

JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

MARCEL PROT

Réflexions psychologiques sur les notions de probabilité et de hasard et sur quelques notions connexes

Journal de la société statistique de Paris, tome 84 (1943), p. 23-34

http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1943__84__23_0

© Société de statistique de Paris, 1943, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (<http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

V

RÉFLEXIONS PSYCHOLOGIQUES SUR LES NOTIONS DE PROBABILITÉ ET DE HASARD ET SUR QUELQUES NOTIONS CONNEXES

Les notions de probabilité et de hasard ne sont pas des notions parfaitement simples et claires et l'application répétée avec laquelle nombre d'auteurs ont cherché à les définir tant au point de vue simplement philosophique que pour asseoir la base du calcul des probabilités traduit bien, semble-t-il, le besoin communément éprouvé d'en assurer la signification en même temps que la difficulté d'y parvenir d'une manière pleinement satisfaisante. Les quelques réflexions que nous exposons dans ce qui suit, sans prétendre régler, bien entendu, de façon définitive une question particulièrement délicate, contribueront peut-être à préciser le sens qu'il convient de donner à ces termes si couramment employés.

Une telle entreprise n'est pas de pur dilettantisme et la confusion qui pénètre des termes aussi usuels que ceux de probabilité et de hasard est loin d'être sans conséquences pratiques. Si le langage, en effet, est la simple expression de la pensée lorsqu'il s'agit de la pensée concrète il n'en est plus de même lorsqu'il s'agit de la pensée abstraite. La pensée qui se rapporte aux objets, qui se rattache directement à la perception peut se développer indépendamment du langage qui n'en est qu'une expression surajoutée, qu'une copie plus ou moins imparfaite mais dont l'imperfection ne réagit pas sur le modèle; le langage, au contraire, fait corps avec la pensée abstraite qui ne saurait pratiquement exister sans lui, il la conduit, il la soutient, il lui donne toute sa force lorsqu'il est bien fait mais il pèse lourdement sur elle lorsqu'il est mal fait, il la ravage de ses obscurités et de ses confusions. La psychologie contemporaine a longuement insisté sur cette « adhérence de la pensée aux mots »; il convient de préciser, pensons-nous, que cette adhérence est faible et superficielle pour les mots concrets, tandis qu'elle est d'autant plus forte, plus pénétrante que les mots expriment des notions plus élaborées, plus éloignées du monde des objets et des données de la perception, bref plus abstraites.

Aux confins de l'abstraction se placent sans doute les notions métaphysiques qui, à force de s'éloigner du concret, ont fini par rompre tout lien avec lui et ne sont plus que fumée verbale et jeux de mots, cela ne doit pas surprendre. Il est curieux de noter, par contre, que les sciences les plus positives et les plus prudentes dans leur langage, les mathématiques et la physique elles-mêmes, utilisent des notions abstraites familières exprimées par des mots du langage vulgaire et qui, parce qu'elles ont été acceptées sans une critique suffisante, soulèvent parfois, le moment venu, des difficultés plus ou moins graves; la notion probabilité paraît être de celles-là (1).

Il n'y a, dira-t-on, qu'à définir ces notions avec soin pour écarter tout danger. La suggestion, malheureusement, n'est pas d'une réalisation aisée et une question de méthode se pose ici, qui a son importance.

Une définition ne donne une signification claire et précise au défini qu'autant que tous les termes du définissant sont eux-mêmes connus sans obscurité ni confusion; pour définir une notion abstraite d'une façon satisfaisante il faut donc la rattacher à un concret très clairement connu et, pour cela, remonter par des chaînes de définitions ordonnées jusqu'à des notions tenues pour axiomatiques; il faut bien, en effet, pour les premières définitions, disposer de termes connus eux-mêmes sans définitions. En fait, la constitution de cette axiomatique de base est probablement, dans toute critique de signification, la tâche la plus importante et la plus délicate; les définitions ne viennent qu'après, elles sont souvent moins nombreuses qu'on pourrait le penser et il est relativement facile de les établir correctement pour peu qu'on s'attache à en écarter les tautologies et les cercles vicieux pour peu, surtout, qu'on s'attache à les ordonner, c'est-à-dire à ne pas inclure dans le définissant des termes plus abstraits que le défini lui-même. Procéder à l'étude critique d'une notion abstraite c'est donc, tout d'abord, rassembler un certain nombre de notions axiomatiques qu'on s'efforce de préciser, non pas en les définissant, ce à quoi l'on renonce par hypothèse, mais en les ajustant les unes aux autres, en distinguant autant que possible les diverses nuances contenues dans leur sens usuel et en écartant de la sorte les équivoques, les ambiguïtés et les confusions qui nuisent à leur clarté; c'est un travail de ce genre que nous nous proposons d'entreprendre pour éclairer et préciser les notions de probabilité et de hasard ainsi que certaines notions connexes; nous partirons de quelques notions qui paraîtront peut-être, au premier abord, inutilement lointaines et générales mais il n'est pas sans intérêt de prendre les choses d'un peu haut pour mettre en place ce dispositif axiomatique qui est, redisons le, le fondement indispensable de tout système de définition.

Parmi les mouvements dont notre corps est le siège et qui constituent notre activité, expression de notre vie, nous pouvons distinguer les mouvements relatifs des particules matérielles de ce corps les unes par rapport aux autres, mouvements dont l'ensemble constitue ce que nous pouvons nommer notre activité matérielle et les mouvements corpusculaires correspondant aux influx qui parcourent notre système nerveux, mouvements dont l'ensemble constitue cette autre forme de notre activité que nous pouvons nommer notre activité nerveuse. Notre activité matérielle étant provoquée par des contractions musculaires qui sont dues elles-mêmes à des influx afférents, nous pouvons dire que notre activité nerveuse est à l'origine de toutes les manifestations de notre vie.

Dans l'ensemble de notre activité nerveuse, nous pouvons distinguer une activité gnostique ou connaissance et une activité affective. Notre activité affective se manifeste essentiellement par des réactions d'attrait ou d'écart, nous n'en dirons rien de plus dans cette étude qui se rapporte à des notions qui sont exclusivement de l'ordre de la connaissance. Notre activité gnostique, elle, comporte plusieurs aspects qu'il importe de distinguer.

Connaitre c'est, tout d'abord, acquérir par les sens; le phénomène nerveux qui corres-

(1) La théorie de la relativité restreinte a eu, au fond, pour objet de dissiper un grave malentendu provenant d'une extension métaphorique de la notion de vitesse qui est une notion familière initialement applicable à des systèmes matériels et qui fut abusivement étendue à la lumière.

Nous avons indiqué, dans un autre ouvrage, comment on peut résoudre certaines difficultés de la géométrie en précisant le sens de quelques-uns des termes qu'elle utilise sans les avoir peut-être suffisamment critiqués (Marcel PROT, *Acribologie géométrique*, Hermann, Paris, 1940).

pond en nous à ce premier terme de notre activité gnostique comprend essentiellement des influx afférents qui vont des extrémités périphériques de notre système sensoriel, de notre œil, de notre oreille, du bout de nos doigts jusqu'à notre cerveau; l'expression « prendre connaissance » traduit bien ce premier aspect de la connaissance, ce premier temps qui apparaît, nous insistons sur ce point, comme une acquisition. Les empiristes paraissent avoir eu pleinement raison lorsqu'ils ont dit : *Nihil est in intellectu quod non prius fuerit in sensu* (il n'y a rien dans l'entendement qui ne vienne des sens); certes notre entendement utilise, amalgame les données de la sensation mais ces données constituent la matière première indispensable de toutes ses constructions.

