Journal de la société statistique de Paris

Robert Hénon

Jeu de la concurrence entre producteurs. Courbes d'offres et de transaction. Élasticité d'une clientèle

Journal de la société statistique de Paris, tome 81 (1940), p. 83-105
<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1940__81__83_0>

II

JEU DE LA CONCURRENCE ENTRE PRODUCTEURS [1]

COURBES D'OFFRES ET DE TRANSACTION

ÉLASTICITÉ D'UNE CLIENTÈLE

Cet exposé a pour but de montrer comment une application classique des méthodes statistiques peut conduire à imaginer certains schémas de mécanisme économiques, puis « à retenir et à préciser numériquement les propriétés jugées essentielles » des phénomènes observés.

Dans la première partie, j'exposerai un schéma de formation du gain dans un jeu de dés.

Dans la deuxième partie, j'indiquerai la loi de formation des prix sur un marché commercial à partir de ce schéma.

Dans la dernière partie, j'ai l'intention de vous montrer quelques conséquences de cette théorie, en particulier celle relative à la détermination du profit maximum d'une entreprise.

I

LE JEU DU MOINS DISANT

1. — LE JEU DU « MOINS DISANT » avec des dés cubiques.

Des joueurs se réunissent pour jouer aux dés, et conviennent :

1° De désigner l'un d'eux comme « ACHETEUR » et les autres comme « VENDEURS »;

2° De lancer chacun une fois un dé, l'acheteur désignant le gagnant d'après le dé qui montre le plus petit nombre de points, c'est-à-dire le « MOINS DISANT »;

(1) Communication faite à la Société de Statistique dans la séance du 20 décembre 1939.

3° De faire payer par l'acheteur au gagnant, un nombre de jetons égal au nombre de points montrés;

4° Pour équilibrer les parties, le gagnant devra remettre à l'acheteur *une taxe* de tant de jetons;

5° Les points montrés seront appelés POINTS OFFERTS. — Les points gagnants POINTS DE TRANSACTION.

Dans ces conditions, quelle est la loi de formation des points de transaction? Comment le vendeur doit-il fixer le montant de la taxe pour que le jeu soit *équitable?*

Examinons les données du problème.

D'abord, un dé, de *structure* connue : 6 faces, lancé sur une table, toutes les faces ayant mêmes probabilités d'arrivée. L'espérance mathématique du gain est 3,5.

Maintenant, prenons deux vendeurs, deux dés, *construisons l'ensemble des possibilités* de l'arrivée *simultanée* de deux faces sous forme d'un carré de $6 \times 6 = 36$ cubes. Chaque côté du carré numéroté de 1 à 6 correspond au jeu de l'un des vendeurs (fig. I).

La probabilité pour l'acheteur de voir gagner *au moins* le point 4, par exemple, est proportionnelle au nombre de cubes compris dans le carré limités par les cas favorables :

4, 5, 6, horizontalement; 4, 5, 6, verticalement (fig. II).

Donc, pour deux vendeurs, les *probabilités totales* de gagner au moins sur les marques

1 2 3 4 5 6

sont proportionnelles aux carrés successifs des 6 premiers nombres :

$6^2 \quad 5^2 \quad 4^2 \quad 3^2 \quad 2^2 \quad 1$

et la *probabilité élémentaire* pour l'acheteur, d'obtenir au jeu une marque donnée, est représentée par le groupement en équerre des cubes correspondants aux marques (fig. III). Ainsi, la probabilité d'obtenir le point 4 est propor-

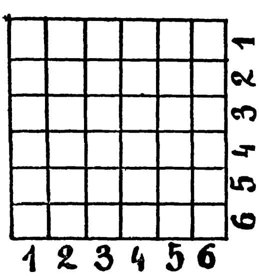


Fig I

Structure du jeu
6 6 36 cas possibles

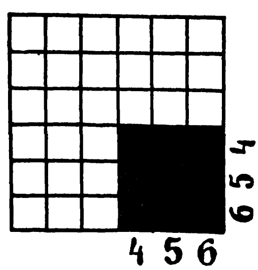


Fig II

Regle « au moins disant »
Probabilite totale pour l acheteur
d obtenir les points x > 4

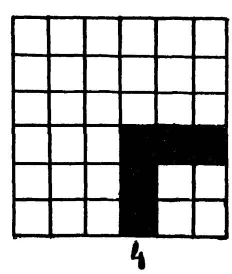


Fig III

Regle « au moins disant »
Probabilite elementaire pour l acheteur
d obtenir le point de transaction x 4

Dés cubiques Cas de 2 joueurs

tionnelle à la *différence première* de la probabilité totale pour le point 4, c'est-à-dire : 9 — 4 = 5. Les probabilités élémentaires « p » de gagner sur les marques

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,$$

sont donc proportionnelles aux premiers nombres impairs :

$$11,\ 9,\ 7,\ 5,\ 3,\ 1.$$

La distribution de fréquence des points de transaction étant connue, il nous faut chercher maintenant quelle est la valeur moyenne du nombre de jetons décaissés par l'acheteur.

D'après les conditions du jeu, cette valeur moyenne c'est l'*espérance mathématique* définie par :

$$1\ p_1 + 2\ p_2 + \ \ldots\ldots\ 6\ p_6.$$

On trouve ainsi les valeurs moyennes suivantes qui expriment aussi les valeurs moyennes des points de transaction :

Nombre de vendeurs n	Valeur moyenne des points de transaction
1	3,50
2	2,52
3	2,04

Pour que le jeu soit *équitable*, il faut donc que la *taxe* payée par tout gagnant soit précisément égale à la valeur moyenne du décaissement. On sait que dans ces conditions, il est fatal qu'au bout d'un certain nombre de coups, qui dépend de la richesse en jetons de tous les joueurs, la partie s'arrête par la ruine de l'un quelconque des joueurs.

Nous sommes donc ici en présence d'un petit modèle d'activité économique très simple représentant le jeu de l'offre et de la demande sur un marché artificiel, mais qui n'en constitue pas moins une introduction fondamentale aux développements qui vont suivre.

2. — Intervention d'un tricheur.

Parmi n vendeurs en présence, l'un peut tricher de deux façons :

1° Par entente avec l'acheteur;

2° Par entente *partielle* avec les autres vendeurs.

Avec l'acheteur. — Celui-ci fait jouer le dernier, un *vendeur privilégié*, avec un dé « pipé », tel, qu'il montre un nombre de points égal au moins disant à la fin du $(n - 1)^e$ coup. *Ce vendeur va donc gagner à tous les coups.*

Dans ces conditions, on est ramené dans l'évolution du jeu au cas de $n - 1$ joueurs, le n^e étant d'influence neutre, le *nombre des degrés de liberté* est diminué de 1 unité.

L'entente partielle entre ν vendeurs consiste à désigner à chaque partie et à tour de rôle, l'un des ν vendeurs comme devant gagner la partie. Pour cela le vendeur désigné joue et sort une marque, puis, les $\nu - 1$ autres « pipent » leurs dés pour sortir des marques supérieures. Ainsi, sur n vendeurs, $(\nu - 1)$ sont neutres, et le *jeu évolue avec $(n - \nu + 1)$ degrés de liberté.*

L'espérance mathématique du gain de l'ensemble des vendeurs est augmentée.

