Journal de la société statistique de Paris

André Schuhl

Hasard et probabilité dans les problèmes de circulation routière

Journal de la société statistique de Paris, tome 97 (1956), p. 233-253

<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1956__97__233_0>

V

HASARD ET PROBABILITÉ DANS LES PROBLÈMES DE CIRCULATION ROUTIÈRE

I. — S'il est un domaine où les études statistiques sont particulièrement utiles à l'heure actuelle, c'est bien celui de la circulation routière, car le développement des véhicules à moteurs pose des problèmes qui deviennent de plus en plus difficiles à résoudre dans l'état de notre réseau routier et dans le cadre étroit où se sont développées jusqu'ici nos grandes agglomérations urbaines.

Le développement de la circulation résulte à la fois de l'augmentation du parc automobile dont dispose le pays et du nombre de kilomètres parcourus par chacun des véhicules de ce parc. La composition du parc subit elle-même une évolution rapide avec prédominance de plus en plus grande des véhicules à faible puissance et même des véhicules à deux roues par rapport aux véhicules à quatre roues. Ces faits sont étroitement liés à toute une catégorie de facteurs économiques. Ils varient avec le temps et le standard de vie des pays dans lesquels sont poursuivies les enquêtes, c'est-à-dire avec le progrès technique et le progrès social. Ils dépendent aussi de la politique fiscale qui est suivie dans ces pays, en ce qui concerne les impôts sur les automobiles et les taxes sur l'essence, et il est hors de doute que des recherches plus précises sur ces dépendances seraient utiles pour guider les chercheurs qui essayent de faire des prévisions sur les résultats à attendre des années à venir.

Or, le développement du réseau routier lui-même est fonction de ces prévisions, qu'il s'agisse d'élargir les routes existantes pour leur permettre de supporter une circulation accrue, ou de créer des voies nouvelles entre les grandes agglomérations ou à l'intérieur même de nos villes.

Les Américains qui ont fait dans ce domaine des études extrêmement importantes et extrêmement intéressantes ont mis au point toute une série de méthodes de recherches, qu'ils appliquent d'une manière systématique et qui leur permettent de prévoir dans la mesure du possible le trafic qui pourra être réalisé sur les voies à créer ou à aménager. Et ces prévisions sont indispensables pour donner à ces voies les caractéristiques techniques qui conviennent à la circulation qu'elles doivent supporter.

Il n'est pas dans nos intentions de vous faire un véritable cours de ce que les Américains appellent le « traffic engineering » qui a donné lieu aux États-Unis à un développement particulièrement intense avec création de nombreux spécialistes pour la formation desquels des cours ont été institués à l'Université de Yale dans le Connecticut, en Californie, et à l'Université de Chicago.

Il n'existe pas encore en France d'enseignements spéciaux sur ce sujet, mais il est hors de doute que les cours professés à l'École des Ponts et Chaussées en matière de routes devront rapidement évoluer de manière à donner à ceux qui s'intéressent à ces problèmes, une formation statistique de plus en plus poussée pour les familiariser avec les méthodes de recherches qu'il est indispensable d'utiliser pour des études de ce genre.

II. — Une des questions qui paraît présenter le plus d'intérêt immédiat pour les constructeurs de routes, est, par exemple, celle de la largeur qu'il convient de donner aux chaussées pour permettre à la circulation qui les emprunte de s'effectuer avec une facilité suffisante.

Or, l'intensité de la circulation est elle-même variable d'une manière très sensible avec le temps, qu'il s'agisse de l'époque de l'année ou des heures d'une journée.

Les figures 1 et 2 montrent des exemples de ces variations au cours d'une journée et au cours d'une année. La figure 3 donne une courbe des débits classés pour les 150 heures les plus chargées d'une année entière.

La question de savoir à partir de quelle limite une route doit être considérée

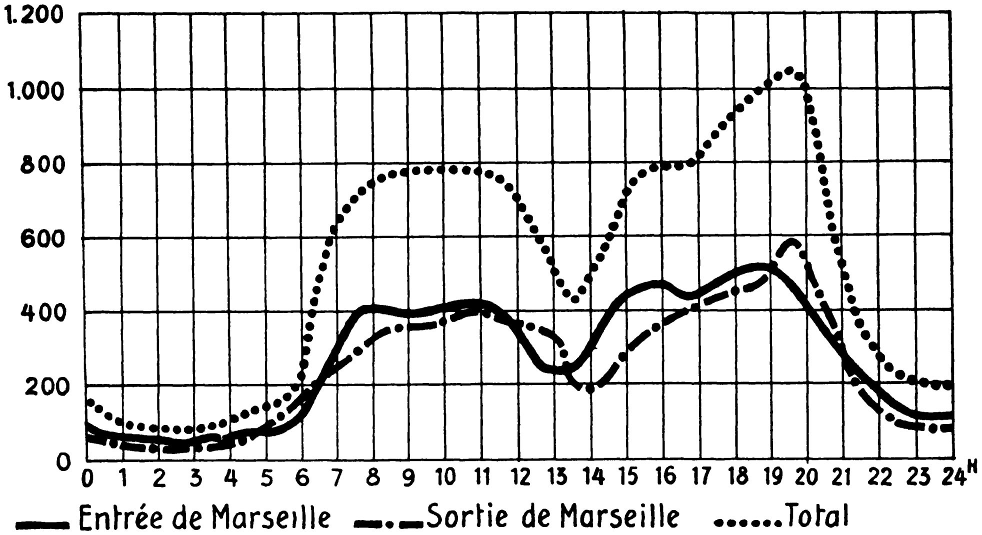

Fig. 1. — Variation du débit d'une voie routière. Autoroute Nord de Marseille. Jours de semaine.

comme encombrée est donc d'ores et déjà un problème difficile puisqu'en fait cette route ne sera encombrée que pendant un certain nombre d'heures par an et qu'il s'agit de déterminer à la fois le nombre d'heures qui sera considéré comme critique et l'importance de la circulation qui pendant ce même nombre d'heures devra être considérée comme inadmissible.

Les premières études qui ont été faites dans ce domaine se sont surtout préoccupées de déterminer le nombre maximum de véhicules qui pouvaient circuler en file unique pendant l'unité de temps.

En supposant identique la vitesse de tous les véhicules et en évaluant en fonction de cette vitesse, la distance qui doit séparer un véhicule du suivant, afin d'éviter tout risque d'accident, on a trouvé des intensités de circulation qui s'élèvent à 1.500 ou 2.000 voitures à l'heure par file et qui sont très supérieures à celles qui sont couramment constatées sur des voies qu'on considère cependant comme très encombrées.

C'est qu'en effet une pareille répartition, qui suppose des véhicules se suivant à la même vitesse et à intervalles constants, est tout à fait exceptionnelle.

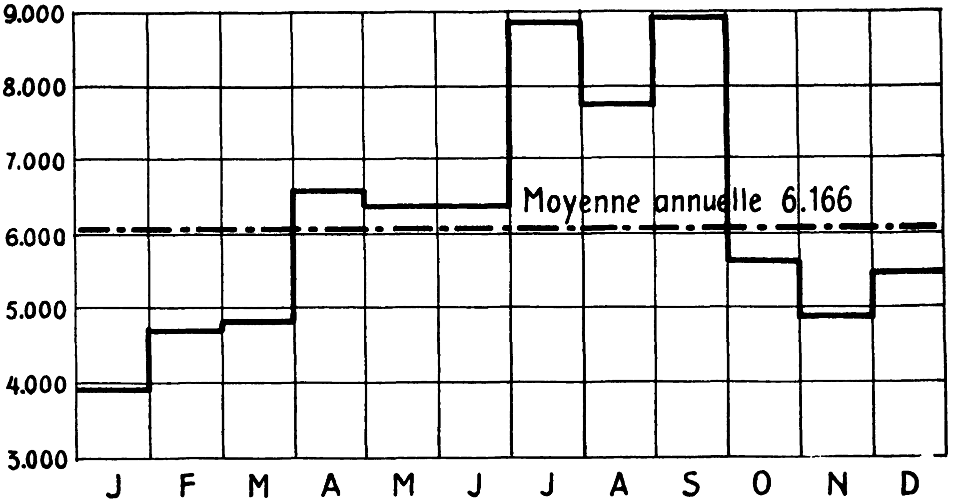

Fig. 2. — Variation du débit journalier moyen mensuel.
Route nationale 7, Orgon.

L'intensité de 2.000 véhicules/heure constitue donc un maximum absolu qui sera considérablement réduit dans la pratique par le moindre obstacle situé sur la voie, une voiture en stationnement par exemple, ou par une simple traversée qui coupera la file pendant un certain délai.