Connaître, selon l'un des sens donnés à ce mot par le langage vulgaire, c'est ensuite conserver quelque chose des acquisitions venues de la sensation. On parle peu de cet intermédiaire statique entre diverses formes d'activité gnostique, sans doute parce qu'on le connaît mal; on pense à une sorte de trace, d'empreinte dans la structure du cerveau mais on ignore à peu près tout de sa nature intime; l'influence des lésions du cerveau sur le fonctionnement de notre mémoire ne laisse toutefois aucun doute sur son existence.

Un autre terme de notre activité est celui dans lequel reviennent à la conscience, dans lequel réapparaissent, au moins en partie, par le jeu de la mémoire, les acquisitions ainsi faites et conservées; nous nommons évocation ce mouvement de pensée qui nous restitue, sous forme d'images, sinon l'intégralité du moins quelque chose de nos anciennes acquisitions des sens. L'évocation met ainsi à notre disposition une partie du passé que nous avons acquis et conservé.

Un autre aspect élémentaire de notre activité gnostique correspond à la démarche de notre pensée par laquelle nous concevons des phénomènes que nous n'avons pas perçus, soit qu'il s'agisse de phénomènes présents ou passés situés hors de la portée de nos organes sensoriels, soit qu'il s'agisse de phénomènes futurs. Aucun mot ne désignant cet aspect de la connaissance, nous avons dû créer un néologisme pour pouvoir en parler et nous le nommons une crédition; pour éviter toute équivoque, nous nommons incréditation la crédition d'un phénomène passé, percrédition la crédition d'un phénomène présent et accréditation la crédition d'un phénomène futur.

Il convient de bien distinguer de la crédition la démarche de notre pensée que nous nommons supposition, dernière forme élémentaire de notre activité gnostique par laquelle nous concevons librement des phénomènes qui ne correspondent dans notre esprit à aucune réalité tandis que la crédition implique essentiellement toute la conformité avec la réalité dont nous sommes capables. Si les créditions et les suppositions sont des constructions, originales à certains égards de notre cerveau, elles sont cependant tissées des images de nos anciennes perceptions; la mosaïque est nouvelle quant à l'assemblage mais les morceaux en sont anciens; les images apparaissent ainsi, il est intéressant de le noter, comme des sous-éléments de nos constructions mentales, une même image étant susceptible d'être incluse dans des processus différents : évocations, créditions, suppositions.

Créditer un phénomène c'est donc le concevoir avec cette attitude personnelle indéfinissable, essentiellement axiomatique, que l'on nomme une conviction et qui fait que nous l'estimons, selon les cas, certain, probable, douteux, improbable ou impossible; la connaissance que nous avons de la signification de ces mots ne découle pas d'une définition, nous la connaissons par une expérience personnelle et directe et nous pouvons, tout au plus, classer, ordonner les notions qu'ils expriment, limiter les unes par les autres sans pouvoir en infuser la connaissance à celui qui ne l'aurait pas déjà. Une analogie peut aider à cette tâche; on peut, pour ordonner ces notions familières et indéfinissables, faire appel à une représentation géométrique et placer les différents degrés de conviction sur un segment de droite dont une extrémité correspondra, pour un phénomène donné, à la certitude qu'il s'est produit ou qu'il se produira tandis que l'autre extrémité correspondra à son impossibilité ou, ce qui revient au même, à la certitude qu'il ne s'est pas produit ou qu'il ne se produira pas, les points intermédiaires correspondant à divers degrés d'incertitude; on peut également faire appel à une représentation numérique, sorte de mesure associée à la représentation précédente, et affecter une attitude de conviction d'un coefficient compris entre zéro et l'unité. Ce dernier système de représentation conduit aux correspondances suivantes : certain = 1, impossible = 0, probable > 0,5, improbable < 0,5, possible \neq 0, douteux \neq 1. Cette notion de coefficient de conviction ne définit rien mais elle permet d'ordonner, d'ajuster les notions usuelles en lesquelles se détaille, en quelque sorte, la notion générale de crédition, elle permet d'établir entre elles certaines frontières et certaines symétries, elle oppose certain à impossible, probable à improbable, douteux à possible; elle ne donne pas la signification de ces termes mais elle l'éclaire et la précise en l'associant à une représentation particulièrement concrète et sûre.

L'usage a donné à ce coefficient de conviction le nom de coefficient de probabilité; il y a là, pensons-nous, une terminologie malheureuse à un double titre et qui offre un exemple de l'influence fâcheuse que peut avoir sur la pensée un langage équivoque. Une première équivoque vient, en effet, de ce que l'expression « coefficient de probabilité » attribuée au mot probabilité un sens différent de celui que nous avons retenu dans ce qui précède et qui est celui admis par le langage vulgaire; selon ce dernier sens, la probabilité ne correspond qu'à certains degrés de conviction tandis que dans l'expression « coefficient de probabilité » le mot probabilité prend un autre sens, plus général, et s'étend à tout le domaine

de la conviction. Une seconde équivoque vient de ce que l'expression « coefficient de probabilité d'un événement » fait penser à une sorte de caractère objectif de cet événement; or l'objectivité est ici tout illusoire car l'événement qui est tenu par l'un pour certain peut parfaitement, et légitimement, être tenu pour douteux ou impossible par un autre; l'expression « coefficient de conviction » paraît plus exacte et reflète mieux, semble-t-il, le caractère essentiellement personnel et subjectif du processus que constitue une crédition. Il n'est peut-être pas inutile d'insister sur ce qu'il y a de scabreux à parler d'un événement que nous n'avons pas perçu, qui peut-être n'a pas existé, qui peut-être n'existera jamais, comme s'il existait et de lui donner des attributs dans la forme même où l'on en donne aux événements effectivement perçus; nous disons, en effet, d'un phénomène qu'il est probable ou douteux comme nous disons qu'il est lumineux ou bruyant, alors que ce n'est pas le phénomène qui est probable ou douteux mais seulement la crédition que nous en concevons; l'incorrection, dira-t-on, peut-être, n'est vraiment pas grave; elle l'est, pensons-nous, plus qu'elle ne le paraît parce qu'elle est fort insidieuse et parce qu'après quelques incorrections, toutes aussi peu graves que celle-là, la pensée peut se trouver étrangement égarée.

Lorsque l'événement objet d'une crédition est une action, le mot possible, outre le sens qui vient d'être précisé dans ce qui précède, prend parfois le sens d'exécutable; si un acte est tenu pour possible c'est évidemment qu'il est considéré comme exécutable, mais un acte parfaitement exécutable n'a parfois aucune possibilité. Nous avons proposé le néologisme « praxible » pour lever toute ambiguïté et pour libérer le mot « possible » de ce second sens; il nous est aisé de concevoir des actes de démence qui nous seraient tout à fait praxibles mais qui sont cependant tout à fait impossibles parce que nous n'avons absolument aucune envie de les accomplir. Ce n'est sans doute pas là une distinction très importante mais elle écarte une équivoque et les équivoques empoisonnent la pensée.