3. — Le jeu du moins disant avec des dés sphériques.

Considérons un dé taillé dans une sphère homogène, les surfaces des facettes étant planes, et proportionnelles à des nombres. La *structure du dé* sera définie en précisant ces nombres ainsi que la manière de distribuer ces facettes. Un cas simple, c'est celui où le centre de gravité coïncide avec le centre de la sphère et celui d'une distribution symétrique par rapport au centre de la sphère, alors, les surfaces sont proportionnelles aux probabilités de montrer les marques quand on lance ce dé.

Prenons comme série de nombres, la distribution binominale

$$(1 + 1)^5 = (1 + 5 + 10 + 10 + 4 + 1),$$

à laquelle nous attacherons les numéros correspondants des facettes :

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6$$

On peut représenter la structure de ce dé par un *histogramme d'offre* construit avec 32 petits cubes distribués comme ci-dessous (fig. IV). Proposons-

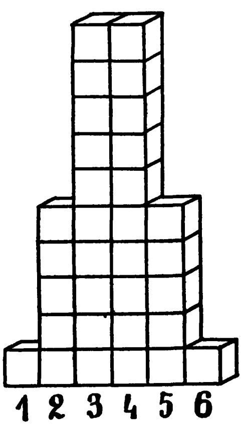


Fig IV

Structure du dé sphérique ou histogramme d'offre Univers binominal cas de $(1 + 1)^5 = 32$ cas possible

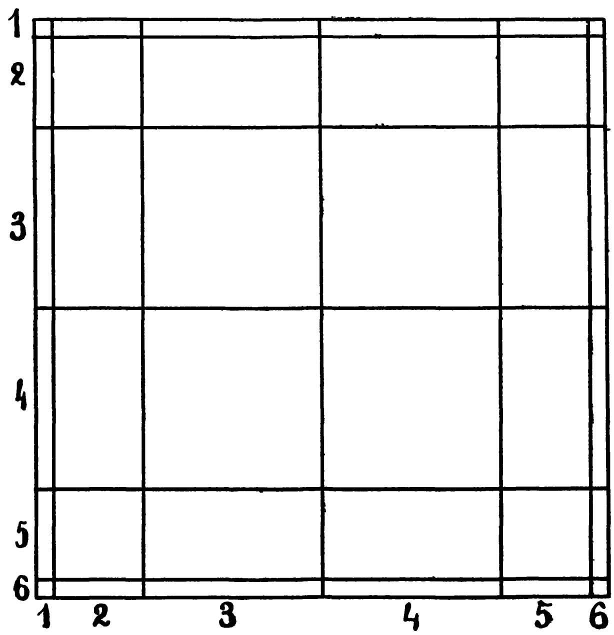


Fig. V

Dés sphériques identiques Cas de deux joueurs Structure du jeu $32 \times 32 = 1\,024$ cas possibles

Dés sphériques identiques. Cas de 2 joueurs

nous de *construire l'ensemble des possibilités* de l'arrivee simultanée de deux faces du dé.

Comme précédemment, construisons le carré de $32 \times 32 = 1.024$ cubes (fig. V).

Nous pourrons, par découpage du carré, correspondant à la règle du

« moins disant », déterminer la *pondération de l'ensemble des possibilités* (tableau I).

Tableau I

Dés sphériques Deux joueurs au moins disant : 1.024 coups				
Marques ou points de transaction	Frequences des marques	Frequences cumulées	Nombre de cubes dans chaque carré	Différences premières
6	1	1	1	1
5	5	6	36	35
4	10	16	256	220
3	10	26	676	420
2	5	31	961	285
1	1	32	1024	63

Les différences premières sont proportionnelles aux probabilités élémentaires de l'acheteur de réaliser des transactions pour des points donnés.

On peut représenter dans l'espace un groupement de tous ces cubes sous forme d'une surface de fréquence en rassemblant tous les cubes d'une même classe ou marque au-dessus de la même base. La surface obtenue en escalier représente une distribution des fréquences élémentaires des offres dans le cas de deux joueurs. Cette surface donne la *structure du jeu*, c'est-à-dire l'*univers* binominal dans lequel on puise suivant une certaine règle pour jouer.

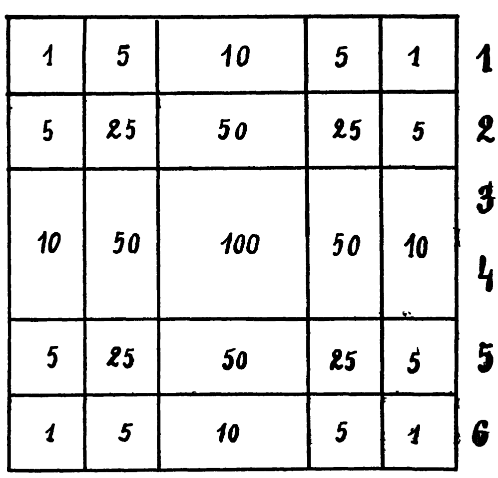


Fig VI

STRUCTURE DU JEU
Representation altimetrique de la surface de frequence

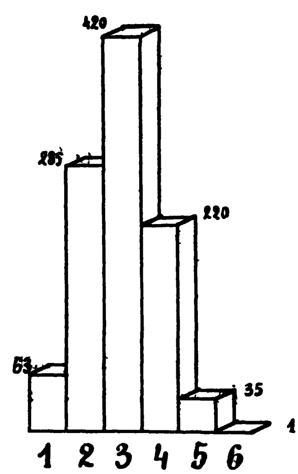


Fig VII

Probabilite elementaire pour l'acheteur ou histogramme des points de transaction pour les 1 024 cas

La figure VI donne une représentation altimétrique de cette surface.

L'addition de tous ces cubes suivant la règle du moins disant donne un *histogramme des transactions* (fig. VII).

4. — COURBE DES CONTRATS POUR UN UNIVERS GAUSSIEN.

1° *Cas où les dés sont identiques :*

Repérons les facettes du dé sphérique et marquons-les de *prix* que nous désignerons par « x ». Nous ferons correspondre à la suite croissante des numéros des facettes la suite croissante des prix.

