

L'application industrielle du contrôle statistique. Les diagrammes de contrôle

Journal de la société statistique de Paris, tome 80 (1939), p. 283-304

http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1939__80__283_0

© Société de statistique de Paris, 1939, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (<http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

II

L'APPLICATION INDUSTRIELLE DU CONTROLE STATISTIQUE LES DIAGRAMMES DE CONTROLE ⁽¹⁾

I. — INTRODUCTION

Voici une vingtaine d'années que l'on voit des techniciens et des ingénieurs appliquer certaines méthodes de la statistique au contrôle de la qualité des produits industriels. D'importants résultats ont été obtenus; citons en particulier ceux des laboratoires de la Bell Telephone Company aux États-Unis, qui compte parmi ses plus éminents spécialistes le D^r Shewhart, auteur d'un très intéressant ouvrage sur ce sujet.

La Société Royale de Statistique de Londres, à la suite de conférences du D^r Shewhart, a fondé en 1933 une section de recherches industrielles et agricoles, dont le but est de faire progresser et de propager la statistique technique industrielle et agricole.

Notre Société, sous l'impulsion de M. Georges Darmois, notre éminent ancien président, a suivi le mouvement. C'est ainsi que nous avons pu assister à des séances, où en collaboration avec la Société des ingénieurs civils de France, il a été traité de questions analogues. D'autre part, en 1937, notre distingué collègue le professeur de Artigas a montré, au cours de deux conférences faites à l'Institut Henri Poincaré, l'importance des applications de la Statistique à l'art de l'ingénieur. Par la suite j'ai eu la bonne fortune de collaborer avec lui dans le contrôle effectif de la production d'une grande usine, nos études étant grandement facilitées par l'appui du Laboratoire de Statistique de M. Darmois.

Dans les exposés que nous avons eu la chance d'écouter, il a été question d'idées générales, ou bien d'exemples très particuliers d'application. Je voudrais aujourd'hui vous exposer une méthode de contrôle statistique très générale puisqu'elle peut s'appliquer aux cas les plus variés, tant par leur nature

(1) Communication faite à la Société de Statistique de Paris le 17 mai 1939.

que par leur forme, et qui par suite d'une mise au point relativement poussée, quoique non définitive, offre l'avantage d'une précision satisfaisante.

Il s'agit d'un problème qui doit nécessairement se poser devant l'organisme de contrôle d'une entreprise. Un contrôle quelque peu précis se traduit par les relevés d'un certain nombre de chiffres. Ces chiffres ne sont pas identiques; par exemple, s'il s'agit de contrôler la production d'une usine de chaussures, il est certain que le nombre de paires de souliers débités par jour par une machine varie d'un jour au suivant, et cela malgré la bonne volonté des ouvriers et la régularité du fonctionnement de la machine. Des causes fortuites, attribuables aux incidences normales de la fabrication, au hasard (dans le langage des probalistes), apportent des fluctuations sur les chiffres journaliers ou horaires de la production. Le problème qui se pose est alors de savoir jusqu'à quel point ces écarts peuvent être considérés comme normaux, et à partir de quel moment ils trahissent un dérangement dans l'appareil de production; nous dirons qu'à ce moment les écarts deviennent *significatifs*.

Comme les chiffres de la production, tous les chiffres rencontrés par le service de contrôle sont essentiellement variables, il en est ainsi de la qualité des produits reçus qui varie, non seulement d'une livraison à l'autre, mais également d'un échantillon à l'autre au sein d'une même livraison. Là aussi il faut que les différences ne soient pas significatives, au sens industriel du mot, pour que l'on puisse considérer l'ensemble des livraisons comme constitué par des produits homogènes.

On voit donc que le contrôle des quantités (chiffres de la production, rendements, déchets aux différents stades de la fabrication, etc...) et le contrôle des qualités (qualité des produits réceptionnés, des produits en cours de fabrication et fabriqués), posent l'un comme l'autre le même problème : celui de savoir à quel moment les fluctuations inévitables sortent du domaine acceptable pour devenir significatives.

Il est certain qu'une grande expérience, la connaissance de l'ordre de grandeur des chiffres qui se présentent et un solide bon sens soient d'une très grande utilité en pareille matière, mais ils ne peuvent suffire; pour juger avec sûreté de la valeur des nombres, l'appareil mathématique est nécessaire. Il existe, en effet, un certain nombre de méthodes fournies par la Statistique mathématique, fondées sur le Calcul des Probabilités, qui peuvent apporter un grand appoint au contrôle numérique tel que nous l'avons succinctement posé. Nous allons exposer la méthode des diagrammes de contrôle. Elle a été créée par le Dr Shewhart, perfectionnée par le Dr E. S. Pearson, et il nous a semblé qu'elle trouve une application non seulement dans le contrôle de la qualité, mais également dans le contrôle des quantités et dans celui de la production commerciale.

II. — FONDEMENTS MATHÉMATIQUES

Les *fondements mathématiques* de la méthode sont les propriétés des lois de distribution, ou lois de répartition, et la théorie de la variabilité des échantillons.

Vous savez tous que si un ensemble d'objets, ou d'individus, se répartit, pour un caractère x , suivant une loi $y = f(x)$, cela veut dire que la proportion d'individus dont le caractère est compris entre les valeurs x_1 et x_2 est l'aire de

la surface hachurée comprise entre l'axe Ox , la courbe $y = f(x)$ et les ordonnées x_1 et x_2 .

Cette aire est la *probabilité* pour qu'un individu pris au hasard ait le caractère compris entre x_1 et x_2 .

Une loi de distribution est caractérisée par un certain nombre d'éléments dont nous retiendrons les principaux :

La *valeur moyenne*, nous prendrons la moyenne arithmétique :

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Si le nombre n d'individus est très grand :

$$\bar{x} = \int x f(x) dx$$

L'*écart type* ou écart quadratique moyen, c'est un indice permettant de caractériser la dispersion des valeurs autour de la moyenne :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

ou :

$$\sigma = \sqrt{\int (x_i - \bar{x})^2 f(x) dx}$$

Le *coefficient de variation* qui est l'écart type rapporté à la moyenne :

$$v = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

L'*intervalle de variation*, w , qui est la différence entre la plus grande et la plus petite des valeurs observées dans l'ensemble :

$$w = x_{\max} - x_{\min}$$

Lorsque la loi de distribution d'un ensemble caractérisant une production, par exemple des nombres mesurant la qualité des produits fabriqués, reste invariable dans le temps, on dit que la production est *stable*. On voit que la

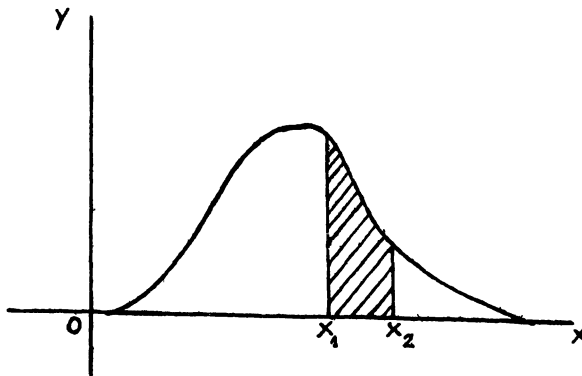


fig. 1

stabilité n'implique pas que toutes les valeurs individuelles restent constantes, seule leur répartition doit rester invariable. En général, lorsque l'on a affaire

à un ensemble stable et homogène, résultant d'un travail où l'on n'a pas de raisons de soupçonner des irrégularités, la courbe de distribution est une courbe en cloche d'allure régulière analogue à celle de la figure 1.

Loi de Gauss. — Dans un grand nombre de cas, où l'ensemble est bien homogène et où les écarts à la moyenne sont dus à l'addition d'un grand nombre de petites variables aléatoires et indépendantes, on trouve une distribution particulière bien connue : la distribution de *Laplace-Gauss*. Elle est représentée par la fonction :

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

dont la représentation graphique est une courbe en cloche symétrique.

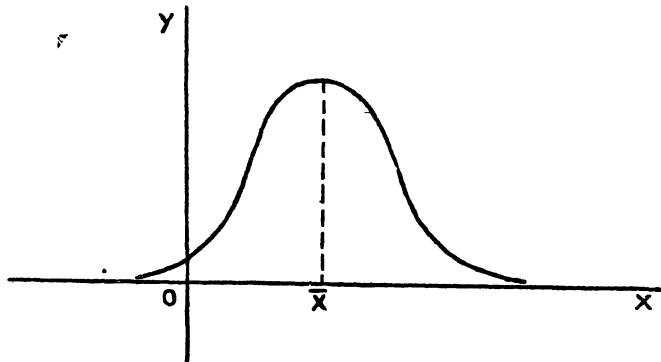


fig. 2

Il est intéressant de connaître pour quelles valeurs de x la probabilité d'observer une valeur inférieure à ce nombre est égale à 0,001, 0,025, 0,975, 0,999. Ces valeurs sont données par le tableau suivant :

P	\bar{x}
0,001	$\bar{x} - 3,09\sigma$
0,025	$\bar{x} - 1,96\sigma$
0,975	$\bar{x} + 1,96\sigma$
0,999	$\bar{x} + 3,09\sigma$

Théorème de Bienaymé-Tchébycheff. — Lorsque la distribution n'est pas gaussienne, mais néanmoins connue, le calcul de ces valeurs particulières (dont nous verrons l'importance) peut être effectué, plus ou moins facilement suivant la forme de la distribution et les tables numériques dont on dispose. Il est cependant du plus haut intérêt de signaler que le *théorème de Bienaymé-Tchébycheff* nous permet de dire quelque chose sur les probabilités des écarts, même lorsqu'on ne connaît rien sur la forme de la distribution.