Il est d'ailleurs impensable qu'on puisse arriver à imposer à tous les véhicules circulant sur les routes, une vitesse uniforme, qui serait d'ailleurs, par nécessité,

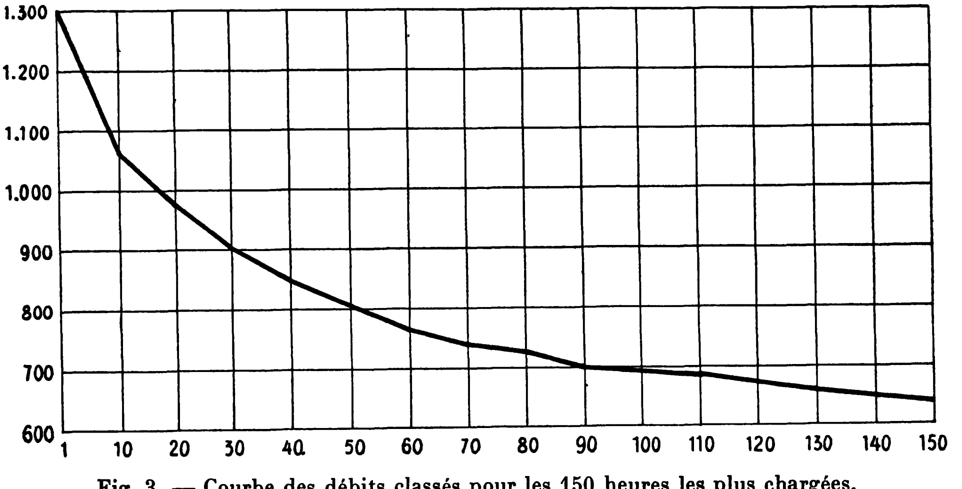

Fig. 3. — Courbe des débits classés pour les 150 heures les plus chargées.
Route nationale 7, Orgon.

celle du véhicule le plus lent, sans provoquer des réclamations violentes et un gaspillage d'énergie considérable.

On voit donc tout de suite que la question posée présente à la fois un aspect statistique et un aspect économique, et que la capacité d'une voie devra varier dans une proportion importante suivant le prix que coûtera en fait son élargissement.

C'est ainsi par exemple que l'on se contente dans les agglomérations urbaines d'une vitesse moyenne de circulation de 40 à 50 km à l'heure qui correspond à des intensités qui atteignent presque la limite absolue que nous avons indiquée plus haut, tandis qu'au contraire, en rase campagne on estime qu'on aurait une situation intolérable bien avant d'arriver aux débits maxima indiqués plus haut.

Les études les plus récentes qui ont été faites à ce sujet, surtout aux États-Unis d'Amérique, ont montré l'intérêt qui s'attache à l'étude de la relation qui

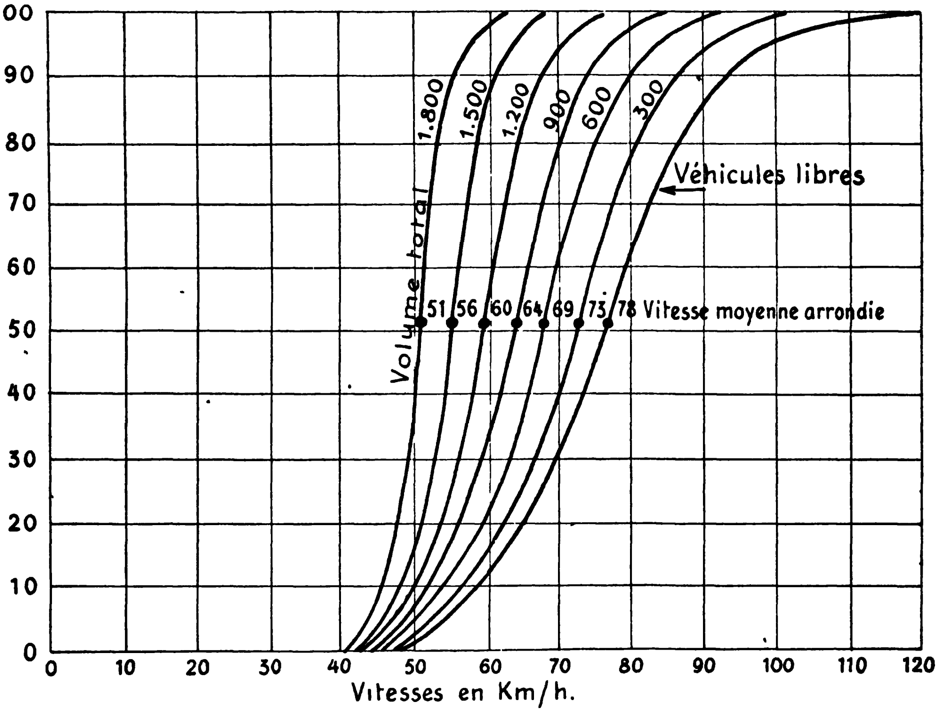

Fig. 4. — Répartitions typiques de vitesses pour différents débits horaires sur des routes à deux voies, en palier et en alignement droit (U. S. A.). En ordonnées pourcentage des véhicules dont la vitesse est inférieure à celle portée en abcisse.

existe entre la vitesse moyenne des véhicules circulant sur une route et le débit correspondant, ou entre la répartition des véhicules le long de la route et ce même débit.

On conçoit en effet qu'au fur et à mesure que le débit augmente, le dépassement devienne de plus en plus difficile. Or, comme un véhicule ne peut maintenir sa vitesse propre qu'en dépassant les véhicules plus lents situés devant lui, toute restriction apportée à la liberté des dépassements se traduit par une réduction de la vitesse moyenne et par un accroissement relatif des véhicules qui se suivent en attente d'une possibilité de dépassement, c'est-à-dire par un accroissement du nombre relatif de petits espacements.

La figure 4 donne les courbes de répartition des vitesses obtenues en Amérique en fonction de l'intensité de la circulation. On voit que les vitesses les plus élevées se réduisent progressivement au fur et à mesure que cette intensité augmente. La figure 5 montre comment varie en fonction de cette même intensité la vitesse moyenne (courbe 1) et la moyenne des différences de vitesses entre véhicules successifs (courbe 3). La courbe 2 donne la vitesse minima qui permet l'écoulement du débit porté en abscisses.

L'auteur du présent article avait d'ailleurs tenté, avant de connaître les résultats obtenus par les Américains dans ce domaine, une théorie de la capacité

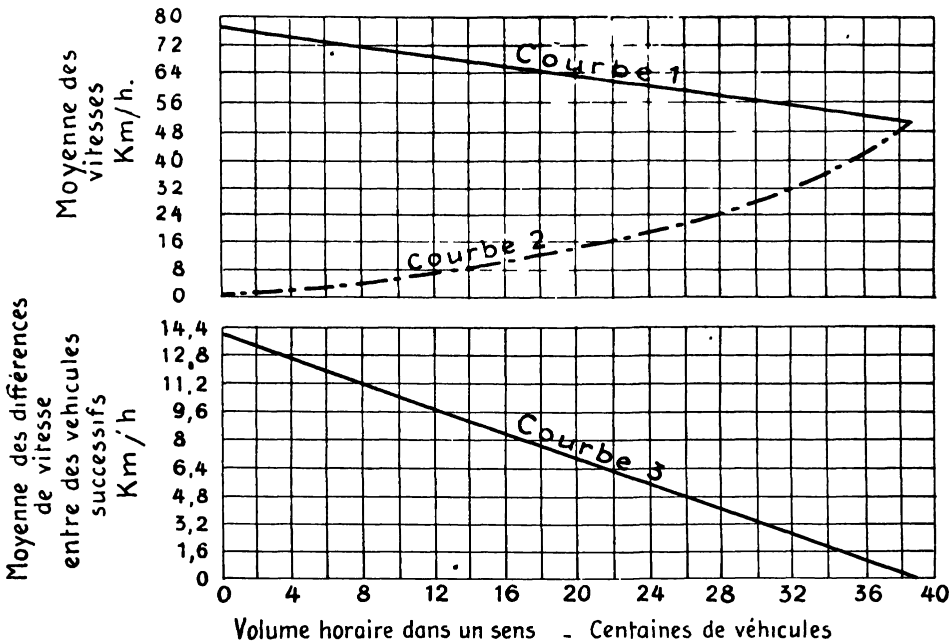

Fig. 5. — Variation des vitesses moyennes pour différents débits horaires sur une route à deux chaussées séparées (4 voies, U. S. A.).

des routes en tenant compte de la plus ou moins grande facilité des dépassements.

Cette théorie, nécessairement très approximative, est devenue tout à fait inutile, devant les études systématiques extrêmement complètes faites en Amérique, qui se sont traduites par des règles empiriques, actuellement appliquées presque partout, pour déterminer la capacité pratique des chaussées à deux ou plusieurs voies.

Les résultats statistiques de ces études sont susceptibles d'intéressantes interprétations.

III. — Donnons d'abord quelques exemples de cas où l'étude théorique des problèmes de circulation a depuis longtemps conduit les spécialistes de ces questions à faire appel aux règles les plus générales du calcul des probabilités.

