JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

EDGAR BATICLE

Le problème des stocks

Journal de la société statistique de Paris, tome 87 (1946), p. 100-109
<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1946__87__100_0>

III

LE PROBLÈME DES STOCKS

Le *Journal de la Société de Statistique de Paris* a publié, dans le nº 5 6, mai-juin 1945, sous les signatures respectives de MM. Thionet et Dayre, deux articles relatifs au problème de l'épuisement des stocks. L'objet de ces travaux était de rechercher dans quels cas l'accroissement du stock total, résultant de la multiplication du nombre de magasins de détail, pouvait devenir abusif.

Pour donner à ce problème une forme mathématique, MM. Thionet et Dayre, conformément à la méthode généralement suivie dans ces sortes de questions, ont imaginé des schémas susceptibles d'être soumis au calcul des probabilités. Les résultats diffèrent naturellement selon le schéma adopté. Le choix du schéma dépend du point de vue auquel on veut se placer, par exemple le point de vue du commerçant, ou celui de l'économie générale. On peut aussi envisager le cas où il n'y a pas de concurrence entre les magasins (par exemple si l'inscription préalable chez un commerçant est exigée) ou au contraire le cas où la concurrence existe.

M. Thionet a traité, avec deux schémas différents les cas où il y a, et où il n'y a pas, concurrence, en envisageant, pour chaque cas, deux probabilités : la probabilité P pour qu'un client se présente à un magasin donné et la probabilité Q pour que ce client soit servi.

Dans la première partie de son étude, il fait application de la formule de Bernoulli. Mais cette application paraît critiquable car la probabilité qu'un nombre donné de clients se présentera à une boutique dépend du nombre de clients qui ont été servis dans d'autres boutiques. M. Thionet envisage d'ailleurs dans une autre partie de son travail, mais sans toutefois pousser les calculs jusqu'au bout, dans le cas général, un schéma différent, la répartition des achats étant assimilée à celle de m boules dans n compartiments.

C'est un schéma analogue qu'envisage M. Dayre pour le calcul de la marge de sécurité en fonction du nombre de magasins. Mais il fait l'hypothèse que l'écart entre les demandes et le stock moyen suit la loi de Gauss.

L'objet de ma conférence est de reprendre l'étude du schéma des compartiments, signalé par M. Thionet, problème que j'ai traité il y a quelques années (1). Ce schéma me paraît s'adapter au problème envisagé avec plus de généralité que les autres et il conduit à des résultats explicites particulièrement simples.

***

Le problème envisagé peut s'énoncer comme suit :

« n magasins ayant reçu chacun un stock de s objets, quelle est la probabilité que k maga sins seront épuisés quand q achats auront été effectués dans l'ensemble des magasins. »

Ce problème est évidemment le même que celui du calcul de la probabilité pour que, q objets étant répartis au hasard dans n compartiments il y ait k compartiments contenant plus de s 1 objets.

Aux notations près la formule que j'ai établie pour cette probabilité est :

$$p_k = C_n^k \sum_o (-1)^u C_{n-k}^u C_{q+n-1-(k-n)(s+1)}^{n-1} : C_{q+n-1}^{n-1} \qquad (1)$$

expression dans laquelle u prend toutes les valeurs possibles depuis o jusqu'à celle après laquelle $q - (k + u)s$ change de signe.

(1) Cf. Comptes rendus de l'Académie des Sciences, séance du 4 novembre 1935.

Pour établir cette formule, on commence par calculer le nombre X_s^k des répartitions de q objets dans les n compartiments parmi lesquels k compartiments contiennent plus de s objets.

Je remarquerai tout d'abord qu'il y a équivalence entre ce problème et celui de la répartition en n lots de $q + n$ objets chacun où k lots ont plus de $s + 1$ objets puisqu'on retrouve la répartition en compartiments en enlevant un objet dans chaque lot. Si j'isole k lots, pris au hasard, ayant chacun $s + 1$ objets et si je divise le reste en n lots, auxquels j'ajoute les k lots réservés, de toutes les manières possibles, j'obtiens non seulement les répartitions où il y a exactement k lots ayant plus de $s + 1$ objets, mais également toutes celles ayant $k + u$ lots de plus de $s + 1$ objets. Pour chaque valeur de u on a évidemment C_{k+u}^k telles répartitions.

D'autre part quand j'ai enlevé k lots de $s+1$ objets il en reste $q + n - k(s + 1)$, avec lesquels je peux former n lots de $C_{q+n-k(s+1)-1}^{n-1}$ manières, puisque cette expression représente le nombre de manières de placer $n-1$ séparations dans les $q + n - k(s + 1) - 1$ intervalles séparant les objets restants, supposés placés côte à côte. Il y a d'ailleurs C_n^k manières de prélever k lots.