Le mouvement de pensée qui conduit à la conception d'une crédition est proprement ce que l'on peut nommer un raisonnement. On s'étonnera sans doute, de cette définition si peu conforme à celle que l'on donne habituellement de ce mot sous l'inspiration plus ou moins directe de la scholastique qui était, il faut bien le reconnaître, beaucoup trop formaliste et assez peu psychologue. Il semble que notre définition correspond bien à ce que l'introspection nous montre, le raisonnement élémentaire étant essentiellement cette sorte d'élaboration personnelle, ce cheminement de pensée, cette progression qui aboutit à la formation d'une conviction relative à un phénomène que nous n'avons pas perçu, qu'il soit passé, présent ou futur. Un raisonnement élémentaire part, d'une façon plus ou moins explicite, de certaines données : perceptions, évocations, créditions, suppositions, qui en constituent les prémisses et s'achève en une crédition qui en constitue la conclusion. Il convient de noter, en effet, que le raisonnement peut prendre comme point de départ non seulement les données réelles, perceptions, évocations, créditions, mais aussi des données hypothétiques résultant d'une supposition; après avoir fait œuvre de libre imagination en concevant une supposition, l'esprit peut, en quelque sorte, se plier de nouveau à la réalité et chercher par raisonnement quelles seraient les conséquences de cette supposition si elle venait elle-même à se réaliser; pour éviter toute ambiguïté nous nommons succrédition la crédition qui découle ainsi d'une supposition. Une succrédition nécessaire est celle dont la réalisation apparaît comme devant être très certaine si la supposition dont elle découle vient à se réaliser. A la succrédition s'attache une conviction — ou, si l'on veut, une probabilité — que l'on peut dire hypothétique, tandis qu'on peut dire catégorique la conviction — ou la probabilité — qui s'attache à la crédition achevant un raisonnement dont les prémisses sont réelles.

Deux phénomènes sont indépendants lorsque la perception, l'évocation, la crédition ou la supposition de l'un d'eux n'est pas susceptible d'influer sur les créditions que l'on peut concevoir à l'égard de l'autre; ils sont dépendants ou liés dans le cas contraire; en d'autres termes, deux phénomènes A et B sont dépendants si la connaissance de A, introduit dans les prémisses d'un raisonnement dont la conclusion est relative à B, est susceptible de modifier soit la forme même de cette conclusion soit le degré de conviction qu'on y attache. Deux phénomènes peuvent donc être liés d'une façon plus ou moins serrée, la connaissance de l'un d'eux entraînant parfois une certitude à l'égard de l'autre tandis qu'elle ne modifie parfois que de peu le degré de conviction que lui fait attribuer la connaissance d'autres phénomènes qui en sont également dépendants. Il résulte de cette définition que la dépendance ou l'indépendance de deux phénomènes est d'appréciation purement personnelle et que tels phénomènes jugés indépendants par l'un peuvent être jugés dépendants par un autre; cette conclusion suscitera peut-être quelque résistance et l'on objectera peut-être que deux phénomènes sont dépendants ou indépendants quelle que soit l'opinion que les uns ou les autres puissent avoir à leur égard, ils sont dépendants ou indépendants « en soi »; il y a là, recouverte par des mots qui ne veulent rien dire, une erreur grave, presque tragique car c'est sur des erreurs comme celle-là que s'est édifiée la métaphysique, cette calamité humaine.

On peut se demander comment on conçoit une crédition, par quel mécanisme la conviction naît dans notre esprit au sujet d'un phénomène que nous n'avons cependant pas perçu. Le procédé mis en œuvre est simple et toujours le même, il constitue ce que les mathématiciens nomment une extrapolation et notre connaissance de l'avenir, par exemple, n'est

faite que d'un petit prolongement de notre connaissance du passé; c'est ainsi que lorsque nous avons maintes fois perçu une certaine structure toujours semblable à elle-même nous sommes portés — en l'absence d'indication contraire — à penser que nous la percevrons encore semblable à ce qu'elle était; lorsque nous avons observé qu'un certain phénomène A était fréquemment suivi d'un certain phénomène B nous sommes portés, lorsque nous observons une fois de plus le phénomène A, à créditer l'apparition du phénomène B avec une conviction d'autant plus grande que la séquence AB aura été plus fréquemment observée; si nous avons observé pendant assez longtemps qu'un phénomène se déroule selon une certaine fonction du temps nous serons portés à créditer l'état de ce phénomène à une époque ultérieure en faisant état de cette même fonction; enfin, si des dénombrements statistiques nous ont montré qu'un phénomène avait, parmi d'autres, une fréquence p nous serons portés — toujours en l'absence d'indication contraire, bien entendu — à créditer le renouvellement de ce phénomène avec une probabilité relative égale à p ou, du moins, voisine de p . Ce processus psychologique d'extrapolation, d'une importance capitale, s'exprime, dans certains cas types, par ce que nous nommons une loi : les hommes sont mortels, sin $i = n \sin r$, il naît chaque année en France, un peu plus de garçons que de filles, etc...; il faut bien voir qu'une semblable formule, qui comporte ordinairement un verbe à l'indicatif présent, a, en fait, un double sens dont l'un est au passé et l'autre au futur : exprimer, par une loi, que les choses « sont » de telle manière signifie en effet, qu'on a observé, d'une façon plus ou moins régulière, qu'elles étaient ainsi et qu'on crédit en conséquence, d'une façon plus ou moins assurée, qu'elles le seront encore. Une loi résume, en somme, un raisonnement. On peut distinguer des lois radicales qui expriment une certitude et des lois stochastiques qui n'expriment qu'une probabilité plus ou moins grande.

Nos créditions n'ont quelque assurance que dans certains cas qu'il est intéressant de noter. Citons, tout d'abord, le cas où elles s'appliquent à des phénomènes étroitement limités par des prémisses supposées, explicites ou implicites; les lois physiques, par exemple, autorisent des créditions d'une grande certitude, limitée seulement par les erreurs d'observation, mais il importe de remarquer qu'elles supposent des phénomènes étroitement définis, isolés avec précaution et dont la simplicité est souvent artificielle; la loi est exacte, la crédition est sûre seulement lorsque les prémisses sont réalisées. Tous ceux qui ont pratiqué l'expérimentation, qui ont pris l'habitude de vivre dans le concret, au contact des choses, empiristes par formation, ont à ce sujet une manière de voir qui s'oppose à celle des idéalistes, tenants d'une vérité formelle parce qu'ils sont gens de cabinet. Il est, pour les premiers, aujourd'hui hors de doute que les mathématiques ne sont qu'une partie de la physique tandis que les seconds y voient de pures créations de l'esprit, sans doute parce qu'ils ignorent ou parce qu'ils ont perdu de vue le contact qu'elles ont avec la réalité concrète et qui en fait tout le prix. Si l'on rend aux lois mathématiques leur caractère de lois physiques on peut leur appliquer la remarque que nous faisons quelques lignes plus haut et noter que la certitude des créditions qu'elles expriment n'est entière qu'autant que leurs hypothèses sont réalisées; prenons, par exemple, la loi $2 + 2 = 4$, les trois premiers termes de cette formule symbolique expriment une supposition et les deux derniers une succrédition, or cette succrédition n'est nécessaire que dans certains cas où les hypothèses implicitement admises pour l'établissement de la loi se trouvent réalisées et il est aisé de citer des cas où cette succrédition n'aurait aucune possibilité; il est bien exact, en effet, qu'en ajoutant 2 oranges et 2 oranges on obtient 4 oranges, qu'en ajoutant 2 litres d'eau et 2 litres d'eau on obtient 4 litres d'eau, mais on sait, par contre, qu'en ajoutant 2 litres d'éther et 2 litres d'éther on n'obtient pas 4 litres de ce produit très volatil, si l'on ne prend pas des précautions spéciales pour en éviter l'évaporation; si l'on ajoute 2 litres d'alcool et 2 litres d'eau on n'obtient pas non plus 4 litres de mélange en raison d'un phénomène de contraction bien connu; si l'on ajoute 2 litres de sable et 2 litres de sable, on n'obtient 4 litres de sable que dans le cas où les deux parties mélangées ont exactement la même composition granulométrique, les grains d'un sable plus fin étant susceptibles de se placer entre les grains d'un sable plus gros. Rappeler que les lois de la géométrie euclidienne et de la mécanique newtonienne ne sont valables avec exactitude que dans un domaine limité n'est plus aujourd'hui qu'un lieu commun, les créditions que ces lois autorisent ne sont nécessaires que lorsqu'elles s'appliquent à des phénomènes d'un certain ordre de grandeur effectivement réalisé dans les observations qui ont permis de les établir.

