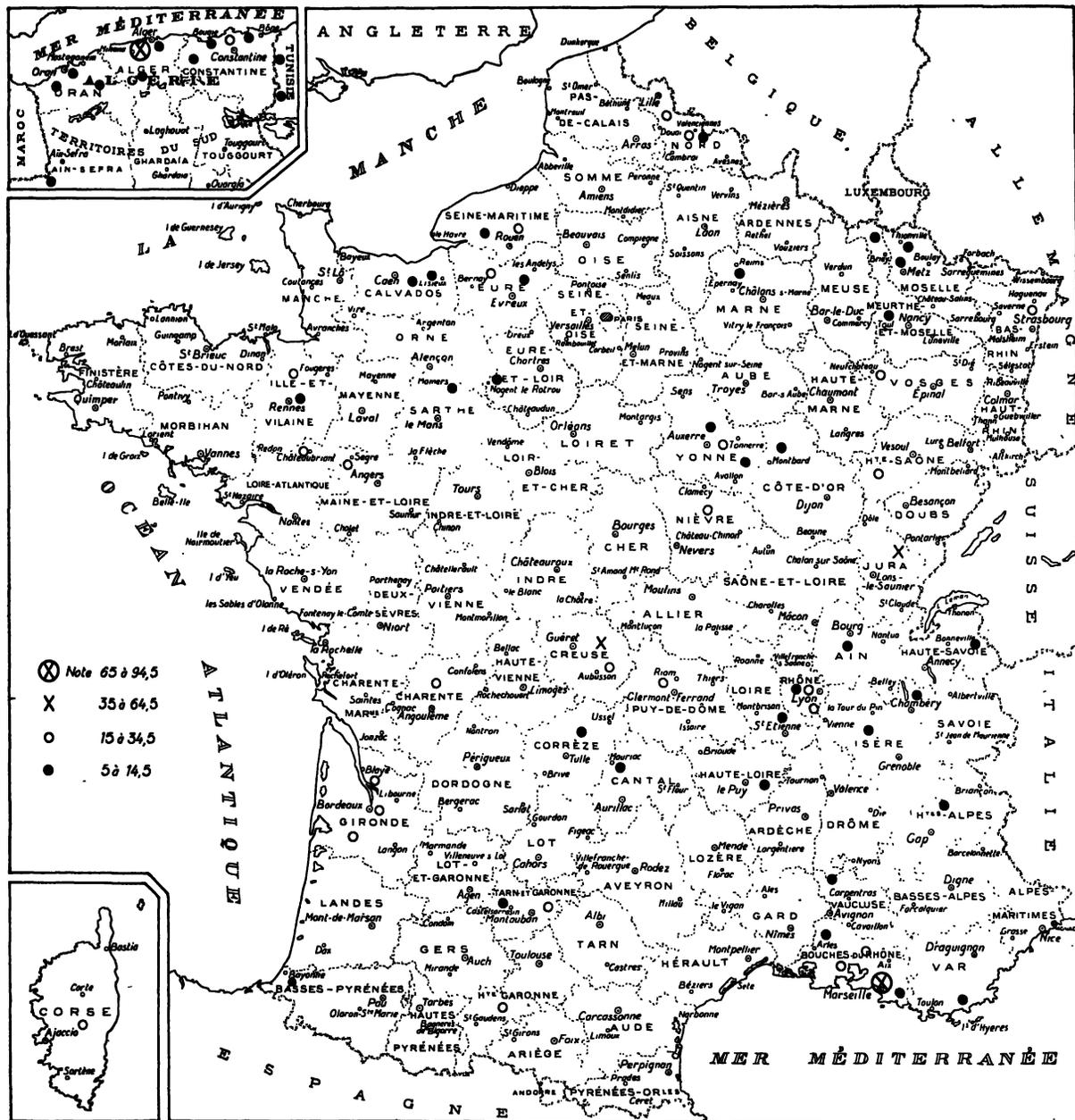


Figure IX. — Répartition géographique des agences ayant de mauvais résultats.