On peut conclure, par exemple, que la probabilité que l'on a d'observer un écart égal ou supérieur à 3 écarts types ne dépasse pas $1/9$ soit 11 %. Si on connaissait la loi de distribution, cette probabilité serait certainement moindre. En particulier, pour la loi de Gauss, elle est de 0,3 %; probabilité suffisamment faible pour que l'objet présentant cet écart puisse être suspecté d'irrégularité.

Il faut cependant remarquer que la probabilité donnée par le théorème de Bienaymé-Tchébycheff n'est qu'une limite supérieure; en fait les distributions se rapprochent assez de celle de Gauss, du moins pour les ensembles contrôlés d'assez près, et cette probabilité est bien plus faible que 11 %. Au point de vue industriel l'expérience prouve que chaque fois qu'un écart supérieur à 3σ est rencontré, il peut être considéré comme significatif et il est bien rare que l'on ne puisse découvrir une cause à un pareil écart.

Variabilité des échantillons. — Supposons que d'un ensemble, obéissant à une certaine loi de distribution, on prélève au hasard un certain nombre, k , d'échantillons contenant chacun n unités. Il peut s'agir par exemple des barres d'acier produites en un mois par une usine et dont on tire 5 échantillons contenant chacun dix barres. Si l'on mesure la résistance à la traction de ces barres, les valeurs la caractérisant varient de l'une à l'autre. Pour chaque échantillon de 10 barres, on a la moyenne des résistances, leur écart type, leur coefficient de variation et l'intervalle de variation. En définitive, on sera en présence du tableau :

\bar{x}_1	σ_1	ν_1	ω_1
\bar{x}_2	σ_2	ν_2	ω_2
\bar{x}_3	σ_3	ν_3	ω_3
\bar{x}_4	σ_4	ν_4	ω_4
\bar{x}_5	σ_5	ν_5	ω_5

Toutes ces valeurs varient d'un échantillon à l'autre et suivent des lois de répartition autour des valeurs \bar{x} , σ , ν et ω appartenant à tout l'ensemble. Il est important de connaître sinon ces lois de répartition, du moins la variabilité de ces caractéristiques, c'est-à-dire leurs écarts types.

Variabilité de la moyenne. — Quelle que soit la loi de distribution de l'ensemble, l'écart type de la moyenne d'un échantillon renfermant n unités est : $\sigma_{\bar{x}_1} = \sigma/\sqrt{n}$, où σ est l'écart type de tout l'ensemble. Il y a lieu d'ajouter que cette moyenne \bar{x}_1 suit une loi très voisine de celle de Gauss ayant pour centre la moyenne générale \bar{x} .

De même on peut généralement adopter pour l'écart type de σ_1 la valeur approchée $\sigma/\sqrt{2n}$.

Variabilité de l'écart type. — Dans le cas où la distribution de l'ensemble est gaussienne (et ce sera applicable lorsqu'elle n'en est pas trop éloignée), la distribution de σ_1 , ν_1 et ω_1 est connue et les valeurs correspondant aux probabilités 1/1000, 25/1000, 975/1000 et 999/1000 sont consignées dans des tables placées à la fin de cette communication.

La *variabilité d'un rapport* présente souvent un certain intérêt. Nous avons vu que si une fabrication est stable, les valeurs mesurant la qualité de chaque objet se distribuent suivant une certaine loi caractérisant leur ensemble. Il arrive fréquemment que l'on fasse subir aux produits des épreuves ou des essais de façon à éliminer les objets défectueux ou à en connaître le rapport $p_i = n_i/n$ de leur nombre n_i au nombre total d'objets n éprouvés. Sont considérés comme défectueux ceux dont la qualité est inférieure à une valeur déterminée. Alors, si l'on considère un lot, ou un échantillon, contenant n unités, comme étant

puisé au hasard dans l'ensemble le rapport p_i variera autour de sa valeur moyenne p suivant une loi binômiale, tendant vers une loi de Gauss ou vers une loi de Poisson lorsque n devient très grand. Son écart type a pour valeur :

$$\sigma p_i = \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

* * *

Nous arrivons à *la méthode*. Le problème auquel nous nous sommes attachés consiste à trouver une méthode à la fois rigoureuse et pratique permettant de constater la régularité des fluctuations les chiffres relevés dans une entreprise, ou bien d'être alerté dès qu'un écart significatif se présente. Après les préliminaires statistiques que nous avons passés en revue, on est naturellement amené à adopter le processus suivant :

1° Séparer les observations en k sous-groupes rationnels, c'est-à-dire en sous-groupes à l'intérieur desquels on a des raisons de croire que les variations sont pratiquement uniformes, mais entre lesquels il peut y avoir des différences significatives;

2° Estimer la moyenne et l'écart type du caractère contrôlé;

3° Sur un graphique, porter pour chaque sous-groupe un point dont l'abscisse est le temps (si les observations sont faites au cours du temps) ou le numéro d'ordre du sous-groupe, et l'ordonnée la valeur du caractère relative au sous-groupe;

4° Tracer une droite parallèle à l'axe des abscisses, dont l'ordonnée est égale à l'estimation de la moyenne générale. Si cela est possible, tracer de part et d'autre de la moyenne des parallèles correspondant aux probabilités 1/1000.

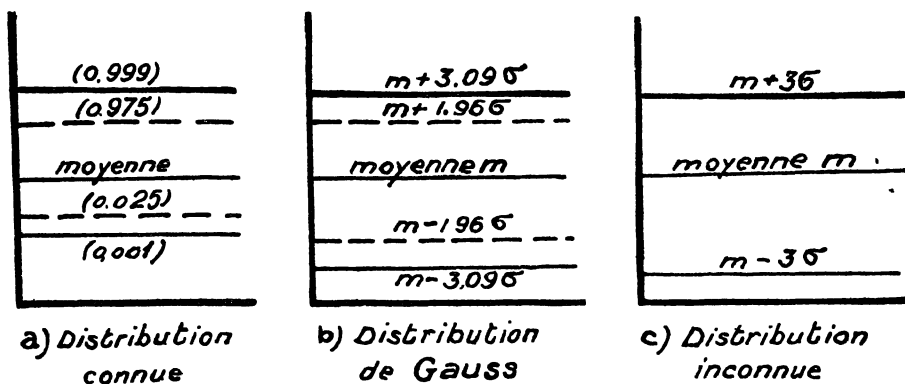


fig. 3

25/1000, 975/1000 et 999/1000. (Par exemple, si la distribution est gaussienne, tracer de part et d'autre de la ligne moyenne, des parallèles distantes de $1,96\sigma$ et $3,09\sigma$). Si on ne connaît rien sur la distribution tracer de part et d'autre de la ligne moyenne des parallèles distantes de celle-ci de 3σ ;

5° Considérer le fait qu'un point tombe en dehors des limites extrêmes

tracées, comme le signe d'une irrégularité. Le sous-groupe qui lui correspond accuse une différence significative avec l'ensemble. Dans les cas (a) et (b), un point sortant des limites intérieures (pointillé) doit être considéré comme un avertissement, le sous-groupe lui correspondant ne peut être suspecté d'irrégularité.

Les lignes ainsi tracées sont appelées *limites de confiance*. On a ainsi une paire de limites intérieures dont le dépassement doit être considéré comme un avertissement et une paire de limites extérieures (traits pleins) qu'un point ne peut dépasser sans accuser un écart significatif. C'est un signal d'alarme.

Pour établir ces limites il faut connaître la valeur moyenne du caractère contrôlé et aussi, en général, son écart type. On estime la valeur moyenne de l'ensemble en calculant d'abord la moyenne arithmétique \bar{x}_j de chaque sous-groupe; on obtient ainsi $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_j; \dots, \bar{x}_k$. La moyenne générale est alors la moyenne arithmétique simple ou pondérée de ces moyennes :

$$\bar{x} = (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_k)/k$$

ou :

$$\bar{x} = (n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2 + \dots + n_k \bar{x}_k)/(n_1 + n_2 + \dots + n_k).$$

n_j étant le nombre d'unités contenues dans le j^e sous-groupe. La pondération est nécessaire quand les n_j sont très différents les uns des autres.