L'accès d'un véhicule sur une route à grande circulation ne peut se faire avec sécurité, que si le conducteur trouve un vide de longueur suffisante dans la file dans laquelle il s'engage, pour pouvoir s'y insérer sans risquer de collisions avec les véhicules situés devant ou derrière lui. La présence de ce vide au moment où il arrive est bien une question de probabilité.

Il en est de même lorsqu'un véhicule doit effectuer la traversée d'une route sur laquelle circulent un certain nombre de véhicules, sur une ou plusieurs files, allant dans un sens ou dans l'autre.

Le même problème se pose également lorsqu'un véhicule désire doubler, sur une route à deux voies, un véhicule plus lent qui le précède. Cette manœuvre ne peut être en effet exécutée avec sécurité que s'il rencontre dans la file de gauche, qu'il va être obligé d'emprunter à contre-sens, un vide suffisant pour lui permettre de ne pas risquer de collision avec un véhicule venant à sa rencontre.

On voit que tous ces problèmes posent la même question que l'on peut exprimer comme suit, sous deux formes équivalentes :

— quelle est la probabilité de ne trouver en un point choisi au hasard sur une route, et à partir d'un instant également choisi au hasard, aucun véhicule pendant un certain temps?

— quelle est la probabilité de ne trouver à un instant choisi au hasard et à partir d'un point également choisi au hasard sur une route, aucun véhicule sur une certaine longueur l?

Nous n'insisterons pas sur les rôles symétriques que jouent dans ces énoncés le temps et la longueur. Selon que l'on aura étudié la question en mesurant les intervalles de temps qui séparent le passage des véhicules successifs en un point donné, ou en mesurant les distances qui séparent les véhicules successifs sur la route à un instant donné, l'un ou l'autre des énoncés sera plus commode à utiliser.

IV. — Dans les deux cas, si l'on suppose les véhicules répartis au hasard (dans le temps en chaque point d'espace, ou dans l'espace à chaque instant) la réponse à la question posée est fournie par la loi de Poisson, qui se réduit d'ailleurs à sa forme exponentielle

$$P(x) = e^{-nx}$$

où n est le nombre de véhicules par unité de temps (ou de longueur) et x la valeur de l'intervalle de temps (ou de longueur) que l'on désire trouver vide.

La validité de cette loi résulte immédiatement des hypothèses faites, car x est toujours une partie infiniment petite de la longueur totale sur laquelle la répartition au hasard est admise, puisque cette longueur totale est elle-même infiniment grande dans le temps ou dans l'espace. Or, la loi de Poisson est précisément la limite de la loi binomiale de probabilité lorsque l'une des éventualités envisagées est infiniment peu probable.

La démonstration est d'ailleurs immédiate dans le cas particulier ci-dessus.

Soit en effet L la longueur d'une route sur laquelle on suppose répartis au hasard N véhicules, x la longueur d'un segment contenu dans L. La probabilité pour qu'un véhicule donné ne soit pas sur x est $1 - \frac{x}{L}$ et la probabilité pour qu'il en soit ainsi pour les N véhicules qui sont sur L est $\left(1 - \frac{x}{L}\right)^N$;

Lorsque L et N augmentent indéfiniment, leur rapport restant constant et égal à n, nombre de véhicules par unité de longueur, l'expression qui précède a pour limite l'expression e^{-nx} que nous avons écrit plus haut.

V. — La vérification expérimentale de cette loi sous la forme que nous lui avons donnée n'est pas très commode, alors que les relevés effectués sur route donnent aisément les intervalles de temps qui séparent le passage en un même point des véhicules successifs qui circulent sur la route en file unique.

Si l'on réserve le mot « espacement » à ces intervalles de temps, en gardant au mot « intervalle » son sens le plus général, on voit que l'expérience permet de déterminer aisément la loi de répartition des espacements. La question se pose donc de savoir quelle est la relation qui existe entre ces deux lois. Les auteurs que nous connaissons et qui ont traité ces problèmes considèrent comme acquis que la probabilité P qu'il n'y ait aucun véhicule pendant un intervalle x pris au hasard, est identique à la probabilité totale Q pour qu'un espacement pris au hasard soit supérieur à x.

Nous verrons tout à l'heure qu'en réalité $Q = \frac{-1}{n}\frac{dP}{dx}$, mais il résulte de cette relation que si $P = e^{-nx}$, Q a bien la même valeur que P. Réciproquement si P = Q c'est-à-dire si $P = -\frac{1}{n}\frac{dP}{dx}$, on doit avoir $P = Ae^{-nx}$ avec $A = 1$, si l'on veut que $P(0) = 1$.

En d'autres termes si la répartition est bien une répartition au hasard sur la route, $Q = e^{-nx}$ et il est alors facile de comparer cette loi avec les relevés expérimentaux.

VI. — Les relevés faits sur routes, surtout en Amérique, pour déterminer la loi de répartition des espacements sont extrêmement nombreux.

Les courbes de la figure 6 extraite de l'ouvrage de MM. Greenshields et Weida *Statistics with applications to Highway Traffic Analyses*, montre l'allure générale en fonction de l'intensité de la circulation. Ces courbes sont tracées dans un système semi logarithmique, c'est-à-dire qu'elles devraient être des droites de pente n si la loi $Q = e^{-nx}$ était satisfaite. On voit qu'il n'en est rien et qu'en réalité, dans le cas par exemple où $n = 1.000$ véhicules à l'heure, seuls les espacements supérieurs à 5 secondes environ suivent une loi logarithmique.

En prolongeant jusqu'à l'origine la droite représentative, on voit que ces espacements font partie d'un ensemble égal environ à 30 % du total des espacements (300 à l'heure) et que la pente de la droite correspondante à cet ensemble vaut $\frac{\text{loge } 0{,}30 - \text{loge } 0{,}02}{20} \times 3.600 = 480$ (au lieu de 1.000).

Elle donne pour valeur moyenne de cet ensemble $\frac{3.600}{480} = 7{,}5$ secondes, très supérieure à la valeur moyenne du total des espacements $\frac{3.600}{1.000} = 3{,}6$ secondes.

Les espacements restants ont une valeur moyenne qui peut se calculer par $\frac{3.600 - 7,5 \times 300}{700}$ et vaut à peu près 2 secondes.

L'examen des courbes correspondant aux diverses intensités de trafic

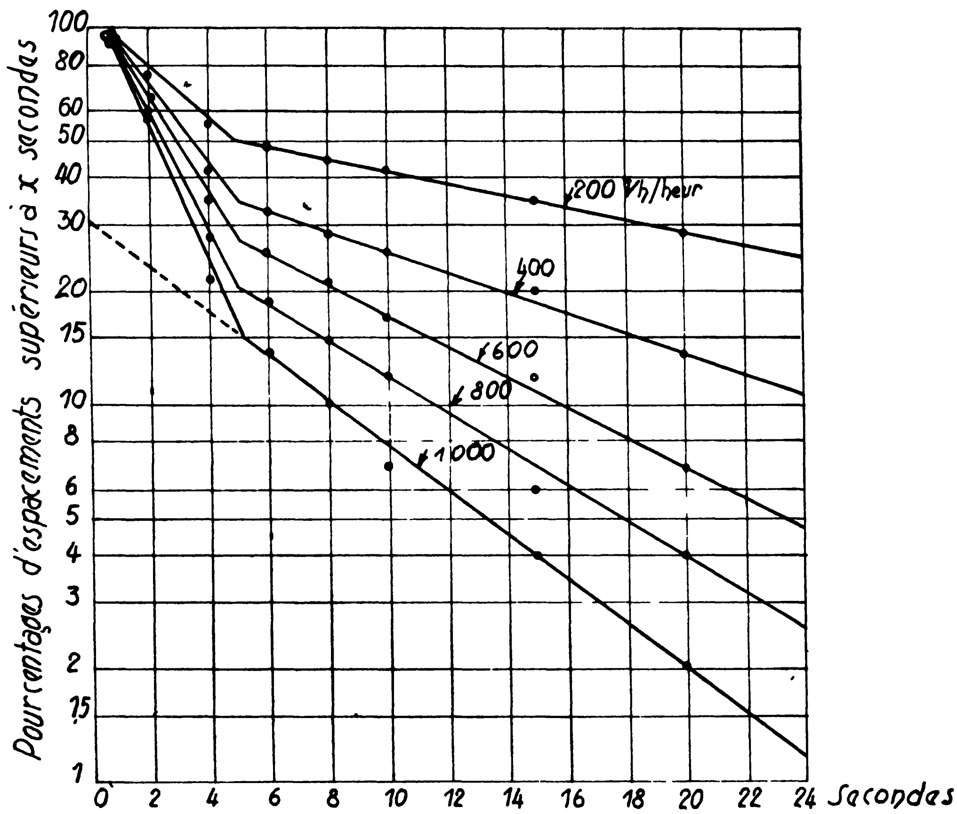

Fig. 6. — Répartition des espacements entre véhicules successifs sur une route à 2 voies et pour diverses intensités de la circulation (Courbes données par MM. Greenshields et Weida) dans leur ouvrage *Statistics with application to Highway Traffic Analysis.*

montre que cette remarque est générale. L'écart par rapport à la loi de Poisson est de plus en plus grand au fur et à mesure que l'intensité du trafic augmente.