Il en résulte qu'on a l'équation :

$$X_s^k + C_{k+1}^1 X_s^{k+1} + C_{k+2}^2 X_s^{k+2} + \ldots\ldots = C_n^k C_{q+n-k(s+1)-1}^{n-1}$$

On aurait de même, en remplaçant k par $k + 1$, $k + 2$..... etc.

$$X_s^{k+1} + C_{k+2}^1 X_s^{k+2} + C_{k+3}^2 X_s^{k+3} + \ldots\ldots = C_n^{k+1} C_{q+n-(k+1)(s+1)-1}^{n-1}$$

$$X_s^{k+2} + C_{k+3}^1 X_s^{k+3} + C_{k+4}^2 X_s^{k+4} + \ldots\ldots = C_n^{k+2} C_{q+n-(k+2)(s+1)-1}^{n-1}$$

et ainsi de suite.

Pour résoudre ce système je multiplie la première équation par $C_k^0 = 1$, la deuxième par $- C_{k+1}^1$, la troisième par $+ C_{k+2}^2$..., la quatrième par $(-1)^{u-1} C_{k+u-1}^{u-1}$... etc. et j'ajoute membre à membre.

Il est facile de voir que le coefficient de X_s^{k+u} est

$$C_k^0 C_{k+u}^k - C_{k+1}^1 C_{k+u}^{k+1} + C_{k+2}^2 C_{k+u}^{k+2} - \ldots\ldots + (-1)^v C_{k+v}^v C_{k+u}^{k+v} + \ldots\ldots$$

Or on a :

$$C_{k+v}^2 C_{k+u}^{k+v} = \frac{(k+v)!}{k!\,v!} \frac{(k+u)!}{(k+v)!\,(u-v)!} = \frac{(k+u)!}{k!\,v!\,(u-v)!} \times \frac{u!}{u!}$$

$$= \frac{(k+u)!}{k!\,u!} \frac{u!}{v!\,(u-v)!} = C_{k+u}^u C_u^v.$$

Mettant en facteur C_{k+u}^u le coefficient écrit ci dessus se présente sous la forme

$$C_{k+u}^u (C_u^o - C_u^1 C + C_u^2 \ldots\ldots) = C_{k+u}^u (1 - 1)^u = 0$$

sauf si $u = o$. On a donc la solution cherchée :

$$X_s^k = C_k^0 C_n^k C_{q+n-k(s+1)-1}^{n-1} - C_{k+1}^1 C_n^{k+1} C_{q+n-(k+1)(s+1)-1}^{n-1} + \ldots\ldots$$

$$+ (-1)^u C_{k+u}^u C_n^{k+u} C_{q+n-(k+u)(s+1)-1}^{n-1} + \ldots\ldots$$

En procédant comme ci-dessus on voit que :

$C_{k+u}^u C_n^{k+u} = C_n^k C_{n-k}^u$, et si l'on divise l'expression de X_s^k par C_{q+n-1}^{n-1} nombre total des répartitions de $q + n$ objets en n lots on trouve la formule donnée ci-dessus pour la probabilité p_k.

***

Cette formule générale étant admise, on peut remarquer que la probabilité la plus intéressante pour le problème en question est la probabilité P pour que *aucun* magasin ne soit épuisé quand q achats auront été effectués.

Si l'on se reporte à la manière dont p a été établi, on voit qu'il suffit pour avoir P de faire $k = o$ dans la formule (1) ci dessus. On a donc :

$$P = \Sigma (-1)^u C_n^u C_{q+n-1-u(s+1)}^{n-1} : C_{q+n-1}^{n-1} \qquad (2).$$

***

Avant d'examiner le parti qu'on peut tirer de cette formule pour obtenir des résultats généraux, je vais en faire la vérification sur un cas particulier susceptible d'être traité directement.

Supposons le cas de $q = 6$ objets à répartir dans $n = 3$ compartiments.

On a les répartitions suivantes :

$6 + 0 + 0$	de	3	manières $\left(\frac{3!}{1!\,2!}\right)$
$5 + 1 + 0$	—	6	—
$4 + 2 + 0$	—	6	—
$4 + 1 + 1$	—	3	—
$3 + 3 + 0$	—	3	—
$3 + 2 + 1$	—	6	—
$2 + 2 + 2$	—	1	—
Total :		28	répartitions possibles.

On a bien $C_{6+3-1}^{3-1} = C_8^2 = 28$.

