JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

LUCIEN AMY

Introduction à l'étude des séries cumulées

Journal de la société statistique de Paris, tome 96 (1955), p. 231-252

<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1955__96__231_0>

IV

INTRODUCTION A L'ÉTUDE DES SÉRIES CUMULÉES

Introduction

Le calcul des probabilités a joué, depuis un siècle, un rôle croissant dans le développement des sciences tant théoriques qu'appliquées, et l'on sait en particulier les brillants développements qu'il a permis dans les théories de la structure intime de la matière, ce que l'on appelle actuellement la microphysique, tandis que des chapitres entiers de la biologie ne sauraient plus se concevoir sans cette discipline. On n'en est que plus frappé de constater que le physicien, sur le plan expérimental, ne s'intéresse pratiquement pas au calcul des probabilités. Quelle que soit sa spécialité : optique, électricité, thermodynamique, électronique, dès qu'il abandonne les spéculations théoriques il cesse d'y trouver un instrument de travail. Je n'en veux que pour preuve l'absence à peu près complète de cette catégorie de savants au sein de notre société, et l'inertie que j'ai rencontrée dans ces milieux chaque fois que j'ai essayé d'y recruter de nouveaux membres.

Doit-on en déduire que l'aspect des phénomènes étudiés par les microphysiciens est réellement très différent de celui des autres sciences? Certains objets d'étude des physiciens semblent, cependant, présenter des caractères qui ont conduit les autres savants à utiliser les méthodes du calcul des probabilités. Considérons, par exemple, une émulsion photographique : après éclairement uniforme puis développement, examinons cet objet au microscope : on constate que le noircissement est dû à une multitude de petits grains noirs, de forme et de dimensions irrégulières et qui semblent distribués au hasard. L'étude de la granulation des émulsions photographiques devrait donc, semble-t-il, se faire par dénombrement des grains suivant leur type et leur répartition. En fait, le physicien n'effectue qu'exceptionnellement ce dénombrement direct; il étudie avec un microphotomètre les fluctuations de l'absorption lumineuse (qu'il appelle densité optique) le long d'un tracé de quelques centimètres, à l'intérieur de l'image photographique. Mieux encore, à l'aide d'un appareil enregistreur il fixe d'une manière continue la variation de densité optique le long de ce tracé. Et c'est sur la couche ainsi obtenue qu'il étudie la granulation. Cette courbe présente des sinuosités irrégulières et leur irrégularité traduit bien la répartition des grains au hasard. L'enregistrement microphotométrique paraît donc un intermédiaire commode et auquel il suffit d'appliquer les méthodes habituelles du calcul des probabilités.

Cependant, à y regarder de plus près, on constate que la courbe précédente est nettement différente d'un histogramme obtenu en tirant au hasard dans une urne des nombres dont les fréquences seraient réparties à peu près de la même manière que les ordonnées de la courbe précédente. Essayons de préciser cette différence. L'histogramme est formé d'une série de valeurs discontinues reliées entre elles, tandis que la courbe microphotométrique, malgré ses sinuosités, est continue. On peut exprimer approximativement cette différence en disant que c'est la dérivée qui semble varier à chaque instant et naturellement d'une manière irrégulière.

Cette allure spéciale de la courbe n'est d'ailleurs pas due à une répartition exceptionnelle de la granulation, mais au mode d'exploration utilisé. En effet le spot lumineux du microphotomètre couvre à chaque instant une surface qui renferme de nombreux grains d'argent et, lors de son déplacement, ne passe que progressivement à une plage voisine. Pour obtenir une courbe présentant les caractéristiques de l'histogramme, il faudrait enregistrer une suite de plages n'ayant aucun point commun, puis relier ces points par une série de droites.

Des courbes de ce type sont fréquentes en physique; on les retrouve chaque fois que l'analyse du phénomène étudié est assez approfondie pour faire apparaître des fluctuations dues à des structures fines : étude des variations de tension des réseaux de distribution électrique, des variations de la vitesse du vent ou de la pression barométrique, du débit des cours d'eau, etc... Il y a d'ailleurs lieu de remarquer que la continuité des valeurs n'est plus, dans ce cas, un artifice de mesure, mais est propre au phénomène étudié; les causes premières de ces irrégularités n'en restent pas moins discontinues : brusque demande de courant d'un abonné dans le cas du réseau, chute de pluie dans le cas des rivières, etc...

Pour étudier de telles courbes, deux possibilités peuvent s'offrir : prélever des valeurs discontinues et indépendantes et appliquer les méthodes usuelles de la statistique, ou utiliser une méthode d'analyse spécialement adaptée à ces fonctions, ce qui permet d'exploiter intégralement les informations contenues dans ces courbes. Nous avons été ainsi amenés à reprendre l'étude de séries relativement peu connues et que nous désignerons par l'expression de séries cumulées. Nous nous proposons dans l'exposé qui suit d'exposer les propriétés essentielles de ces séries.

Définition. — Soit une série G $(x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots)$, nous appellerons série cumulée C issue de G, une deuxième série dont chaque terme y_i est une fraction linéaire des termes $x_i, x_{i+1} \ldots . x_{i+l-1}$.

$$y_i = \alpha_1 x_i + \alpha_2 x_{i+1} + \ldots\ldots + \alpha_l x_{i+l-1} \qquad (1)$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_l$ étant des coefficients constants indépendants de i.

Nous dirons réciproquement que G est une série génératrice de C.

Faisons subir à une série cumulée une seconde cumulation; nous obtenons une nouvelle série C′ et l'on voit immédiatement que C′ peut dériver d'une génératrice G et C par une cumulation directe car on a évidemment entre les termes de G de C′ une relation linéaire du type (1).

La plus simple des séries cumulées que nous appellerons élémentaire est celle dans laquelle les coefficients $\alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_l$ sont tous égaux à l'unité. Le nombre l de terme est alors la largeur de la cumulation.

Faisons subir à une même série deux cumulations élémentaires de même largeur l. La nouvelle série prend la forme :

$$y_i = x_{i-l+1} + 2x_{i-l+2} + \ldots + (l-1)x_{i-1} + lx_i + (l-1)x_{i+1} + \ldots + x_{i+l-1} \quad (2)$$

et nous proposons le nom de série cumulée triangulaire pour une telle transformation.

Moyennes dans le cas général

Posons :

$$a = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots + \alpha_l \quad (3)$$

la somme des coefficients de l'équation (1). Si $l < j < n - l$, $\Sigma\, y_i$ renferme tous les termes $\alpha_1, x_j, \alpha_2\, x_j \ldots\ldots \alpha_l\, x_j$; il en résulte que si n est grand devant l on peut écrire :

$$\Sigma\, y_i \# a\, \Sigma\, x_i \quad (4)$$

et par conséquent

$$\frac{\Sigma\, y_i}{n} \# a \frac{\Sigma\, x_i}{n} \quad (5)$$

Étude de quelques propriétés des séries cumulées engendrées par des séries génératrices strictement aléatoires

Nous dirons qu'une série est strictement aléatoire si :

1° Les moyennes ξ et les variances σ d'un groupe quelconque de termes tendent vers les mêmes limites lorsque le nombre du terme de ce groupe augmente indéfiniment.

2° Il n'existe aucune corrélation entre les termes d'un même groupe.