L'estimation de l'écart type général σ à partir des écarts des sous-groupes est plus délicate. On a le choix entre plusieurs méthodes...

$$(1) \quad \boxed{\sigma^2 = \frac{n}{n_k - k} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_k^2)}$$

Par la première on estime σ à partir des carrés des écarts types σ_j^2 des échantillons, avec la formule :

$$\sigma^2 = \frac{n_1 \sigma_1^2 + n_2 \sigma_2^2 + \dots + n_k \sigma_k^2}{\sum n_j - k}$$

dans laquelle on a :

$$\sigma_j^2 = \frac{\sum_1 (x_i - \bar{x}_j)^2}{n_j}$$

Elle se simplifie lorsque le nombre d'unités n_j contenues dans chacun d'eux est égal pour tous. Cette formule d'estimation est très générale, elle s'applique quelle que soit la loi de distribution; elle a de plus l'avantage d'être plus précise que les autres.

La 2^e formule utilise les écarts types σ_j des sous-groupes.

$$(2) \quad \sigma = \frac{1}{b_n} \cdot \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_k}{K}$$

b_n est une constante dépendant du nombre n d'unités contenues dans les échantillons. (Ses valeurs sont consignées dans les tables.)

L'application de cette formule suppose une distribution gaussienne et le nombre d'unités égal, ou presque, dans tous les sous-groupes.

La 3^e formule permet d'estimer σ à l'aide des intervalles de variations w_k ,

$$(3) \quad \sigma = \frac{1}{d_n} \cdot \frac{1}{k} (w_1 + w_2 + \dots + w_k)$$

dn étant une constante dépendant du nombre n d'unités de chaque sous-groupe (voir table 2). Comme la formule (2), cette formule n'est valable que pour les distributions voisines de celle de Gauss et lorsque tous les échantillons ou sous-groupes contiennent le même nombre n d'unités. De plus les résultats ne sont relativement précis que si $n \leq 10$.

Dans tous les cas l'estimation de l'écart type ne peut être considérée comme bonne si le nombre total d'unités Σn , est inférieur à 30.

Les trois formules appliquées aux résultats des essais effectués sur deux mortiers que nous étudions comme exemple (p. 22) donnent les résultats suivants :

	ESTIMATION DE σ PAR LA FORMULE		
	(1)	(2)	(3)
Mortier A	1,282	1,232	1,259
Mortier B	1,310	1,286	1,256

Ces estimations calculées à l'aide de $k = 12$ échantillons contenant chacun $n = \sigma$ unités diffèrent très peu entre elles.

Au point de vue pratique c'est la formule (1) qu'il faudra utiliser dans deux cas :

- 1^o Distribution inconnue ou très différente d'une distribution de Gauss ;
- 2^o Cas où $n > 10$.

La formule (2) ne peut être utilisée que lorsque la distribution est gaussienne ; elle n'est pas plus intéressante que la formule (1).

La formule (3), beaucoup plus facile à appliquer, peut être utilisée de préférence lorsque $n \leq 10$, la distribution étant sensiblement normale.

* * *

VI

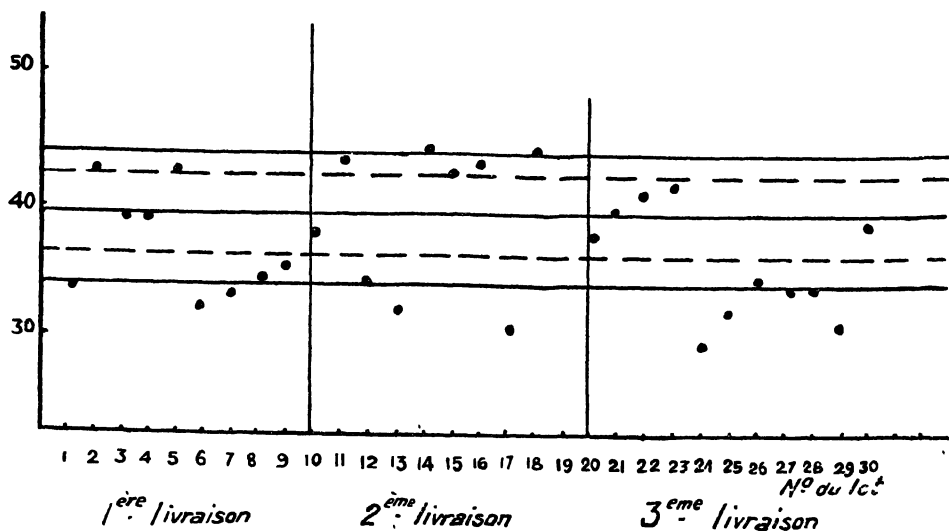
Les différents diagrammes de contrôle.

Voici comment, pratiquement, on trace quelques diagrammes de contrôle.

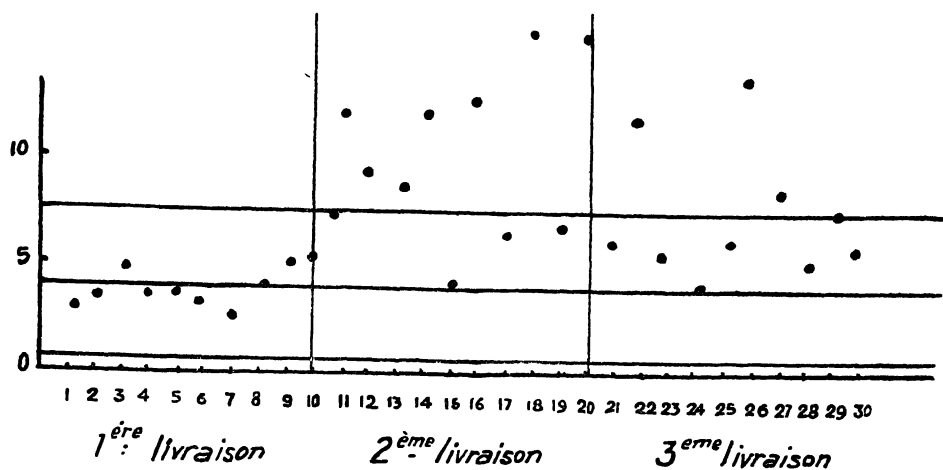
1^o *Diagramme de contrôle des moyennes.* — On a vu que les moyennes \bar{x} des échantillons se distribuent autour de la moyenne générale suivant une loi voisine de la loi de Gauss dont l'écart type est σ/\sqrt{n} . Les limites de confiance seront alors : $\bar{x} + 3,09 \sigma/\sqrt{n}$, $\bar{x} + 1,96 \sigma/\sqrt{n}$, $\bar{x} - 1,96 \sigma/\sqrt{n}$ et $\bar{x} - 3,09 \sigma/\sqrt{n}$, 95 % des moyennes doivent se trouver à l'intérieur des limites $\bar{x} \pm 1,96 \sigma/\sqrt{n}$ et 998 % à l'intérieur de $\bar{x} \pm 3,09 \sigma/\sqrt{n}$, sans quoi on pourrait affirmer que l'on se trouve en présence d'une irrégularité.

Pour établir ces limites, il suffit de connaître une estimation de \bar{x} et une estimation de σ . Le calcul est ensuite facilité par des tables donnant $A_{9,001} = 3,09/\sqrt{n}$ et $A_{0,025} = 1,96/\sqrt{n}$. Nous les reproduisons p. 28, table 1.

2° Diagramme de contrôle d'un rapport. — Nous avons vu (p. 8) que l'on peut se trouver en présence du contrôle d'un rapport $p_i = n_i/n$ suivant une loi binômiale. Il n'existe pas, à notre connaissance, de tables complètes permettant de



a) Diagramme de contrôle de la moyenne



b) Diagramme de contrôle de l'écart-type

fig. 4. Diagrammes de contrôle de la porosité d'un papier à cigarettes, à la réception

déterminer rapidement les limites de contrôle pour cette loi, à partir de p et n . On se contentera donc de calculer l'écart type du rapport p ($\sigma = \sqrt{pq/n}$) et de porter de part et d'autre de la ligne d'ordonnée p les limites distantes de 3σ . (Pour le calcul rapide de σ on utilisera des tables donnant \sqrt{pq} et $1/\sqrt{n}$.)

Dans le cas où n est grand la loi binômiale tend vers celle de Gauss, et on pourra appliquer les limites de celle-ci.

Lorsque le rapport p est très petit et n relativement grand, la loi binômiale tend vers une loi de Poisson. C'est, par exemple, le cas où les objets fabriqués par une usine subissent une épreuve de résistance avant d'être livrés. Il n'est pas économique d'avoir une épreuve trop rigoureuse qui détruirait une trop grande proportion de pièces. On a alors une fraction défectueuse de l'ordre de 1 à 10 ‰. La connaissance du nombre moyen de pièces défectueuses ($np = n\bar{p}_i$) suffit alors pour établir les limites de contrôle. Nous avons dressé une table à cet effet.