VII. — La conclusion que l'on peut tirer de cette confrontation avec l'expérience est que les véhicules ne peuvent pas être considérés comme répartis au hasard le long d'une route, dès que l'intensité du trafic n'est pas très faible; et cela s'explique aisément. Une telle répartition ne serait concevable que si les véhicules circulaient tous sur des pistes différentes sans se gêner les uns les autres. Il n'en est pas ainsi et les véhicules les plus rapides ont d'autant plus de difficultés à dépasser les véhicules plus lents qui les précèdent que l'intensité de la circulation est plus forte, c'est-à-dire que le nombre de véhicules venant en sens inverse est lui-même plus grand. Il faut donc bien qu'un nombre de véhicules de plus en plus grand attende derrière des véhicules lents une occasion favorable pour effectuer leur manœuvre de dépassement, ce qui augmente la probabilité des petits espacements par rapport à la loi théorique.

Il sera dans ces conditions plus facile d'interpréter la réalité si l'on imagine que les espacements sont répartis en deux classes. L'une correspondant aux véhicules qui circulent librement sur la route, soit qu'ils puissent réaliser leur vitesse normale sans difficulté, soit qu'ils trouvent une possibilité immédiate

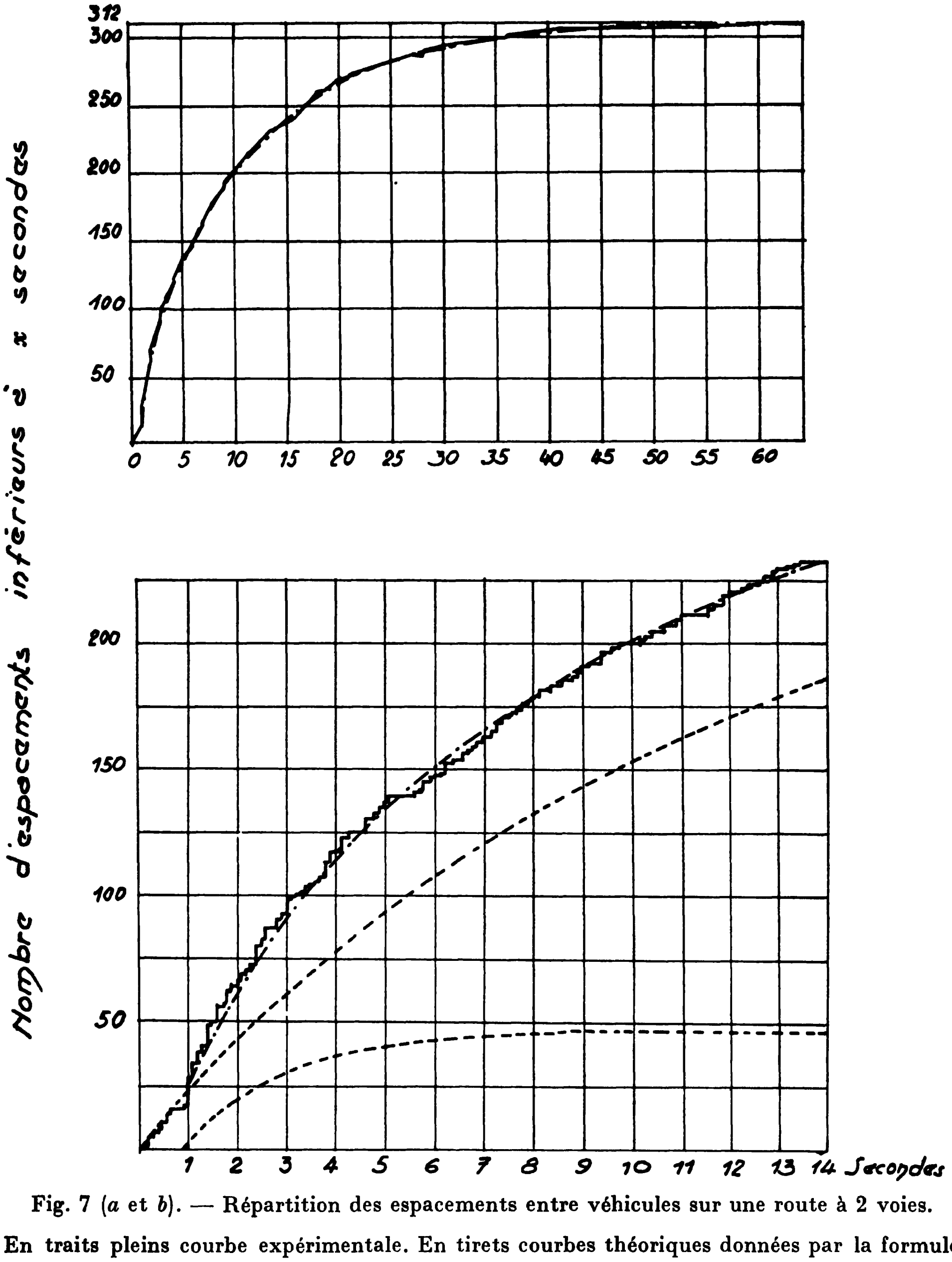

Fig. 7 (*a* et *b*). — Répartition des espacements entre véhicules sur une route à 2 voies. En traits pleins courbe expérimentale. En tirets courbes théoriques données par la formule

$$y = 265\ (1 - e^{-\frac{x}{11,5}}) + 47\ (1 - e^{-\frac{x - 0,94}{2,1}})$$

le second terme conservant la valeur O lorsque $x < 0,94$ 2b donne séparément les deux termes de cette formule.

de dépassement lorsqu'ils rattrapent un véhicule plus lent. L'autre correspondrait au contraire aux véhicules gênés dans leurs dépassements, par la présence de véhicules venant en sens inverse, et obligés par suite de ralentir leur marche.

On peut imaginer que ces deux classes d'espacements suivent toutes deux des lois exponentielles de répartition, mais avec des valeurs moyennes différentes, lois dont la superposition rendrait compte de la courbe relevée expérimentalement. Cette conception n'est pas sans inconvénient car une loi du type exponentiel, donne nécessairement des probabilités non nulles aux très grands espacements et il est difficile d'expliquer ce fait pour la deuxième classe d'espacements. Mais on sait que les exponentielles décroissent extrêmement vite et que les cas qui pourraient être troublants seront extrêmement peu nombreux. Ainsi pour une valeur moyenne de 2 secondes, la proportion des espacements supérieurs à 6 secondes serait inférieure à 5 %. On peut donc espérer qu'une loi de ce type pourra traduire assez fidèlement la réalité.

C'est ce que nous avons cherché à vérifier sur des relevés expérimentaux effectués en France et dont la Direction des Routes a bien voulu nous fournir les résultats. La figure 7 donne le résultat de cette recherche, les coefficients de la loi théorique ayant d'ailleurs été calculés au mieux par une méthode des moindres carrés.

La loi obtenue tient compte d'ailleurs d'une autre remarque : C'est que si les espacements correspondant aux véhicules libres peuvent s'annuler (cas des véhicules en cours de dépassement), les espacements correspondant aux véhicules gênés ont au contraire une limite inférieure qui correspond au fait que deux véhicules qui se suivent doivent matériellement rester séparés l'un de l'autre par un intervalle de temps minimum ε. L'examen des figures 6 et 7 montre que ce minimum est de l'ordre de 0,8 à 1 seconde. Cette circonstance a encore pour effet de restreindre la proportion des grands espacements de la 2e classe, qui, nous l'avons vu, sont d'une interprétation physique difficile. Avec $\varepsilon = 0{,}8$ seconde et une valeur moyenne de 2 secondes, la proportion des espacements de cette classe dépassant 6 secondes n'excéderait pas 1,3 % (au lieu de 5 %).

VIII. — Ayant ainsi traduit de façon acceptable la loi de répartition des espacements, quelle conclusion peut-on en tirer pour le problème fondamental que nous avons posé plus haut? Autrement dit, connaissant la loi de répartition des espacements et supposant maintenant que ces espacements constituent des événements successifs et indépendants les uns des autres, peut-on déterminer la probabilité de trouver un intervalle x donné au hasard vide de véhicules.