Moyenne : L'équation (5) montre que l'on a :

$$\overline{y_i} = a\, \overline{x_i} \quad (6)$$

$$\eta = a\, \xi$$

Variance. On a :

$$(y_i - \eta)^2 = [\alpha_1 (x_i - \xi) + \alpha_2 (x_{i+1} - \xi) + \ldots + \alpha_l (x_{i+l-1} - \xi)]^2$$

Or, les termes de la forme $(x_i - \xi)^2$ ont pour moyenne σ et ceux de la forme $(x_i - \xi)(x_j - \xi)$ ont une moyenne nulle; d'où :

$$\overline{(y_i - \eta)^2} = \alpha_1^2\, \sigma + \alpha_2^2\, \sigma + \ldots\ldots + \alpha_l^2\, \sigma$$

$$\Theta = \sigma \sum_{j=1}^{l} \alpha_j^2 \quad (7)$$

Corrélation. Considérons le produit de deux termes y_i et y_{i+k}. Si $k > l$, y_i et y_{i+k} ne renferment en commun aucun terme de la série génératrice, on a donc :

$$\overline{(y_i - \eta)(y + k - \eta)} = 0$$

Si $k < l$ on peut écrire

$$(y_i - \eta)(y_{i+k} - \eta) = [\alpha_1 (x_i - \xi) + \alpha_2 (x_{i+1} - \xi) + \ldots + \alpha_l (x_{i+l-1} - \xi)]$$
$$[\alpha_1 (x_{i+k} - \xi) + \alpha_2 (x_{i+k+1} - \xi) + \ldots + \alpha_l (x_{i+k+l-1} - \xi)]$$

et par conséquent :

$$\overline{(y_i - \eta)(y_{i+k} - \eta)} = \alpha_{k+1}\alpha_1 \sigma + \alpha_{k+2}\alpha_2 \sigma + \ldots + \alpha\,\alpha_{l-k}\sigma$$
$$= (\alpha_1 \alpha_{k+1} + \alpha_2 \alpha_{k+2} + \ldots + \alpha_{l-k}\alpha_l)\,\sigma$$

le coefficient de corrélation est donc

$$\gamma = \frac{\sum\limits_{j=1}^{l} \alpha\,\alpha_{k+j}}{\sum\limits_{j=1}^{l} \alpha_j^2} \tag{8}$$

Nous supposons dans ce qui suit que la cumulation est toujours élémentaire. On a alors :

$$\sum_{j=1}^{l} \alpha_j = l$$

$$\sum_{j=1}^{l} \alpha_j^2 = l$$

$$\sum_{j=1}^{l-k} (\alpha_j - \alpha_{k+j}) = l$$

et les équations (6), (7) et (8) deviennent

$$\eta = l\,\xi \tag{9}$$

$$\Theta = l\,\sigma \tag{10}$$

$$\gamma = \frac{l-k}{l} \tag{11}$$

Variance de la moyenne. — Adoptons pour moyenne l'expression $\frac{\Sigma\, y_i}{n}$; l'écart entre la moyenne et son estimation sera $\frac{\Sigma\, y_i}{n} - \eta$ et la variance de la moyenne :

$$\sigma_m = \overline{\left(\frac{\Sigma\, y}{n} - \eta\right)^2} = \frac{\overline{\Sigma^2 (y - \eta)}}{n^2}$$

On a

$$\Sigma^2 (y - \eta) = \Sigma\,(y_i - \eta)^2 + 2\,\Sigma\,(y_i - \eta)(y_{i+k} - \eta)$$

or, d'après l'équation (10)

$$\overline{\Sigma^2 (y_i - \eta)^2} = n\,\Theta = n\,l\,\sigma$$

d'autre part $\overline{(y_i - \eta)\,(y_{i+k} - \eta)}$ est nul si $k > l$ et égal à $(l - k)\,\sigma$ si $k < l$ (équation 11). Or, pour toutes valeurs de k il y a $n - k$ produits de ce type. On a donc :

$$\overline{\Sigma\,(y_i - \eta)\,(y_{i+k} - \eta)} = \sum_{k=1}^{l-1} (n-k)\,(l-k)\,\sigma = \left\{ \sum_{k=1}^{l-1} [n\,l - (n+l)\,k + k^2] \right\} \sigma =$$

$$\left[n\,l(l-1) - \frac{(n+l)\,l(l+1)}{2} + \frac{(l-1)\,l(2l-1)}{6} \right] \sigma = \left[\frac{l(l-1)\,n}{2} - \frac{l(l-1)\,(l+1)}{6} \right] \sigma$$

d'où

$$\overline{\Sigma^2\,(y_i - \eta)} = \left[l^2 n - \frac{l\,(l^2-1)}{3} \right] \sigma \tag{12}$$

et

$$\sigma_m = \frac{l\,\Theta}{n} - \frac{(l^2-1)\,\Theta}{3\,n^2} \tag{13}$$

Remarque. — Supposons que $n - 1$ soit multiple de l. Considérons la somme

$$y_1 + y_{l+1} + y_{2l+1} + \ldots + y_n \tag{14}$$

elle comprend tous les termes de la série génératrice

$$x_1,\, x_2,\, x_3,\, \ldots\ldots\, x_{n+l-1}$$

Or, la variance de cette somme est naturellement $(n + l - 1)\,\sigma$.

Prenons alors comme moyenne pour y_i l'expression :

$$y_i = \frac{\sum_{j=0}^{\frac{n-1}{l}} y_{jl+1}}{\frac{n+l-1}{l}} \tag{15}$$

la variance de cette moyenne sera :

$$\sigma'_m = \frac{l^2}{(n+l-1)^2}\,(n+l-1)\,\sigma$$

$$\sigma'_m = \frac{l\,\Theta}{n+l-1} \tag{16}$$

et il est facile de voir que cette expression est un peu plus petite que σ_m. On peut donc obtenir dans ce cas particulier une évaluation un peu meilleure de la moyenne. On remarquera que dans le cas général, la variance de la moyenne des termes de la série cumulée est un peu plus petite que celle d'une série aléatoire de mêmes caractéristiques, mais qui comprendrait l fois moins de termes.

1re estimation de la variance. — Elle consiste à utiliser l'expression :

$$\Sigma \left(y_i - \frac{\Sigma\, y_i}{n} \right)^2$$

Calculons la valeur moyenne de cette expression. On a :

$$\Sigma \left(y_i - \frac{\Sigma\, y_i}{n} \right)^2 = \Sigma \left[y_i - \eta - \frac{\Sigma\,(y_i - \eta)}{n} \right]^2 = \Sigma\,(y_i - \eta)^2 - \frac{1}{n}\,\Sigma^2\,(y_i - \eta)$$

et en tenant compte de la relation (12)

$$\Sigma \left(y_i - \frac{\Sigma y_i}{n} \right)^2 = n\,\Theta - l\,\Theta + \frac{l^2 - 1}{3\,n}\,\Theta$$

Nous prendrons donc pour estimation de la variance l'expression :

$$\Theta'_1 = \frac{\Sigma \left(y_i - \frac{\Sigma y_i}{n} \right)^2}{n - l + \frac{l^2 - 1}{3\,n}} \qquad (17)$$

Variance de cette estimation. — Des calculs compliqués, mais sans difficultés particulières donnent :

$$\sigma_\Theta' = \frac{\frac{4\,l^2 + 2}{l}\,n - 11\,l^2 + 5 + \frac{2\,(l^2 - 1)\,(17\,l^2 + 2)}{5\,l\,n} - \frac{2\,(l^2 - 1)^2}{n^2}}{3\,\left(n - l + \frac{l^2 - 1}{3\,n}\right)^2}\,\Theta^2 \qquad (18)$$