3° *Diagramme de contrôle des écarts types.* — Lorsque l'ensemble est sensiblement gaussien, les tables existantes permettent de calculer les limites de confiance pour l'écart type, à condition de disposer d'une estimation de l'écart type de l'ensemble.

Pour une distribution non gaussienne on se bornera à porter de part et d'autre de la valeur estimée σ de l'écart type, des limites distantes de $3\sigma/\sqrt{2n}$.

4° *Diagramme de contrôle des coefficients de variation.* — Dans certains problèmes (durée des lampes à incandescence, résistance des mortiers et des ciments, par exemple), le coefficient de variation a un sens physique mieux défini que l'écart-type; il indique la variation relative alors que l'écart-type indique des variations absolues. Dans ce cas, il convient d'établir un diagramme de contrôle pour les coefficients de variation. Si la distribution est sensiblement gaussienne, la valeur centrale et les limites de contrôle sont données par la formule :

$$\frac{1}{\sqrt{c \left(1 + \frac{\bar{x}^2}{\sigma^2}\right) - 1}}$$

où les coefficients c correspondant à la valeur centrale et aux limites sont donnés dans la table 5.

Si la distribution n'est pas gaussienne, le calcul de l'écart-type σ/\bar{x} est extrêmement pénible et il vaut mieux contrôler la régularité des fluctuations sur un diagramme de l'écart-type.

5° *Diagramme de contrôle des intervalles de variation.* — Le contrôle de la dispersion des valeurs individuelles contenues dans le sous-groupe ne peut être entrepris sur les intervalles de variation que si l'on n'a pas de doute sur le caractère gaussien de la distribution. La loi de distribution des intervalles de variation des échantillons tirés d'un ensemble réparti suivant une loi de Gauss est déterminé lorsqu'on connaît l'écart-type σ de l'ensemble. Une table numérique permet alors de calculer rapidement les limites de confiance. Mais encore une fois, il faut souligner que ce diagramme est bien moins significatif que celui des écarts-types et c'est à ce dernier qu'il faudra avoir recours chaque fois qu'on en aura les moyens.

Voici des exemples.

Deux mortiers de compositions différentes sont essayés dans le but de choisir le plus résistant et surtout le plus homogène, la résistance pouvant être sacrifiée si l'homogénéité est beaucoup plus grande. 72 éprouvettes de chaque mortier ont été confectionnées par séries de 6 et essayées à la traction : on a mesuré la charge de rupture en Kg/cm₂. Pour chaque mortier on est en présence de 12 sous-groupes contenant chacun 6 unités. On constate que les résultats suivent sensiblement une loi de Gauss. Les moyennes générales des deux mortiers sont :

$$\bar{x}_A = 13,28 \quad \text{et} \quad \bar{x}_B = 11,77.$$

TABLEAU II. — Essais comparatifs de deux mortiers. Charge de rupture en kg/cm².

Mortier A.

SÉRIE N°	1	2	3	4	5	6
	13,1	12,8	12,7	13,6	13,5	10,0
	11,0	12,9	13,7	14,7	14,5	13,7
	12,8	11,5	14,1	13,5	14,2	14,0
	12,3	12,3	14,5	14,0	15,0	14,0
	14,0	12,5	14,0	14,0	14,7	14,7
	12,4	15,0	14,1	14,0	10,0	13,2
\bar{x}_j	12,60	12,83	13,85	13,97	13,65	13,27
σ_j	0,91	1,11	0,57	0,24	1,70	1,50
SÉRIE N°	7	8	9	10	11	12
	13,0	12,4	13,6	13,4	14,5	13,1
	14,2	13,0	12,7	13,7	14,6	9,8
	11,2	11,7	13,2	13,8	13,2	12,0
	13,3	15,5	12,8	14,5	14,5	13,6
	13,5	12,8	12,4	13,6	13,6	9,1
	15,5	15,8	10,0	14,3	14,7	11,8
\bar{x}_j	13,53	13,53	12,45	13,88	14,13	11,57
σ_j	1,33	1,53	1,16	0,50	0,65	1,61

Mortier B.

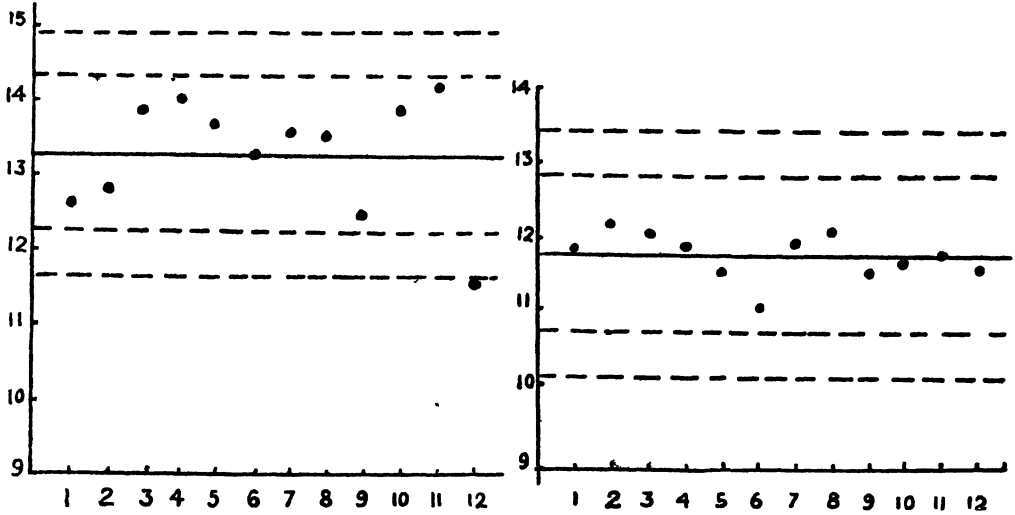
SÉRIE N°	1	2	3	4	5	6
	10,7	13,3	12,8	12,3	10,5	10,2
	13,5	11,7	13,3	11,5	11,2	11,8
	14,1	11,4	12,3	11,9	10,6	10,2
	12,1	12,8	10,4	11,5	11,7	12,1
	11,0	13,8	10,0	12,1	9,7	11,8
	9,5	10,0	13,3	12,0	15,5	10,0
\bar{x}_j	11,82	12,17	12,02	11,88	11,53	11,02
σ_j	1,58	1,25	1,30	0,41	1,90	0,85
SÉRIE N°	7	8	9	10	11	12
	12,4	10,8	11,2	12,4	11,9	12,2
	11,9	13,0	11,9	11,0	14,6	10,5
	12,2	12,0	11,6	13,3	10,2	11,2
	11,8	13,3	9,4	11,6	11,9	12,1
	11,2	13,2	11,4	10,4	11,8	10,6
	11,9	10,1	13,6	11,2	10,2	13,0
\bar{x}_j	11,90	12,07	11,52	11,65	11,77	11,58
σ_j	0,37	1,20	1,20	0,96	1,45	0,94

Les estimations de σ par les formules (1), (2) et (3) sont consignées dans le

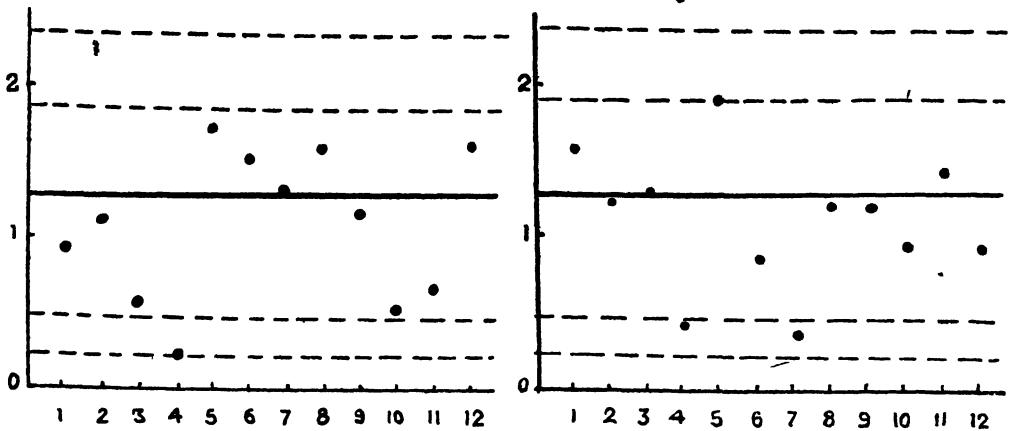
tableau de la page 12. Nous en retiendrons la plus précise, c'est-à-dire celle qui est calculée par la formule (1) :

$$\sigma_A = 1,282$$

$$\sigma_B = 1,310$$



a) Diagrammes de contrôle
des moyennes



b) Diagrammes de contrôle
des écarts types

fig. 5. - Essais comparatifs de deux mortiers

Pour comparer la résistance moyenne et l'homogénéité des deux mortiers, établissons les diagrammes de contrôle des moyennes des sous-groupes et de leurs écarts types.