Nos créditions ont encore quelque assurance lorsqu'elles s'appliquent à des phénomènes qui ne varient que d'une manière lente et continue ou, ce qui revient au même, lorsqu'elles s'appliquent à des phénomènes peu éloignés de nous dans le temps et dans l'espace, bref, lorsqu'elles ne constituent que de faibles et prudentes extrapolations du connu à l'inconnu. C'est ainsi que les ingénieurs doivent, par profession, concevoir des créditions d'une grande certitude relativement à la résistance de leurs constructions et l'expérience montre qu'ils y réussissent assez souvent; comment s'y prennent-ils. Notons tout d'abord que ce que l'expérience montre, si l'on y regarde de près, c'est que si la sécurité obtenue par les ingénieurs est grande, elle n'est cependant jamais complète; il suffit de prendre les exemples en nombre suffisant pour voir que les créditions techniques ne peuvent comporter, même au prix des précautions les plus grandes, et les plus coûteuses, qu'une conviction limitée. Ces précautions, quelles sont-elles? La plus importante d'entre elles consiste, pour l'ingé-

nieur, à ne rien attendre d'une expérience à venir qui n'ait été déjà observée au cours d'une expérience passée; comme il faut bien, de temps en temps, réaliser des constructions nouvelles au moins par quelques côtés, une précaution essentielle consiste à procéder, au préalable, à des expériences diverses : expériences symboliques par dessins, épures, calculs et maquettes, essais sur modèles de la construction projetée, essais sur prélèvements des pièces ou matériaux à employer, de façon que la créditation relative à la sécurité de la construction résulte d'une convergence de raisonnements et de façon que l'expérience que constitue finalement la réalisation de cette construction ne comporte que le minimum d'extrapolation par rapport aux expériences antérieures. Si l'on examine d'une façon plus détaillée la technique des essais sur prélèvements (1), technique qui consiste à observer comment se comportent effectivement quelques échantillons prélevés sur l'ensemble d'une fourniture pour concevoir une créditation au sujet du reste de cette fourniture, on constate combien sont limitées les possibilités que nous avons de dépasser l'expérience et combien il est indispensable pour étayer une conviction, de réunir un faisceau de convictions fondé sur de multiples observations.

La conclusion de cette étude sur la notion de probabilité se doit de rejoindre la remarque qui en a fait l'introduction et nous essayerons d'établir, brièvement d'ailleurs, comment se présentent les bases du calcul des probabilités selon les vues qui viennent d'être exposées.

Le calcul des probabilités ne saurait, nous pensons l'avoir montré, reposer sans cercle vicieux sur une définition de la probabilité puisque c'est là une notion essentiellement axiomatique; par ailleurs, il ne considère pas des probabilités catégoriques, il ne manie que des probabilités hypothétiques, il s'agit donc, avant tout, de préciser les suppositions sur lesquelles il repose, de formuler les hypothèses qui donnent un sens à ses symboles et à ses formules fondamentales; ces hypothèses paraissent pouvoir s'exprimer de la façon suivante :

Nous considérons N événements présentant tous un caractère commun a et présentant, chacun, un caractère individuel b_1, b_2, \dots, b_N ; nous admettons, d'une part, comme certain, que l'un de ces N événements, et un seul, se produira au cours de l'expérience que nous considérons (1^{re} hypothèse); nous admettons, d'autre part, que la production de l'un quelconque d'entre eux a la même probabilité que la production de n'importe quel autre (2^e hypothèse); si l'on admet, d'autre part, le système de représentation qui fait correspondre le nombre 1 à la certitude qu'un phénomène se produira et le nombre zéro à la certitude qu'il ne se produira pas; il résulte manifestement de cet ensemble d'hypothèses que l'on peut succéder l'apparition du caractère a avec une conviction — ou une probabilité — correspondant à 1 et l'apparition de l'un des caractères b_1, b_2, \dots, b_N avec une conviction — ou une probabilité — correspondant à $\frac{1}{N}$. Si nous admettons que m de ces N événements ont un caractère commun c et que les $N-m$ autres ont un caractère commun d (3^e hypothèse), nous pourrons succéder l'apparition du caractère c avec la probabilité $p = \frac{m}{N}$ et l'apparition du caractère d avec la probabilité $q = \frac{N-m}{N} = 1 - \frac{m}{N} = 1 - p$.

Il est aisé de montrer que ces hypothèses peuvent être approximativement réalisées par certains dispositifs matériels tels que : dés, cartes, roulette, sac de billes, etc... La première hypothèse correspond à la supposition que l'on se servira du dispositif; si je jette les cartes au feu ou si j'enferme le sac de billes dans un placard aucun problème de probabilité ne se pose plus. La seconde hypothèse correspond à l'observation supposée faite, entre les cartes, les faces des dés, les billes, etc..., d'une similitude telle qu'elle ne permette pas de considérer l'apparition de l'une d'entre elles comme plus probable que l'apparition d'une autre. Il importe de noter, à ce sujet, que le fonctionnement même du dispositif constitue une expérience qui peut faire apparaître une dissemblance que n'avaient pas fait apparaître d'autres expériences telles que : observations à l'œil nu, à la loupe ou au microscope, mesures de dimensions, pesées, etc...; quelles que soient les précautions qu'on ait prises lors de la construction d'une roulette, par exemple, pour réaliser une complète similitude entre les petites cuvettes où la boule peut s'arrêter, on conçoit qu'un fonctionnement prolongé de cette roulette fasse apparaître qu'un numéro sort plus souvent, ou moins souvent, que ne le voudrait un calcul basé sur l'hypothèse d'une égale probabilité de sortie de chaque numéro; ce serait la preuve que cette hypothèse ne se trouve pas réalisée.

L'addition des probabilités peut se concevoir de la façon suivante : supposons que, parmi les N événements également probables et dont un est certain, m événements aient le caractère a et que n événements, différents des m événements précédents aient un caractère b : l'apparition du caractère a peut être créditée avec une probabilité $p = \frac{m}{N}$ et l'apparition du caractère b peut être créditée avec une probabilité $q = \frac{n}{N}$; dans ces conditions, l'apparition du caractère « a ou b » peut être créditée avec une probabilité $p + q$; les conditions dans lesquelles cette addition est définie impliquent, bien entendu, que le total $p + q$

(1) Marcel Protr, *Signification et utilisation des essais sur prélèvements*. Circulaire, série I, n° 6, de l'Institut technique du Bâtiment et des Travaux publics. Paris, 1942.

reste toujours inférieur à l'unité, le total $m + n$ pouvant être, au plus, égal à N . On décrirait ensuite sans difficulté les conditions dans lesquelles peut se réaliser pratiquement la multiplication des probabilités en imaginant, par exemple, un certain nombre de sacs de billes placés eux-mêmes dans un grand sac.

Ces quelques précisions ne changeront assurément rien au calcul des probabilités mais elles en écarteront peut-être quelques obscurités dont il est assez malaisé de se défaire.