En négligeant les termes en $\frac{1}{n}$ et en $\frac{1}{n^2}$ on peut écrire :

$$\sigma_\Theta' \# \left[\frac{4l^2 + 2}{3\,l\,(n - l)} - \frac{7}{3}\,\frac{l^2 - 1}{(n - l)^2}\right]\Theta^2 \qquad (19)$$

2e estimation de la variance. — Considérons la différence

$$y_i - y_{i+1} = (x_i + x_{i+1} + \ldots + x_{i+l-1}) - (x_{i+1} + x_{i+2} + \ldots + x_{i+l})$$

$$(y_i - y_{i+1} = x_i - x_{i+l} \qquad (20)$$

On a donc :

$$\overline{(y_i - y_{i+1})^2} = \overline{[(x_i - \xi) - (x_{i+l} - \xi)]^2} = \overline{(x_i - \xi)^2} + \overline{(x_{i+l} - \xi)^2}$$

$$\overline{(y_i - y_{i+1})^2} = 2\,\sigma \qquad (21)$$

Or nous pouvons former $n - 1$ différences semblables, d'où :

$$\Sigma\,(y_i - y_{i+1})^2 = 2\,(n - 1)\,\sigma$$

Nous pouvons donc prendre comme évaluation de σ l'expression :

$$\frac{\Sigma\,(y_i - y_{i+1})^2}{2\,(n - 1)}$$

et pour celle de Θ

$$\Theta'' = \frac{l.\Sigma\,(y_i - y_{i+1})^2}{2\,(n - 1)} \qquad (22)$$

Variance de la 2e estimation. — Les calculs relativement simples donnent :

$$\sigma_\Theta'' = \left[\frac{3}{n - 1} - \frac{l}{(n - 1)^2}\right]\Theta^2 \qquad (23)$$

Remarque. — Si nous supposons n très grand en valeur absolue, on a les valeurs asymptotiques suivantes :

$$\sigma_\Theta' \rightarrow \frac{4\,l^2 + 2}{3\,l\,n}\,\Theta^2$$

$$\sigma_\Theta'' \rightarrow \frac{3\,\Theta^2}{n}$$

que l'on rapprochera d'une série aléatoire ordinaire

$$\sigma_\Theta = \frac{2\Theta^2}{n}$$

et enfin de la série (14) qui renferme l fois moins de termes, mais dont ces termes sont indépendants, d'où :

$$\sigma_{\Theta_1} = \frac{2l\,\Theta^2}{n}$$

Relations entre les séries cumulées et leurs séries génératrices

Étant donné une série cumulée, que peut-on dire de la série génératrice dont elle provient, en dehors des relations étudiées dans la première partie de cette étude. On conçoit que pour le physicien qui désire étudier les propriétés de ses courbes, ce soit-là un problème essentiel.

Nous allons tout d'abord étudier quelques propriétés des séries cumulées à partir de génératrices singulières. Nous supposerons toujours que la cumulation est élémentaire et de largeur l.

Si une génératrice est périodique et de période λ, la cumulée admet au moins cette période. En effet on a :

$$x_1 = x_{\lambda+1} = x_{2\lambda+1} = \ldots$$

$$x_2 = x_{\lambda+2} = x_{2\lambda+2} = \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

D'où

$$\begin{aligned} y_{\lambda+1} &= x_{\lambda+1} + x_{\lambda+2} + \ldots + x_{\lambda+l} \\ &= x_1 + x_2 + \ldots + x_l \end{aligned}$$

$$y_{\lambda+1} = y_1$$

de même

$$y_{\lambda+2} = y_2$$

$$y_{\lambda+3} = y_3$$

La cumulée peut d'ailleurs avoir une période plus petite que la génératrice et naturellement sous-multiple de λ.

Considérons par exemple la série de période :

8, 2, 2, 13, 0, 0, 12, 5, -2, 10, 4, 3

($\lambda = 12$). La cumulée de largeur 3 est

$$12, 17, 15, 13/12, 17, 15, 13/12, 17\dots$$

elle a une période trois fois plus petite.

D'autre part, une série cumulée périodique peut provenir d'une génératrice non périodique. C'est ainsi que la série :

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \dots\dots$$

manifestement non périodique, admet pour cumulée de largeur 2, la série périodique :

$$1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots\dots$$

On peut résumer ces propriétés dans le théorème suivant :

Théorème. — Étant donné une série cumulée périodique de période λ, les séries génératrices dont elle peut provenir ne sont pas périodiques ou ont une périodicité au moins égale à λ.

Nous dirons qu'une série est identiquement nulle, si tous ses termes sont égaux à 0; nous dirons qu'une série a une cumulation nulle par rapport à la largeur l, si la série cumulée de largeur l qu'elle engendre est une série nulle.

Théorème. — Une série à cumulation nulle est périodique et de période égale à la largeur l.

En effet si $y_i = y_{i+1} = 0$ l'équation (20) donne :

$$x_{i+l} = x_l$$

Théorème. — Une série quelconque possède une infinité de génératrices par rapport à une même largeur donnée l.

Soit, en effet, une série quelconque C

$$C = y_1, y_2, \dots\dots y_i, \dots\dots$$

Donnons-nous arbitrairement un nombre positif entier l, puis $l - 1$ nombres $x_1, x_2, x_3, \dots x_{l-1}$. Posons ensuite successivement :

$$x_l = y_1 - (x_1 + x_2 + \dots\dots + x_{l-1})$$
$$x_{l+1} = y_2 - (x_2 + x_3 + \dots\dots + x_l)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

La série G des termes en x ainsi définie est manifestement une génératrice de C.

Théorème. — Si l'on forme les différences terme à terme de deux génératrices G et G′ d'une même cumulée C, on obtient une série N à cumulation nulle et par conséquent de période l.

Soient en effet $x_1, x_2, x_3, \dots\dots; x'_1, x'_2, x'_3, \dots\dots$ les termes des deux génératrices. On a :

$$y_1 = x_1 + x_2 \dots + x_l = x'_1 + x'_2 + \dots + x'_l$$

et par conséquent

$$(x_1 - x'_1) + (x_2 - x'_2) + \dots + (x_l - x'_l) = 0$$
$$(x_2 - x'_2) + (x_3 - x'_3) + \dots + (x_{l+1} - x'_{l+1}) = 0$$

La série

$$N = (x_1 - x'_1), (x_2 - x'_2), \ldots$$

est à cumulation nulle.

Génératrices des séries cumulées périodiques. — Soit une série cumulée périodique C, de largeur l et de période λ. Appelons m le plus petit multiple commun de l et de λ et posons

$$m = k\,l$$

Considérons la série cumulée du 2e ordre :

$$C' = z_i = y_i + y_{l+i} + y_{2l+i} + \ldots + y_{(k-1)l+i} \tag{24}$$

On a successivement

$$\begin{aligned} x_{l+1} - x_1 &= y_2 - y_1 \\ x_{2l+1} - x_{l+1} &= y_{l+2} - y_{l+1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{kl+1} - x_{(k-1)l+1} &= y_{(k-1)l+2} - y_{(k-1)l+1} \end{aligned} \tag{25}$$

Additionnons membre à membre; il vient

$$x_{kl+1} - x_1 = z_2 - z_1$$

on aurait de même

$$x_{kl+2} - x_2 = z_3 - z_2$$

$$x_{2kl+1} - x_1 = z_{kl+2} - z_{k\,+1} = z_2 - z_1$$

car kl est multiple de λ.