Limites de confiance pour les moyennes :

	MORTIER A			MORTIER B		
\bar{x} — $A_{0,001\sigma}$	13,28	— 1,262	$\times 1,28 = 11,66$	11,77	— 1,262	$\times 1,31 = 10,12$
\bar{x} — $A_{0,025\sigma}$	13,28	— 0,800	$\times 1,28 = 12,25$	11,77	— 0,800	$\times 1,31 = 10,72$
\bar{x} + $A_{0,025\sigma}$	13,28	+ 0,800	$\times 1,28 = 14,31$	11,77	+ 0,800	$\times 1,31 = 12,82$
\bar{x} + $A_{0,001\sigma}$	13,28	+ 1,26	$\times 1,28 = 14,90$	11,77	+ 1,262	$\times 1,31 = 13,42$

Limites de confiance pour les écarts types :

	MORTIER A		MORTIER B	
$B_{0,001\sigma}$	0,187	$\times 1,28 = 0,24$	0,187	$\times 1,31 = 0,25$
$B_{0,025\sigma}$	0,372	$\times 1,28 = 0,48$	0,372	$\times 1,31 = 0,49$
$B_{0,975\sigma}$	1,462	$\times 1,28 = 1,87$	1,462	$\times 1,31 = 1,92$
$B_{0,999\sigma}$	1,849	$\times 1,28 = 2,37$	1,849	$\times 1,31 = 2,42$

Les diagrammes de contrôle des moyennes (fig. 5, a) montrent que la résistance du mortier A est nettement supérieure à celle du mortier B. De plus les résistances moyennes des sous-groupes appartenant au même mortier ne diffèrent pas entre elles d'une façon significative, sauf pour le sous-groupe n° 12 du mortier A.

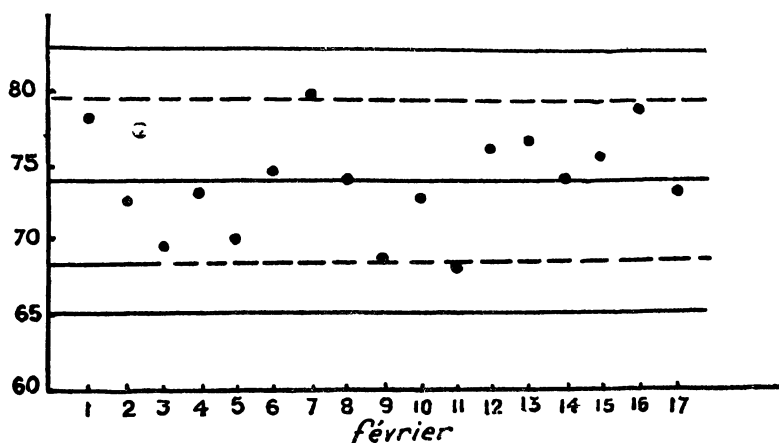
Quant à la dispersion des résultats, elle est tout à fait comparable pour les deux mortiers, comme le prouvent les diagrammes (b). L'homogénéité des deux mortiers étant du même ordre de grandeur, et la résistance du mortier A étant nettement supérieure, c'est celui-ci qui sera adopté à l'exclusion du mortier B.

3° *Rendement d'un procédé de fabrication.* — Dans une usine on relève toutes les six heures (4 fois par jour) le rendement, c'est-à-dire le rapport du poids de la matière première réellement utilisée à celui de la matière consommée. Nous suivons ici ces rendements pendant 17 jours : du 3 au 19 février, au cours desquels on a essayé de les améliorer en modifiant légèrement le procédé de fabrication le 9 et le 14 février. Voici un tableau indiquant les rendements relevés, le rendement moyen journalier \bar{x}_j et l'intervalle de variation w_j des 4 rendements de chaque jour.

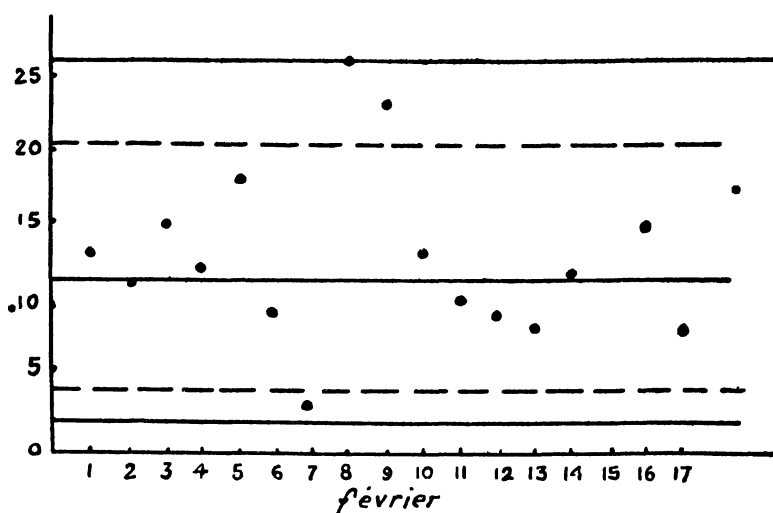
JOUR	3 FÉVR.	4 FEVR	5 FEVR.	6 FEVR.	7 FLVR	8 FÉVR.	9 FÉVR.	10 FÉVR.	11 FÉVR.
Rendements en % . . .	77 71 84 81	78 72 74 67	62 77 75 64	81 69 72 70	80 69 69 62	81 72 71 74	81 79 78 81	58 79 84 75	70 83 60 62
\bar{x}_j	78,25	72,75	69,5	73	70	74	79,75	74	68,75
w_j	13	11	15	12	18	9	3	26	23

JOUR	12 FÉVR	13 FEVR	14 FEVR	15 FEVR	16 FFVR	17 FÉVR.	18 FÉVR.	19 FÉVR.
Rendements en % . . .	66 73 73 79	72 73 63 64	72 79 72 81	78 73 81 74	69 70 81 76	83 82 55 82	87 72 74 81	69 74 77 72
\bar{x}_j	72,75	68	76	76,5	74	75,5	78,5	73
w_j	13	10	9	8	12	28	15	8

Ces rendements se distribuent suivant une loi très voisine de celle de Gauss. On pourra donc estimer σ par la formule (3). On pourra aussi, pour contrôler la dispersion des 4 rendements journaliers, établir un diagramme de contrôle



a) Diagramme de contrôle du rendement moyen journalier



b) Diagramme de contrôle de l'intervalle de variation journalière

fig. 6

des intervalles de variation ω_j . Au bout des 7 premiers jours on a 28 observations et par suite on peut estimer \bar{x} , σ et $\bar{\omega}$. On trouve :

$$\bar{x} = 73,96, \quad \sigma = 5,62 \quad \text{et} \quad \bar{\omega} = 11,6$$

Limites de confiance pour \bar{x} :

$$\begin{aligned} 73,96 + 15,45 \times 5,62 &= 82,66 & 73,96 + 0,980 \times 5,62 &= 79,46 \\ 73,96 - 1,545 \times 5,62 &= 65,25 & 73,96 - 0,980 \times 5,62 &= 68,46 \end{aligned}$$

Limites de confiance pour ω , :

$$\begin{aligned} D_{0,005\sigma} &= 0,38 \times 5,62 = 2,14 \\ D_{0,050\sigma} &= 0,77 \times 5,62 = 4,35 \\ D_{0,950\sigma} &= 3,65 \times 5,62 = 20,51 \\ D_{0,995\sigma} &= 4,65 \times 6,62 = 26,13 \end{aligned}$$

L'examen des deux diagrammes de contrôle (*a* et *b*, fig. 6) montre que le rendement est « stable » dans le premier intervalle.

3^o 8 février. — Cependant son niveau moyen a été jugé trop bas et une modification dans le procédé de fabrication a été opérée le 9 février. Le niveau semble alors s'élever, mais il tombe ensuite au-dessous de la 1^{re} limite (13 février); de plus, le diagramme (*b*) décèle une irrégularité considérable dans cette période. Une nouvelle modification est alors apportée le 14 février; les résultats sont excellents, car, depuis, on constate presque tous les jours un rendement moyen supérieur à la moyenne et une dispersion relativement faible, sauf le 17, où un dérangement de la machine provoque une perte de matière et un rendement exceptionnel de 55 % au 3^e tour de six heures de fabrication.

* *
* *
↓

Les applications.

La méthode exposée est à même de fournir une aide efficace dans le contrôle des différentes opérations engagées à l'intérieur d'une entreprise. Ces opérations peuvent être classées en trois groupes principaux suivant qu'elles ont lieu avant, pendant ou après l'exécution des travaux.