## RÉSULTATS D'AGENCES 1950-1959

## MÉTROPOLE

N°	Note	Enc <sup>t</sup> (1)	Nombre d'an- nées	Résultats (ordre décroissant) Moyenne : 100										Observations
				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
TRÈS MAUVAISES (Probabilité moins de 1 %)														
1	70	2 630	9	175 X	170 XX	165 xxx	158 XXXX	143 XXXX	132 XXX	131 XXXX	125 XXX	85	Prob. moins de 1/1000 17 % Mal.	
2	47,5	3	6	860 X	848 XXX	580 XXXX	112 xx	76 xx	9					
3	39	62	6	939 XX	583 XXX	203 X	140 xx	78	68 xx					
MAUVAISES (Probabilité 1 à 5 %)														
4	31	0,6	4	618 X	321 XX	112 xx	39 X						100 % Mal.	
5	29	120	4	313 --	235 X	185 xx	178 XX						15 % Mal.	
6	28,5	25	9	713 X	520 XX	276 XX	195 XX	123 X	78	52	50	23		
7	28	4	6	474 --	210 x	122 X	110 X	99 XX	48 XX					
8	27,5	9	4	11 856 XXX	78 XXX	26	26						1 seul très mauvais.	
9	27	84	8	3 578 XXXX	189 XXX	150	117	100	77	75	72			
10	26,5	90		548 x	384 X	375 xxx	199 X	171 xx	142 XX	98 X	80 X	32	18	
11	24,5	16		1 419 XX	280 --	208 x	192 xx	128 X	123 XX	85 xx	59 X	22	4	
12	24,5	72	8	1 064 XX	580 XXX	179	98	81	66	60	52		15 % Mal.	
13	21,5	180		276 --	261 X	259 X	227 XX	203 XX	124 X	115 XX	113 XX	55	37	
14	21,5	6		3 967 XXX	3 390 XXXX	184 x	116 --	77	58	25	25	22	7	
15	21	73	4	283 xx	282 X	187 X	70 X							
16	20	57		1 209 XX	316 x	310 XX	274 XXX	57	56	44	35	27	27	
17	20	78	9	800 X	352 X	225 X	157 X	145 X	94	78	55	52	18 % Mal.	
18	20	40	9	763 X	379 X	338 XX	293 XXX	45	26	17	6	0	21 % Mal.	
19	18,5	82	9	719 X	651 XXXX	214 X	106 X	93	66	43	33	31		
20	17,5	46	6	527 x	326 X	118 --	91 X	71 XX	70				38 % Mal.	
21	16,5	70	3	287 --	140 --	140 xx							3 années seulement. 17 % Mal.	
22	16	8		203 --	157 --	81 --	78 --	77 --	51 --	51 --	46 X	42 XX	40 XXX	
23	16	105	5	223 x	195 X	165 X	89 X	64 X						
24	15	26	8	424 X	313 X	246 xx	194 XX	98	44	7	6			
25	15	260	4	519 xx	182 x	128 --	12							
26	15	150		842 X	230 X	214 --	127	127	114	103	91	87	72	
27	15	67	4	489 X	278 xx	49	34				X	X	XX	
28	15	5	2	567 X	88 --								2 années seulement.	

(1) Encaissement 1959, en milliers de nouveaux francs.

Les signes (croix ou traits) placés sous les valeurs des résultats en indiquent la probabilité avec la signification ci-dessous; l'absence de signe signifie : Résultat de probabilité supérieure à 10 %.

Signe	Signification
--	Résultat de probabilité voisine de 10 %.
--	Résultat de probabilité comprise entre 10 % et 5 %.
x	Résultat de probabilité voisine de 5 %.
X	Résultat de probabilité comprise entre 5 % et 1 %.
xx	Résultat de probabilité voisine de 1 %.
XX	Résultat de probabilité comprise entre 1 % et 1/1000.
xxx	Résultat de probabilité voisine de 1/1000.
XXX	Résultat de probabilité comprise entre 1/1000 et 1/100000.
xxxx	Résultat de probabilité voisine de 1/100000.
XXXX	Résultat de probabilité inférieure à 1/100000.

pour certaines agences, l'existence de nombreux contrats Maladie ou Grêle peut donner des résultats apparemment aberrants, la distribution des résultats pour ces deux branches étant vraisemblablement assez différente de la distribution due aux autres risques (et les normes que nous avons établies reposent essentiellement sur ces autres risques, « l'Automobile » notamment). De mauvais résultats peuvent aussi provenir d'un tarif mal adapté à la zone dans laquelle se recrutent les clients de l'agence; en particulier en Automobile, où le tarif est fortement différencié suivant les départements ou fractions de département, on peut se demander si les tarifs établis sont réellement adaptés à la valeur des risques. Pour le voir, nous avons indiqué sur une carte de France les agences ayant fait apparaître de mauvais résultats.

On constate qu'il y a des départements, et même des régions, dans lesquelles aucune agence n'est pointée, alors que dans certaines autres zones, il y a accumulation des mauvaises notes : cela porte à penser que, dans ces dernières, les tarifs (et notamment le tarif Automobile, car l'Automobile pèse lourdement sur le coût des sinistres), sont mal adaptés (ou, du moins, ont été mal adaptés pendant certaines des dix années sur lesquelles a porté l'étude).

A l'occasion de la tarification, nous avons mis en évidence l'importance du risque Automobile qui est assez différent des autres risques : il serait certainement souhaitable de reprendre notre étude par agence séparément pour l'Automobile et pour les autres risques; on obtiendrait probablement des résultats plus homogènes; c'est dans ce sens que nous allons nous efforcer de perfectionner le présent travail.