Cherchons le nombre de répartitions où il n'y a aucun compartiment avec plus de 3 objets. Les trois dernières lignes du tableau donnent $3 + 6 + 1 = 10$.

Avec $S = 3$ les formules établies donnent :

$$X_3^0 = \Sigma\,(-1)^u\, C_3^u\, C_{8-4u}^2 = C_8^2 - 3\,C_4^2 = 28 - 18 = 10$$

***

Reprenant la formule (2), je vais maintenant supposer que q et s soient grands par rapport à n. Le terme relatif à u peut s'écrire :

$$\frac{(q+n-1) - u\,(s+1)}{q+n-1} \cdot \frac{(q+n-1) - u\,(s+1) - 1}{(q+n-1) - 1} \cdot \ldots\ldots \text{etc.}$$

En vertu de l'hypothèse faite chacun des facteurs sera voisin de $1 - u\,\frac{s}{q}$ et si je pose $\frac{s}{q} = x$ j'aurai la formule asymptolique :

$$P\,(x) = \Sigma\,(-1)^u\, C_n^u\, (1 - u\,x)^{n-1} \tag{3}$$

dans laquelle il ne faut évidemment retenir que les termes pour lesquels $1 - ux$ est positif.

Cette expression n'est autre que la *fonction de répartition* de la variable aléatoire $X = \frac{s}{q}$.

La *densité de probabilité* est :

$$p\,(x) = \frac{d}{dx}\,P\,(x) = \Sigma\,(-1)^{u+1}\, C_n^u\,(n-1)\,u\,(1 - u\,x)^{n-2}$$

Comme on a :

$$u\,C_n^u = u\,\frac{n!}{u!\,(n-u)!} = n\,\frac{(n-1)!}{(u-1)!\,(n-u)!} = n\,C_{n-1}^{u-1}$$

on pourra écrire :

$$p\,(x) = n\,(n-1)\,\Sigma\,(-1)^{n+1}\, C_{n-1}^{u-1}\,(1 - u\,x)^{n-2} \tag{4}$$

Les courbes (3) et (4) sont formées de paraboles de degrés respectifs $n - 1$ et $n - 2$ qui se raccordent pour les valeurs de x égales à $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \ldots\ldots \frac{1}{n-1}, \frac{1}{n}$.

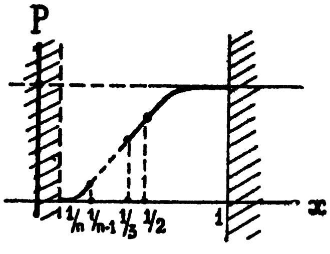

Fig. 1.

En explicitant les termes placés sous le symbole Σ elles s'écrivent d'une manière plus suggestive :

$$P(x) = 1 - C_n^1 (1 - x)^{n-1} + C_n^2 (1 - 2x)^{n-1} - C_n^3 (1 - 3x)^{n-1} + \ldots..$$

$$p(x) = n(n-1)\left[(1 - x)^{n-2} - C_{n-1}^1 (1 - 2x)^{n-2} + C_{n-1}^2 (1 - 3x)^{n-2} - \ldots..\right]$$

On peut remarquer que si on considère X comme la grandeur d'un des segments de l'unité divisée au hasard en n segments $P(x)$ représente la probabilité pour que X soit plus petit que x et $p(x)\,dx$ la probabilité pour que X soit compris entre x et $x + dx$ (1).

Il est évident que pour $x \leqslant \frac{1}{n}$, c'est à dire $n\,s \leqslant q$ (nombre d'acheteurs supérieur ou égal au stock total) la probabilité P est nulle. Donc l'expression complète en $P(x)$ est identiquement nulle. Il en est de même pour ses dérivées. On peut tirer de cette remarque des identités intéressantes.

Examinons quelques cas particuliers :

Pour $n = 2$ on a $P(x) = 1 - 2(1 - x) = 2x - 1$ pour $\frac{1}{2} < x < 1$ et

$P(x) = 1 - 2(1 - x) + 1 - 2x \equiv 0$ pour $x < \frac{1}{2}$.