Les diagrammes de contrôle peuvent en effet être utiles dans les problèmes de spécification, où il s'agit de définir l'objet de la fabrication. Ils sont presque indispensables lorsqu'il s'agit de contrôler les matières premières et les fournitures à leur réception; il faut vérifier en effet si elles sont conformes aux spécifications et refuser les livraisons en cas de non conformité, ou encore les accepter moyennant une refaction. Les diagrammes de contrôle, par leur rigueur, la simplicité de leur interprétation et leur application presque automatique, constituent une forme très attrayante du contrôle de la réception.

Avant d'amorcer la production en série il faut être sûr que le type que l'on fabriquera est le plus avantageux pour le moment. Il se pose alors des problèmes de recherches spéciales et de comparaisons dans lesquels notre méthode peut être utilisée, nous en donnons un exemple plus loin.

Pendant l'exécution des travaux, des questions très délicates se posent : est-on réellement en train d'exécuter l'objet qu'on s'est proposé de faire? Ces fluctuations que l'on constate dans la qualité et les quantités sont-elles dues à des causes qu'il est économiquement possible de découvrir et d'éliminer, ou bien sont-elles seulement attribuables à des causes inhérentes au procédé utilisé et qui donnent des fluctuations *stables*? Le contrôle statistique appliqué aux qualités des produits semi-manufacturés et aux rendements apportera certainement une contribution précieuse pour répondre à ces questions.

Après la production, la vérification des qualités des produits finis par les diagrammes de contrôle permet d'alerter quand la fabrication se « décroche »; c'est lorsqu'un point sort des limites de confiance. Au bout de quelques années, l'expérience, basée sur des grands nombres, permet de fixer des limites dont la valeur est bien fondée; alors le contrôle devient automatique.

Il faut signaler cependant que ces problèmes qui se posent avant, pendant et après l'exécution des travaux sont intimement liés entre eux et les diagrammes de contrôle constituent l'un des liens. En effet la vérification donne des indications sur l'efficacité des moyens de production. De plus la spécification n'aurait pas de sens si elle ne tenait pas compte des possibilités réelles de production.

Quittons le domaine intérieur à l'entreprise, pour passer sur le plan extérieur. Les diagrammes de contrôle s'appliquent évidemment au contrôle de l'activité et de la politique commerciale de l'entreprise. Il suffirait de définir un indice dont les fluctuations ne dépendraient que de la chose qui doit être contrôlée. Par exemple le rapport de la production d'une catégorie de contrats d'une compagnie d'assurance à la production totale est sensiblement constant et des écarts significatifs pourraient peut-être attirer l'attention des chefs de service de production. Dans chaque commerce et pour chaque branche, les diagrammes de contrôle des rapports analogues pourraient fournir de précieuses indications sur la valeur relative des méthodes commerciales utilisées, des représentants des types de fabrication, et sur les fluctuations des conditions économiques générales et particulières.

De toute façon, tant dans le plan intérieur que dans le plan extérieur, l'application du contrôle statistique suppose une connaissance parfaite de la technique de fabrication ou commerciale. En effet, la méthode ne peut donner des indications dignes de foi que si, à la base, les sous-groupes sont bien choisis, c'est-à-dire que chacun d'entre eux forme un tout bien homogène. Il faut de plus savoir si le contrôle doit porter sur la moyenne, l'écart type, le coefficient de variation, ou toute autre grandeur statistique; le choix judicieux de cette dernière est à la fois du ressort de la technique industrielle ou commerciale et de la technique statistique. Le diagramme de contrôle donne ensuite ses résultats dont la valeur pratique dépend de celle des éléments à la base; mais là s'arrête le rôle de la statistique, elle a donné son jugement et c'est au technicien de les interpréter et à en tenir compte dans son action. On voit ainsi que la méthode exposée ne prétend pas résoudre complètement le problème du contrôle numérique, c'est seulement un auxiliaire qui permet d'utiliser rationnellement et avec une efficacité accrue les données et les connaissances techniques dont on dispose.

TABLE 1. — Coefficients pour le calcul des limites des diagrammes de contrôle de la moyenne et de l'écart type.

n	MOYENNE		ÉCART TYPE					n
	A _{0,001}	A _{0,025}	B _{0,001}	B _{0,025}	B _{0,075}	B _{0,999}	1/b _n	
2	2,185	1,386	0,001	0,022	1,585	2,327	1,772	2
3	1,784	1,132	0,026	0,130	1,568	2,146	1,382	3
4	1,545	0,980	0,078	0,232	1,529	2,017	1,253	4
5	1,382	0,876	0,135	0,311	1,493	1,922	1,189	5
6	1,262	0,800	0,187	0,372	1,462	1,849	1,151	6
7	1,158	0,741	0,233	0,420	1,437	1,791	1,126	7
8	1,092	0,693	0,274	0,459	1,415	1,744	1,108	8
9	1,030	0,653	0,309	0,492	1,396	1,704	1,094	9
10	0,977	0,620	0,339	0,520	1,379	1,670	1,084	10
11	0,932	0,591	0,367	0,543	1,365	1,640	1,075	11
12	0,892	0,566	0,391	0,564	1,352	1,614	1,068	12
13	0,857	0,544	0,413	0,582	1,340	1,591	1,063	13
14	0,826	0,524	0,432	0,598	1,329	1,570	1,058	14
15	0,798	0,506	0,450	0,613	1,320	1,552	1,054	15
16	0,773	0,490	0,467	0,626	1,311	1,535	1,050	16
17	0,750	0,475	0,482	0,637	1,303	1,520	1,047	17
18	0,728	0,462	0,495	0,648	1,295	1,505	1,044	18
19	0,709	0,450	0,508	0,658	1,288	1,492	1,042	19
20	0,691	0,438	0,520	0,667	1,282	1,480	1,040	20
21	0,674	0,438	0,531	0,676	1,276	1,469	1,038	21
22	0,659	0,418	0,541	0,684	1,270	1,458	1,036	22
23	0,644	0,409	0,551	0,691	1,265	1,449	1,034	23
24	0,631	0,400	0,560	0,698	1,260	1,439	1,033	24
25	0,618	0,392	0,569	0,704	1,255	1,431	1,031	25
26	0,606	0,384	0,577	0,710	1,250	1,423	1,030	26
27	0,595	0,377	0,584	0,716	1,246	1,415	1,029	27
28	0,584	0,370	0,592	0,721	1,242	1,408	1,028	28
29	0,574	0,364	0,599	0,727	1,238	1,401	1,027	29
30	0,564	0,358	0,605	0,731	1,235	1,394	1,026	30

TABLE 2. — Pour le diagramme de l'intervalle de variation.

n	D _{0,005}	D _{0,050}	D _{0,950}	D _{0,995}	1/d _n
2	0,01	0,09	2,77	3,97	0,8862
3	0,13	0,43	3,31	4,43	0,5908
4	0,38	0,77	3,65	4,65	0,4857
5	0,59	0,04	3,87	4,85	0,4299
6	0,78	1,26	4,04	5	0,3946
7	0,95	1,44	4,18	5,13	0,3898
8	1,10	1,60	4,29	5,23	0,3512
9	1,23	1,74	4,39	5,32	0,3367
10	1,35	1,86	4,48	5,40	0,3249

TABLES 3. — Permettant le calcul de $\sqrt{\frac{pq}{n}}$.

I. Table de \sqrt{pq} .

p	q	\sqrt{pq}	p	q	\sqrt{pq}
0,01	0,99	0,0995	0,26	0,74	0,4386
0,02	0,98	0,1400	0,27	0,73	0,4440
0,03	0,97	0,1706	0,28	0,72	0,4490
0,04	0,96	0,1960	0,29	0,71	0,4538
0,05	0,95	0,2179	0,30	0,70	0,4583
0,06	0,94	0,2375	0,31	0,69	0,4625
0,07	0,93	0,2551	0,32	0,68	0,4665
0,08	0,92	0,2713	0,33	0,67	0,4702
0,09	0,91	0,2862	0,34	0,66	0,4737
0,10	0,90	0,3000	0,35	0,65	0,4770
0,11	0,89	0,3129	0,36	0,64	0,4800
0,12	0,88	0,3250	0,37	0,63	0,4828
0,13	0,87	0,3363	0,38	0,62	0,4854
0,14	0,86	0,3470	0,39	0,61	0,4877
0,15	0,85	0,3571	0,40	0,60	0,4899
0,16	0,84	0,3666	0,41	0,59	0,4918
0,17	0,83	0,3756	0,42	0,58	0,4936
0,18	0,82	0,3842	0,43	0,57	0,4951
0,19	0,81	0,3923	0,44	0,56	0,4963
0,20	0,80	0,4000	0,45	0,55	0,4974
0,21	0,79	0,4073	0,46	0,54	0,4983
0,22	0,78	0,4142	0,47	0,53	0,4991
0,23	0,77	0,4208	0,48	0,52	0,4996
0,24	0,76	0,4271	0,49	0,51	0,4999
0,25	0,75	0,4330	0,50	0,50	0,5000