Nous pouvons essayer maintenant d'étudier, à la lueur de ce qui précède, la signification du mot hasard. Une telle étude, nous pensons le montrer, n'est pas sans intérêt pratique car si l'on se propose de donner au mot hasard telle ou telle signification arbitraire, prétextant que le sens d'un mot est de pure convention on s'aperçoit très vite qu'il est, en fait, impossible de se défaire complètement des sens attribués au mot par l'usage et que l'on prétendait délaissier; ces sens, réapparaissent insidieusement et viennent tendre à la pensée de véritables pièges : mieux vaut, semble-t-il, dénombrer ces différentes significations, les regarder bien en face et attribuer, le cas échéant, à un néologisme tel ou tel sens précis que l'on veut isoler.

A) Selon un premier sens, nous disons d'un événement que c'est un hasard lorsqu'il se produit sans que nous l'ayons prévu et qu'il nous surprend plus ou moins; un ami vient me voir que j'avais perdu de vue depuis longtemps et auquel j'étais loin de penser, cette visite est pour moi un hasard; elle n'en est pas un pour mon ami, bien entendu.

B) Nous disons d'un événement, passé, présent ou futur, que c'est un hasard lorsque nous ne lui attribuerions qu'une faible probabilité si nous avions à le crédier; lancer un trépid en l'air et le voir retomber sur ses pieds est un hasard selon un exemple emprunté à Aristote; gagner à la loterie est un hasard au sens B mais n'en est pas un au sens A pour celui qui gagne s'il en a longuement caressé l'espoir.

C) Nous disons aussi que c'est un hasard d'un événement auquel nous n'attribuons pas une grande probabilité; tirer une boule blanche d'un sac qui contient à peu près autant de boules blanches que de boules noires est un hasard selon ce sens, alors que ce n'en est pas un selon le sens B qui correspondrait au tirage d'une boule blanche dans un sac qui contiendrait, par exemple, 2 ou 3 boules de cette sorte parmi une centaine de boules noires.

D) On dit parfois d'un événement que c'est un hasard parce qu'on ignore tout du mécanisme qui le produit; on exprime simplement par là l'incapacité où l'on est de le comprendre s'il s'est déjà produit ou de lui attribuer aucune probabilité, grande ou petite, s'il ne s'est pas encore produit.

E) Lorsqu'un événement est la conséquence d'une action humaine, dire de lui que c'est un hasard signifie ordinairement que cette conséquence n'a pas été voulue; dire par exemple, d'un objet pris parmi d'autres, qu'on l'a pris au hasard signifie qu'il n'a pas été choisi intentionnellement, qu'on n'a pas voulu prendre celui-là plutôt qu'un autre, qu'on l'a pris, par exemple, les yeux fermés.

F) On impute parfois au hasard, comme on l'imputerait au destin, un événement résultant d'un concours anormal de circonstances qui fait penser à quelque volonté mystérieuse, bienveillante ou malveillante. Les sens E et F introduisent dans la notion du hasard une idée d'intention, un élément de finalité qui ne se trouve pas dans les quatre premiers sens qui sont d'ordre purement gnostique.

G) On dit encore d'un événement que c'est un hasard lorsqu'il apparaît qu'une petite modification de cet événement serait susceptible d'entraîner des conséquences importantes; selon une formule elliptique parfois employée, un hasard c'est une petite cause qui a de grands effets; Cléopâtre et Cromwell fournissent habituellement les exemples qui permettent d'illustrer cette signification.

H) Le sens donné au mot hasard insiste parfois sur le caractère fâcheux de certains événements de probabilité non nulle; c'est ce sens que retient le verbe hasarder; hasarder c'est risquer. Les sens G et H introduisent, dans la notion de hasard, des jugements de valeur qui ne figurent dans aucun des six premiers sens.

Notons qu'au point de vue grammatical le mot hasard est une racine substantive tandis qu'au point de vue logique la notion de hasard est une notion adjective; les définitions qui précèdent montrent en effet que, sauf pour le sens F, il s'agit de qualifier certains événements. L'usage a été, dans ce cas comme dans tant d'autres, mauvais constructeur de mots et il a commis une erreur en créant un substantif là où il aurait dû créer un adjectif.

Il apparaît, certes, que ces diverses significations, tout en étant indiscutablement distinctes, ont entre elles des analogies, des voisinages, qui leur donnent un certain air de famille et il est aisé de concevoir des exemples où deux de ces sens se rejoignent, l'accent étant seulement mis tantôt sur l'un, tantôt sur l'autre, selon les cas d'espèce.

Il paraît toutefois impossible de donner de toutes ces significations une définition commune, elles n'ont de commun que l'étiquette. On peut bien noter, sans doute, que toutes ces significations du mot hasard sont, à des titres divers, des prolongements de certains processus de crédition mais si l'on peut trouver dans cette notion une origine commune plus ou moins lointaine qui constitue entre ces diverses significations une sorte de lien on ne saurait, pour autant, y trouver une commune définition.

Le mot hasard constitue ainsi un exemple frappant de ce que peut être un mot confus et l'on conçoit aisément, lorsqu'on a sous les yeux le tableau de significations, sans doute encore incomplet, que nous venons de dresser, à quels malentendus, à quels égarements un

tel mot peut prêter. Certes, le mot hasard peut être parfaitement clair et univoque lorsqu'il est pris dans un contexte qui en oriente suffisamment le sens mais quel n'a pas été l'embarras des philosophes qui ont pris le mot hasard tout seul, ce faux substantif, et qui se sont demandé : Qu'est-ce que le hasard? La discussion des formules auxquelles ils ont cru pouvoir s'arrêter ne saurait avoir qu'un intérêt historique; le hasard, pensons nous, c'est tout cet ensemble de significations que l'usage a attachées au mot et que la tradition nous a léguées; la première tâche qui s'impose, lorsqu'on se demande ce que c'est que le hasard, c'est de rassembler et de classer ces significations; on peut ensuite, par convention expresse et pour un usage particulier, isoler l'une de ces significations mais si l'on ne fait pas, en même temps, usage d'un néologisme on risque de rester difficilement maître de cette convention. Par contre, si l'on choisit l'une de ces significations et si l'on prétend que celle-là, seule, définit ce qu'est le hasard, comme d'illustres esprits l'on fait, n'est-il pas évident qu'on est victime d'une puérole illusion et qu'on exprime simplement une préférence personnelle, ce qui ne saurait avoir de bien grandes conséquences.

Il nous reste à examiner, à la lueur des discriminations qui viennent d'être faites, la signification qu'il convient de donner aux expressions « loi de hasard » et « répartition selon une loi de hasard », fréquemment utilisées avec des acceptions peu précises.

Pour schématiser la question nous considérerons des points a_i répartis sur un segment de droite AB, la position de chacun d'eux étant définie par son abscisse x_i comptée à partir d'une origine O située en un point quelconque de l'axe qui porte AB; on peut considérer soit une répartition discontinue, les abscisses ne pouvant prendre, par exemple, que des valeurs entières, soit une répartition continue, l'abscisse de chaque point pouvant avoir une valeur quelconque. Le schéma s'étendrait évidemment sans difficulté à une surface, à un volume ou à un hyperespace. Dans quelles conditions peut-on dire que ces points sont répartis « au hasard » ou « selon une loi de hasard »?

Une première répartition selon une loi de hasard correspond au cas où chacun des points a_i vient se placer entre A et B sans qu'on puisse accrédir que ce point se placera dans un intervalle plutôt que dans tout autre, c'est-à-dire au cas où l'abscisse de chaque point est une variable aléatoire telle que toutes les valeurs qu'elle peut prendre sont comprises entre x_A et x_B et toutes également probables; la probabilité d'apparition d'un point dans chaque intervalle $x, x + dx$ est alors représentée par un élément de surface limité par une parallèle à AB.