Les expressions correspondantes de $p(x)$ sont :

$$p(x) = 2 \quad \text{pour } \frac{1}{2} < x < 1$$

$$\text{et} \quad p(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x > \frac{1}{2}$$

Pour $n - 3$ on aura :

$$\left.\begin{array}{l} P(x) = 1 - 3(1 - x)^2 \\ p(x) = 6(1 - x) \end{array}\right\} \text{pour } \frac{1}{2} < x < 1,$$

$$\left.\begin{array}{l} P(x) = 1 - 3(1 - x)^2 + 3(1 - a\,x)^2 \\ p(x) = 6[(1 - x) - 2(1 - 2x)] \end{array}\right\} \text{pour } \frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}.$$

$$\left.\begin{array}{l} P(x) = 1 - 2(1 - x)^2 + 3(1 - 2x)^2 - (1 - 3x)^2 \equiv o \\ p(x) = 6[(1 - x) - 2(1 - 2x) \times 1 - 3x] \equiv o \end{array}\right\} \text{pour } x < \frac{1}{3}$$

Pour $n = 4$ on a :

$$p(x) = 12[(1 - x)^2] \text{ pour } \frac{1}{2} < x < 1$$

$$p(x) = 12[1 - x)^2 - 3(1 - 2x)^2] \text{ pour } \frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$$

$$p(x) = 12[(1 - x)^2 - 3(1 - 2x)^2 + 3(1 - 3x)^2] \text{ pour } \frac{1}{4} < x < \frac{1}{3}$$

La maximum de $p(x)$ a bien pour une valeur de x comprise entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ et égale à 5/11.

Le maximum est 36/11.

---

(1) Cette remarque permet d'envisager d'autres applications de ces formules. En voici un exemple : Si n partis se présentent aux élections, quelle est la probabilité qu'aucun d'eux n'aura la majorité? Il suffit de faire $x = 1/2$.

$$\text{Pour } n = 2 \text{ on trouve } 1 - 2\,\frac{1}{2} = 0$$

$$n = 3 \quad — \quad 1 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$n = 4 \quad — \quad 1 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \text{ etc...}$$

Évidemment on suppose dans ce calcul que le hasard entre seul en jeu.

Ces différentes courbes sont représentées par les figures ci-dessous.

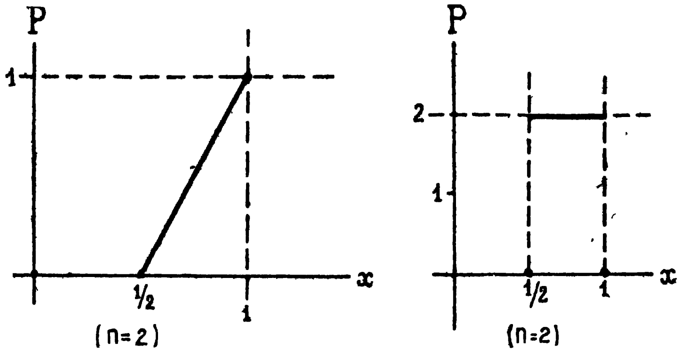

Fig. 2.

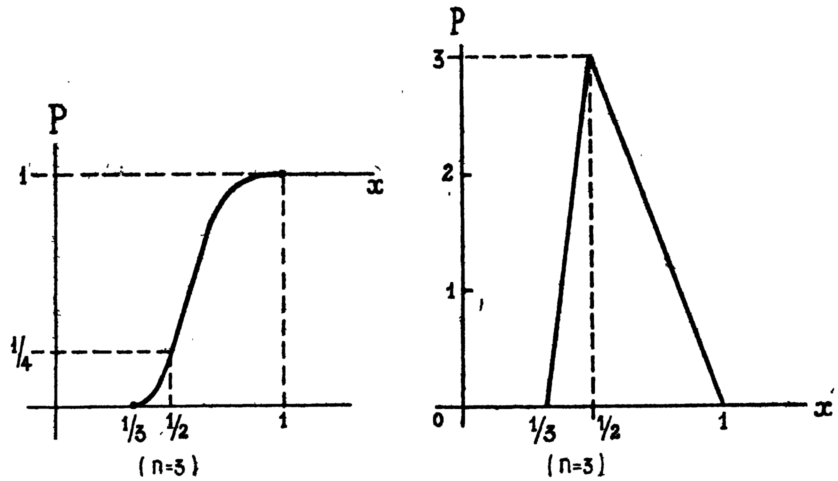

Fig. 3.

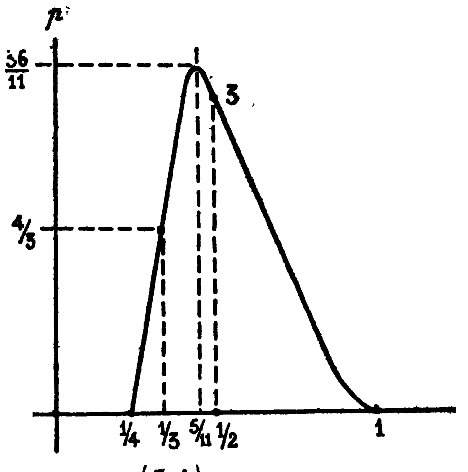

Fig. 4.