Soit P (x) cette probabilité finie, P étant évidemment une fonction décroissante et soit dx l'élément infiniment petit qui suit l'intervalle x. On peut décomposer l'événement que nous étudions (à savoir x vide) en deux cas d'ailleurs incompatibles (figures 8 *a* et *b*) :

— l'intervalle $x + dx$ est vide tout entier;

— l'intervalle x étant vide, l'intervalle dx ne l'est pas.

Le premier événement a pour probabilité P $(x + dx)$ d'après la définition de P (figure 8 *a*).

Le second est un événement complexe dont la probabilité est d'ailleurs infiniment petite. Nous l'appellerons J $(x)\, dx$, cet événement correspondant au cas où il existe sur dx un véhicule au moins, c'est-à-dire au cas où un intervalle compris x et $x + dx$ et choisi au hasard remplit la double condition d'être vide et de se terminer sur un véhicule (fig. 8 *b*).

On a alors $P(x) = P(x + dx) + J(x)\, dx$ d'où : $J(x) = -\dfrac{dP(x)}{dx}$ (1).

Si au lieu de considérer l'intervalle x dans l'ensemble des intervalles pris au hasard, on le considère seulement dans l'ensemble (infiniment petit par rapport au précédent) des intervalles qui commencent sur un véhicule, pris au hasard, le choix est plus restreint et la probabilité qu'il soit vide prend une autre valeur finie cette fois et qui est bien identique à Q (x), probabilité totale pour que l'espacement qui commence sur le même véhicule soit supérieur à x.

Reprenons alors la figure 8 *b* en changeant le sens de circulation.

La probabilité pour qu'il existe un véhicule V sur un segment élémentaire $FF' = dx$ choisi au hasard est $n\, dx$.

Si l'on veut, en outre, que l'intervalle $V0 = x'$ qui commence sur ce véhicule soit vide, il faut multiplier la probabilité précédente par Q $(x)'$.

On a donc :

$$J(x)\, dx = n\, dx\, Q(x'),\ x < x' < x + dx$$

d'où

$$Q(x) = \frac{J(x)}{n} \text{ ou } Q(x) = -\frac{1}{n}\frac{dP}{dx}.$$

Réciproquement de la loi de répartition des espacements, Q(x) on pourra déduire par intégration la loi de probabilité P (x).

$$\text{Si } Q(x) = \begin{cases} \gamma + (1-\gamma)\, e^{-n_2 x} & (x < \varepsilon) \\ \gamma\, e^{-n_1 (x-\varepsilon)} + (1-\gamma)\, e^{-n_2 x} & (x < \varepsilon) \end{cases}$$

$$P(x) = \begin{cases} \gamma\, n \left(\dfrac{1}{n_1} + \varepsilon - x\right) + n\,\dfrac{(1-\gamma)}{n_2}\, e^{-n_2 x} & (x < \varepsilon) \\ \dfrac{\gamma\, n}{n_1}\, e^{-n_1 (x-\varepsilon)} + n\,\dfrac{(1-\gamma)}{n_2}\, e^{-n_2 x} & (x > \varepsilon) \end{cases}$$

avec la relation

$$\frac{1}{n} = \gamma\left(\frac{1}{n_1} + \varepsilon\right) + \frac{(1-\gamma)}{n_2}.$$

La probabilité de trouver compris entre x et $x + dx$ un espacement choisi au hasard dans l'ensemble des espacements est

$$p(x)\, dx = -\frac{d\, Q(x)}{dx}\, dx.$$

(1) On déduit de ce qui précède que la probabilité de trouver un véhicule sur un élément dx pris au hasard, *quand on sait que cet élément est précédé d'une longueur x vide de véhicule*, est $\dfrac{J(x)}{P(x)}\, dx$. Ce rapport qui est constant, et égal à n lorsque les véhicules sont répartis au hasard, varie au contraire avec x lorsque la répartition est différente.

Avec la loi proposée plus haut, ce rapport croît avec x de la valeur n pour $x = o$ a une valeur limite supérieure à n lorsque x augmente indéfiniment.

Cette relation qui résulte immédiatement de la définition même de la probabilité totale Q (x) supposée continue, pourrait s'obtenir aussi en déterminant p (x) à partir de Q (x) comme on a obtenu J (x) à partir de P (x).

IX. — On a ainsi défini trois fonctions distinctes donnant la probabilité de trouver vide un intervalle x, chacune d'entre elles correspondant à un mode différent (et de plus en plus restrictif) pour le choix de cet intervalle (fig. 8).

1° Dans le cas le plus général de ce choix la probabilité cherchée a la valeur P (x) (fig. 8*a*).

2° Si l'intervalle vide doit satisfaire en outre à la condition d'être borné à son extrémité par un véhicule, la densité de probabilité est $\mathrm{J}(x) = -\dfrac{d\,\mathrm{P}(x)}{dx}$ (fig. 8*b*).

Mais on peut aussi limiter le choix aux seuls intervalles qui finissent (ou commencent) sur un véhicule. La probabilité de vide est alors $\mathrm{Q}(x) = \dfrac{\mathrm{J}(x)}{n}$.

3° Enfin, si le choix est limité aux intervalles commençant sur un véhicule et si l'intervalle cherché doit satisfaire à la double condition d'être vide et de

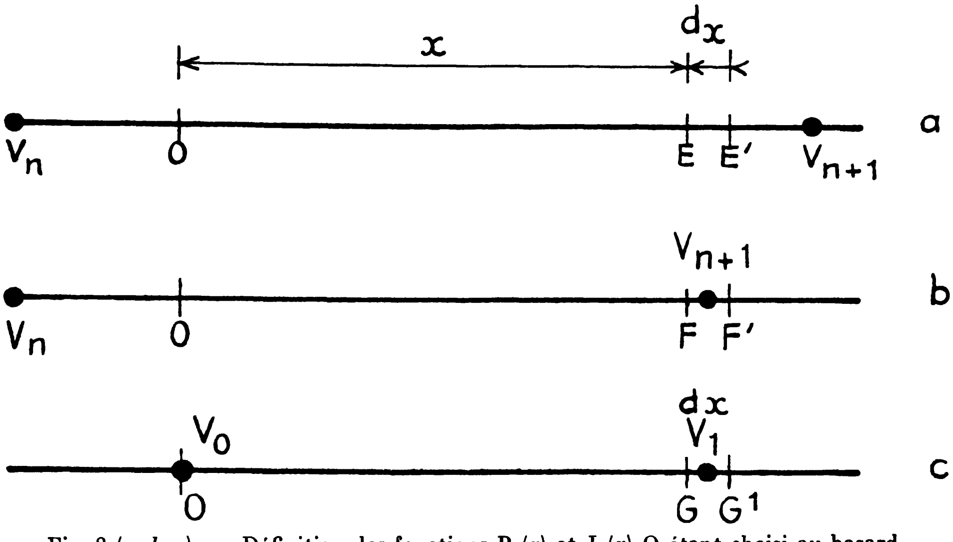

Fig. 8 (*a*, *b*, *c*). — Définition des fonctions P (x) et J (x) O étant choisi au hasard, et p (x) O étant choisi sur véhicule pris au hasard.

se terminer sur un autre véhicule (cas d'un espacement) la densité de probabilité est $p(x) = -\dfrac{d\,\mathrm{Q}(x)}{dx}$ (fig. 8*c*).

La définition de ces trois fonctions va nous permettre de traiter les divers problèmes qui se posent sans qu'il soit nécessaire de faire aucune hypothèse sur la forme réelle de ces fonctions.

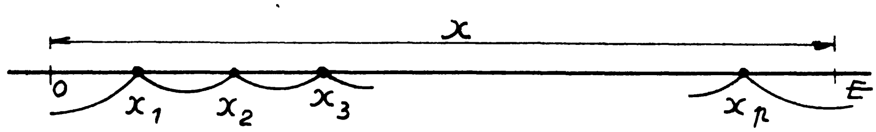

Fig. 9. — Probabilité de trouver p véhicules sur un tronçon OE $= x$ choisi au hasard.

X. — On sait que la loi de Poisson donne la valeur $e^{-nx}\frac{(nx)^p}{p!}$ à la probabilité de trouver p véhicules sur un intervalle x pris au hasard lorsque le nombre probable de ces véhicules est nx. Avec la répartition des espacements que nous avons trouvée plus haut, la forme de la loi de probabilité peut se calculer comme suit (fig. 9).

Le point 0 origine de l'intervalle x étant pris au hasard :

La probabilité de trouver un premier véhicule sur dx_1 est

$$\mathrm{J}\ (x_1)\ dx_1$$

Celle de trouver un deuxième véhicule sur dx_2 est

$$p\ (x_2 - x_1)\ dx\ 2$$

et ainsi de suite jusqu'à la probabilité finie $\frac{\mathrm{J}\ (x - x_p)}{n}$ qu'il n'existe aucun véhicule entre x_p et E.

Si l'on fait le produit de ces probabilités élémentaires, on obtient un élément différentiel d'ordre p, dont les variables peuvent prendre toutes les valeurs comprises entre 0 et x pour x_1; x_1 et x pour x_2; x_{p-1} et x pour x_p.