Marcel BRICHLER.

## DISCUSSION

M. PENGLAOU a suivi avec beaucoup d'intérêt le développement de la communication de M. Briclher, si riche par son argumentation et si précieuse pour tous ceux qui ont à apprécier la rentabilité des agences des compagnies d'assurances. Étant donné l'heure tardive il ne retiendra qu'un aspect de cet exposé. Il semble résulter des recherches de M. Briclher que les résultats nets des petites agences sont supérieurs à ceux des grandes. Le paradoxe a été expliqué chemin faisant, mais cette constatation paraît aller à l'encontre du mouvement de concentration des entreprises qui s'accroît au fur et à mesure que s'accomplit le Marché commun. De plus, la loi des grands nombres devrait jouer en faveur des grandes agences. Pour faire cesser ces incertitudes, M. Penglaou souhaiterait que le conférencier se penchât ultérieurement sur ces problèmes captivants dont la solution apporterait une convaincante démonstration de la valeur de la recherche statistique et une contribution non négligeable à la recherche économique. Pour terminer l'intervenant exprime à nouveau ses vives félicitations à l'auteur de la communication.

M. BRICHLER remercie M. Penglaou et pense qu'effectivement des études analogues pourraient être entreprises dans d'autres secteurs de l'économie, à condition de trouver chaque fois des tests valables.

M. DELAPORTE. — C'est avec un très vif intérêt qu'à la fois comme statisticien et comme assureur j'ai écouté l'exposé de M. Briclher. J'ai été un peu étonné de ce que M. Briclher ait pu utiliser la loi de Galton-Mac Alister car cette loi ne possède pas de propriété d'additivité. Si le coût des sinistres est représentable par la loi de distribution de Galton, la distribution du coût total des sinistres d'une agence serait alors représentable par le type VI

ou le type IV de Karl Pearson. Je voudrais donc demander à M. Brichler s'il a essayé de faire la représentation par le type III de Karl Pearson, correspondant à l'eulérienne de seconde espèce qui possède la propriété d'additivité.

Si la représentation était meilleure par le type III qui est plus dissymétrique que la loi de Galton, cette loi pourrait entraîner des conclusions différentes sur les résultats des agences. Celles ayant les plus faibles encaissements n'apparaîtraient peut-être plus comme meilleures que les grosses agences.

Et le phénomène observé par M. Brichler sur les résultats des agences liés aux volumes de leurs encaissements peut provenir uniquement du choix d'une loi de distribution insuffisamment dissymétrique. Nous sommes en présence du même phénomène que celui observé en réassurance Excess où les résultats des petites compagnies sont moins stables que ceux des grosses et où par conséquent le nombre de celles bénéficiaires est plus élevé. Nous retrouvons le même phénomène sur les résultats des comptes des polices d'Assurances Automobiles où presque tous doivent être bénéficiaires pour payer les quelques très gros sinistres qui affectent un très petit nombre de contrats. On ne peut pas en conclure que plus les contrats sont petits, meilleurs sont leurs résultats.

M. BRICHLER pense également que la loi de Galton n'est vraisemblablement pas la meilleure et il se propose d'essayer ultérieurement d'autres types de fonctions.

M. J. CHEVALIER. — Au cours de son exposé, le conférencier a indiqué que les agences d'Algérie paraissaient s'écarter sensiblement des normes que suivent les agences de la Métropole.

Il y a lieu de remarquer que le coefficient de 65 % appliqué par le conférencier dans ses calculs, pour le rapport des sinistres aux primes, convient parfaitement à des agences d'assurances moyennes dans la Métropole, avec des portefeuilles composés en parties équilibrées d'assurances Incendie, d'assurances Automobile et de divers risques complémentaires.

Au contraire, la composition habituelle des portefeuilles d'agences en Algérie est très différente. Il ne comprend pratiquement pas d'incendie. Il comprend par contre un assez grand volume d'assurances Accident du travail industrielles, risque qui est monopolisé en Métropole par la Sécurité sociale. Les charges de commissions étant moindres en Accident du travail que dans les autres assurances, le rapport des sinistres aux primes peut atteindre 75 % sans causer de pertes à l'agence et atteint ce taux le plus souvent.

En conséquence, il serait intéressant de refaire pour l'Algérie les calculs qu'a fait le conférencier pour la Métropole, en adoptant un coefficient moyen des sinistres aux primes de 70 % s'appliquant au portefeuille habituel des agences d'Algérie : 1/2 accident du travail, 1/2 automobile.

M. BRICHLER est entièrement d'accord sur ce point.

M. BARROUX. — Pense que les petites agences donnent peut être de bons résultats parce qu'elles n'ont pas encore eu le temps d'avoir de gros sinistres.

M. BRICHLER note que cette remarque est très pertinente.