1° Si

$$z_1 = z_2 = z_3 = \ldots\ldots \tag{26}$$

on a

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{kl+1} = x_{2kl+1} = \ldots\ldots \\ x_2 &= x_{kl+2} = x_{2kl+2} = \ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

toutes les génératrices sont périodiques et de période au plus égale à kl.

2° Si l'un des termes en z n'est pas égal à l'autre, aucune des génératrices n'est périodique. Supposons en effet que :

$$z_1 \neq z_2$$

et posons

$$z_2 - z_1 = \delta$$

C′ étant périodique

$$z_{kl+2} - z_{kl+1} = \delta$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} x_{kl+1} &= x_1 + \delta \\ x_{2kl+1} &= x_{kl+1} + \delta = x_1 + 2\,\delta \\ x_{3kl+1} &= x_1 + 3\,\delta \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

La série des nombres x_1, x_{kl+1}, x_{2kl+1} ... s'accroît indéfiniment, elle ne peut appartenir à une série périodique.

En résumé :

Théorème. — Les génératrices d'une cumulée périodique de largeur l et de période λ, sont toutes périodiques et ont une période au plus égale à m plus petit multiple commun de l et de λ ou aucune d'elles n'est périodique.

Remarque. — Si l est égal ou multiple de λ, $k = 1$ la relation (24) identifie z_i et y_i et la relation (26) devient

$$y_1 = y_2 = y_3 = \ldots\ldots$$

d'où le théorème.

Une série cumulée dont la largeur est égale ou un multiple de la période n'admet aucune génératrice périodique sauf si elle est monotone; dans ce cas, les génératrices sont toutes périodiques.

3° Les équations (25) peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} x_{l+i} &= x_i + y_{i+1} - y_i = x_i + \delta_i \\ x_{2l+i} &= x_{l+i} + y_{l+i+1} - y_{l+i} = x_i + y_{l+i+1} - y_{l+i} + y_{i+1} - y_i = x_i + \delta_{i+1} \\ x_{3l+i} &= x_i + y_{2l+i+1} - y_{2l+i} + y_{l+i+1} - y_{l+i} + y_{i+1} - y_i = x_i + \delta_{i+2} \qquad (27) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Supposons alors l et λ premiers entre-eux. Soit q le plus grand multiple de l contenu dans $p\,\lambda + 1$. Posons :

$$\varphi = p\,\lambda + 1 - q\,l$$
$$p\,\lambda + 1 = q\,l + \varphi \qquad (28)$$

l et λ étant premiers entre-eux, lorsque q prend toutes les valeurs de 1 à λ, φ prend aussi ces valeurs, mais dans un ordre différent. Cherchons alors à calculer une génératrice de période λ; on devra avoir :

$$x_1 = x_{\lambda+1} = x_{2\lambda+1} = \ldots\ldots = x_{p\lambda+1} \qquad (29)$$

Les relations (27) (28) et (29) donnent successivement :

$$x_1 = x_{p\lambda+1} = x_{\varphi+ql} = x_\varphi + \delta_{\varphi+q}$$
$$x_\varphi = x_1 - \delta_{\varphi+q} \qquad (30)$$

ou en reclassant les valeurs de φ dans leur ordre naturel :

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1 \\ x_2 &= x_1 + \delta'_2 \qquad (31) \\ x_3 &= x_1 + \delta'_3 \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Additionnons membre à membre

$$y_1 = \lambda\,x_1 + \delta'_2 + \delta'_3 + \ldots\ldots$$

équation qui montre qu'il est toujours possible de calculer x_1. Les équations (30) ou (31) permettent ensuite d'obtenir x_2, x_3, ... d'une manière univoque.

Si l et λ sont premiers entre-eux, il y a donc toujours une génératrice périodique et une seule. Toutes les autres génératrices sont périodiques et ont naturellement pour période $l\,\lambda$.

4° Si l et λ ne sont pas premiers entre-eux, soit μ leur plus grand commun diviseur. Cherchons encore à calculer une génératrice de période λ en supposant qu'il en existe c'est-à-dire que la relation (25) soit respectée.

La quantité φ définie par la relation (28) ne prend plus toutes les valeurs 1, 2, 3 ..... mais seulement 1, $\mu + 1$, $2\,\mu + 1$, .. Les quantités x_1, x_2, x_3, ... $x_{\mu-1}$ sont donc indépendantes et nous écrirons les équations 31 sous la forme :

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_1 \\
x_{\mu+1} &= x_1 + \delta'_1 \\
x_{2\mu+1} &= x_1 + \delta'_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_2 &= x_2 \\
x_{\mu+2} &= x_2 + \delta''_1 \\
x_{2\mu+2} &= x_2 + \delta''_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_3 &= x_3 \\
x_{\mu+3} &= x_3 + \delta'''_1 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{32}$$

additionnons encore membre à membre

$$y_1 = \frac{\lambda}{\mu}(x_1 + x_2 + \ldots + x_\mu) + \Sigma\,(\delta'_1 + \delta''_1 + \ldots) \tag{33}$$

ce qui permet de connaître la somme

$$u_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_\mu \tag{34}$$

Donnons-nous arbitrairement x_1, x_2, ... x_μ avec la seule condition de respecter la relation (34); les équations (32) permettent de calculer $x_{\mu+1}$ $x_{\mu+2}$ ... $x_{2\mu+1}$, ...

D'ailleurs si nous posons successivement :

$$\begin{aligned}
u_2 &= x_2 + x_3 + \ldots + x_\mu + x_{\mu+1} \\
u_3 &= x_3 + x_4 + \ldots + x_{\mu+2} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

les équations (32) donnent :

$$\begin{aligned}
u_2 &= u_1 + \delta'_1 \\
u_3 &= u_2 + \delta''_1 \\
&\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

La série de terme générale u_i est ainsi définie de manière univoque.

Ainsi s'il y a des génératrices périodiques, certaines d'entre elles ont pour période λ et dans ce cas elles ont toutes pour cumulées de largeur μ la série u_i. Réciproquement, toute génératrice périodique de u_i sera génératrice de la série de terme général y_i. La série de terme général u_i sera désignée sous le nom de cumulée réduite de la cumulée primitive.

En résumé, lorsqu'une série cumulée de largeur l est périodique et de période λ.

1° Si l et λ sont premiers entre eux, il existe une cumulée périodique de période λ et une seule. Les autres génératrices sont également périodiques mais de période $l\,\lambda$.

2° Si l et λ ne sont pas premiers entre eux, soit μ leur plus grand commun diviseur. Deux cas peuvent se présenter :

a) aucune des génératrices n'est périodique,

b) toutes les génératrices sont périodiques; il en existe alors de période λ et ces génératrices ont toutes une même série cumulée de largeur μ appelée cumulée réduite. Les autres génératrices ont pour période le plus petit multiple commun de l et de λ.

3° Enfin, si l est égal ou multiple de k, aucune des génératrices n'est périodique, sauf si la cumulée est monotone.