La surface de fréquence dont nous avons donné la représentation altimétrique sur la figure VI se trouve alors graduée en échelles isogrades de prix, chaque échelle correspondant à un vendeur désigné. Si le nombre de facettes augmente indéfiniment, l'Histogramme d'offre du dé devient une *courbe d'offre*, et, la structure du jeu représentée par la surface de fréquence « en escalier » : *Univers binominal*, se transforme en une surface continue dite de Gauss : *Univers Gaussien*, et, le volume intérieur à cette surface ayant pour base $dx_1 \cdot dx_2$, mesure alors la *densité de probabilité*. Généralisant par n joueurs dans un espace à n dimensions, la densité de probabilité d'obtenir les prix désignés x_1, x_2... x_n est :

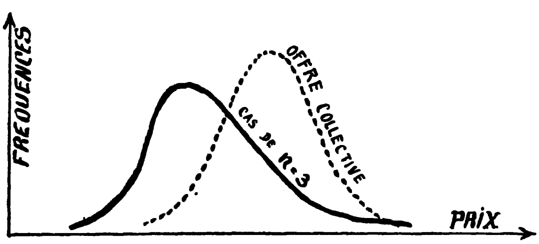


Fig VIII

Courbe de transactions pour n joueurs
Abscisses Prix x
Ordonnees Densites de probabilite pour obtenir un prix marque x

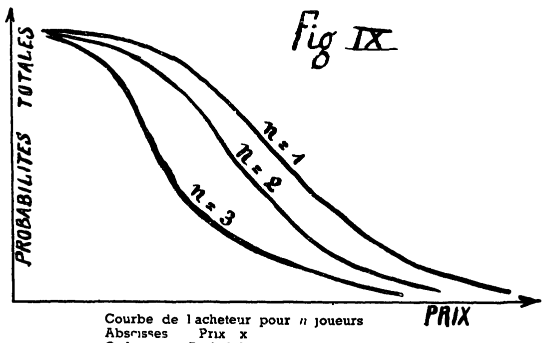


Fig IX

Courbe de l acheteur pour n joueurs
Abscisses Prix x
Ordonnees Probabilites totales d'obtenir un prix > x

$$D\,(x_1\, x_2 \ldots) = \frac{1}{(2\,\pi)^{\frac{n}{2}}}\, e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2)}$$

si l'on pose :

$$F\,(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx$$

la *probabilité totale pour l'acheteur* d'obtenir au jeu du moins disant un prix *au moins* égal à x est (dans le domaine d'intégration $+ \infty$ à x) :

$$P\,(x_1, x_2 \ldots) = \underset{n}{\iint} D\,(x_1\, x_2 \ldots)\, dx_1\, dx_2 = [0{,}5 - \varepsilon\, F\,(x)]^n \quad \text{(fig. IX).}$$

avec $\varepsilon = +1$ pour les x positifs et $\varepsilon - = 1$ pour les x négatifs.

Pour l'acheteur, la probabilité d'obtenir le prix x entre n concurrents est donc :

$$\frac{n}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}x^2}\, [0{,}5 - \varepsilon\, F\,(x)]^{n-1}$$

C'est la *courbe des contrats* (fig. VIII).

En annulant la dérivée logarithmique, on trouve pour les valeurs de la *dominante*, la solution x, fonction de n :

$$x + (n - 1)\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}}{0{,}5 + \mathrm{F}(x)} = 0$$

solution que l'on trouve graphiquement en traçant les courbes :

$$y = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}}{0{,}5 + \mathrm{F}(x)} \qquad\qquad y = -\frac{x}{n-1}$$

2° *Cas où les dés sont différents :*

Si les dés sont différents, les courbes d'offre ne sont plus identiques, mais diffèrent par leurs valeurs centrales, et leurs dispersions.

Désignons par : a, b, c, les *écarts types* des courbes d'offre des vendeurs en présence, et par : α, β, γ, ..., les *valeurs moyennes* respectives des prix offerts.

La densité de probabilité, pour que le prix de transaction soit x, est :

$$\mathrm{K} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\alpha}{a}\right)^2}}{a\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\beta}{b}\right)^2}}{b\,.\sqrt{2\pi}} \cdots\cdot$$

expression qui se simplifie en calculant K et, posant :

$$\frac{n}{\sigma^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \cdots \qquad \frac{n\xi}{\sigma^2} = \frac{\alpha}{a^2} + \frac{\beta}{b^2} + \frac{\gamma}{c^2} + \cdots$$

On trouve ainsi pour la densité, la *loi réduite* suivante :

$$\mathrm{D}_x = \frac{1}{\sigma^n (2\pi)^{\frac{n}{2}}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\frac{n}{\sigma^2}(x-\xi)^2}$$

II

CONCURRENCE ENTRE PRODUCTEURS, SCHÉMATISATION DE LA LOI DE FORMATION DES PRIX DE TRANSACTION

La VENTE, contrat synallagmatique conclu entre un ACHETEUR et un VENDEUR, se présente le plus souvent dans la vie des affaires comme un accord passé après avoir mis en CONCURRENCE un certain nombre de fournisseurs.

Cet accord met en présence deux personnages qui finalement prennent une DÉCISION commune.

Cet acte psychologique fait apparaître dans la conscience, des éléments objectifs et sujectifs.

Chez le *vendeur :*

(a) objectives sont ses informations concernant ses *prix de revient ;*

(b) subjectives son imagination teintée de motifs et de mobiles : désir de vendre au plus cher pour risquer un gros bénéfice, ou bien vendre au prix marginal pour assurer une activité normale de l'entreprise, ou encore vendre pour le seul plaisir de vendre ou pour empêcher un concurrent de traiter.

Chez l'*acheteur :*

(*c*) objective est la *discrimination des offres* qui conduit à un classement par *prix* (1);

(*d*) subjective son imagination influencée par la mode et la publicité, le désir résultant d'un goût personnel, esthétique ou vaniteux.

Dans le cas le plus général, l'élément subjectif (*d*) existe chez l'acheteur, et, le classement par prix croissants, même s'il est possible, n'est pas décisif : il y a *plusieurs facteurs de différenciation* de l'objet (spécialités pharmaceutiques, marques d'automobiles, et, d'une façon générale, les marchés de détail). La loi de l'offre et de la demande est alors soumise à une *concurrence monopolistique* (2).

Dans un cas plus restreint, mais aussi important, cet élément subjectif n'existe plus chez l'acheteur, celui-ci fait des *achats rationnels*, la discrimination des offres se réduit à une suite d'alternatives le classement par prix croissants, et la loi de l'offre et de la demande est soumise à une *concurrence non monopolistique*, c'est ce type de concurrence qui seul va retenir notre attention.

1. — OBSERVATION STATISTIQUE DE L'OFFRE COLLECTIVE.

Les prix offerts sur l'ensemble du *marché* présentent-ils entre eux une certaine régularité statistique? Jusqu'à quel point peut-on dire qu'ils sont extraits d'un même « Univers » de prix et quelle est la forme de cet univers? L'importance de ces questions est capitale si l'on veut schématiser convenablement le mécanisme de la formation des prix de transaction. Aussi, vais-je insister sur l'étude des *observations* faites.

Les observations que je vais vous montrer proviennent du « marché de l'imprimerie » et, d'une manière exclusive, sur des marchandises complètement *spécifiées* faisant l'objet d'appels d'offres suivis de dépôts de soumissions sous plis cachetés. Ainsi ces achats ont pour objet la fourniture : d'affiches, de brochures, de tableaux, cartonnages divers, et *le seul facteur de différenciation est le prix.*

Parmi toutes les données brutes en ma possession, je n'en ai gardé que 63 qui m'ont été communiquées très aimablement par un de nos collègues de la Société (3). La qualité de ces données, l'importance des échantillonnages, m'ont décidé à n'employer strictement pour le traitement statistique, que ces seuls échantillons.