Si l'on considère n valeurs de la variable aléatoire qui vient d'être définie, la moyenne de ces n valeurs définit à son tour l'abscisse x_j d'un point b_j compris, lui aussi, entre A et B; on peut se demander quelle est la probabilité pour que ce point se place dans un intervalle donné $x, x + dx$. Le problème a été traité complètement par M. Baticle, inspecteur général des Ponts et Chaussées, qui a donné la formule exprimant cette probabilité $P dx$ en fonction de x (1); la courbe qui représente la fonction P , formée d'arcs successifs de parabole de degré $n - 1$ qui se raccordent tangentiellement pour les valeurs entières de x dès que n est égal ou supérieur à 3, affecte l'allure bien connue d'une courbe en cloche (2); les points b_j sont répartis au hasard en ce sens que l'on ne peut accrédir avec certitude l'intervalle où chacun d'eux viendra se placer, mais ce hasard n'est plus le hasard du cas précédent, c'est un hasard de seconde espèce qui donne à certaines valeurs de l'abscisse x_j une probabilité plus grande qu'à d'autres; l'abscisse du milieu de l'intervalle AB est la valeur la plus probable de x_j .

La racine $p^{\text{ième}}$ de la moyenne des puissances $p^{\text{èmes}}$ de n valeurs de la variable aléatoire primitivement envisagée représente, de même, l'abscisse x_k d'un point c_k compris entre A et B lorsque p est supérieur à zéro. La courbe définissant la probabilité pour que le point c_k se place dans un intervalle donné est dissymétrique, sa forme dépend de la valeur de n et de p et de la position de l'origine O par rapport à AB. Chacune de ces courbes correspond à une nouvelle loi du hasard.

Si n est très grand, la courbe de répartition des points b_j ($p = 1$) se réduit pratiquement à une normale à l'axe portant AB; la loi de hasard devient alors une loi de certitude car tous les points se placent dans un même intervalle. De même, si p est grand, n étant quelconque, la courbe de probabilité définissant la répartition des points c_k se réduit à une normale à l'axe qui porte AB au voisinage de l'extrémité d'abscisse maximum; on retrouve, là encore, une loi de certitude.

Ce schéma, qui définit les lois de hasard de première espèce, de deuxième espèce, etc., permet de préciser et d'ordonner les différentes significations qu'on peut attribuer au terme « loi de hasard ». Les hasards des diverses espèces s'ordonnant selon le degré d'incertitude qu'ils impliquent, depuis l'égale probabilité jusqu'à la certitude, on peut trouver dans ce schéma une définition commune des sens gnostiques du mot hasard, et même de ce que les autres sens comportent de gnostique, en disant qu'un événement est un hasard lorsqu'on n'a pas de certitude à son sujet. Cette attitude générale d'esprit comporte toute-

(1) *Comptes rendus à l'Académie des Sciences* : 26 juin 1933, 25 septembre 1933, 12 novembre 1935, 17 février 1936.

(2) Quoique cette courbe n'ait, mathématiquement, rien de commun avec la courbe de Gauss, l'expérience montre cependant qu'on peut déterminer une courbe de Gauss qui se superpose à la courbe de M. Baticle, avec une approximation qui est excellente même pour $n = 3$.

fois diverses modalités que traduisent précisément les divers sens du mot hasard tels que nous les avons précédemment distingués : un événement est un hasard lorsqu'on n'a conçu, à son sujet, qu'une probabilité, petite ou grande (sens B et C), lorsqu'on a été dans l'incapacité de concevoir à son sujet aucune probabilité (sens D) ou encore, tout simplement, lorsqu'on n'y a pas pensé (sens A).

Nous n'avons certainement pas, par ces quelques réflexions, épuisé une question particulièrement délicate et qui demanderait des développements notablement plus longs que ceux que nous venons de lui consacrer; nous avons surtout voulu indiquer une méthode qui nous paraît susceptible de dissiper les équivoques et les obscurités qu'un long usage de la pensée vulgaire a accumulées sur le langage et qui pèsent parfois lourdement sur notre pensée (1).

DISCUSSION

Intervention de M. René Roy. — Tout en reconnaissant qu'il est indispensable de procéder, comme l'a fait M. PROT, à une minutieuse analyse de la terminologie et des circonstances qui président à la formation de notre opinion sur la probabilité d'un événement, M. René Roy éprouve quelque difficulté à suivre le conférencier lorsque celui-ci attribue un caractère purement subjectif à l'évaluation de la probabilité.

M. PROT ayant fait observer que l'aspect objectif généralement reconnu à cette notion tenait, en réalité, à l'incorrection de la terminologie et à l'absence d'une analyse rigoureuse des circonstances dans lesquelles nous formons notre jugement de probabilité. M. René Roy insiste sur le fait que si, en théorie, il est possible de distinguer, entre la phase subjective et la phase objective de tout raisonnement qui permet d'évaluer une probabilité, conformément à la distinction établie par M. FRÉCHET, il est difficile de ne pas admettre qu'en fait il existe de nombreux cas où la phase subjective est pratiquement évanescence à raison de la communauté de situation où se trouvent les diverses personnes appelées à émettre leur opinion. Dans ces conditions, c'est la conception courante d'une probabilité objective qui paraît bien devoir s'imposer. Cette conclusion ne saurait toutefois s'opposer à l'impérieuse nécessité de prendre toutes les précautions désirables avant de formuler notre jugement.

Observations de M. FRÉCHET. — La communication de M. PROT touchait un terrain brûlant et seule l'heure tardive a empêché de nombreux auditeurs de participer à la discussion.

M. FRÉCHET était de ceux-là et s'excuse d'avoir dû se limiter à présenter ses observations par écrit.

Le sujet traité par M. PROT touche aux principes d'une science et, si paradoxale que semble être, au premier abord, une telle situation, ce sont précisément sur les principes que les savants cessent de se trouver d'accord.

On ne s'étonnera donc pas si les vues de M. PROT, si brillamment exposées, ne représentent que l'une des thèses entre lesquelles se partagent ceux qui s'intéressent aux principes du calcul des probabilités.

C'est précisément pour limiter le conflit entre les diverses écoles qu'il y a lieu d'établir une distinction très nette entre les résultats de la méthode axiomatique — sur lesquels tous les mathématiciens sont d'accord — et leur interprétation sur laquelle ils le sont beaucoup moins. C'est là un des points où M. PROT aurait pu pousser plus loin son effort pour apporter plus de clarté. Dans la méthode axiomatique, qu'elle s'applique à la géométrie, à l'algèbre comme au calcul des probabilités, il y a toujours certains éléments qui ne sont pas définis et auxquels on peut donner des interprétations diverses mais qui sont soumises à certaines règles d'où l'on tire toute une suite de conséquences. La probabilité est, dans cette méthode, un nombre auquel on n'attache aucune signification particulière mais qui est associé, par hypothèse, à un événement et à une catégorie d'épreuves déterminées et ceci de façon à satisfaire à certaines conditions comme le principe des probabilités totales. Dans son exposé, M. PROT associe à ce nombre une « conviction » avec laquelle on peut « accrédir » l'événement. C'est là sortir du domaine de l'axiomatique commune aux probabilités — et qui rend indiscutables les théorèmes du calcul des probabilités — pour les associer à l'une de leurs interprétations possibles.