Génératrices aléatoires. — Il résulte des propriétés exposées dans la première partie de cette étude, que la cumulée d'une série aléatoire n'est pas elle-même une série aléatoire. Les moyennes d'un groupe quelconque de termes tendent bien vers la même limite que l'ensemble de tous les termes, mais il existe une corrélation entre les termes de rang inférieur à la largeur l et dont la valeur est fixée par la relation (11).

Considérons alors une série répondant à ces deux conditions. Que peut-on dire de ses cumulées.

Nous admettrons, sans le démontrer, qu'il existe alors une génératrice strictement aléatoire. Soit x_i le terme général de cette première série. Supposons qu'il en existe une deuxième et soit x_i' son terme général. On sait que la série de terme général $x_i' - x_i$ a une cumulée de largeur l nulle. Elle est donc périodique et de période l. On aurait donc

$$x'_{pl+\varepsilon} - x_{pl+\varepsilon} = x'_\varepsilon - x_\varepsilon \qquad \varepsilon \leqslant l \tag{35}$$

Cherchons alors s'il existe une corrélation entre les termes dont le rang diffère de l. Remarquons tout d'abord qu'en vertu de la relation (9) les deux séries x_i et x_i' ont même moyenne que nous représentons par ξ. Si la série de terme x_i' est aléatoire, le produit

$$P_i = (x'_{i+l} - \xi)\,(x'_i - \xi)$$
$$i = p\,l + \varepsilon$$

doit avoir une moyenne nulle. Or l'équation (35) donne

$$P_i = (x_{i+l} - \xi + \lambda_\varepsilon)\,(x_i - \xi + \lambda_\varepsilon)$$

Mais par hypothèse la corrélation entre les termes x_{i+l} et x_i est nulle. Le produit $(x_{i+l} - \xi)\,(x_i - \xi)$ a donc une moyenne nulle et l'on a

$$\overline{P_i} = \lambda_\varepsilon\,\overline{(x_i - \xi)} + \lambda_\varepsilon\,\overline{(x_{i+\lambda} - \xi)} + \lambda_\varepsilon^2$$
$$P_i = \lambda_\varepsilon^2$$

$\overline{P}_i$ ne peut être nul que si λ_i est nul quel que soit ε et par conséquent la série de terme général x'_i identique à celle du terme général x_i. Autrement dit il ne peut exister qu'une seule génératrice strictement aléatoire.

Calculons maintenant les termes de cette série.

Posons :

$$z_1 = k\,y_1 + (k-1)\,y_{l+1} + (k-2)\,y_{2l+1} + \dots + y_{kl+1}$$
$$z_2 = k\,y_2 + (k-1)\,y_{l+2} + (k-2)\,y_{2l+2} + \dots + y_{kl+2}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

la relation (20) nous permet d'écrire successivement

$$x_1 = x_1$$
$$x_{l+1} = x_1 + y_2 - y_1$$
$$x_{2l+1} = x_1 + y_2 - y_1 + y_{l+2} - y_{l+1}$$
$$x_{3l+1} = x_1 + y_2 - y_1 + y_{l+2} - y_{l+1} + y_{2l+2} - y_{2l+1}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Additionnons membre à membre, il vient

$$x_1 + x_{l+1} + x_{2l+1} + \dots + x_{kl+1} = (k+1)\,x_1 + z_2 - z_1$$

Or si k est grand, le premier membre tend par hypothèse vers $(k+1)\,\xi$ d'où

$$x_1 = \frac{1}{k+1}\,(z_2 - z_1) + \xi$$

et successivement :

$$x_2 = \frac{1}{k+1}\,(z_3 - z_2) + \xi$$

$$x_3 = \frac{1}{k+1}\,(z_4 - z_3) + \xi \qquad (36)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

On prendra naturellement pour ξ la moyenne générale calculée par la formule (5).

Génératrices dont tous les termes sont compris entre deux extrêmes

Dans certains cas, la valeur des termes d'une série, de par leur origine, est nécessairement comprise entre deux extrêma. Il est fréquent par exemple que la grandeur physique attachée aux termes d'une série ne puisse être négative. Dans ce cas il y a un minimum de valeur O.

Considérons les équations (27) et écrivons successivement que les quantités $x_1, x_{l+1}, x_{2l+1}, \dots$ sont toutes comprises entre les deux extrêma, nous obtenons une série d'inégalités pour x_1 qui inserrent ce terme entre des limites de plus en plus resserrées au fur et à mesure que le nombre de termes augmente.

Recommençons la même opération avec les séries $x_2, x_{l+2}, x_{2l+2}, \dots$; $x_3, x_{l+3}, x_{2l+3}, \dots\dots$

Considérons ensuite la relation

$$y_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_l$$

et donnons à x_2, x_3, ... x_l les valeurs limites obtenues par les relations précédentes. Nous obtenons deux nouvelles inégalités pour x_1. Finalement si la série cumulée comprend un nombre suffisant de termes, on peut retrouver intégralement la série génératrice, solution unique répondant à l'ensemble des inégalités.

Considérons par exemple une série de nombres de deux chiffres obtenue en relevant les valeurs d'un annuaire de téléphone et formons la cumulée élémentaire de largeur 5.

174 — 258 — 252 — 305 — 314 — 311 — 256 — 245 — 177 — 209 — 239 — 285 — 229 — 215 — ....

L'étude des 50 premiers termes de la série cumulée, puis des 100, 200, 400, permet d'obtenir les limites successives pour x_1, x_2, x_3, x_4 et x_5 portées dans le tableau 1.

Tableau I. — *Nombres de termes de la série cumulée*

	50	100	200	400
x_1	0-15	7-10	7-10	9-10
x_2	73-84	75-81	78-81	79-81
x_3	25-38	20-29	27-28	27-28
x_4	16-27	16-27	16-17	17
x_5	40-57	40-52	40-44	40-42

finalement au 771e terme de la série cumulée, la série génératrice est entièrement connue et devient :

10 — 79 — 28 — 17 — 40 — 94 — 73 — 81 — 26 — 37 — 39 — 62 — 13 — 58 — 67 — 85 —

Génératrice commune à plusieurs cumulées

Supposons que les largeurs l' et l'' des cumulées soient premières entre elles et soient $l'' < l'$. Soit k le plus grand multiple de l'' inférieur à l'.

Posons :

$$y_i''' = y_i - y_i'' - y_{l+i}'' - y_{2l+i}'' - \dots y_{kl+i}''$$

on voit facilement que

$$y_i'' = x_{kl+i+1} + x_{kl+i+2} + \dots + x_{l''+2}$$

La série y''' est une nouvelle cumulée de la génératrice commune et elle a une largeur inférieure à 1″. Du reste, l''' et l'' sont premiers entre eux. On peut donc recommencer le processus jusqu'à obtenir la génératrice commune qui est donc unique.

D'une manière plus générale on voit facilement que si l'on considère plusieurs cumulées de largeur l', l'', l''' ... leurs génératrices communes ont toutes une même cumulée de largeur λ étant le plus grand commun diviseur de l', l'', l'''...

En résumé, on voit que dans certains cas il est possible de retrouver soit une génératrice unique, soit une génératrice à propriété particulière, ou tout au moins une cumulée réduite. Dans ces deux derniers cas on pourra admettre comme très probable que ces solutions sont les génératrices cherchées.