Les données brutes des séries d'échantillons ne font pas connaître les valeurs

---

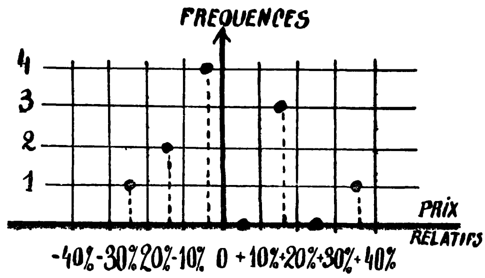
(1) Classement par prix, compte tenu de l'*utilité* de l'objet acheté Par exemple pour le charbon, l'utilité, c'est le pouvoir calorifique; pour les betteraves, c'est la densité en sucre; pour les limes, c'est la durée d'usage. (CHAYROU.)

(2) Laurence BALLANDE : « Entre la concurrence et le monopole : Étude sur quelques travaux theoriques récents » (*Revue d'économie politique*, janvier-fevrier 1938.)

(3) Je remercie bien vivement M. Israel, ingénieur en chef à la Caisse autonome d'amortissement, pour la valeur de la documentation qu'il m'a remise et pour l'intérêt qu'il a bien voulu porter à ce travail.

absolues des prix, mais indiquent les prix relatifs offerts en pourcentage du prix moyen de la série (fig. X).

Fig X



DONNÉES BRUTES POUR UN APPEL D'OFFRES
Cas de 11 soumissionnaires
Diagramme de fréquence dans lequel les prix sont exprimés en pourcentages du prix moyen de la série

Ces prix ont été groupés en classes d'intervalles égaux à 10 %. Les données brutes sont rassemblées dans le tableau II.

TABLEAU II

DONNÉES BRUTES
(Distribution des offres dans chaque série et dans chaque classe)

NUMERO de la série	LIMITES DES CLASSES EN PRIX RELATIFS																NOMBRE de soumissionnaires
	50–60	60–70	70–80	80–90	90–100	100–110	110–120	120–130	130–140	140–150	150–160	160–170	170–180	180–190	190–200	200–210	
1			1	2	4		3		1								11
2	1	3			5		1	1	1	3							15
3		2		5	4	2	6	2					2			1	24
4	1	2	1	3	1	2				1	1				1		13
	2	7	2	10	14	4	10	3	2	4	1	0	2	0	1	1	63

La distribution de fréquence étant très étalée vers la droite, il est naturel de penser à un ajustement de cette distribution, non avec une loi de Gauss, mais avec une *loi de Galton.* La figure XI montre qu'il existe bien une certaine régularité statistique.

Dans ces conditions, *il faut choisir comme variable non plus le prix relatif, mais son logarithme.*

$$x = a \log \frac{p}{p_0} + b$$

Si nous cherchons les écarts-types (1) de chaque série de prix avec cette nouvelle variable on obtient le tableau III.

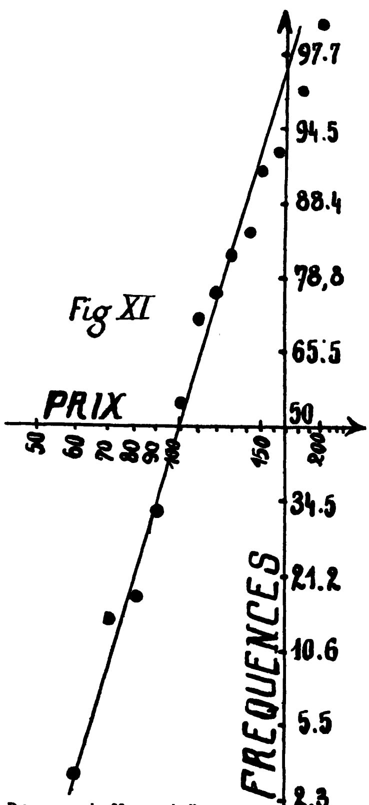
(1) Pour les petits nombres, on peut consulter les tables dressées par SHEWHART (W. A.) dans *Économic control of Quality of Manufactured product.* London, Macmillan, 1931.

TABLEAU III

CONTRÔLE DE L'HOMOGÉNÉITÉ DES SÉRIES
(en prenant pour variable le logarithme du prix relatif)

Numéro de la série	Nombre de soumissionnaires	Écarts types en centièmes	Moyenne pondérée de l'ensemble
1	11	7,8	
2	15	14,3	
3	24	13,8	$\sigma_x = 13,7$
4	13	15,8	

Fig XI



Dispersion de 63 prix d offre observes
Ajustement par une loi de Galton
Abscisses logarithmes des prix
Ordonnées fréquences cumulées

On peut vérifier à l'aide d'un *diagramme de contrôle* (fig. XII) que tous les écarts-types restent à l'intérieur des limites de confiance, ce qui prouve qu'il n'est pas absurde de considérer ces échantillonnages comme appartenant à une même population, un même « Univers de prix d'offre » que nous pouvons représenter par des boules marquées de prix et extraites de l' « Urne du marché ».

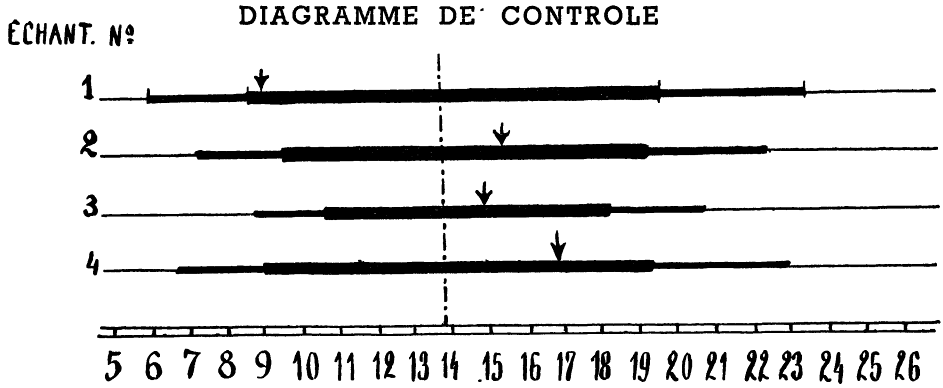


Fig XII

Écarts-types en centièmes et limites de confiance Pour 5 °/₀ Pour 2 °/₀₀

Nous pouvons donc conclure en disant que la courbe d'offre (fig. XIV) suit une loi de distribution très voisine d'une loi de Galton, avec les limites de con-

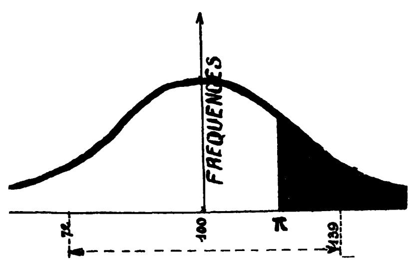


Fig XIV

OFFRE COLLECTIVE
Distribution de frequence des offres en fonction de x logarithme du prix relatif
Loi Gaussienne en x

La surface en noir représente la **probabilité totale** d obtenir un prix **au moins egal a** , π en consultant un vendeur pris au hasard

fiance suivantes qui correspondent aux écarts indiqués dans le tableau IV.

