Journal de la société statistique de Paris

Arthur Linder

Variétés

Journal de la société statistique de Paris, tome 78 (1937), p. 249-255
<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1937__78__249_0>

III

VARIÉTÉ

La loi de l'effet proportionnel.

La loi exposée par M. Gibrat sous le nom de « Loi de l'Effet proportionnel (1) », nous semble mériter par son caractère de généralité de faire partie du bagage de tous ceux qui s'occupent de questions d'ordre physique, économique ou statistique, c'est-à-dire de la plupart des ingénieurs. Elle se présente sous la forme d'une généralisation de la loi de Gauss, mais son application n'est pas comme cette dernière loi réservée à l'étude des jeux de hasard, ou de la dispersion des tirs d'artillerie. Voici essentiellement en quoi elle consiste :

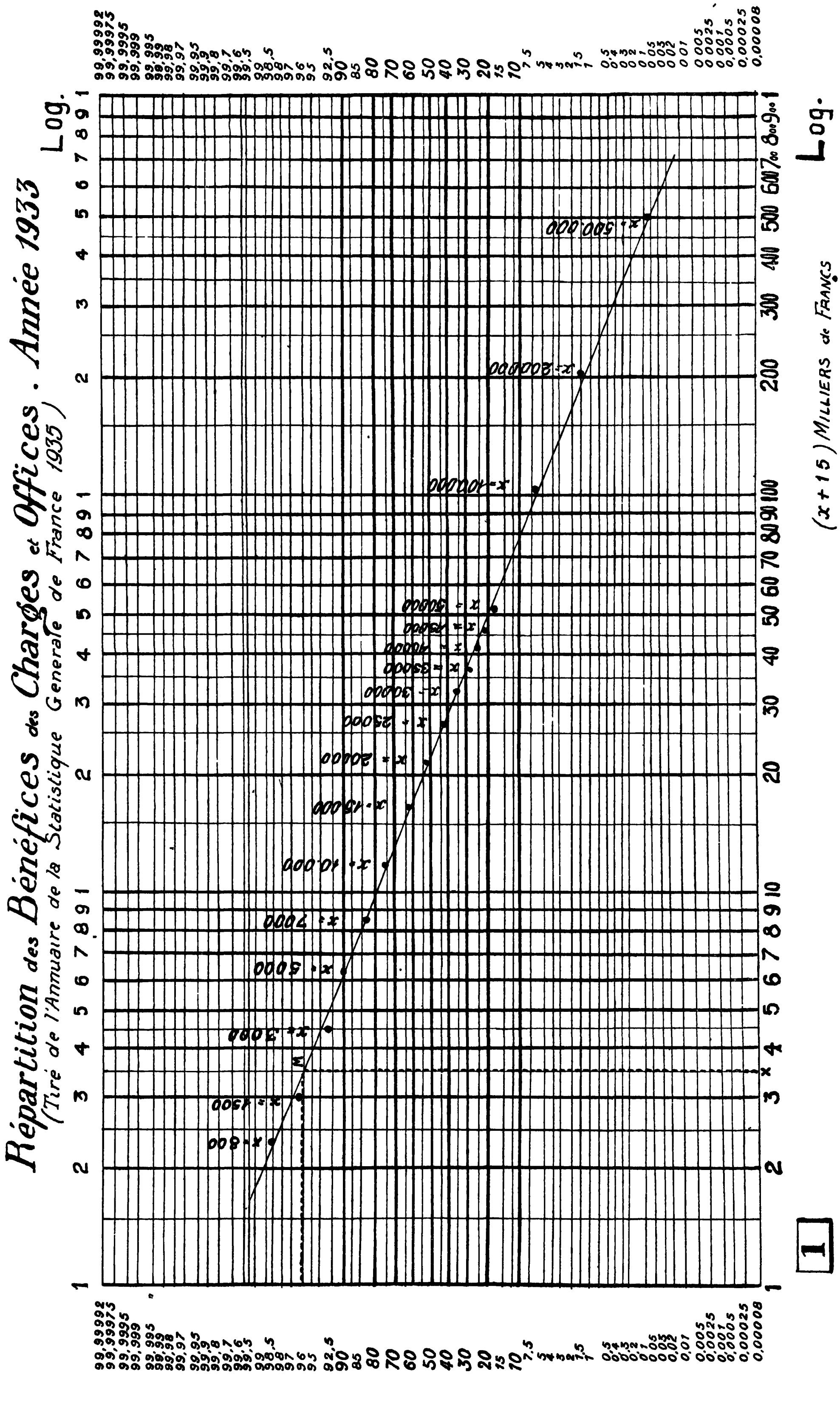
Si l'on étudie une série statistique de grandeurs, on observe que la loi de Gauss s'applique dans un grand nombre de cas, *à condition de faire intervenir non les grandeurs mêmes mais leur valeur en pourcent.* Cela revient à dire que c'est le logarithme des grandeurs (comptées à partir d'une certaine origine) et non leurs valeurs absolues qui suivent la loi de Gauss. On peut donc, grâce à cette loi, reconstituer, à l'aide d'un nombre de paramètres limité, une série quelconque : série des débits journaliers des cours d'eau; série des revenus des contribuables français; série des consommations annuelles des consommateurs d'électricité, etc.....