On remarquera que dans les cas, 1, 2 et 4 examinés, la génératrice ou la réduite ainsi choisie est obtenue par une cumulation de 2e ordre. Cette manière d'obtenir les génératrices est particulièrement suggestive pour le physicien. Elle doit conduire en effet à une méthode qui appliquant à une courbe continue déjà déformée, une 2e déformation convenable du même type, permet de retrouver approximativement la fonction initiale.

Matrices

Les considérations précédentes s'étendent sans difficulté spéciale aux séries à deux dimensions. Soit donc une matrice G de terme général $x_{i,j}$; nous appellerons matrice cumulée issue de G une deuxième matrice C dont chaque terme $y_{i,j}$ est une fonction linéaire des termes de la première.

$$\begin{aligned} y_{i,j} = {} & \alpha_{1,1}\, x_{i,j} + \alpha_{1,2}\, x_{i,j+1} + \alpha_{1,3}\, x_{i,j+2} + \dots \\ & + \alpha_{2,1}\, x_{i+1,j} + \alpha_{\cdot,2}\, x_{i+1,+j+1} + \dots \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + \alpha_{k,l}\, x_{i+k-1,j+l-1} \end{aligned} \tag{37}$$

Les termes en α étant indépendants de i et j.

Nous dirons également que G est une matrice génératrice de C.

La cumulation la plus simple est celle dans laquelle tous les termes α sont égaux à 1. Les coefficients k et l peuvent d'ailleurs être ou non indépendants. Dans ce dernier cas, nous dirons que la cumulation est élémentaire et a la double largeur k, l.

Comme pour les séries on pourrait étudier les moyennes, variances, corrélations des différents termes des matrices cumulées.

Recherche des matrices génératrices. — Nous supposerons exclusivement que la cumulation est élémentaire et que les largeurs sont k et l.

Si la matrice génératrice renferme $m\, n$ termes, la matrice cumulée comporte m colonnes et n lignes, la cumulée ne comporte plus que $m - k + 1$ colonnes et $n - 1 + 1$ lignes. On peut donc écrire $(m - k + 1)\,(n - l + 1)$ équations linéaires pour les $m\, n$ termes inconnus de la matrice génératrice. On peut donc choisir arbitrairement

$$\begin{gathered} m\, n - (m - k + 1)\,(n - l + 1) = \\ (k - 1)\, n + (l - 1)\, m - (l - 1)\,(k - 1) \end{gathered} \tag{38}$$

de ces termes. Il est facile de voir que si l'on a ainsi choisi par exemple ceux de $(k - 1)$ colonnes consécutives et $(l - 1)$ lignes, on obtient facilement tous les autres termes. Supposons par exemple que ce soient les $(k - 1)$ premières colonnes, et $(l-1)$ premières lignes. On connaît ainsi tous les termes de la matrice $x_{i,j}$ où $0 \leqslant i \leqslant k$, $0 \leqslant j \leqslant l$ sauf $x_{k,l}$ mais la somme des termes de cette matrice étant $y_{1,1}$ est connue, ce qui donne $x_{k,l}$; on connaît alors tous les termes de la matrice $x_{i,j}$ où $1 \leqslant i \leqslant k+1$, $0 \leqslant j \leqslant l$ sauf $x_{k+1,l}$ mais la somme des termes de cette matrice étant $y_{1,2}$ on peut calculer ce dernier terme. On obtient ainsi de proche en proche tous les termes de la 1[re] ligne, puis ceux des autres lignes.

Considérons la matrice partielle

$$\mathrm{H}_{i,j} = \left| \begin{matrix} x_{i,j} & x_{k+i,j} & x_{2k+i,j} \cdots\cdots \\ x_{i,l+j} & x_{k+i,l+j} & x_{2k+i,l+j} \cdots \\ x_{i,2l+j} & x_{k+1,2l+j} \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{matrix} \right. \tag{39}$$

tiré d'une génératrice $\mathrm{G}_{i,j}$.

On voit que cette dernière matrice peut se décomposer en kl matrices du type $\mathrm{H}_{i,j}$ et que l'on a :

$$\mathrm{G}_{i,j} = \mathrm{H}_{1,1} + \mathrm{H}_{2,1} + \mathrm{H}_{3,1} + \ldots + \mathrm{H}_{k,1} + \mathrm{H}_{1,2} + \ldots + \mathrm{H}_{k,2} + \ldots \mathrm{H}_{k,l} \tag{40}$$

D'autre part, posons

$$\delta_{i,j} = x_{i,j} + x_{k+i,l+j} - x_{k+i,j} - x_{k,l+j} \tag{41}$$

on voit facilement que l'on a :

$$\delta_{i,j} = y_{i,j} + y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j} - y_{i,j+1} \tag{42}$$

Par conséquent nous pouvons calculer tous les termes de la matrice

$$\mathrm{D}_{i,j} = \left| \begin{matrix} \delta_{i,j} & \delta_{k+i,j} & \delta_{2k+i,j} \cdots\cdots \\ \delta_{i,l+j} & \delta_{k+i,l+j} & \delta_{2k+i,l+j} \cdots\cdots \\ \delta_{i,2l+j} & \delta_{k\,2i,2l+j} \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{matrix} \right. \tag{43}$$

et cette matrice ne dépend que des termes de la matrice $\mathrm{H}_{i,j}$. D'une manière plus précise, c'est la cumulée de largeurs 2,2 de la matrice

$${}_1\mathrm{H}_{i,j} = \left| \begin{matrix} +x_{i,j} & -x_{k+i,j} & +x_{2k+i,j} & -x_{3k+i,j} + \cdots\cdots \\ -x_{i,l+j} & +x_{k+i,l+j} & -x_{2k+i,l+j} & + \cdots\cdots\cdots\cdots \\ +x_{i,2l+j} & -x_{k+i,2l+j} & +x_{2k+i,2l+j} \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{matrix} \right. \tag{44}$$

La recherche d'une matrice $\mathrm{G}_{i,j}$ peut ainsi se décomposer en celle de matrices ${}_1\mathrm{H}_{i,j}$. Toutefois ces dernières ne sont pas indépendantes. En effet dans chacune de ces matrices on peut choisir arbitrairement les termes de la première ligne et de la première colonne. On aurait ainsi choisi les termes des l premières lignes et k premières colonnes de la matrice $\mathrm{G}_{i,j}$, ce qui représente $km + ln - kl$

termes. Or, la formule (38) montre que le nombre de degrés de liberté est plus petit. Il y a donc :

$$\begin{aligned} k\,m + n\,l - k\,l - (k-1)\,m - (l-1)\,n + (k-1)\,(l-1) \\ = m + n - k - l + 1 \\ = (m - k + 1) + (n - l + 1) - 1 \end{aligned}$$

relations entre les matrices partielles, ce qui est exactement le nombre de termes d'une ligne et d'une colonne de la matrice cumulée.

Génératrices aléatoires

Comme pour les séries, nous dirons qu'une matrice a ses termes aléatoires si :

1° Les moyennes ξ et les variances σ d'un groupe quelconque de termes tendent vers les mêmes limites lorsque le nombre de termes de ce groupe augmente indéfiniment.

2° Il n'existe aucune corrélation entre les termes d'un même groupe.