Ces exemples suffisent pour montrer que $p(x)$ à l'allure binomiale et que la dissymétrie s'accroît avec n.

***

Une première manière d'appliquer la formule donnant P (x) est la suivante.

Le nombre d'acheteurs à satisfaire q étant donné quel est le stock s à prévoir par magasin pour que la probabilité que les acheteurs seront servis, soit égale à une valeur donnée P_o ?

Comme on a $s = q\,x$, on aura à résoudre les équations

$$P_o = 1 - C_n^1 (1 - x)^{n-1}$$

valable si la valeur trouvée pour x est comprise entre $\frac{1}{2}$ et 1,

$$P_o = 1 - C_n (1 - x)^{n-1} + C_n^2 (1 - 2\,x)^{n-1} \ldots\ldots$$

valable si la valeur trouvée est comprise entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$ et ainsi de suite.

Supposons par exemple que l'on se donne $P_o = 0{,}95$ on aura d'abord à résoudre l'équation

$$0{,}05 = n\,(1 - x)^{n-1}$$

Pour $n = 2$ on trouve $1 - x = 0{,}025$ et $x = 0{,}975$. Le stock total est $2 \times 0{,}975 = 1{,}950$; la marge de sécurité est 0,95.

Il est facile de voir que cette équation est valable pour toutes les valeurs de n inférieures ou égales à 8. Pour ce nombre de magasin on trouve que le stock total nécessaire pour que les acheteurs soient servis avec une probabilité de 0,95 est égal à quatre fois le nombre des acheteurs, soit une marge de sécurité de 3.

***

On voit que cette méthode, si elle permet, en théorie, de déterminer le stock en fonction de P_o et de n ne donne pas une idée bien nette du « foisonnement du stock » en fonction de n.

Pour trouver une loi générale de ce foisonnement je chercherai quel est le stock à prévoir pour satisfaire « en moyenne » un nombre donné d'acheteurs.

A cet effet, je chercherai l'espérance mathématique E (x) de la variable aléatoire X telle que :

$$\text{Pr.}\ \{ X < x \} = P = 1 - C_n^1 (1 - x)^{n-1} + C_n^2 (1 - 2\,x)^{n-1} - \ldots\ldots$$

On a :

$$E\,(x) = \int_0^1 x\,d\,P = 1 - \int_0^1 P\,dx = \frac{1}{n}\left(C_n^1 - \frac{1}{2} + C_n^2\,\frac{1}{3}\,C_n^3 - \ldots + (-1)^{u+1}\,\frac{1}{u}\,C_n^u + \ldots\right)$$

Je vais chercher une expression plus simple de la parenthèse, que j'appellerai $\varphi\,(n)$, et pour cela je vais calculer $\varphi\,(n) - \varphi\,(n-1)$.

On a :

$$\varphi\,(n) - \varphi\,(n-1) = \Sigma\,(-1)^n\,\frac{1}{n}\,(C_n^u - C_{n-1}^u)$$

Or :

$$C_n^u - C_{n-1}^u = \frac{n\,(n-1\ldots\ldots(n-u+1)}{1.2\ldots\ldots u} - \frac{(n-1)\,(n-2)\ldots(n-u)}{1.2.3\ldots\ldots u}$$

$$= \frac{(n-1)\ldots\ldots(n-u+1)}{1.2\ldots\ldots u}\Big[n - (n-u)\Big] = u.\,\frac{(n-1)\ldots\ldots(n-u+1)}{1.2\ldots\ldots u}$$

$$= \frac{1}{n}\,C_n^u$$

Donc :

$$\varphi\,(n) - \varphi\,(n-1) = \frac{1}{n}\sum_{u=1}^{u=n}(-1)^u\,C_n^u = \frac{1}{n}$$

D'où

$$E\,[X] = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$$

Or n E [X] $=$ E $\left[\frac{ns}{q}\right]$ est le stock à prévoir par acheteur. *On voit qu'il est égal à la somme des n premiers termes de la série harmonique.*

Lorsque n est suffisamment grand on peut remplacer $\varphi(n) - \varphi(n-1)$ par $\frac{d\varphi}{dn}$. D'où l'équation différentielle

$$\frac{d\varphi}{dn} = \frac{1}{n}$$

et $\qquad \varphi = \mathrm{L}n + \mathrm{Const}^{e}.$

Comme $\varphi(1) = 1$ la constante est égale à l'unité et l'on a par suite pour le stock total par acheteur tel que tous les acheteurs soient satisfaits « en moyenne » :

$$n\,\mathrm{E}\,[\mathrm{X}] = 1 \times \mathrm{L}n$$

Ln représente donc la marge de sécurité.