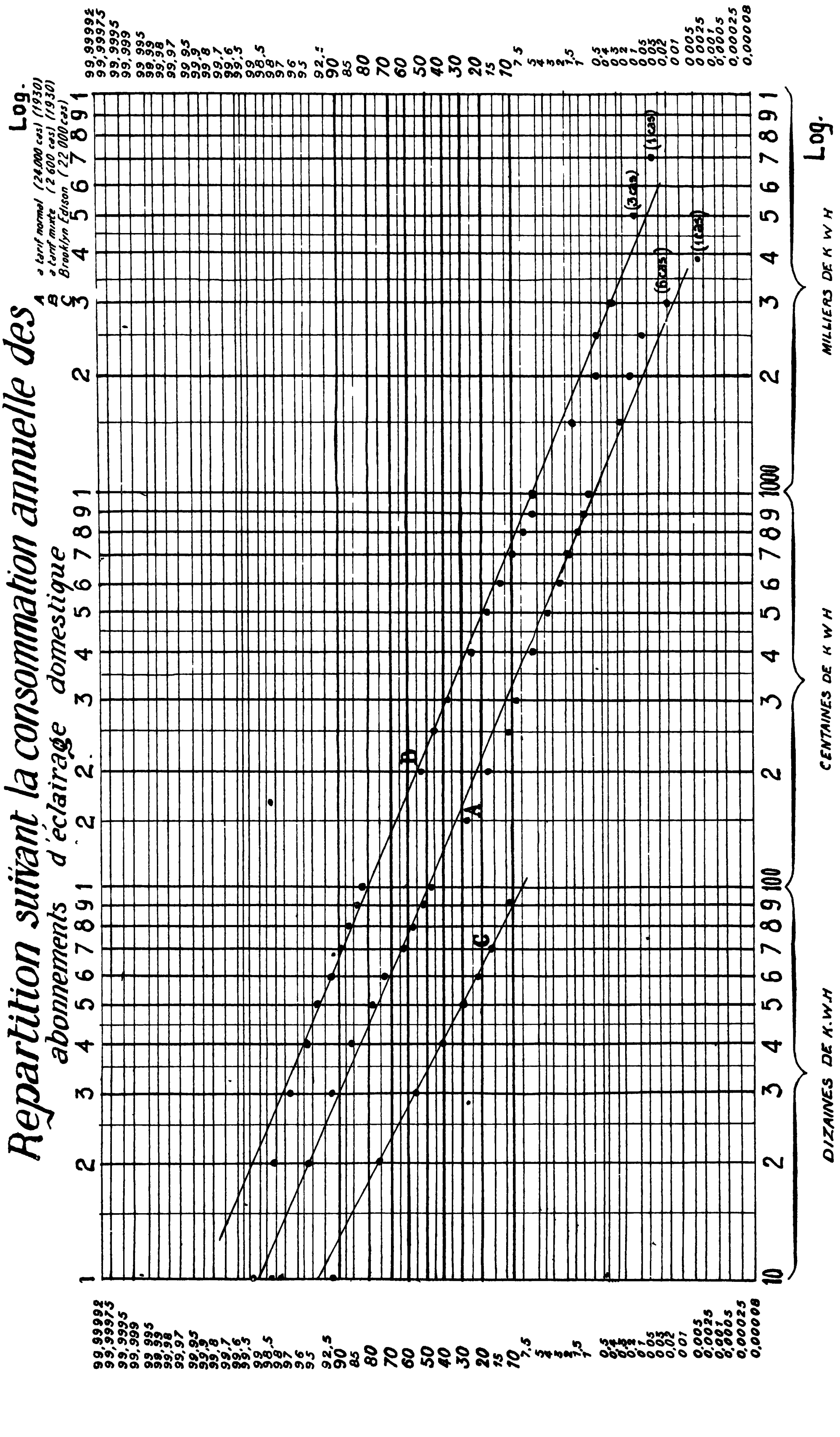
L'ouvrage de M. Gibrat : *Les inégalités économiques*, contient une table qui permet de faire les calculs et de mettre en évidence les paramètres, au nombre de trois, qui caractérisent une série donnée. En employant des quadrillages spéciaux (ces quadrillages s'obtiennent en portant en abscisse une échelle logarithmique, et en ordonnée une échelle correspondant à la courbe de Gauss intégrée) on arrive au même résultat sans perte de temps et avec une précision très suffisante. Sans entrer dans aucune explication théorique, indiquons simplement par un exemple comment l'on doit opérer. Le graphique de la figure I représente la série des bénéfices des charges et offices réalisés en 1933 (d'après l'Annuaire de la Statistique générale de France, 1935). Le point courant de cette courbe M indique qu'il y a Y % des titulaires de charges et offices qui ont gagné au moins X francs par an. On voit que les points obtenus se rangent sur une droite avec une précision qui est tout à fait saisissante si l'on considère la gamme étendue des bénéfices envisagés (de 800 à 500.000 francs par an).