On voit facilement que dans la cumulée d'une matrice aléatoire, la moyenne d'un groupe quelconque de termes tend vers la limite $kl\xi$ lorsque le nombre de ces termes augmente indéfiniment et qu'entre les termes dont les indices diffèrent de i et j il existe une corrélation de valeur :

$$\gamma = \frac{(k-i)\,(l-j)}{kl} \tag{45}$$

si $i < k$ et $j < l$; et qu'il n'y a aucune corrélation dans tous les autres cas.

Considérons alors une matrice répondant à ces deux conditions que peut-on dire de ses génératrices?

Nous admettrons, sans le démontrer, qu'il existe alors une génératrice aléatoire. Soit $G_{i,j}$ cette matrice.

Supposons qu'il en existe une deuxième $G'_{i,j}$. Nous pouvons décomposer ces deux génératrices en génératrices partielles du type H.

Considérons deux partielles ${}_1H$ et ${}_1H'$ correspondantes de terme $u_{i,j}$ et $u'_{i,j}$. Ces deux partielles sont génératrices d'une même cumulée du type D. Si l'on forme donc les différences terme à terme des deux matrices ${}_1H$ et ${}_1H'$ on aura une nouvelle matrice ${}_1H''$ de termes

$$u''_{i,j} = u_{i,j} - u'_{i,j} \tag{46}$$

a cumulation 2,2 nulle. Par conséquent

$$u''_{1,1} + u''_{2,2} - u''_{2,1} - u''_{1,2} = 0$$

ce qui peut s'écrire

$$u''_{1,1} - u'_{2,1} = u''_{1,2} - u''_{2,2} = d$$

et l'on montrerait de proche en proche que

$$u''_{1,j} - u''_{2,j} = d \tag{47}$$

d ne dépendant pas de j. En tenant compte de (46) nous obtenons

$$u_{1,j} - u_{2,j} = u'_{1,j} - u'_{2,j} + d \tag{48}$$

D'ailleurs les termes $u_{i,j}$ étant indépendants, il en est de même des différences termes à termes entre deux lignes, nous pouvons donc écrire

$$\overline{(u_{1,j} - u_{2,j})(u_{1,j+1} - u_{2,j+1})} = 0$$

et par conséquent

$$\overline{(u'_{1,j} - u'_{2,j} + d)(u'_{1,j+1} - u'_{2,j+1} + d)} = 0 \qquad (49)$$

Mais si la matrice $u_{i,j}$ est également aléatoire on a aussi

$$\overline{(u'_{1,j} - u'_{2,j})(u'_{1,j+1} - u'_{2,j+1})} = 0$$

L'équation (49) donne alors

$$d\,(\overline{x'_{1,j} + x'_{1,j+1} - x'_{2,j} - x'_{2,j+1}}) + d^2 = 0$$

mais tous les termes en $x'_{i,j}$ doivent avoir même moyenne. Cette dernière équation se réduit donc à

$$d^2 = 0$$

On a donc (47)

$$u''_{1,j} = u''_{2,j}$$

En comparant les 2e et 3e colonne on verrait de même que

$$u'_{2,j} = u''_{3,j}$$

et plus généralement que tous les termes d'une même ligne de la matrice ${}_1H''$ sont égaux.

En comparant maintenant les termes de deux lignes consécutives, on montrerait de même que tous les termes d'une même colonne sont également égaux. Finalement, la matrice ${}_1H''$ est monotone. Les termes des matrices ${}_1H$ et ${}_1H'$ diffèrent donc d'une même quantité et comme leurs cumulées 2,2 sont identiques, tous leurs termes sont égaux. Il n'existe donc qu'une seule génératrice aléatoire.

Calculons maintenant les termes de cette matrice.

Soit à obtenir le terme $v_{ak+i,bl+j}$ Multiplions chaque terme $\delta_{pk+i,ql+j}$ de la matrice dérivée par les coefficients.

$$\begin{aligned}
&\frac{(p+1)(q+1)}{mn} && \text{si } p \leqslant a \text{ et } q \leqslant b \\
&\frac{(m-p)(q+1)}{mn} && \text{si } p > a \text{ et } q \leqslant b \\
&\frac{(p+1)(n-q)}{mn} && \text{si } p \leqslant a \text{ et } q > b \\
&\frac{(m-p)(n-q)}{mn} && \text{si } p > a \text{ et } q > b
\end{aligned} \qquad (50)$$

et faisons la somme de ces termes. On voit facilement que l'on obtient la somme S de tous les termes de la forme $x_{pk+i,\,ql+j}$ affectés du coefficient :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{mn} \quad \text{si } p \neq a \text{ et } q \neq b \\ &-\frac{1}{n} \quad \text{si } p = a \text{ et } q \neq b \\ &-\frac{1}{m} \quad \text{si } p \neq a \text{ et } q = b \\ &1 \quad \text{si } p = a \text{ et } q = b \end{aligned} \tag{51}$$

Or, il y a mn termes de la première catégorie, n de la deuxième, m de la troisième. La somme des termes de la première catégorie tend donc vers ξ ceux de la deuxième et de la troisième vers ξ. Si donc m et n sont assez grands, S diffère très peu de l'expression

$$x_{ak+i,\,bl+j} - \xi$$

Nous pouvons donc prendre pour ce terme l'expression :

$$x_{ak+i,\,bl+j} = S - \xi \tag{52}$$

Il suffit alors de calculer les termes des $l-1$ premières lignes et des $k-1$ premières colonnes. On obtiendra ensuite directement tous les autres termes.

Génératrices à termes compris entre deux valeurs limites

On a d'après (41)

$$\delta_{i,j} + \delta_{k+i,j} = x_{i,j} + x_{2k+i,\,l+j} - x_{2k+i,\,j} - x_{i,\,l+j}$$

et en généralisant on voit facilement que lorsque 4 termes d'une matrice partielle du type H sont situés deux à deux sur une même ligne ou une même colonne, on peut calculer la même relation simple entre ces 4 termes à partir des termes $\delta_{i,j}$.

Supposons alors que tous les termes $x_{i,j}$ soient nécessairement compris entre deux valeurs α et β; $\alpha > \beta$.

Considérons 4 termes du type précédent $x_{i,j}$, $x_{i+\lambda,j}$, $x_{i,j+\mu}$, $x_{i+\mu,j+\mu}$.

Posons

$$\Delta = x_{i,j} + x_{i+\lambda,\,j+\mu} - x_{i+\lambda,\,j} - x_{i,\,j+\mu} \tag{53}$$