M. PROT s'est attaqué très vivement à l'incorrection du langage et aux « tragiques erreurs » qui peuvent en résulter. Il a tout à fait raison, en général, mais je ne puis le suivre dans tous les exemples qu'il a cités. Il commence par déclarer que « l'usage a donné à ce coefficient de conviction le nom de coefficient de probabilité » et il s'étonne ensuite qu'on attribue à ce coefficient de probabilité un caractère objectif comme il l'explique par plusieurs exemples. Ce qu'il montre ainsi, c'est qu'au moment où l'on donne à la probabilité une valeur numérique, l'usage lui donne, en effet, un caractère objectif. Il n'y a ni confusion ni erreur quand, s'attachant à ce sens, on dit « d'un phénomène qu'il est probable ou douteux comme nous disons qu'il est lumineux ou bruyant » ou que « deux phénomènes sont dépen-

(1) Nous avons développé cette idée, d'une façon générale, dans un ouvrage intitulé : *Acribologie générale*, publié à Paris, chez Hermann, en 1940.

dants quelle que soit l'opinion que les uns ou les autres puissent avoir à leur égard ». Le langage ordinaire est, en tout cela, consistant et cohérent. Mais, bien entendu, les partisans de la thèse, déjà exposée maintes fois, de la subjectivité de la probabilité ont le droit de donner de la probabilité une signification différente de celle du langage ordinaire et alors, ce que M. PROT a bien montré, c'est qu'il en résulte pour eux l'obligation de changer, par voie de conséquence, la signification usuelle d'autres mots du langage courant tels que dépendant et indépendant.

Au cours de la discussion, il est apparu que M. PROT se ralliait à la conception d'une probabilité dépendant de nos connaissances. M. René ROY a bien voulu rappeler la distinction que j'ai préconisée entre la phase subjective et la phase objective de tout raisonnement qui permet d'évaluer une probabilité. Je voudrais préciser mes vues sur ces deux points intimement liés.

A mon avis on ne peut définir la probabilité d'un événement sans préciser dans quelle catégorie d'épreuves il est défini. La probabilité de décès d'un homme de 45 ans, pris au hasard, n'est pas la même s'il est pris au hasard dans l'ensemble des Français ou au hasard dans l'ensemble des Français tuberculeux. Les connaissances que nous avons nous permettent de décider utilement de la catégorie d'épreuves où sera définie la probabilité qui nous intéresse. C'est une décision subjective. Cette décision prise, le problème étant posé, il ne dépend plus de nous d'apprécier la probabilité cherchée; nous sommes dans la phase objective. On a cité l'exemple d'un actuair et d'un médecin pour montrer comment une probabilité de décès d'un assuré peut avoir des valeurs différentes suivant les connaissances de celui qui calcule la probabilité. En réalité, l'actuair et le médecin ont posé deux problèmes différents : pour l'actuair, c'est l'ensemble des assurés qui seul l'intéresse; sa catégorie d'épreuves, c'est un choix dans cet ensemble. Le médecin qui examine l'assuré réduit inconsciemment cet ensemble à celui des individus possédant les caractéristiques pathologiques qu'il a notées. Mais si le médecin se trouve être en même temps un actionnaire de la Compagnie il pourra très bien, malgré ses connaissances, se rassurer en se rappelant qu'au point de vue de ses intérêts pécuniaires, c'est la première probabilité qui l'intéresse et non la seconde.

Restant partisan de la thèse de la probabilité objective, je me félicite néanmoins que les membres de la Société aient eu, grâce à M. PROT, l'occasion d'entendre un exposé très persuasif d'une autre thèse qui a été soutenue ailleurs par des probabilistes éminents.

Réponse de M. PROT. — J'estimerai n'avoir obtenu qu'un médiocr résultat et n'avoir accompli qu'un travail peu fécond si j'avais seulement défendu une thèse connue sans réussir à rapprocher quelque peu les partisans de la probabilité objective et ceux de la probabilité subjective.

Quoique je n'aie pas spécialement pensé à cette controverse en essayant de rassembler, en une sorte de synthèse psychologique, quelques vues cohérentes sur la probabilité, j'espère cependant, à l'aide de cette étude, dissiper quelques équivoques et résoudre quelques malentendus.

L'origine de la discussion — et je crois pouvoir dire du malentendu — entre « objectivistes » et « subjectivistes » me paraît se trouver, pour une part, dans la notion même d'objectivité; cette notion est équivoque, elle a deux sens entre lesquels on oscille involontairement, entre lesquels on hésite et qui sont inconciliables. Lorsqu'on a, plus ou moins consciemment, fixé son choix sur l'une de ces significations on est porté, par là même, à se ranger dans l'un ou dans l'autre des camps.

A quoi s'appliquent les adjectifs « objectif » et « subjectif »? Il semble bien que ce soit à nos jugements. Ce sont nos différents mouvements de pensée élémentaires, gnostiques ou affectifs, qui peuvent, selon les cas, être qualifiés d'objectifs ou de subjectifs. Notre discussion considère plus particulièrement les jugements créditifs dont on se demande si la probabilité qu'ils conçoivent est objective ou subjective. Que faut-il entendre par là?

Est objectif, selon un premier sens, ce qui s'offre à nous de l'extérieur, à la manière d'un objet. Sans doute, tous nos jugements ont quelque chose d'intérieur à nous même, ils sont personnels par quelques côtés, mais pour certains d'entre eux, pour nos jugements perceptifs, par exemple, qui nous donnent la connaissance du monde extérieur à notre corps, l'élément extérieur peut être considéré comme dominant et comme s'imposant à toute personne qui jouit du fonctionnement normal de ses organes sensoriels périphériques. Les perceptions intérieures ou proprioceptives, kinesthésiques ou douloureuses, sont, par contre, subjectives car elles nous donnent une certaine connaissance de notre propre corps et non des objets extérieurs. Selon ce sens — qui est celui que nous avons retenu — tous nos jugements autres que nos perceptions extérieures peuvent être dits subjectifs parce que l'élément intérieur et personnel devient manifestement dominant, l'objet qui commande, en quelque sorte, le jugement perceptif extérieur faisant alors défaut; c'est le cas des jugements gnostiques que nous avons nommés : évocations, suppositions, créditions, c'est aussi le cas, *a fortiori*, de tous nos jugements affectifs.

Est objectif, selon un second sens, tout jugement susceptible de recueillir un accord unanime ou quasi unanime. Ce second sens, dira-t-on, rejoint manifestement le premier car la perception extérieure implique bien, chez des sujets différents, une identité de pensée susceptible de s'exprimer, à l'aide d'un langage adéquat, par des formules identiques, c'est-à-dire de réaliser un accord; mettez sur une table nue deux livres et un crayon,

faites défiler devant cette table 10, 20, 100 personnes et demandez leur ce qu'il y a sur cette table, toutes vous diront qu'il y a deux livres et un crayon, pour peu qu'elles disposent du sens de la vue ou du toucher et qu'elles sachent parler.

Ce second sens est toutefois, dans nombre de cas, tout à fait distinct et indépendant du premier et des jugements de toutes sortes, même des jugements de valeur, peuvent réaliser un accord unanime alors qu'ils sont cependant strictement subjectifs selon la première acception du mot; pas une des 100 personnes dont nous parlions tout à l'heure ne dira sans doute qu'une rose sent mauvais ou qu'un médicament très amer a un goût exquis, pas plus qu'elle ne verra trois livres là où il n'y en a que deux. Inversement, des jugements perceptifs peuvent prêter à discussion; au lieu de demander combien il y a de livres sur la table demandez combien ces livres ont de pages, l'accord sera sans doute moins unanime, pour peu que les pages soient nombreuses; si l'un de ces livres est un peu moins épais mais de format légèrement plus grand que l'autre, demandez quel est celui qui est le plus volumineux ou le plus lourd, et vous n'aurez peut être plus d'accord du tout quoiqu'il s'agisse bien d'un jugement objectif selon le premier sens du mot.