L'une des particularités les plus remarquables de la représentation de Gibrat est le caractère de permanence que présente le coefficient angulaire de la droite figurative. M. Gibrat a donné des exemples qui montrent que les distributions de revenus que l'on a eu l'occasion de relever dans certains pays à plusieurs siècles d'intervalle ont présenté des variations relativement faibles pour ce coefficient. Il le considère comme caractérisant « l'inégalité » de la distribution.

Pour donner une autre application qui intéresse les électriciens, on trouvera à la figure 2 la droite figurative de la répartition des consommations annuelles des abonnés de la C. P. D. E. relevée au cours d'un sondage qui a été fait en 1930. On trouvera en A la représentation des abonnés au tarif ordinaire, en B ceux au tarif mixte. On remarquera que ces deux droites sont sensiblement parallèles entre elles, ce qui confirme les idées de M. Gibrat sur le caractère de permanence du coefficient angulaire. Les deux droites A et B s'infléchissent vers le bas, dans la zone des faibles consommations. Cela tient à ce que nous n'avons jugé utile que d'employer deux paramètres; l'emploi du troisième paramètre permettrait évidemment d'obtenir dans cette région un alignement meilleur. Sur le même quadrillage on a tracé la droite

(1) Journal de la Société de Statistique de Paris, 1932, page 266.


Répartition des Bénéfices des Charges et Offices . Année 1933
(Tiré de l'Annuaire de la Statistique Générale de France 1935)
Log.
Log.
(x + 15) Milliers de Francs
x = 800
x = 1500
x = 3000
x = 5000
x = 7000
x = 10 000
x = 15 000
x = 20000
x = 25000
x = 30000
x = 35000
x = 40000
x = 45000
x = 50000
x = 100000
x = 200000
x = 500.000
1