***

De même qu'on a calculé l'espérance mathématique de X on peut calculer son écart-type.

Je commencerai par calculer le moment du second ordre $\mu_2 = \mathrm{E}\,[\mathrm{X}^2]$. On a :

$$\mathrm{E}\,[\mathrm{X}^2] = \int_0^1 x^2\, d\,\mathrm{P} = 1 - 2\int_0^1 \mathrm{P}x\, dx = \frac{2}{n\,(n+1)}\left(\mathrm{C}_n^1 - \frac{1}{2^2}\,\mathrm{C}_n + \frac{1}{3^2}\,\mathrm{C}_n + \ldots\ldots\right)$$

J'appelle $\psi(n)$ la parenthèse et je cherche à calculer $\psi(n) - \psi(n-1)$.

On a :

$\psi(n) - \psi(n-1) = \Sigma\,(-1)^{u+1}\,\frac{1}{u\,n}\,\mathrm{C}^{1\,u}_{\;n}$. D'où en tenant compte du calcul précédent

$$\psi(n) - \psi(n-1) = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$$

Lorsque n est assez grand, cette équation peut s'écrire

$$\frac{d\,\psi(n)}{d\,n} = \frac{1}{n}\,(1 + \mathcal{L}n)$$

Et en intégrant $\psi(n) = 1 + \mathcal{L}n + \frac{1}{2}(\mathcal{L}\,n)^2$ (en tenant compte de ce que $\psi(1) = 1$).

On a donc :

$$\mu_2 \backsimeq \frac{2}{n\,(n+1)}\left[1 + \mathcal{L}n + \frac{1}{2}\,(\mathcal{L}n)^2\right]$$

La fluctuation μ'_2 a pour expression

$$\mu'_2 = \mathrm{E}\,[\mathrm{X}^2] - [\mathrm{E}\,\mathrm{X}^2] = \mu_2 - \mu_1^2$$

Si on remplace $n\,(n+1)$ par n^2 on trouve

$$\mu'_2 = \frac{2}{n^2}\left[1 + \mathcal{L}n + \frac{1}{2}\,(\mathrm{L}n)^2\right] - \frac{1}{n^2}\,(1 + \mathcal{L}n)^2 = \frac{1}{n^2}$$

D'où pour l'écart-type $\sigma = \sqrt{\mu'_2} = \frac{1}{n}$.

***

La théorie développée ci-dessus trouve son application dans d'autres domaines.

On peut envisager, par exemple, le cas des transports en commun. Supposons qu'on ait à transporter dans un intervalle de temps déterminé de la journée un nombre q de voyageurs. Si on effectue ce transport avec une rame unique, partant à une heure fixe, il suffira de lui donner une capacité q. Mais si on suppose qu'on fractionne le transport en n rames, chaque voyageur ayant la latitude de prendre l'une quelconque d'entre elles, il faudra pour que l'on puisse satisfaire en moyenne les q voyageurs une capacité totale égale à :

$$q\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right) \backsimeq q\,(1+\mathcal{L}n)$$

Par exemple si on remplace un train de 1.000 places par deux trains, la capacité totale à prévoir sera de 1.500 places, soit 750 par rame. Pour 10 trains, il faudrait prévoir en tout 1.000 $(1+\mathcal{L}10) = 3.300$ places. Chacun de ces 10 trains devrait avoir une capacité égale à environ le tiers de celle du train unique.

Le « coefficient d'utilisation » est $\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}} \backsimeq \dfrac{1}{\mathcal{L}n}$. Il n'est plus que $\frac{2}{3}$ pour 2 trains, $\frac{6}{11}$ pour 3 trains et il tombe à 0,30 pour 10 trains.

***

Au lieu de rechercher comme précédemment quelle est la valeur moyenne du stock total nécessaire pour pouvoir satisfaire avec n magasins un nombre donné de clients, on peut rechercher quel est le nombre moyen de stocks épuisés pour un stock total donné et un nombre de clients donné.