On a :

$$2\beta - 2\alpha \leqslant \Delta \leqslant 2\alpha - 2\beta$$

D'ailleurs si

$$\Delta = 2\alpha - 2\beta$$

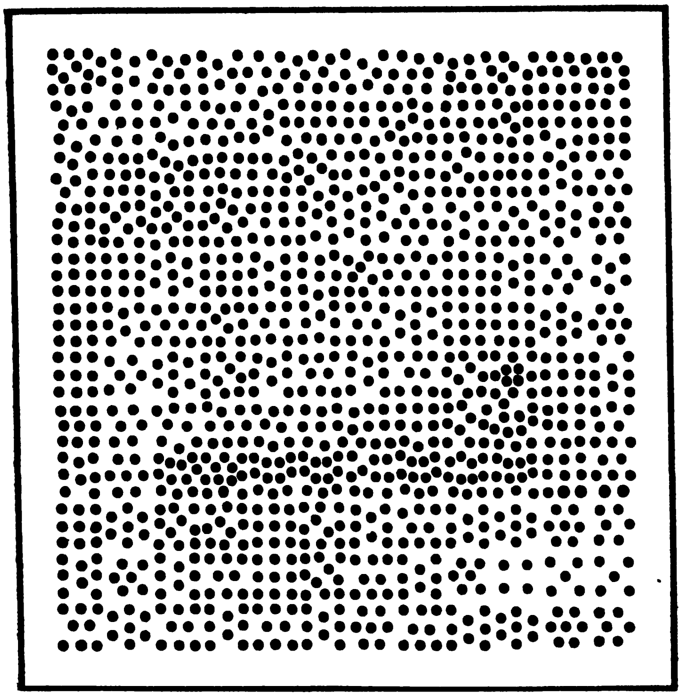
on a nécessairement

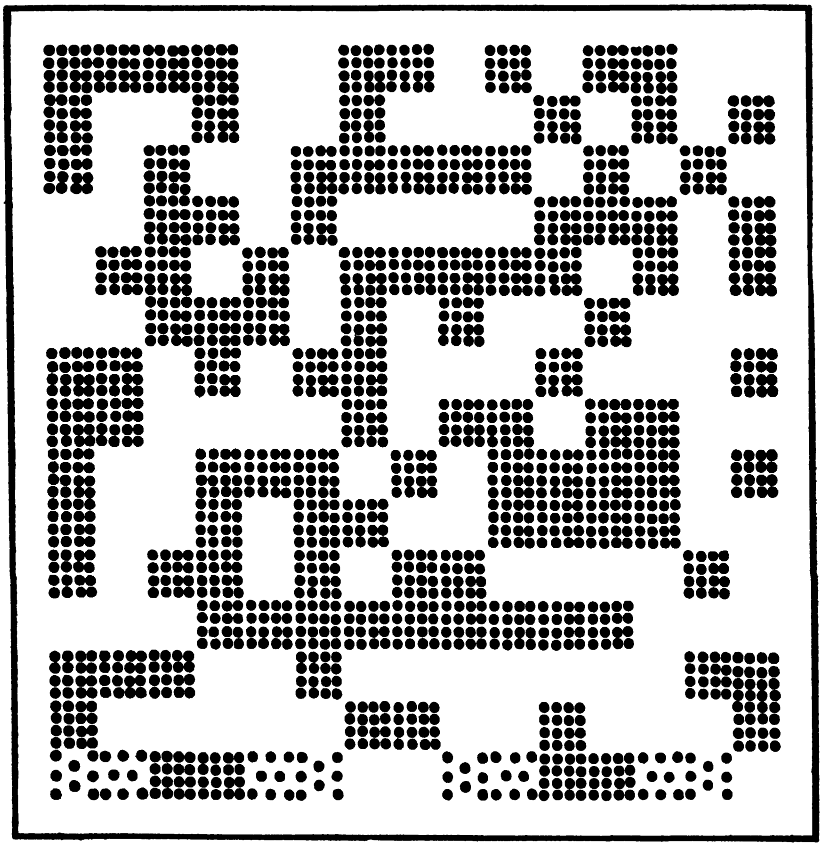
$$x_{i,j} = x_{i+\lambda,\,j+\mu} = \alpha$$

$$x_{i+\lambda,\,j} = x_{i,\,j+\mu} = \beta$$

et c'est l'inverse si

$$\Delta = 2\beta - 2\alpha$$





Si aucune de ces éventualités n'est réalisée, on peut au moins écrire

$$x_{i,j} = \Delta - x_{i+\lambda, j+\mu} + x_{i+\lambda, j} + x_{i, j+\mu}$$

et par conséquent

$$\Delta - \alpha + 2\beta \leqslant x_{i,j} \leqslant \Delta - \beta + 2\alpha$$

Or si $\Delta > \alpha - \beta$ on a $\Delta - \alpha + 2\beta > \beta$ de même si $\Delta < \beta - \alpha$ on a $\Delta - \beta + 2\alpha < \alpha$ dans l'un et l'autre cas on restreint donc les valeurs possibles pour $x_{i,j}$.

Considérons alors toutes les combinaisons possibles de 4 termes comportant $x_{i,j}$ on obtiendra finalement des limites de plus en plus resserrées et finalement si le nombre des termes est assez élevé, une valeur univoque pour ce terme. On pourra faire les calculs successifs pour une série de valeurs.

Naturellement lorsque l'un ou plusieurs des termes de l'équation (53) sont déjà connus par les calculs antérieurs, on obtient des valeurs plus restrictives pour les autres termes. On comprend alors que de proche en proche on puisse obtenir ainsi tous les termes des matrices partielles et finalement de la matrice génératrice donnée sans ambiguïté.

Pour illustrer cette méthode, considérons une image de télévision. Elle est formée par la juxtaposition de points noirs et brillants. Reproduisons cette image avec un appareil d'optique à diaphragme carré. La lumière issue de chaque point lumineux est diffusée sur un carré de dimensions notables et réciproquement; sur chaque point de l'image obtenue on a la somme de tous les points lumineux contenus dans un carré de l'image génératrice. Aux deux images faisons correspondre deux matrices obtenues : premièrement en remplaçant chaque point lumineux par la valeur 1 pour l'image primitive et chaque point noir par la valeur 0; ..... deuxièmement en remplaçant chaque point de la deuxième image par une quantité proportionnelle à la quantité de lumière. Il est clair que la deuxième matrice est une cumulée de la première. Si donc nous savons restituer la matrice génératrice à partir de la cumulée, nous saurons retrouver l'image primitive nette à partir de sa reproduction floue. Or, dans la génératrice, les valeurs attribuées à chaque point ne peuvent être que 0 ou 1; nous sommes donc dans le deuxième cas de restitution étudié plus haut.

Les deux figures ci-contre montrent les résultats ainsi obtenus : la première correspond à l'image floue dérivée, le nombre de points contenus dans chaque carré élémentaire est proportionnel à la quantité de lumière. A partir de cette image, le calcul permet de retrouver la génératrice où les points lumineux sont représentés par 16 points. On remarquera que sur la dernière ligne il existe un certain nombre de carrés élémentaires ne comportant que 8 points. On a voulu montrer ainsi qu'il existe une incertitude relative à ces carrés. Dans chaque couple de deux carrés voisins, l'un doit être lumineux, l'autre noir, et l'on ignore lequel.

Conclusions

Il serait prématuré d'envisager des applications immédiates des séries et matrices cumulées en physique en dehors du dépouillement des courbes à structure fine plus ou moins aléatoires. Cependant l'exemple précédent montre que l'on doit pouvoir appliquer ces méthodes au pouvoir de résolution des instruments d'optique (séries cumulées pour les instruments à fente et matrice pour ceux donnant des images proprement dites).

Quoi qu'il en soit, nous pouvons dès maintenant affirmer que la limitation du pouvoir de résolution des instruments d'optique essentiellement due à la nature ondulatoire de la lumière ne s'applique qu'à l'image directe et rien ne s'oppose, au moins théoriquement, à la possibilité d'obtenir des images ayant un pouvoir de résolution supérieur. Les calculs précédents suggèrent même une méthode pour essayer d'obtenir des résultats pratiques.

Mais nous pensons que c'est surtout la théorie générale de l'information qui bénéficiera le plus des études des relations qui existent entre les fonctions cumulées et leurs primitives, relations que nous n'avons fait qu'esquisser dans ce travail.

Lucien Amy.

Laboratoire Municipal,