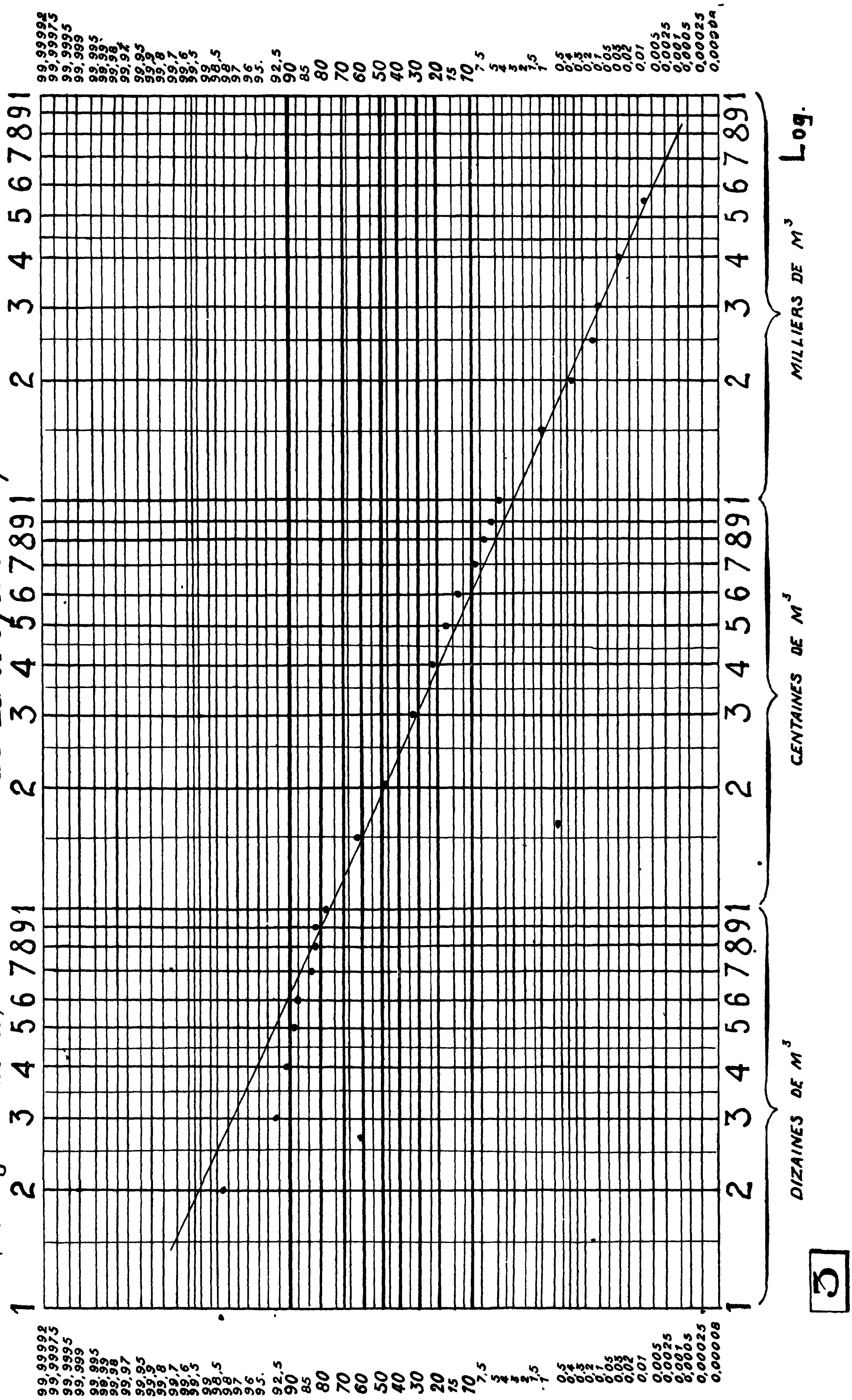


REMARQUE : La distribution C correspond à des consommations mensuelles tandis que A et B sont pris sur la base de la consommation annuelle

2

Débits, classés en mètres-cubes seconde, de La Truyère au pont de Lanau.

(13.878 jours observés)



correspondante pour les abonnés de la « Brooklyn Edison » : on remarquera que sa pente n'est pas tout à fait la même; le coefficient d'inégalité est différent.

Il est inutile d'insister sur l'intérêt que présente une figuration de ce genre pour l'étude des tarifs de vente dans un réseau donné; une économie considérable de temps et de travail peut en résulter. L'application en a d'ailleurs déjà été faite, notamment aux États-Unis et en France.

Comme autre exemple d'application de la loi de l'effet proportionnel, on peut citer celui qui est représenté à la figure 3 : c'est la distribution des débits maximum journaliers de la Truyère au pont de Lanau. On voit d'après cette figure que l'on peut caractériser le régime d'une rivière par trois paramètres : par exemple, le débit minimum, le débit moyen et le coefficient d'inégalité (inverse de la pente de la droite figurative). La figure 3 permet de répondre à la question suivante : sur quel débit de mètre cube maximum faut-il se baser pour établir le projet d'aménagement d'une rivière donnée. Il suffit pour cela d'extrapoler la droite figurative A vers la droite, c'est-à-dire dans la région des forts débits et de lire le nombre probable de crues dépassant une grandeur donnée en 10 ans, 100 ans, 1.000 ans, etc..... Ce point de vue eét développé dans un article paru dans la *R. G. E.* du 15 octobre 1932.