A cet effet, reprenons la première des équations en X_s^k données au début de la présente étude et faisons y $k = 1$. On aura :

$$X_s^1 + 2\,X_s^2 + 3\,X_s^3 + \ldots\ldots = n\,C_{q+n-(s+1)-1}^{n-1}$$

Divisons les deux membres par C_{q+n-1}^{n-1}. Cela donne :

$$p_1 + 2\,p_2 + 3\,p_3 \ldots\ldots = n\,\frac{C_{q+n-1(s+1)-1}^{n-1}}{C_{q+n-1}^{n-1}}$$

Or, le premier membre est précisément $E\,[k] = \bar{k}$, c'est à-dire la valeur moyenne cherchée. D'où la valeur asymptotique, en posant $x = s/q$

$$\bar{k} = n\,(1-x)^{n-1}$$

On remarquera qu'en faisant $k = 2$ dans l'équation en X_s^k on pourrait calculer $E\,[k\,(k-1)]$ d'une manière analogue. En multipliant par 2 les deux membres on a, en effet, dans le premier membre.

$$2\,X_s^2 + 3{,}2 \times X_s^3 + \ldots\ldots$$

ou en divisant par C_{q+n-1}^{n-1}

$$21\,p^2 + 3.2\,p^3 + 4.3\,p_k\,t \ldots\ldots = E\,[k\,(k-1)]$$

Il en résulte que l'on a :

$$E\,[k\,(k\text{-}1)] = n\,(n-1)\,(1-2\,x)^{n-1}$$

c'est-à-dire

$$E\,(k^2) = n\,(n-1)\,(1-2\,x)^{n-1} + n\,(1-x)^{n-1}$$

Si on pose $K = \bar{k} + \chi$ on aura la fluctuation :

$$E\,(\chi^2) = E\,(k^2) - (\bar{k})^2 = n\,(n-1)\,(1-2\,x)^{n-1} + n\,(1-x)^{n-1} - n^2\,(1-x)^{2\,n-2}$$

Faisant maintenant $x - \frac{\alpha}{n}$ et supposant α suffisamment petit, on trouve :

$$E\,(\chi^2) = n\,(n-1)\,e^{-2\alpha} + n\,e^{\alpha} - n^2\,e^{-2\alpha}$$

ou très approximativement

$$E\,(\chi^2) = n\,e^{-\alpha}\,(1-e^{-\alpha})$$

A titre d'illustration supposons $\alpha = 1$, c'est-à-dire $x = \frac{s}{q} = \frac{1}{n}$, ce qui exprime que, si l'on a maintenu le même stock total, le nombre moyen de magasins épuisés, après q achats, est approximativement égal à ne^{-1}, soit 0,366 n.

***

Il me reste à examiner ce que pratiquement on peut tirer des résultats ci-dessus au point de vue économique.

Évidemment, le foisonnement qui se mesure par $\mathcal{L}n$ paraît devoir entraîner des dépenses frustratoires d'une importance non négligeable. Mais il faut remarquer qu'il y a, en contre-partie, une liberté de choix du magasin qui est à prendre en considération. On peut, de plus se demander, s'il n'y a pas *un nombre optimum* de magasins, en mettant en compte l'économie due à la plus grande facilité donnée aux acheteurs. *Grosso modo* la dépense, pour l'achat d'un objet doit être sensiblement en proportion inverse du nombre de magasins, élevé à une certaine puissance $\gamma \gtreqless 1$ soit $\frac{\alpha}{n^\gamma}$.

Pour q achats la dépense totale sera de $\frac{\alpha q}{n^\gamma}$. Le stock total étant $q\,(1 + \mathcal{L}n)$ on peut admettre que la dépense due au stockage sera $\beta\, q\,(1 + \mathcal{L}n)$. La dépense totale sera ainsi :

$$\frac{\alpha q}{n^\gamma} + \beta\, q\,(1 + \mathcal{L}n) + \text{const}^{\text{e}}.$$

Le minimum de cette expression a lieu pour :

$$\frac{-\alpha\,\gamma\, q}{n^{\gamma+1}} + \frac{\beta\, q}{n} = 0$$

ou

$$n = \left(\frac{\alpha\,\gamma}{\beta}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

L'existence d'un nombre optimum de magasins, véritable position d'*équilibre économique*, se trouve ainsi établie, du moins théoriquement.

Il est évidemment peu probable que dans un cas concret on puisse effectuer un tel calcul, étant donnée l'extrême schématisation à laquelle on a dû se soumettre pour donner au problème une forme mathématique. Mais il y a lieu de remarquer qu'en économie « naturelle » cette position d'équilibre doit en général s'établir automatiquement.

Peut-être d'aucuns pensent ils que l'existence de ces équilibres économiques n'est pas établie, en tant que phénomène universel, ou même général, d'une façon parfaitement rigoureuse.

L'étude ci dessus montre en tout cas que dans le cas particulier envisagé, il existe un état d'équilibre auquel correspond un nombre optimum de magasins.

Edgar Baticle.