L'intégrale d'ordre p correspondante donne la loi cherchée qui se réduit à la forme de Poisson si

$$\mathrm{J}\ (x) = -\frac{d\mathrm{P}\ (x)}{dx} = +\ n\ \mathrm{P}\ (x).$$

XI. — On voit maintenant qu'un véhicule qui a besoin d'un vide Θ dans la file de gauche pour effectuer à un moment donné une manœuvre de dépassement, aura une probabilité finie P (Θ) de trouver ce vide immédiatement. Mais dans le cas contraire, on peut se demander combien de temps il devra attendre, et s'il est possible de définir les probabilités respectives des attentes de diverses durées.

Imaginons un observateur immobile au point 0 supposé, choisi au hasard, et examinons les véhicules qui passent successivement au point 0, à partir

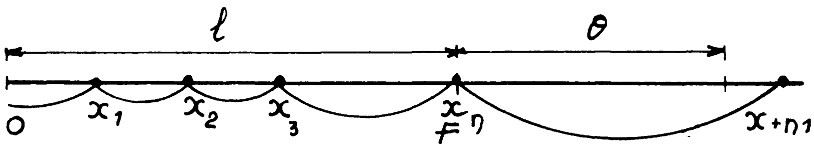

Fig. 10. — Probabilité de ne trouver de vide Θ qu'à une distance OF $= l$, O étant choisi au hasard.

d'une origine des temps également choisie au hasard. Soit $x_1\, x_2 \ldots\ldots x_n, x_{n+1} \ldots\ldots$ le temps de passage de ces véhicules. Il attendra un temps $l = xn$ si tous les intervalles $0x_1$, x_1, x_2, ... x_{n-1}, x_n sont tous inférieurs à Θ, l'intervalle $x_n\, x_{n+1}$ étant égal ou supérieur à Θ (fig. 10).

Soit donc F $(l, \Theta)\ dl$ la probabilité pour que l'intervalle l, $l + dl$ choisi au hasard se termine sur un véhicule, et ne comporte aucun vide de durée égale ou supérieure à Θ.

La probabilité d'une attente l, $l + dl$ est alors F $(l, \Theta)\ dl\ \frac{\mathrm{J}\ (\Theta)}{n}$.

La connaissance de la fonction F permettrait donc de calculer la probabilité des attentes non nulles.

Or si $l < \Theta$, tous les intervalles de longueur l qui se terminent sur un véhicule satisfont à la condition cherchée et la probabilité qu'un tel intervalle soit compris entre l et $l + dl$ est égale à la probabilité n de trouver un véhicule sur la longueur dl située à une distance l de l'origine choisie au hasard. On a donc $F(l, \Theta) = n$ si $l < \Theta$.

Si au contraire $l > \Theta$, la condition imposée ne peut être remplie que s'il existe un véhicule au moins dans le corps de l'intervalle. Les dispositions convenables comportent donc obligatoirement deux véhicules consécutifs, c'est-à-dire un espacement, situé à la fin de l'intervalle et l'on peut écrire :

$$F(l, \Theta) = \int_{\circ}^{\Theta} p(x)\, F(l - x, \Theta)\, dx$$

en donnant à cet espacement terminal toutes les valeurs possibles. Cette relation fonctionnelle permet de définir F pour toutes les valeurs de l dès l'instant qu'elle est connue entre $l = 0$ et $l = \Theta$.

Si les véhicules sont répartis au hasard, c'est-à-dire si $p(x)$ est de la forme $n\, e^{-nx}$ cette relation donne :

$$\frac{\partial F(l, \Theta)}{\partial l} = -p(\Theta)\, F(l - \Theta, \Theta)$$

d'où l'on tire si

$$k\,\Theta < l < (k + 1)\,\Theta$$

$$F(l, \Theta) = n + \Sigma_1^k (-1)^k p^k \left[\frac{(l - k\,\Theta)^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{n\,(l - k\,\Theta)^k}{k!}\right].$$

XII. — La valeur moyenne de l'attente s'écrit d'ailleurs

$$\lambda = \int_{o}^{\Theta} l\, F(l, \Theta)\, \frac{J(\Theta)}{n}\, dl$$

que nous allons maintenant calculer, en utilisant certaines propriétés intéressantes de la fonction F.

Nous remarquerons pour cela l'analogie qui existe entre la fonction F que nous avons définie plus haut et la fonction J. Nous appellerons donc $E(l, \Theta)$ la probabilité finie pour qu'un intervalle l pris au hasard ne comporte pas de vide égal ou supérieur à Θ (fig. 11*a*).

Nous pouvons décomposer l'événement correspondant en deux éventualités incompatibles :

— l'une étant que $l + dl$ satisfait à la même condition;

— l'autre que $l + dl$ n'y satisfait pas, c'est-à-dire puisque l y satisfait que l'intervalle $l + dl$ se termine par un vide de longueur Θ. On a donc :

$$E(l, \Theta) = E(l + dl, \Theta) + F(l - \Theta, \Theta)\, \frac{J(\Theta)}{n}\, dl$$

d'où l'on tire

$$\frac{\partial E(l, \Theta)}{dl} = -F(l - \Theta, \Theta)\, \frac{J(\Theta)}{n}$$

On verrait de même que

$$\frac{\partial F(l, \Theta)}{\partial \Theta} = - G(l - \Theta, \Theta) J(\Theta)$$

G (l, Θ) étant la densité de probabilité pour qu'un intervalle de longueur l choisi au hasard parmi les intervalles qui se terminent sur un véhicule,

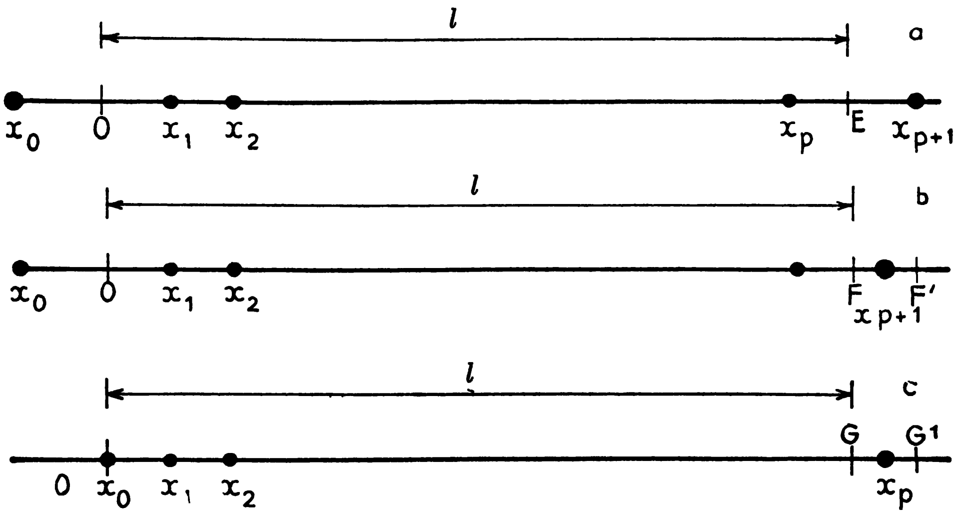

Fig. 11 (*a*, *b*, *c*). — Définition des fonctions EF)l Θ), O étant choisi au hasard et G (l, Θ), O étant choisi sur un véhicule pris au hasard.

commence sur un autre véhicule et ne comporte pas de vide de longueur égale ou supérieure à Θ (fig. 11*c*).

E, F, G, jouissent de propriétés analogues à celles de P, J, p.

Cette remarque permet d'écrire :

$$\lambda = \int_0^\infty l\, F(l, \Theta) \frac{J(\Theta)}{n} dl = - \int_0^\infty l \frac{\partial E(l + \Theta, \Theta)}{\partial l} dl$$

qui s'intègre par parties et donne :

$$\lambda = \int_0^\infty E(l + \Theta, \Theta)\, dl = \int_\Theta^\infty E(l, \Theta)\, dl.$$

Pour effectuer cette intégrale nous aurons recours à un procédé analogue en posant

$$D(l, \Theta) = \int_0^\Theta J(x)\, E(l - x, \Theta)\, dx.$$

Cette fonction D (l, Θ) qui ne paraît pas susceptible d'une interprétation physique simple est en effet (à un coefficient de multiplication près) l'intégrale de E (l — Θ, Θ). Pour le voir formons sa dérivée :

$$\frac{\partial D(l, \Theta)}{\partial l} = \int_0^\Theta J(x) \frac{\partial E(l - x, \Theta)}{\partial l} dx = - \int_0^\Theta J(x)\, F(l - x - \Theta, \Theta) \frac{J(\Theta)}{n} dx$$

pourvu que E reste continu lorsque l — x varie de l — Θ à l, c'est-à-dire pourvu que $l \geqslant 2\,\Theta$.