TABLEAU IV

LIMITES DE CONFIANCE

x	-2σ	$-\sigma$	0	$+\sigma$	$+2\sigma$
Log. du prix relatif	$2-2\sigma$	$2-\sigma$	2	$2+\sigma$	$2+2\sigma$
Prix relatif	53	73	100	137	188
Limites			68 % des cas		
			95 % des cas		

Si nous prenons comme prix de base celui qui correspond à la *médiane* p de la distribution, la variable sera :

$$x = 8{,}7 \log. \frac{p}{p_i}$$

et la *densité de fréquence* de l'offre :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

L'ordre de grandeur du coefficient de variation sur ce marché est donc de 30 %. Ce qui est considérable. Il faut croire que cette dispersion des prix offerts n'est pas particulière au marché de l'imprimerie puisqu'un auteur anglais a pu dire que « le coût de faire des affaires est en grande partie le coût de la suspicion ».

2. — Schématisation de la loi de formation des prix de transaction.

Il est intéressant de pouvoir substituer à la courbe de distribution de fréquence, un histogramme représentatif du marché de l'offre, et comportant un petit nombre de *classes* définies par leurs limites et leurs *valeurs centrales*.

Le tableau V donne ces informations pour 8 classes.

Tableau V

Fréquence des offres sur le marché			
Numéro de la classe	Fréquence des offres dans chaque classe × 100	Valeurs centrales des écarts réduits : x_i	Valeurs centrales des prix relatifs $\frac{p_i}{p_0}$
1	4,65	— 1,75	57,5
2	9,70	— 1,25	67,5
3	15,65	— 0,75	79
4	20	— 0,25	92
5	20	+ 0,25	103
6	15,65	+ 0,75	127
7	9,70	+ 1,25	147
8	4,65	+ 1,75	174
	100		

Sous cette forme discontinue, il est facile de donner une schématisation appropriée de la loi stochastique de formation des prix sur le « marché ».

En effet, ce schéma prendra comme représentation mécanique de la loi, un *dé sphérique* ayant son centre de gravité confondu au centre de la sphère et comportant un nombre de faces planes égal au nombre de classes. Chaque face ayant une surface proportionnelle à la probabilité de chaque classe i et portant l'inscription du prix relatif $\frac{p_i}{p_0}$ correspondant.

La *structure du dé* et la *spécification* de l'ensemble des possibilités quand le dé est lancé, se trouvent donc complètement déterminées.

Il reste donc à fixer le *schéma de mouvement* ou règle du jeu. Cette règle, c'est celle qui a été examinée dans la première partie et que nous avons appelés « au moins disant ». Nous pouvons donc déterminer *a priori* l'histogramme des contrats en fonction du prix relatif offert et du nombre de concurrents.

D'une manière plus générale, pour une variation continue du prix, nous obtiendrions des *courbes.*

La figure VIII représente la *courbe des contrats* pour un marché de 3 concurrents. La figure IX, les *probabilités totales* d'obtenir un prix égal ou supérieur à π.

On peut se faire une idée de la *déformation* de la courbe sous l'influence du nombre de concurrents en observant le déplacement de la *dominante ;* on trouve ainsi les valeurs du tableau VI.

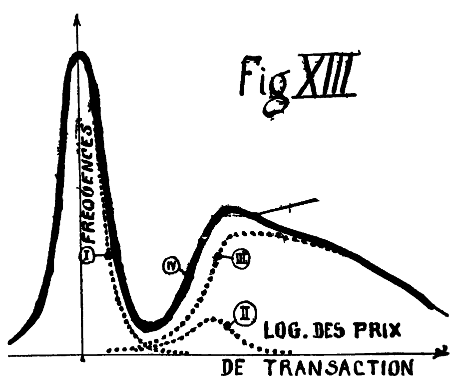
TABLEAU VI

COURBE DES CONTRATS
Déplacement de la dominante

Nombre de concurrents	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Prix relatifs	66,5	67,6	68,8	70,1	71,7	73,9	76,65	80,45	86,2	100
Différences premières.	1,1	1,2	1,3	1,6	2,2	2,8	3,8	6,2	13,4	

VÉRIFICATION EXPÉRIMENTALE

J'ai pu faire une vérification indirecte de la courbe des contrats, en examinant plusieurs centaines de commandes, et les distribuant sur un graphique,



Observation d une distribution de frequence d un grand nombre d ordres reçus par un vendeur La courbe est la resultante de la superposition de trois populations de clients qui se différencient par la maniere d appliquer la regle du jeu de l offre et de la demande

dans l'ordre des prix relatifs croissants. Le prix de revient étant pris pour base, et le logarithme du prix relatif comme variable, on obtient la courbe de la figure XIII. Cette courbe permet d'abord de distinguer très nettement trois populations de « clients » et, ensuite, de remarquer que, pour chaque population, la distribution semble obéir à une loi normale.

Ces populations, ce sont celles qui ont déjà été mises en évidence, quand nous avons étudié les conditions morales du jeu de l'offre et de la demande, dans la manière d'appliquer la règle : « au moins disant », avec ou sans « tricherie ». En effet, la courbe I correspond au client fidèle qui vous consulte le dernier et vous suggère le prix obtenu; la courbe II, correspond au cas contraire, et, la courbe III au cas de concurrence équitable. Il serait facile d'écrire les fonctions analytiques correspondantes à ces trois cas.

En particulier, la courbe III, dont la surface représente une fraction du marché, ne donne pas l'image exacte de la courbe des contrats, sur ce « marché », dans son ensemble; mais la courbe de toutes les transactions qui ont été réalisées par une entreprise déterminée. Analytiquement, c'est la dérivée partielle :

$$K \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\alpha}{a}\right)^2}}{a\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int\int}_{n-1} \frac{e^{-\frac{1}{2}\Sigma\left(\frac{x-\beta}{b}\right)^2}}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\, b.c.d..}\, dx\, dx$$

Urne du marché.

Pratiquement, nous pouvons dire que si un entrepreneur est capable de fixer son prix de vente relatif dans un étroit domaine, il connaît la probabilité « P »

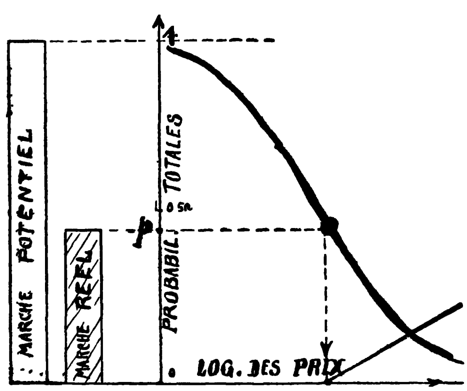


Fig XV

Position de l'Entreprise sur un marché de concurrence non monopolistique

de transaction correspondante (fig. XV) et réciproquement. Ainsi, en appelant « *marché potentiel* » le nombre de *demandes reçues* par l'entrepreneur et suivies d'exécution par lui ou ses concurrents, et « *marché réel* » le nombre d'ordres reçus, la probabilité de réussir une transaction à ce prix est :

$$P_x = \frac{\text{Nombre d'ordres reçus}}{\text{Nombre de demandes reçues}} = \frac{\text{Marché réel}}{\text{Marché potentiel}}$$

Tout se passe comme si l'entrepreneur tirait au hasard dans l'*Urne du marché*, avec la probabilité P_x des boules blanches et noires, suivant un schéma de tirage déterminé. La valeur statistique d'une telle information est précieuse, car elle permet d'analyser et de mesurer l'un des principaux facteurs de la *variance* du chiffre d'affaires d'une entreprise.