q	p	\sqrt{pq}	q	p	\sqrt{pq}
0,99	0,01	0,0995	0,74	0,26	0,4386
0,98	0,02	0,1400	0,73	0,27	0,4440
0,97	0,03	0,1706	0,72	0,28	0,4490
0,96	0,04	0,1960	0,71	0,29	0,4538
0,95	0,05	0,2179	0,70	0,30	0,4583
0,94	0,06	0,2375	0,69	0,31	0,4625
0,93	0,07	0,2551	0,68	0,32	0,4665
0,92	0,08	0,2713	0,67	0,33	0,4702
0,91	0,09	0,2862	0,66	0,34	0,4737
0,90	0,10	0,3000	0,65	0,35	0,4770
0,89	0,11	0,3129	0,64	0,36	0,4800
0,88	0,12	0,3250	0,63	0,37	0,4828
0,87	0,13	0,3363	0,62	0,38	0,4854
0,86	0,14	0,3470	0,61	0,39	0,4877
0,85	0,15	0,3571	0,60	0,40	0,4899
0,84	0,16	0,3666	0,59	0,41	0,4918
0,83	0,17	0,3756	0,58	0,42	0,4936
0,82	0,18	0,3842	0,57	0,43	0,4951
0,81	0,19	0,3923	0,56	0,44	0,4963
0,80	0,20	0,4000	0,55	0,45	0,4974
0,79	0,21	0,4073	0,54	0,46	0,4983
0,78	0,22	0,4142	0,53	0,47	0,4991
0,77	0,23	0,4208	0,52	0,48	0,4996
0,76	0,24	0,4271	0,51	0,49	0,4999
0,75	0,25	0,4330	0,50	0,50	0,5000

II. Table des inverses des racines carrées $1/\sqrt{n}$.

n	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	n	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	n	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	n	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	n	$\frac{1}{\sqrt{n}}$
1	1,0000	21	0,2182	41	0,1562	61	0,1280	81	0,1111
2	0,7071	22	0,2132	42	0,1543	62	0,1270	82	0,1104
3	0,5774	23	0,2085	43	0,1525	63	0,1260	83	0,1098
4	0,5000	24	0,2041	44	0,1508	64	0,1250	84	0,1091
5	0,4472	25	0,2000	45	0,1491	65	0,1240	85	0,1085
6	0,4082	26	0,1961	46	0,1474	66	0,1231	86	0,1078
7	0,3780	27	0,1925	47	0,1459	67	0,1222	87	0,1072
8	0,3536	28	0,1890	48	0,1443	68	0,1213	88	0,1066
9	0,3333	29	0,1857	49	0,1429	69	0,1204	89	0,1060
10	0,3162	30	0,1826	50	0,1414	70	0,1195	90	0,1054
11	0,3015	31	0,1796	51	0,1400	71	0,1187	91	0,1048
12	0,2887	32	0,1768	52	0,1387	72	0,1179	92	0,1043
13	0,2774	33	0,1741	53	0,1374	73	0,1170	93	0,1037
14	0,2673	34	0,1715	54	0,1361	74	0,1162	94	0,1031
15	0,2582	35	0,1690	55	0,1348	75	0,1155	95	0,1026
16	0,2500	36	0,1667	56	0,1336	76	0,1147	96	0,1021
17	0,2425	37	0,1644	57	0,1325	77	0,1140	97	0,1015
18	0,2357	38	0,1622	58	0,1313	78	0,1132	98	0,1010
19	0,2294	39	0,1601	59	0,1302	79	0,1125	99	0,1005
20	0,2236	40	0,1581	60	0,1291	80	0,1118	100	0,1000

TABLE 4. — *Loi de Poisson. Limites de confiance pour np.*

P n	P				P n	P			
	0,001	0,025	0,975	0,999		0,001	0,025	0,975	0,999
1	0	0	3,90	5,87	16	4,61	8,14	24,81	30,25
2	0	0	5,77	8,12	17	5,24	8,92	26,02	31,63
3	0	0	7,39	10,12	18	5,94	9,64	27,30	32,95
4	0	0,26	8,88	11,06	19	6,48	10,50	28,53	34,37
5	0	0,54	10,38	13,77	20	7,17	11,20	29,75	35,72
6	0	1,17	11,78	15,45	21	7,85	12,02	30,94	37,00
7	0,01	1,83	13,14	16,97	22	8,46	12,78	32,16	38,40
8	0,25	2,39	14,54	18,63	23	9,16	13,55	33,39	39,72
9	0,79	3,11	15,85	20,08	24	9,86	14,35	34,59	40,97
10	1,22	3,78	17,16	21,67	25	10,49	15,18	35,78	42,35
11	1,79	4,44	18,50	23,08	26	11,22	16,01	36,95	43,66
12	2,27	5,18	19,77	24,61	27	11,97	16,79	38,15	44,93
13	2,94	5,94	21,00	25,97	28	12,60	17,59	39,36	46,24
14	3,40	6,62	22,32	27,46	29	13,31	18,40	40,54	47,55
15	4,07	7,36	23,58	28,84	30	14,08	19,23	41,72	48,87

TABLE 5. — *Pour le diagramme du coefficient de variation.*

n	C _{0,001}	C _{0,025}	C _{0,975}	C _{0,999}	C _n
5	55,07	10,32	0,440	0,271	1,489
6	28,54	7,22	0,468	0,293	1,379
7	18,37	5,66	0,485	0,312	1,309
8	13,37	4,73	0,500	0,329	1,261
9	10,50	4,13	0,513	0,345	1,225
10	8,68	3,70	0,526	0,359	1,199
11	7,44	3,39	0,537	0,372	1,177
12	6,54	3,15	0,547	0,384	1,160
13	5,87	2,95	0,557	0,395	1,146
14	5,35	2,79	0,566	0,405	1,134
15	4,93	2,66	0,574	0,415	1,124
16	4,59	2,55	0,582	0,424	1,116
17	4,31	2,46	0,589	0,430	1,008
18	4,07	2,38	0,596	0,441	1,102
19	3,87	2,31	0,603	0,449	1,096
20	3,70	2,25	0,609	0,456	1,091
21	3,55	2,19	0,615	0,463	1,086
22	3,41	2,14	0,620	0,470	1,082
23	3,29	2,09	0,625	0,476	1,078
24	3,19	2,05	0,630	0,483	1,074
25	3,09	2,00	0,635	0,489	1,071
26	3,01	1,98	0,640	0,494	1,068
27	2,93	1,95	0,644	0,499	1,066
28	2,86	1,92	0,648	0,505	1,063
29	2,79	1,89	0,652	0,510	1,061
30	2,73	1,87	0,656	0,515	1,059

BIBLIOGRAPHIE

DARMOIS (G.), *Statistique Mathématique*. Paris, Doin, 1928.
 DAVIES (O. L.) et PEARSON (E. S.), *Methods of estimating from Samples the Population Standard Deviation*, 6 London, Supp. Journ. Roy. Statistical Society (Industrial and Agric. Section), vol. I, n° 1, 1934.
 DUDDING (B. P.) & BAKER (I. M.), *The Application of Statistical Methods to the Quality Control of Manufactured Products*, London, Journal of the Society of Glass Technology, 1933, vol. 17.
 FISHER (R. A.), *Statistical Methods for Research Workers*, London, Olivier et Boyd, 1936.
 GLOVER (J. W.), *Tables of Applied Mathematics in Finance, Insurance, Statistics*, Michigan, Ann Arbor, 1930.
 KELLEY (T. L.), *The Kelley Statistical Tables*, New-York, Macmillan, 1938.
 PEARSON (E. S.), *Statistical Methods in the Control and Standardisation of the Quality of Manufactured Product*, London, Journ. of the Royal Statistical Society, 1933.
 PEARSON (E. S.), *The Application of Statistical Methods to Industrial Standardisation and Quality Control*. London, British Standards Institution, 1935.
 PEARSON (K.), *Tables for Statisticians and Biometricians*, London, Cambridge University Press, 1930-1931.

SHEWHART (W. A.), *Economic Control of Quality of Manufactured Product*, London, Macmillan, 1931.
YULE (U. G.) & KENDALL (M. G.), *An Introduction to the Theory of Statistics*, London, Griffin, 1937.