DISCUSSION

M. Hénon. — J'apporte mon adhésion complète à la remarquable démonstration de M. Baticle sur le foisonnement des stocks, problème qui vient d'être traité pour la première fois rigoureusement et complètement.

Mais M. Baticle a touché un aspect d'un problème qui m'est cher : c'est celui de l'application directe des résultats du calcul aux problèmes de la distribution et en particulier à celui de la répartition des détaillants sur le territoire national.

Je ne suis ni détaillant et n'appartient à aucun trust, aussi je pense pouvoir donner une opinion objective sur ce point d'une importance ce me semble assez grande.

En effet, pour un commerçant, avant la guerre, le problème des stocks consistait à immobiliser le moins possible,tout en pouvant toujours répondre à la demande de la clientèle. Autrement dit, tous les détaillants à un instant quelconque devaient être en principe tous approvisionnés. C'est le cas où aucun « compartiment » n'est vide.

Le problème des stocks se pose encore, mais sous une autre forme, il faut faire intervenir le *temps*, et, en particulier, la période de réapprovisionnement. On trouve ainsi *a posteriori* pour une famille de produits une loi de probabilité d'écoulement analogue à celle qui a été étudiée par M. Gibrat pour l'écoulement des cours d'eau. Cette loi fixe l'importance d'un stock de sécurité fonction de la durée d'approvisionnement et du risque que l'on accepte de ne pouvoir répondre à la demande (risque de probabilité égale à 1 % par exemple).

L'application de cette loi entraîne l'existence d'un *stock mort* moyen pour tous les magasins figurant dans un réseau de distribution. Ce stock mort a pour terme principal un quotient dont le dénominateur est $\sqrt{\Delta}$, Δ étant la durée de réapprovisionnement.

Un réseau de distribution doit donc comporter sur un territoire un certain nombre de points d'éclatement liés aux possibilités de transports (grossistes, centres livreurs), sous formes d'entreprises privées ou de coopératives telles que tous les détaillants d'une région puissent être ravitaillés en un temps très court. Le stock mort pour la collectivité devient ainsi minimum et le nombre de détaillants influence pratiquement fort peu ce stock mort global.

Si l'on ajoute à cela les services rendus par la multiplicité des détaillants (proximité, transport à domicile, etc...), ainsi que l'effet qui résulte d'un système de prix concurrentiels, on arrive à des conclusions différentes de celles indiquées non seulement par M. Baticle, mais encore de celles indiquées par MM. Thionnet et Daire, à savoir l'inutilité de réduire systématiquement le nombre de détaillants.

C'est cette différence très grande au point de vue économie de l'organisation de la distribution que je voulais signaler.

Quant aux stocks, renouvelés dus à l'ensemble des lots de renouvellement ceux ci s'expriment par $\Sigma\, e\, v$, e étant la durée d'écoulement de chaque lot et v la vitesse d'écoulement par unité de temps. Or le $\Sigma\, e\, v$ optimum à l'échelon détaillant ne dépend pas pratiquement de la multiplication de ceux ci.

Ce qui importe donc au point de vue distribution, c'est la répartition rationnelle des points d'éclatement sur le territoire; le respect des délais de livraison; la fixation des stocks de sécurité, et, pour les Pouvoirs publics, la rapidité des transports régionaux autour des centres naturels d'éclatement.

L'exemple des « entreprises à succursales multiples » prouve la qualité de l'organisation intégrée, puisque, devant l'inadaptation des détaillants, l'État s'est vu contraint de créer un impôt spécial très lourd pour ces sociétés, dans le but de protéger les détaillants, maintenant artificiellement une économie rétrograde et paralysant tout effort constructif.

Le problème de la distribution n'est pas un problème de répartition des profits comme beaucoup l'ont proposé, mais c'est un problème technique avant tout. Il doit être pensé en recherchant l' « optimum de rendement social », optimum qui a été étudié d'une manière si remarquable par M. Allais.

Quant au calcul des probabilités, il peut être d'un secours efficace dans les cas relativement simples, comme dans le cas des compartiments qui vient d'être traité d'une manière si rigoureuse par M. Baticle. Mais devant des cas concrets plus complexes, l'unité de vente, par exemple, n'est pas toujours simple, elle est souvent multiple, on est en présence de tirages en grappes inégales qui rappellent le schéma de Borel, et, le calcul des probabilités doit s'appliquer *a posteriori* sur les données de l'observation statistique.

Je fais ces remarques, car il serait dangereux de généraliser et de tirer des conclusions hâtives, conclusions qui pourraient influencer des travaux qui sont en cours sur le coût de la distribution et qui ont été provoqués sur la demande des Pouvoirs publics.