III

APPLICATION A LA RECHERCHE DU PROFIT MAXIMUM D'UN PRODUCTEUR

La position moyenne de l'entrepreneur pouvant être déterminée par une statistique très simple, compte tenu du nombre moyen de concurrents, nous pouvons essayer de tirer quelques conséquences.

Traçons la courbe des probabilités totales en prenant comme axe des prix non plus leurs logarithmes, mais les prix relatifs, et présentons cette courbe en prenant pour abscisses les probabilités totales et pour ordonnées les prix (fig. XVI). L'abscisse mesure donc le *marché réel* en pourcentage du *marché*

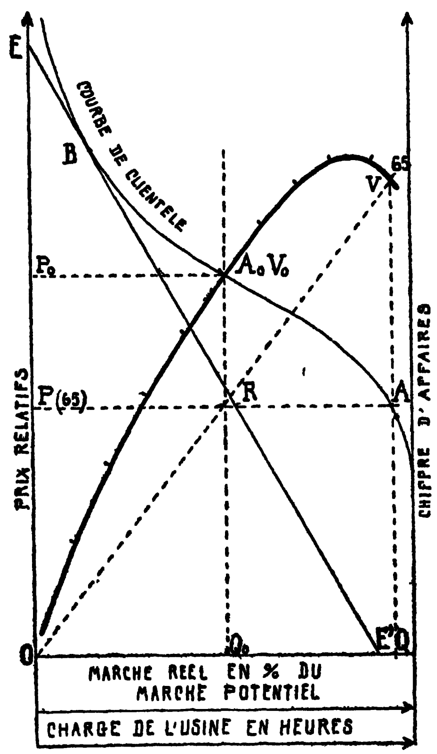


Fig. XVI

potentiel. Comme il existe une liaison étroite entre la quantité de travail et le marché réel on peut graduer l'abscisse en heures de travail par exemple, celle-ci représente donc une échelle des *charges* de l'usine.

La courbe de probabilités totales se présente donc comme une courbe de demande, nous l'appellerons *Courbe de clientèle.*

Si B est la position de l'entreprise sur le marché, l'*élasticité de la clientèle* en ce point est mesurée sur la tangente par

$$-\frac{\frac{dq}{q}}{\frac{dp}{p}} = \lambda = \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BE'}}$$

En particulier, si la loi est Galtonienne :

$$\frac{d\,p}{p} = \frac{\sigma\,dx}{\mathrm{M}}\,;\ \mathrm{M} = l\,g\,e$$

et :

$$\lambda = \frac{n\,\mathrm{M}}{\sigma}\,\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{x^2}}}{0{,}5 - \varepsilon\,\mathrm{F}(x)}$$

Si A est un point de la courbe de clientèle, le chiffre des *ventes* de l'entrepreneur est mesuré par l'aire OPAQ, il est facile de construire graphiquement le lieu du point V représentatif de la valeur des ventes en prenant pour unité la surface O $\mathrm{P_0\,A_0\,Q_0}$. La courbe des ventes O $\mathrm{V_0V}$ doit alors être cotée en prix relatifs. Si l'on associe à cette courbe, la courbe des *coûts de fabrication*, on peut déterminer les conditions du *profit maximum*, c'est-à-dire de fixer le *budget général de l'entreprise* qui permettra de lier :

— le prix de vente;
— le volume de la production;
— le coût moyen.

On sait que ce profit maximum est atteint quand les *prix de vente marginaux* sont tous égaux au *coût marginal*.

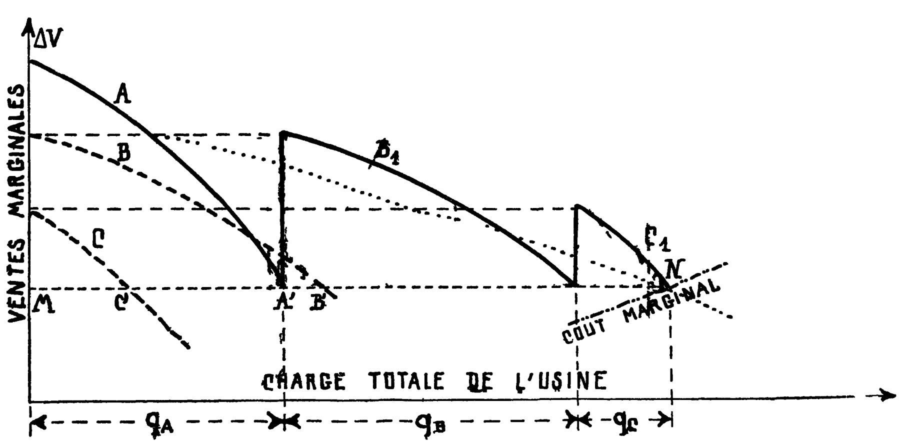


Fig. XVII.

Graphiquement, il n'y a aucune difficulté à transformer la courbe des ventes totales (fig. XVI) en courbe de ventes marginales, en marquant par des points les différences premières; c'est que ce montre la courbe A de la figure XVII. Cette méthode marginale permet de résoudre graphiquement des problèmes pratiques comme celui-ci : étant donnés trois marchés A, B, C, (les trois populations déjà examinées par exemple), déterminer les budgets de ventes qui donneront dans leur ensemble un profit maximum. Pour résoudre ce problème, on trace les trois courbes de ventes marginales : A, B, C, puis on déplace B_1, C_1, de telle manière que les ventes marginales soient égales, c'est-à-dire soient sur une même droite MN. Le point N est donc le lieu des points (tracés en pointillé), tels que :

$$MN = MA' + MB' + MC'$$

ou encore :

$$\text{charge totale} = q_a + q_b + q_c.$$

L'intersection de ce lieu avec le coût marginal donne le point d'équilibre cherché. Dès cet instant, chaque budget partiel de ventes est déterminé par :

— son volume de production q_i;
— le prix de vente de l'unité p_i;
— le coût moyen.

Une étude plus complète devrait tenir compte des frais de *publicité* et de *prospection*, c'est-à-dire de tous les frais effectués pour augmenter la clientèle ou plus précisément le *marché potentiel.* Il faudrait alors considérer une *surface de clientèle* et résoudre le problème par les méthodes de la géométrie descriptive.

CONCLUSIONS

M. Lutfalla, dans une étude récente (1), reprocha à la Statistique mathématique de ne jamais pouvoir saisir un « phénomène se produisant ». Je crois que cette appréciation est bien pessimiste et je pense avoir montré qu'au contraire, on peut pousser l'investigation psychologique aussi loin qu'il est nécessaire.

Dans le cadre général de l'économie, notre étude s'est limitée strictement à dégager la loi de formation des prix sur un marché de concurrence non monopolistique, où le *seul facteur de différenciation* des offres était le prix, qu'il y ait tricherie ou non dans l'application de la règle du jeu (2).