DISCUSSION

M. BARRIOL dit que la communication de M. Rosenfeld montre clairement ce que l'on peut obtenir par l'application rationnelle du calcul à des épreuves concernant des faits à peu près homogènes. Il voit des applications intéressantes de ces méthodes dans l'étude de la fonderie de pièces provenant de coulées différentes ou bien de la confection de bagues de ressorts fabriquées avec des barres reçues de différents aciéristes ou même d'une seule origine; mais il serait nécessaire que les conditions de fabrication des matières à usiner fussent parfaitement connues, ce qui est malheureusement à peu près impossible. Il cite, à titre d'exemple, la question des températures de coulées ou celle des recuits qui sont difficiles à déterminer avec une précision suffisante; d'ailleurs, on se heurte bien souvent à l'incompréhension — sinon à la mauvaise volonté — des ouvriers et quelquefois aussi, hélas, des contremaîtres qui, sous prétexte d'expérience acquise, préfèrent, par exemple, les indications vagues et trompeuses de la simple vision à l'emploi des instruments mis à leur disposition qu'ils négligent parfois de contrôler malgré les instructions données. M. BARRIOL croit que les méthodes indiquées par M. Rosenfeld permettraient de faire modifier des clauses absurdes des cahiers des charges que l'on conserve en sachant parfaitement qu'elles n'ont aucun intérêt pratique et même sont complètement inadéquates aux conditions de sécurité que l'on veut obtenir ou de qualités que l'on désire.

Les suggestions de M. Rosenfeld relatives à la répartition par nature des contrats d'assurance seraient assez difficiles à réaliser, mais elles font entrevoir le champ immense des applications des méthodes de la statistique et il serait utile que de nombreuses applications pratiques fussent faites en suivant le cadre qui nous a été si clairement indiqué.

M. BARRIOL rappelle enfin qu'il envoie régulièrement à la bibliothèque les numéros spéciaux du Journal de la Société de Statistique de Londres auxquels M. Rosenfeld a fait allusion.

M. GORRE pense que le rendement d'un ouvrier ou d'une équipe d'ouvriers variant dans le temps peut évidemment donner lieu à une étude telle qu'elle a été exposée par notre collègue M. Rosenfeld.

Ces variations sont dues tout d'abord à des causes accidentelles que nous pouvons appeler normales, obéissant ici à la loi de Gauss, puis à des causes accidentelles anormales que la méthode des diagrammes de contrôle permettra d'identifier puis d'expliquer.

Mais, indépendamment de ces causes de variations accidentelles, il en existe d'autres permanentes : c'est, par exemple, le repos dominical qui donnera lieu à une variation hebdomadaire, le rendement augmentant au début de la semaine passant par un maximum le mardi puis décroissant jusqu'au samedi; on peut également déceler des variations saisonnières, etc.

Des remarques qui précèdent, on peut conclure qu'à partir du diagramme brut de contrôle obtenu, il est nécessaire d'éliminer les variations dues à des causes permanentes qui peuvent soit augmenter, soit diminuer la dispersion.

Ce n'est que sur la courbe résiduelle ainsi obtenue que la méthode étudiée est utilisable, ce qui la rend évidemment d'une application moins pratique et surtout moins immédiate.

M. JARRY demande si les opérations de contrôle ne sont pas très compliquées et si elles peuvent être faites rapidement; d'autre part, ce contrôle statistique est-il réellement utile puisque les ingénieurs doivent et peuvent effectuer directement le contrôle de la régularité, M. le Président DIVISIA fait observer que, souvent, on voit mieux par la statistique que par la vision directe; il y a de nombreux exemples en économique.

M. CHAUSSOIS dit que M. Jarry se préoccupe à juste titre de savoir dans quelle mesure les opérations préliminaires dans l'établissement des cartes de contrôle pouvaient être compatibles avec la nécessité d'aboutir rapidement aux renseignements visés. M. Rosenfeld nous avait montré qu'un des éléments essentiels du problème était de savoir si la loi de dispersion était gaussienne. Or, la réponse à cette question peut être donnée dans bien des cas, à l'atelier même, par l'emploi d'un appareil simple, que son inventeur, M. Nicolau, ingénieur en chef des fabrications d'armement, présenta l'an dernier à la Société des Ingénieurs civils; cet appareil à lecture directe permet en somme d'avoir sous les yeux le langage des nombres.

Sur un principe différent, nous connaissons encore une balance à fonctionnement continu automatique qui, abandonnant à sa position d'équilibre de petites billes de plomb dans les rainures verticales, correspondantes à des tranches d'abscisses égales, met sous les yeux une matérialisation de la loi de fréquence en poids d'un lot de cigarettes.

Au sujet du diagramme de contrôle de la porosité d'une livraison de papier à cigarettes, diagramme décelant une irrégularité considérable dans la moyenne et dans l'écart-type de divers lots, nous avons fait remarquer que la porosité est une grandeur mal définie. Sa notion demanderait à être précisée. Bien évidemment, ce fait général ne restreint nullement la portée de la méthode. Le statisticien traite les relevés de chiffres que lui fournit le technicien et il ne doit nullement être tenu pour responsable si ces chiffres n'ont pas de sens.

Les limites d'alerte de la carte de contrôle représentent les limites normales d'oscillations d'une fabrication dans l'état actuel de la technique. Les exigences d'emploi du produit fabriqué conduisent l'acheteur à deux autres limites extrêmes. Les limites inscrites dans le cahier des charges pour un marché doivent tenir compte de ces deux sortes d'exigences et en réaliser un compromis (sous peine d'entraîner à des réfections de prix systématiques).

L'application de la méthode dont M. Rosenfeld nous a entretenu au contrôle de la régularité du rendement de diverses équipes a soulevé quelques objections. Il faut bien comprendre qu'elle n'entend nullement se substituer au rôle de la maîtrise. C'est un témoin impartial, une « sonnette d'alarme » dont le rôle est terminé dès qu'elle a fonctionné. Le chef est prévenu; c'est à lui de dépister la cause qui a produit le décrochement anormal de régularité pour en empêcher le retour.

En résumé, la méthode du diagramme de contrôle employée à bon escient, semble, grâce à sa souplesse, susceptible d'être appliquée à un domaine pratique extrêmement étendu. Au reste, bien qu'à peu près ignorée en

France, elle a, croyons-nous, largement fait ses preuves en Amérique en particulier.

M. HIBBERT fait les remarques suivantes :

1. Étant donné que, dans la pratique, il est plutôt rare de trouver des industries où le contrôle porte sur une seule variable aléatoire, existe-t-il déjà des méthodes de contrôle à deux, trois ou même quatre variables indépendantes?

2. Réponse à une question de M. Divisia sur la signification de la tombée d'un point aléatoire en dehors de l'intervalle normal : le graphique devient pour quelqu'un qui aurait l'expérience, un véritable indicateur des causes de déséquilibre.

3. Le graphique étant fait d'après une loi de distribution déterminée de la variable aléatoire, ne se pose-t-il pas le problème pour chaque industrie de la durée pendant laquelle la loi de distribution demeure variable, et aussi le problème de la détermination de cette durée base des calculs?

M. le Président DIVISIA fait une observation en ce qui concerne les exemples de contrôle de la régularité du travail; il ne lui paraît pas évident *a priori* qu'un ouvrier à travail bien régulier soit préférable à un ouvrier à travail irrégulier qui pourrait avoir, malgré cette irrégularité, un rendement égal ou même supérieur à celui de l'ouvrier régulier.

Prenant ensuite la parole, M. ROSENFELD s'exprime comme suit :

Les observations de notre collègue M. Gorre sont parfaitement fondées, la méthode ne devrait théoriquement s'appliquer que sur des observations épurées des variations systématiques et en particulier des variations hebdomadaires. Mais l'élimination de telles variations, si elles ne sont pas très nettes et très sensibles, ce qui est souvent le cas, conduirait à de longues études parfois incompatibles avec le caractère pratique que l'on demande aux diagrammes de contrôle. En fait, utilisés sans ce raffinement, comme un premier moyen de détection, ils ont prouvé par l'expérience leur utilité pratique.

Ainsi simplifiées, en réponse à la question de M. Jarry, nous pouvons dire que les opérations de contrôle peuvent être conduites très rapidement. La partie la plus longue est l'étude de la distribution; il faut pouvoir se rendre compte de la forme de la distribution et si l'on a la chance de se trouver en présence d'une distribution de Gauss ou d'une autre distribution connue dont on possède les tables numériques. Ensuite, il faut établir les limites de contrôle, ce qui peut être fait en moins d'une demi-heure; le travail journalier ou hebdomadaire qui reste alors à faire est extrêmement simple; il consiste à calculer des moyennes et placer les points correspondants sur un graphique déjà préparé à les recevoir.

Répondant ensuite à M. Hibbert, M. ROSENFELD ajoute que ce problème mathématique des limites de contrôle d'une loi de distribution à plusieurs variables n'est pas très avancé. Il ne peut donc être question d'une application industrielle; mais l'étude séparée des variables prises individuellement peut donner des indications précieuses.

Les diagrammes de contrôle permettent de s'apercevoir systématiquement si la loi de distribution a changé; en effet, les points correspondant à la production suivant une nouvelle loi ne resteront plus dans les limites établies pour une distribution qui cesse d'être valable.