Cela dit, considérons un jugement créditif accordant une probabilité à un phénomène qui n'a pas été perçu ou qui ne l'est pas encore. Selon le premier sens, un jugement créditif est incontestablement subjectif, tout élément extérieur à la manière d'un objet faisant défaut, par définition, au moment où le jugement est conçu; la probabilité est subjective au même titre que le doute ou la certitude. Selon le second sens, par contre, un jugement créditif peut être, dans certains cas, parfaitement objectif car il peut recueillir une adhésion unanime; toutes les personnes qui jouent à la roulette dans une salle de casino, par exemple, diront sans nul doute que la probabilité de sortie de l'un quelconque des neuf numéros est égale à un neuvième. Dans certains autres cas, l'accord n'est manifestement pas réalisé et peut même apparaître irréalisable; ce sera le cas si l'on demande quelle est la probabilité pour qu'il pleuve demain ou pour que la guerre soit finie dans trois mois.

Certains objectivistes répondront alors que, dans un cas de ce dernier genre, il n'y a pas de probabilité. C'était, ainsi que me le rappelait récemment notre collègue, M. Divisia, l'opinion de Le Dantec, cité par M. Émile Borel, et qui disait : « Je ne comprends pas ce qu'est la probabilité d'un coup isolé. » C'est aussi, semble-t-il, l'opinion de M. Fréchet qui limite l'acception du mot probabilité aux cas où un calcul précis de cette probabilité peut être fait. Dans le cas, notamment, où une probabilité s'exprime par le même nombre qu'une fréquence donnée, on peut, avec quelque raison, prétendre que la probabilité est objective puisque la fréquence l'est.

Il s'agit alors de résoudre une équivoque relative à la signification du mot probabilité, il s'agit de préciser ce que l'on nomme probabilité. C'est ce que j'ai essayé de faire, pour ma part, en rassemblant sur ce sujet un ensemble de vues que je me suis efforcé de rendre cohérentes et en partant d'une axiomatique psychologique ordonnée; selon ce système de significations, j'accorde une probabilité au coup isolé et cette probabilité est subjective selon les deux acceptions du mot, j'accorde également une probabilité au tirage du n° 5 à la roulette, cette probabilité est subjective selon le sens I, objective selon le sens II. Je crois être, ainsi, d'accord avec moi-même mais tout système de significations comporte quelque chose de conventionnel et d'arbitraire, il s'accepte et ne s'impose pas; on peut ne pas donner au mot probabilité le sens que je lui donne et lui en réserver un autre, je demanderai seulement, dans ce cas, un autre mot pour recueillir le sens qu'on lui refuse et qui paraît peut être insidieusement. Tout système de significations qui se propose d'être précis et cohérent se séparera, bien entendu, de l'usage sur certains points ou sur certains autres, il ne peut en être autrement car l'usage est imprécis et incohérent; c'est donc un reproche que nous ne pourrions nous faire ni les uns ni les autres.

J'ajouterai une dernière remarque qui, quel que soit le système de définition adopté, résoudra peut être encore une équivoque. La probabilité (selon mon sens) de certains phénomènes mal connus est définie avec une très mauvaise précision, on lui donne tout au plus un ordre de grandeur, c'est le cas d'une crédition relative à la pluie ou à la fin de la guerre; il n'y a pas de probabilité dans un tel cas disent les objectivistes. La probabilité (toujours selon mon sens) de certains phénomènes bien connus est, au contraire, définie avec une précision que l'on ne songe pas à discuter, c'est le cas, par exemple, de la roulette dont nous parlions tout à l'heure ou bien le cas d'une urne contenant 50 boules blanches et 50 boules noires, toutes identiques, à la couleur près; la probabilité de sortie d'une boule blanche est exactement 0,5, elle résulte du comptage et de l'examen des boules, opérations objectives selon les deux sens du mot; dans ce cas il y a probabilité, disent les objectivistes.

Que diront les objectivistes dans le cas intermédiaire d'une probabilité connue seulement avec une certaine approximation? Je reprends l'exemple de l'urne contenant 50 boules blanches et 50 boules noires mais je suppose que les diamètres et les poids des boules sont quelque peu différents, que le diamètre des boules blanches est, en moyenne, légèrement supérieur tandis que leur poids est, en moyenne, un peu inférieur à celui des boules noires; je continuerai, dans ces conditions, à accrédir la sortie d'une boule blanche avec une probabilité voisine de 0,5 mais je ne connaîtrai plus cette probabilité avec précision. Il me reste, dans un tel cas, la possibilité de procéder à un très grand nombre de tirages; la fréquence de sortie des boules blanches me donnera, avec une précision sans cesse croissante, la probabilité avec laquelle il convient d'accrédir, pour l'avenir, la sortie d'une boule blanche,

ma conviction s'affirmera à mesure que mes expériences se multiplieront sans jamais atteindre de limite. Où est alors le coefficient objectif et indépendant de nos connaissances dont parle M. FRÉCHET?

Or ce cas est, à vrai dire, le plus général et même le seul qui soit à considérer car l'identité des boules, la symétrie parfaite d'un dé, etc., ne sont que des conceptions idéales jamais réalisées. La probabilité $\frac{1}{6}$ de sortie de la face d'un dé, me dit M. René Roy, s'impose à nous d'une façon objective; il me semble bien que ce n'est là qu'une approximation *a priori* et, pour tout dire, une hypothèse gratuite; nous saurons que cette probabilité est bien 0,16 plutôt que 0,10 ou 0,20, 0,166 plutôt que 0,162 ou 0,170 seulement lorsque nous aurons vérifié que les dés ne sont pas pipés et comme la symétrie d'un dé est une question de degré et non une question de tout ou rien, cette vérification gagnera en précision à mesure que nos expériences se poursuivront, qu'il s'agisse de mesures physiques diverses ou de tirages répétés. Encore ne s'agit-il là que d'exemples schématiques et dont la simplicité étudiée ne se rencontre qu'exceptionnellement dans la pratique; en fait, les phénomènes au sujet desquels nous avons à concevoir des créditions sont généralement beaucoup plus complexes qu'un tirage dans une urne ou le jet d'un dé et la probabilité que nous concevons à leur égard résulte toujours d'un faisceau de connaissances le plus souvent fort étendues et portant, par suite, une marque personnelle.

En résumé, la probabilité que nous attachons à une crédition (selon notre système de définitions et en attendant qu'un autre soit proposé) est subjective dans tous les cas au sens I. La probabilité est objective, au sens II, avec une assez bonne précision, dans certains cas de la pratique et, notamment, dans quelques cas artificiels tels que : roulette, jeux de cartes, jeux de dés, etc., dont les dispositifs sont intentionnellement aménagés de manière à donner à plusieurs événements des probabilités aussi égales que possible. La probabilité, enfin, est rigoureusement objective, au sens II, dans les cas où elle est donnée par une hypothèse *a priori*; c'est le cas où l'on demande quelle est la probabilité de sortie d'une face d'un dé « dont on admet la parfaite symétrie », c'est aussi le cas, cité par M. FRÉCHET, où l'on se demande qu'elle est la probabilité de décès d'un assuré pris au hasard parmi une catégorie d'assurés dont la probabilité de décès est donnée; dans de semblables cas la réponse ne peut que réaliser un accord unanime parce qu'elle est, d'une façon plus ou moins explicite, contenue dans la question.

Et il apparaît, au terme de ce cheminement, que la discussion entre objectivistes et subjectivistes renouvelle simplement, sous des vocables différents et à propos de la probabilité, la vieille querelle ouverte autrefois entre idéalistes et réalistes à propos de l'espace et du temps; chose curieuse, ce sont les idéalistes qui sont devenus objectivistes tandis que les réalistes sont devenus subjectivistes. Tels sont les quiproquos auxquels nous entraîne la lamentable confusion de notre langage.