Je crois qu'il serait possible de l'étendre au cas de la concurrence monopolistique si nous avions des courbes de réponses des acheteurs concernant les *éléments subjectifs* (*d*) *de la décision*, courbes qui feraient apparaître des *prix apparents* se substituant aux *prix marqués.*

Dans ces conditions les travaux de M. Hagstrœm permettraient des applications pratiques du plus grand intérêt pour certains marchés (3).

L'analyse de la *variance* de la courbe d'offre pourrait aussi dégager les parts

(1) Lutfalla : « Détermination statistique des courbes d'offre et de demande » (*Les Annales sociologiques*, D. I., 1934).
(2) C'est un *Polypole* en concurrence non molopolistique.
(3) Hagstrœm (K.-G.) : « Pure econonomics on stochastical theory (Econometrica, janvier).

respectives dues aux éléments objectifs et subjectifs *de la décision* chez le *vendeur*. En effet, nous pouvons écrire, en posant :

σ_a^2 : Variance due aux éléments objectifs,
σ_b^2 : Variance due aux éléments subjectifs,

$$\sigma^2 = \sigma_a^2 + \sigma_b^2$$

A priori, la variance de cet élément, spécifiquement humain, doit intervenir avec une même grandeur, dans la variance de l'offre, de *n'importe quel marché*. Il semble que ces éléments subjectifs du jugement pourraient faire l'objet de *tests* psychologiques intéressants.

Pratiquement, la notion de l'*Urne du marché* apporte une information indispensable pour définir la stabilité de certaines grandeurs par leurs *limites de confiance*.

Il en est ainsi pour : l'*indice des prix de vente*, l'accord d'un *chiffre d'affaires* avec un *baromètre* économique, l'accord d'un *chiffre d'affaires* avec un *quantum de vente* assigné par une entente industrielle, le *bénéfice d'une entreprise*, le *prix de revient comptable d'une entreprise*, les *ratios de structure*. Cette connaissance généralisée dans les industries permettrait de dégager les *symptômes économiques* présentant des *écarts significatifs* et d'apporter avant qu'il ne soit trop tard les solutions juridiques, financières, techniques aux entreprises ou industries nationales déficientes.

Pratiquement, l'*analyse des courbes de clientèle* nous permet de fixer une *politique de vente* assurant un profit maximum pour une entreprise isolée ou pour un groupe d'entreprises (sur un marché international, par exemple). Théoriquement, je crois que la connaissance de ces informations contribuerait indirectement, mais sûrement, à stabiliser certains marchés anarchiques entraînant une diminution de l'intensité de la concurrence, et, par suite, du coût élevé de la *distribution*.

L'*analyse des courbes de transaction* nous montre aussi toute la *relativité* de la notion de prix moyen d'offre quand on prend pour base le prix de revient prévisionnel lui-même « variable aléatoire ». Le déplacement de la dominante et de la moyenne montre qu'*il faut ajouter à ce prix de revient une prime de risque pour que le jeu de l'offre et de la demande soit équitable.*

Cette conséquence de la théorie de la formation des prix n'est pas la moindre à l'heure où certains milieux officiels voient dans le prix de revient une notion rigide, là où il ne faudrait voir qu'une notion relative : une dépendance *stochastique.*

Si ce travail m'a été possible, je dois ajouter que c'est grâce aux encouragements et aux facilités de recherches que j'ai trouvés au Laboratoire de Statistique et dans notre Société.

Aussi, ce soir, puisque l'occasion m'en est offerte, je remercie très sincèrement M. Divisia, notre cher Président, M. Huber et M. Barriol de l'amitié qu'ils m'ont témoignée.

Robert Hénon.

ANNEXE

I — Moments de la courbe des contrats pour une distribution gaussienne de l'offre

On peut se proposer de rechercher les moments de la courbe de distribution en écrivant l'équation caractéristique :

$$\varphi(t) = \int_0^{\infty} \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Theta(x)\right)^{n-1} e^{tx} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Theta(x)\right)^{n-1} e^{-tx} \right] dx$$

$$\text{avec } \Theta(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx$$

qui, développée, devient :

$$\varphi(t) = \frac{2n}{2^{n-1}\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x^2} [chtx\,(1 + C_{n-1}^2\,\Theta^2 + C_{n-1}^4\,\Theta^4 + \ldots)$$
$$- shtx\,(C_{n-1}^1\,\Theta + C_{n-1}^3\,\Theta^3 + \ldots)]\,dx$$

Le terme de rang pair s'écrit :

$$C_{n-1}^{p-1} \frac{2n}{2^{n-1}\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,\Theta_x^{p-1}\,chtx = C_{n-1}^{p-1} \frac{2n}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{\pi^{\frac{p}{2}}} \cdot \underbrace{\int\!\!\int_0^{\infty}}_{p} e^{-px^2}\,chtx\,dx\,.\,dx \ldots$$

Si nous remplaçons cette intégrale qui représente la masse d'un cube à p dimensions, de côté x, par la masse de la sphère circonscrite de rayon $\rho = \sqrt{p}.\,x$ on a, comme masse élémentaire, la masse d'une pellicule sphérique à p dimensions de surface :

$$\frac{2\,\pi^{\frac{p}{2}}\,\rho^{p-1}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}$$

d'épaisseur $d\rho$ et de densité $e^{-px^2}\,chtx$. L'intégration prend alors la forme :

$$C_{n-1}^{p-1} \frac{n}{2^{n-2}} \cdot \frac{2}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \int_0^{\infty} e^{-\rho^2}\,ch\left(\frac{t}{\sqrt{p}}\,\rho\right) \rho^{p-1}\,d\rho$$

Le rapport des deux intégrales a pour limite l'unité.

Si l'on recherche le moment d'ordre q, il faut calculer les dérivées de $\varphi(t)$ d'ordre q. Si q est impair ainsi que p, le terme en $ch\,\frac{t}{\sqrt{p}}\,\rho$ est remplacé par un terme en $sh\,\frac{t}{\sqrt{p}}\,\rho$ qui s'annule pour $t = 0$.

Si q est pair, et p reste impair, ce terme $= 1$, et il reste après intégration :

$$\frac{n C_{n-1}^{p-1}\, \Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}{2^{n-2}\, p^{\frac{q}{2}}\, \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}$$

Si q est impair et p pair, le terme général, négatif, a pour facteur $sh \frac{t}{\sqrt{p}} \rho$, qui devient pour les dérivations impaires : $= 1$ pour $t = 0$.

Ce terme général s'écrit donc :

$$- n \cdot \frac{C_{n-1}^{p-1}}{2^{n-2}\, p^{\frac{q}{2}}} \, \frac{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}$$

Si q est impair et p impair, le terme général est nul.