Enfin, M. Gibrat a èxposé dans son rapport aux grands réseaux en 1935 comment la loi de l'effet proportionnel permet d'étudier la corrélation entre la sensibilité à la foudre d'une ligne à haute tension, et le degré d'ionisation de l'air dans les régions qu'elle traverse.

Nous sommes loin d'avoir épuisé le sujet, et nous pensons que d'autres applications peuvent être envisagées qui ne présentent pas simplement un intérêt académique. Par exemple, si l'on étudie de la façon indiquée la courbe d'utilisation d'un réseau donné dans la région des fortes puissances, on obtient des renseignements intéressants sur la relation qui existe entre les différentes déterminations de la puissance maximum suivant que l'on envisage la puissance intégrée de l'heure, de la demi-heure, du quart d'heure ou de tout autre intervalle de temps.

J. D'HARCOURT.

***

La situation démographique de la Suisse.

I

Dans son étude sur « Les récentes tendances démographiques dans le monde », M. Pierre Depoid a fait une analyse fouillée de la fécondité et de la mortalité de la population d'un grand nombre de pays (1). D'une manière particulièrement claire, M. Depoid fait ressortir l'influence prépondérante qu'exerce la nuptialité sur la natalité. De même, il note que la fécondité légitime et surtout aussi la fécondité illégitime sont extrêmement variables selon les pays.

Afin de bien pouvoir juger la vraie situation des seize pays pour lesquels il a rassemblé des données numériques, M. Depoid a calculé l'excédent des naissances sur les décès de la population stable, d'après les théories de LOTKA (2).

Rappelons que ces calculs sont basés sur les taux de mortalité et sur les taux généraux de fécondité. Ainsi, dans ces calculs, les taux de nuptialité n'entrent pas en ligne de compte, ces résultats ne se basent que sur la répartition de la population féminine actuelle en mariées et non mariées.

II

La question est de savoir comment déterminer le taux annuel d'accroissement naturel d'une population en se servant des taux de nuptialité. La méthode suivante nous semble être la plus simple et la meilleure.

(1) DEPOID (Pierre), Les récentes tendances démographiques dans le monde. *Journal de la Société de Statistique de Paris*, n° 1, janvier 1937, p. 4-17.

Admettons que nous connaissions pour une population bien définie (par exemple celle de la Suisse, en 1932) :

a) Les taux de natalité légitime et illégitime;

b) Les probabilités de décès des femmes mariées et non mariées;

c) Les probabilités de mariage des femmes non mariées;

d) Les probabilités de divorce des femmes mariées.

Partant d'un nombre de 10.000 naissances de filles, nous pouvons déterminer pour chaque âge y le nombre des survivantes mariées ou non mariées que nous désignons par l_y^m et l_y^c. Les probabilités de survie respectives seront désignées par :

$$p_y^m = \frac{l_y^m}{10.000} \text{ et } p_y^c = \frac{l_y^c}{10.000}.$$

Admettons un nombre G $(t - y)$ de naissances féminines durant l'année $t - y$. Le nombre des femmes d'âge y durant l'année t sera en moyenne :

$G\,(t - y)\; p_y^m$ . . . . mariées.

$G\,(t - y)\; p_y^c$ . . . . non mariées.

Étant supposé que les taux de fécondité soient :

f_y^m pour les naissances féminines légitimes,

et f_y^c pour les naissances féminines illégitimes,

nous obtenons pour les naissances féminines G (t) de l'année t :

$$\text{(1)} \qquad G\,(t) = \sum_{y=1}^{y=n} G\,(t - y) \left\{ p_y^m f_y^m + p_y^c f_y^c \right\}$$

La série récurrente (1) remplace l'équation intégrale fondamentale de Lotka.