Interprétons maintenant à l'aide de la figure 12 les divers facteurs de l'expression obtenue :

$F\ (l - x - \Theta, \Theta)\ dx$ est la probabilité élémentaire pour que 0 F se termine sur un véhicule et ne contienne pas de vide égal ou supérieur à Θ.

$\dfrac{J\ (x)}{n}$ est la probabilité pour que F E $= x$ $(x < \Theta)$ soit inférieur à l'espacement qui suit F.

Le produit de ces deux termes est donc la probabilité élémentaire pour que 0 E ne contienne aucun vide égal ou supérieur à Θ, le dernier véhicule situé

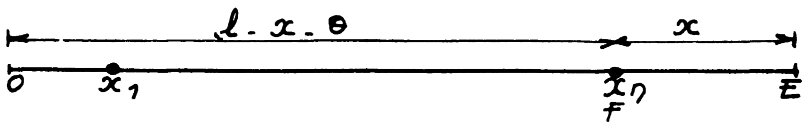

Fig. 12.

dans le corps de 0 E se trouvant sur l'élément dx situé à la distance x de l'extrémité E de l'intervalle.

La somme de ces probabilités élémentaires, effectuée pour toutes les valeurs de $x < \Theta$ est donc la probabilité finie pour que l'intervalle 0 E $= l - \Theta$ choisi au hasard ne contienne pas de vide Θ, c'est-à-dire E $(l - \Theta)$.

On peut donc écrire :

$$\frac{\partial\ D\ (l, \Theta)}{\partial\ l} = -\ E\ (l - \Theta, \Theta)\ J\ (\Theta)\ (l \geqslant 2\ \Theta)$$

et par suite

$$E\ (l, \Theta) = -\frac{1}{J\ (\Theta)}\ \frac{\partial\ D\ (l, + \Theta, \Theta)}{\partial\ l}\ (l \geqslant \Theta).$$

On a donc :

$$\lambda = + \int_\Theta^\infty \frac{1}{J\ (\Theta)}\ \frac{\partial\ D\ (l + \Theta, \Theta)}{\partial\ l}\ dl = \frac{D\ (2\ \Theta, \Theta)}{J\ (\Theta)}$$

et il reste à calculer la valeur de D $(2\ \Theta, \Theta)$.

Or on a de 0 à Θ $F\ (l, \Theta) = n$ d'où entre Θ et $2\ \Theta$

$$\frac{\partial\ E\ (l, \Theta)}{\partial\ l} = -\ F\ (l - \Theta, \Theta)\ \frac{J\ (\Theta)}{n} = -\ J\ (\Theta)$$

et par suite puisque $E\ (l, \Theta) = 1 - P\ (\Theta)$ pour $l = \Theta$

$$E = 1 - P\ (\Theta) - J\ (\Theta)\ (l - \Theta) \qquad \Theta < l < 2\ \Theta.$$

Il en résulte par des calculs simples

$$D\ (2\Theta, \Theta) = \int_0^\Theta J\ (x)\ E\ (2\ \Theta - x, \Theta)\ dx =$$
$$(1 - P\ (\Theta)\ )^2 - \Theta\ J\ (\Theta) + J\ (\Theta) \int_0^\Theta P\ (x)\ dx$$

de sorte que

$$\lambda = \frac{(1 - P\ (\Theta))^2}{J\ (\Theta)} - \Theta + \int_0^\Theta P\ (x)\ dx.$$

valeur moyenne qui peut être considérée comme résultant d'une attente nulle avec la probabilité P (Θ) et d'une attente moyenne non nulle

$$\frac{1 - \mathrm{P}(\Theta)}{\mathrm{J}(\Theta)} + \frac{\int_0^\Theta \mathrm{P}(x)\, dx - \Theta}{1 - \mathrm{P}(\Theta)}$$

avec la probabilité 1 — P (Θ).

XIII. — On voit donc que λ ne dépend que des fonctions J, P et $\mathrm{R} = \int_\Theta^\infty \mathrm{P}(x)\, dx$ qui se déduisent les unes des autres par de simples intégrations que l'on peut faire graphiquement.

Comme $\mathrm{Q} = \frac{\mathrm{J}}{n}$ peut être tracée expérimentalement on voit que les réponses aux questions fondamentales qui peuvent se poser, peuvent être obtenues

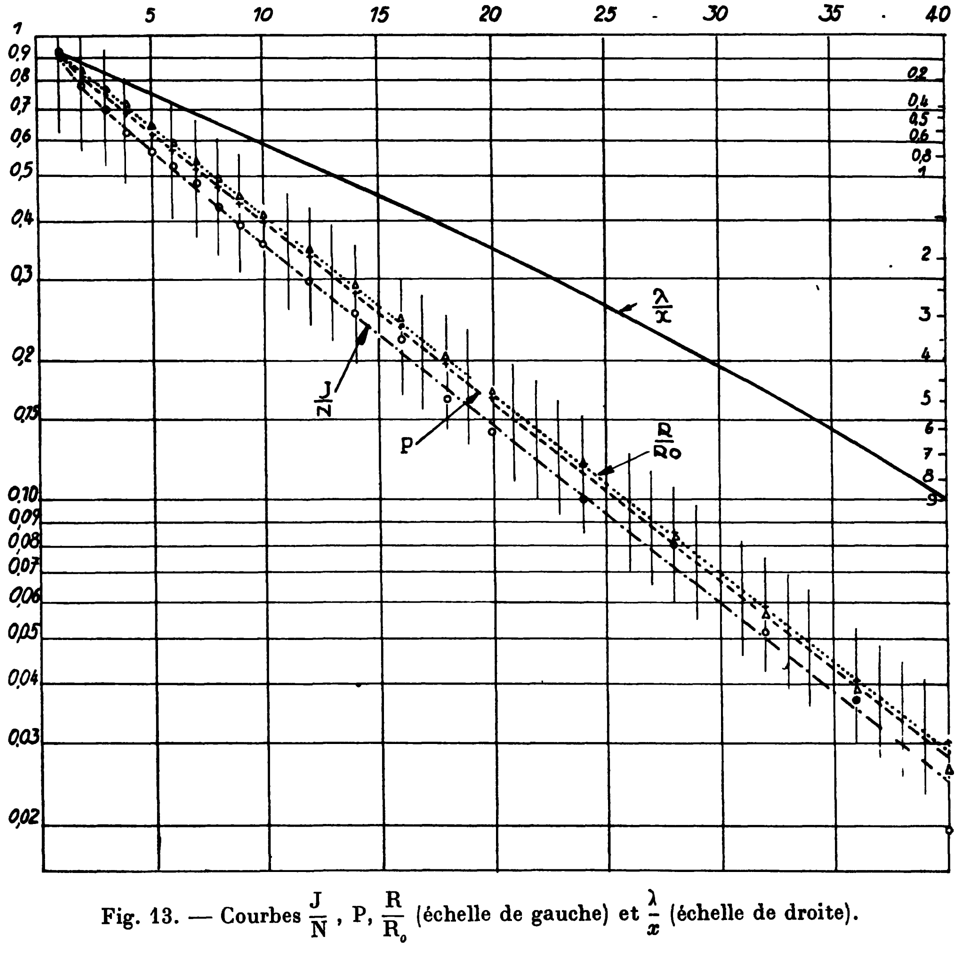

Fig. 13. — Courbes $\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{N}}$, P, $\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}_0}$ (échelle de gauche) et $\frac{\lambda}{x}$ (échelle de droite).

sans que la loi de probabilité des espacements soit connue autrement que par la courbe qui la définit.

Cette remarque nous a paru intéressante à signaler et nous avons tracé sur la figure 13, pour le cas expérimental qui correspond à la figure 7, les courbes qui donnent en coordonnées semi logarithmiques les valeurs de $\frac{J}{n}$, P, $\frac{R}{R_o}$ et $\frac{\lambda}{x}$ en fonction de x.

Les courbes P et $\frac{R}{R_o}$ ont été obtenues par intégrations numériques de la courbe $\frac{J}{n}$, la courbe λ par application de la formule :

$$\lambda = \frac{(1 - P)^2}{J} + R_o - R - x.$$

Dans le cas dont il s'agit un vide de 18 secondes sera obtenu tout de suite dans 20 % des cas et sera attendu en moyenne 32 secondes dans les 80% restant.

NOTE. — Il n'est peut-être pas inutile de montrer comment on pourrait déterminer directement les diverses fonctions qui interviennent dans la présente note.

1° Imaginons une horloge qui se mettrait automatiquement en marche à des instants séparés par des intervalles de temps égaux à $\frac{1}{a}$ heure. Elle s'arrêterait au contraire au passage du premier véhicule suivant son déclanchement si ce passage survient avant un intervalle de temps Θ $\left(\Theta < \frac{1}{a}\right)$.