Ainsi, nous pouvons écrire les expressions des moments où p, q sont de parités contraires :

$$m_q = (-1)^q \frac{n}{2^{n-2}} \sum C_{n-1}^{p-1} \frac{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}{p^{\frac{q}{2}}\, \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}$$

II — Moments de la courbe des contrats pour une distribution galtonienne de l'offre

Prenons comme prix de base le prix central p_ξ de la distribution collective de l'offre, la nouvelle variable est alors :

$$\frac{p}{p_\xi} = e^{x \frac{\sigma}{M}} = (1{,}303)^x$$

Le moment d'ordre k sera :

$$m_{k,n} = \text{Lim} \int_{+\infty}^{x} \left(\frac{p}{p_\xi}\right)^k \frac{n e^{-\frac{1}{2} x^2}\, dx}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int \int_{+\infty}^{x}}_{n-1} \frac{e^{-\frac{n-1}{2} x^2}\, dx\, dx}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}$$

$$= \text{Lim}\; e^{\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{M^2} \cdot \frac{k^2}{n}} \left[\int_{+\infty}^{x} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(x - \frac{k\sigma}{nM}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}\quad \sigma} dx \right]^n$$

$$m_{k,n} = \left[e^{\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{M^2}} \right]^{\frac{k^2}{n}}$$

On peut remarquer que la densité du chiffre d'affaires sur un marché de « n » concurrents présente elle aussi une distribution galtonienne. C'est exactement la même distribution que celle qui représente la « fréquence », avec cette différence qu'elle se trouve légèrement décalée vers les prix supérieurs d'une quantité :

$$x_D = \frac{\sigma}{n\,M} \text{ ou } \frac{p_D - p_\xi}{p_\xi}$$

Les moments $M_{k,n}$ de cette distribution sont donc :

$$M_{k,n} = e^{\frac{k}{n}\frac{\sigma^2}{M^2}} \cdot m_{k,n} = e^{\frac{\sigma^2}{2\,M^2}\left[\frac{k^2}{n} + \frac{2\,k}{n}\right]}$$

Il est important de remarquer :

— que le moment $m_{1,n}$, correspond à la moyenne artihmétique des prix de transaction;

— que le moment $M_{1,n}$, correspond à la moyenne pondérée des prix de transaction, c'est-à-dire à l'*indice de prix* du volume des transactions;

— que *tous ces moments ont pour limite l'unité, quand le nombre de concurrents augmente indéfiniment, ce qui signifie que toutes les moyennes de prix ont pour limite inférieure le prix central* p_ξ *de la distribution collective de l'offre, ou encore la moyenne géométrique de cette distribution.*

Nous donnons ci-dessous quelques valeurs qui correspondent à la courbe d'offre observée :

$n =$	1	2	3	4
$m_{1,n}$, moyenne arithmétique des prix de transaction . . .	103,6	101,8	101,2	100,9
$M_{1,n}$, moyenne pondérée des prix ou *indices des prix* du volume d'affaires	111,2	105,45	103,6	102,7
Prix central de la distribution du chiffre d'affaires	107,3	103,6	102,4	101,8

DISCUSSION

M. le Président Huber remercie M. Hénon de sa communication, qui présente un très grand intérêt par l'application pratique qu'il a faite et il ouvre la discussion.

M. Roy se demande quelles sont les raisons des différences aussi importantes que M. Hénon nous a indiquées entre les prix offerts.

M. Hénon répond que ces différences proviennent de deux éléments indépendants : l'un psychologique dont la nature s'apparente à celle d'un *pari*, pari de faire un bénéfice présumé de tant; l'autre *technique*, la connaissance du *prix de revient prévisionnel.* En ce qui concerne ce dernier élément, les causes d'instabilité dépendent de la diversité des *tarifs* employés pour coter les *opérations élémentaires*, ainsi que des *temps* prévus pour exécuter ces opérations; d'où l'importance des *méthodes d'établissement de prix de revient* d'une part, et des *méthodes d'établissement de barèmes de temps* d'autre part.

Personnellement, il a pu constater, sur des travaux identiques revenant périodiquement, des écarts de l'ordre de 15 à 20 % dans les durées d'opérations, écarts ayant pour origines des différences dans l'habileté des ouvriers, ou des difficultés dues aux matières. Si l'on ajoute à cela des erreurs d'appréciations personnelles, on voit que l'on se trouve en présence d'un certain nombre de facteurs dont les variances s'additionnent, ce qui explique bien les différences constatées sur les prix offerts.

En ce qui concerne les prix de revient, M. Hénon fait remarquer qu'il est regettable d'attacher aux résultats purement comptables, une importance exagérée, en négligeant totalement l'apport de données expérimentales, traitées par les méthodes statistiques, telles qu'on les applique en biotypologie par exemple.

M. Roy trouve fort intéressant les constatations faites par M. Hénon, qui peuvent, en effet, expliquer les différences constatées, et il semble que, dans chaque cas, le vendeur ait une courbe particulière correspondant non seulement à sa personnalité, mais aussi à l'importance de l'affaire traitée.

M. le Dr Ichok dit que cela revient à penser que les prix se forment, dans ce cas particulier, suivant la tête du client; le meilleur vendeur serait celui qui comprendrait le mieux la psychologie de l'acheteur.

M. Amy se demande si le choix de l'acheteur n'est pas aussi fixé par le prix, par la présentation, etc...

M. Hénon répond qu'il y a, en effet, des facteurs très divers qui interviennent sur la fixation des prix, les marques, la politique même peuvent y jouer un rôle important.

Rien qu'en ce qui concerne la « marque », la plus-value qu'elle confère à l'objet peut être parfois considérable; ainsi, aux États-Unis, la vente de l'affaire d'automobiles Dodge, qui s'est élevée au prix de 146 millions de dollars, en comprenait 74 millions pour rétribuer la valeur de la marque. C'est donc bien la preuve que cette plus-value était « payante » pour le constructeur; mais il s'agit là d'un marché de concurrence monopolistique, beaucoup plus général que celui qui a été exposé.

M. Razous signale une fraude particulière qui se rencontre dans les marchés de certaines denrées. C'est ainsi que l'acheteur de bétail amène avec lui 4 ou 5 auxiliaires, pour ne pas dire complices, qui, par leurs offres, poussent le vendeur à céder sa marchandise à un prix inférieur à celui qui résulterait de la tendance des cours. L'exemple suivant permettra de comprendre le mécanisme de cette fraude. Prenons le cas d'un veau de 8 à 10 semaines amené sur le marché et dont le prix de vente pourrait atteindre, par l'application du cours résultant des offres et des demandes loyalement faites, 1.200 francs. Un premier complice de celui qui désire acheter ce veau passe près du vendeur, déprécie sa marchandise et lui offre 900 francs, par exemple. Un second vient après, et lui offre 950 francs; un troisième offre 1.020 francs et un quatrième offre 1.000 francs. Quelques instants après, le véritable acheteur offre 1.050 francs. A ce moment-là, le vendeur, impressionné par les bas prix offerts et par le dernier prix, supérieur aux précédents, vend ainsi sa marchandise à 1.050 francs, alors que le libre jeu de l'offre et de la demande aurait permis une vente s'écartant peu de 1.200 francs.

M. Edmond Michel dit qu'il en est quelquefois de même lors de l'achat des immeubles par des marchands de biens peu scrupuleux.

M. Barriol félicite M. Hénon de son exposé si intéressant, qui suggérera des études analogues sur des marchés étendus, tels que celui de la chaussure, où se posent des questions analogues à celles de l'imprimerie.

M. le Président Divisia remercie les orateurs qui ont pris part à la discussion et souligne ainsi l'intérêt de la communication de M. Hénon, qui donne un exemple de plus de l'utilité des études de statistique mathématique dont les formules trouvent des applications dans des cas concrets.