Elle s'arrêterait en tout cas au bout du temps Θ si aucun véhicule ne s'est présenté avant l'expiration de ce délai.

Si le nombre de déclanchements est assez grand, on peut considérer que tout se passera en moyenne comme si l'instant du déclanchement était choisi au hasard.

Dans ce cas, si x est le temps qui sépare le déclenchement automatique du passage du premier véhicule qui suit ce déclenchement la durée moyenne de fonctionnement continu s'écrit :

$$\int_0^\Theta x \, J(x) \, dx + \int_\Theta^\infty \Theta \, J(x) \, dx = R(0) - R(\Theta)$$

L'horloge marquera donc en moyenne, un temps $a\,[R(0) - R(\Theta)]$ par heure.

2° Imaginons au contraire que la remise en marche de cette horloge soit provoquée par le passage d'un véhicule, l'arrêt se produisant soit au moment du passage du premier véhicule qui se présente ensuite avec un délai inférieur à Θ, soit au bout du temps Θ si aucun véhicule ne s'est présenté avant l'expiration de ce délai.

Si le nombre de déclenchements est assez grand on peut considérer que tout se passera en moyenne comme si l'instant du déclanchement survenait cette fois sur un véhicule choisi au hasard.

La durée moyenne de fonctionnement continu est alors

$$\int_0^\Theta x \, p(x) \, dx + \int_0^\Theta \Theta \, p(x) \, dx = \frac{1 - P(\Theta)}{n}.$$

La durée moyenne qui s'écoule entre deux mises en marche successives est :

$$\int^\Theta \left(x + \frac{1}{n}\right) p(x) \, dx + \int_0^\infty x \, p(x) \, dx = \frac{2n - J(\Theta)}{n\,2}.$$

Le temps total de marche est donc en moyenne :

$$\frac{1 - P(\Theta)}{2n - J(\Theta)} x n \text{ par unité de temps.}$$

3° Imaginons enfin que l'horloge se remette en marche dès qu'un véhicule passe devant elle et qu'elle s'arrête dès qu'il s'est écoulé un temps Θ pendant lequel aucun véhicule n'est passé. On voit sans calcul que les périodes d'arrêts correspondent aux positions qu'il faudrait donner à l'extrémité d'un intervalle pour qu'il soit vide de véhicule. Elles représentent donc une durée égale à P (Θ) par unité de temps.

Le temps total de marche est donc en moyenne : 1 — P (Θ) par unité de temps.

Quant au nombre des arrêts et déclanchements, qui correspondent aux espacements supérieurs à Θ, il a la valeur probable J (Θ) puisque la probabilité d'un tel espacement est $\frac{J(\Theta)}{n}$ et le nombre total des espacements n par unité de temps.

La durée moyenne de fonctionnement continu est donc :

$$\frac{1 - P(\Theta)}{J(\Theta).}$$

On peut donc en comparant le temps mesuré par l'horloge au temps réellement écoulé et en comptant le nombre des déclanchements et arrêts survenus pendant ce temps (ce nombre étant supposé assez grand), déterminer expérimentalement les fonctions J, P et R (Θ).

André Schuhl.

DISCUSSION

M. Ventura fait remarquer que l'assimilation des phénomènes observés à une loi de Poisson suppose l'indépendance de ces phénomènes dans le temps ou dans l'espace. Il semble que cette indépendance n'existe pas dans la circulation routière, tout au moins pour certaines densités de trafic, car si en une portion dL d'une route on a, dans un intervalle de temps donné dt, enregistré le passage d'un véhicule, la probabilité pour qu'en une portion contiguë de route ou à un intervalle de temps suivant il s'en trouve un autre, est plus grande (en raison des impossibilités de dépassement) que si l'on n'avait observé aucun véhicule dans l'intervalle dL ou dt. Il y a donc une *probabilité de passage*, différente de la probabilité dans le cas de l'indépendance totale que considère la loi de Poisson.

On retrouve ces mêmes notions en étudiant des phénomènes aussi différents que la minéralisation des surfaces terrestres, le défaut d'empaquetage des paquets de cigares (*Revue de Statistique Appliquée*, article de M. Cyffers). L'intervention d'un paramètre donnant la probabilité conditionnée ou de passage permettrait sans doute de mieux expliquer les phénomènes observés dans de nombreux cas, qu'avec la seule loi de Poisson, et notamment l'existence de chaînes, telles qu'il s'en produit dans la circulation routière.

M. Girault. — L'étude mathématique de la circulation routière est généralement faite dans deux cas extrêmes : dans le cas d'une faible densité de circulation où les véhicules ne se gênent pratiquement pas (et les processus de Poisson étudiés par M. Schuhl conviennent parfaitement); et au contraire dans le cas d'une complète saturation où il reste si peu d'aléas qu'une file continue (déterministe) représente parfaitement le phénomène. Il serait extrêmement intéressant d'étudier par des modèles mathématiques, les cas intermédiaires de circulation de véhicules se gênant mutuellement.

C'est bien la préoccupation de M. Ventura qui propose d'étudier les répartitions de véhicules derrière chaque type de véhicule et d'utiliser pour cela des processus de Poisson. Or, il ne semble pas qu'un schéma de Poisson puisse alors convenir; mais au contraire, le mélange de deux lois de probabilité : l'une se rapportant aux véhicules non gênés par le véhicule de tête (processus de Poisson) et l'autre loi touchant les voitures gênées et accumulées derrière le véhicule perturbateur.

De plus, cette méthode fournissant des lois de probabilité liées ne donnera pas sans difficulté le résultat cherché, à savoir les lois marginales : par exemple, la loi de l'ensemble de tous les intervalles séparant deux véhicules successifs (mesurés en temps ou en distance) car c'est seulement la loi marginale qui intéresse ici. Bien entendu, à partir de ces lois liées, on peut théoriquement, par une synthèse convenable (moyennes pondérées) trouver les lois marginales mais de nombreuses hypothèses difficiles à vérifier devront être formulées.

Il me semble qu'il serait plus commode d'essayer de transformer par un filtre la loi de probabilité du processus de Poisson (loi y_1) pour avoir la loi de la circulation gênée. Cette méthode aurait l'avantage de fournir une famille continue de modèles mathématiques permettant de décrire tous les cas depuis la circulation « libre » à la circulation bloquée.

M. Fréchet. — Votre conférence m'a beaucoup intéressé. Je signale qu'elle est en rapport avec le problème général de « l'attente » (attente à un guichet, au téléphone, attente de l'avion arrivant à un aérodrome, etc...). Ce problème a fait l'objet de nombreuses publications. Émile Borel lui avait consacré une Note aux C. R. de l'Académie des Sciences. Alors que la plupart des auteurs partent de l'hypothèse d'une loi de Poisson, M. Pollaczek a pu s'affranchir de cette hypothèse et obtenir des résultats importants (résumés aux C. R.).

On met souvent en parallèle les nombres d'automobiles par personne aux États-Unis et en France. La comparaison serait sans doute très différente s'il s'agissait du nombre d'automobiles par km^2, ce qui est plus important pour la comparaison des trafics. Évidemment la circulation est concentrée surtout dans les villes et leur banlieue aux États-Unis; mais il en est de même en France.

M. Baticle félicite vivement le conférencier dont la communication constitue une importante contribution à l'étude des problèmes que pose la circulation routière et met en évidence le rôle essentiel de la statistique mathématique dans cette question.

Il croit devoir rappeler que dans un article paru en 1942 dans les *Annales des Ponts et Chaussées* il avait essayé, au moyen de considérations de calcul des probabilités, d'évaluer le débit « pratiquement possible » d'une route en fonction du nombre des voies de circulation. Ce problème peut en effet se traiter sans faire intervenir la courbe de répartition du trafic, en partant de la probabilité d'occupation d'un « intervalle de sécurité » relativement petit par rapport à la longueur de route occupée pendant l'heure de pointe.

Lorsque, dans cet intervalle, $n - 1$ voies sont occupées, n étant le nombre des voies de circulation la route est en effet pratiquement « bouchée » pour les véhicules circulant dans un sens donné. On peut calculer la probabilité de cette éventualité et déduire leur nombre probable pendant l'heure de pointe. D'où l'on tire le débit « pratique » si on se fixe le nombre maximum de telles bouchures pendant l'heure de pointe.

Ce débit pratique et différent du débit maximum théorique qui a lieu sont animés d'une même vitesse et se suivent à une distance égale à la longueur de freinage. Le débit est alors proportionnel à une fraction dont le numérateur et la vitesse V et le dénominateur une expression de la forme $a + b\ V^2$ qui représente l'espacement correspondant à la vitesse V (a est l'espacement minimum à l'arrêt). Le maximum de cette fraction qui a lieu pour $V^2 = a/b$ donne la vitesse correspondant au débit maximum. Les valeurs pratiques de a et b donnent pour V une vitesse de l'ordre de 40 kilomètres à l'heure.