D'après des théorèmes bien connus de la théorie des équations aux différences finies :

$$\text{(2)} \qquad \lim_{t \to \infty} \frac{G\,(t + 1)}{G\,(t)} = s_1$$

où s_1 désigne une racine de l'équation.

$$\text{(3)} \qquad a_0\, s^n + a_1\, s^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

en remarquant que :

$$\text{(4)} \qquad a_0 = -1,$$

$$\text{(5)} \qquad a_y = p_y^m f_y^m + p_y^c f_y^c$$

et

$$\text{(6)} \qquad |s_1| > |s_2| > |s_3| > \ldots. > |s_n|$$

III

D'après la méthode présentée au paragraphe précédent, nous avons calculé le taux annuel d'accroissement de la population de la *Suisse pour l'année 1932.*

Les données numériques nous ont été fournies par la statistique officielle et par des renseignements supplémentaires mis gracieusement à notre disposition par l'Office fédéral de statistique. Les taux de natalité légitime et illégitime se rapportent à l'année 1932. Les probabilités de décès ont été prises de la table de mortalité 1929-32. En appliquant les résultats d'une investigation de Ney (2) sur la mortalité de la population suisse par classes d'état civil nous avons calculé les probabilités de

(1) Lotka (Alfred-J.), Applications de l'analyse au phénomène démographique. *Journal de la Société de Statistique de Paris*, novembre 1933.

(2) Ney (Marcl), Détermination de la probabilité de mariage, de divorce, etc. *Bulletin de l'Association des Actuaires suisses*, 12, 1917, p. 31-92.

décès pour les femmes mariées et les femmes non mariées. Les probabilités de mariage ont été tirées du travail déjà cité de Ney. Nous avons admis que les probabilités de mariage n'ont pas sensiblement changé depuis la période 1901 à 1910 pour laquelle Ney les avait calculées. Les probabilités de divorce ont été estimées après examen détaillé de toutes les statistiques qui pouvaient nous donner des renseignements sur ces questions.

Voici les chiffres qui ont servi de base à nos calculs (voir tableau page suivante).

Pour l'année 1932, nous avons pour 100 femmes un *taux net de reproduction* de 90 femmes. Le *taux d'accroissement naturel* pour 10.000 habitants est de — 33.

Pour 1932 également, M. Depoid avait obtenu respectivement des chiffres de 85 et — 53. Les résultats de M. Depoid sont très rapprochés de ceux que j'ai trouvés en 1935 d'après une méthode analogue (1). Pour la même année 1932, j'ai calculé un taux net de reproduction pour 100 femmes de 84 et un taux d'accroissement naturel pour 10.000 habitants de — 57.

AGE	TAUX DE FÉCONDITÉ pour 10.000 femmes		PROBABILITÉ de mariage pour 100.000 femmes	PROBABILITÉ de divorce pour 100.000 femmes	PROBABILITÉ DE DÉCÈS pour 100.000 femmes	
	légitime	illégitime			mariées	non mariées
15	*	*	23	*	*	*
16	10.000	5	190	*	*	*
17	10.000	10	647	110	*	*
18	6.358	20	1.617	342	*	*
19	5.559	38	3.177	468	300	286
20	4.632	55	5.419	540	336	303
21	3.814	72	7.402	594	355	319
22	3.478	84	9.236	564	374	333
23	3.211	97	10.654	562	389	343
24	2.957	102	11.564	634	384	358
25	2.684	100	11.859	642	392	361
26	2.566	101	11.654	644	374	374
27	2.355	102	11.316	680	369	369
28	2.169	96	10.578	656	362	362
29	1.989	80	9.691	650	354	362
30	1.862	69	8.720	644	352	363
31	1.639	51	7.775	646	358	370
32	1.547	39	6.978	640	367	380
33	1.334	32	6.182	610	379	392
34	1.216	31	5.549	580	386	399
35	1.072	39	5.069	557	392	406
36	931	42	4.407	530	400	414
37	850	37	3.995	497	406	434
38	758	31	3.689	461	417	445
39	630	15	3.345	432	427	459
40	501	11	3.010	422	441	473
41	406	8	2.785	362	459	491
42	309	5	2.364	366	467	554
43	214	2	2.174	322	498	588
44	140	2	1.956	321	533	629
45	84	—	1.755	330	572	673
46	49	—	1.572	302	616	724
47	22	—	1.432	294	665	784
48	2	—	1.254	290	715	838
49	—	—	1.070	260	768	898

IV

Nos calculs ont confirmé l'opinion de M. Depoid, savoir que la nuptialité exerce une influence marquée sur la natalité. En tenant compte de la nuptialité et des taux spécifiques de fécondité légitime et illégitime, nous avons des taux de reproduction et d'accroissement naturel sensiblement différents de ceux calculés d'après des procédés moins détaillés. Il serait d'un grand intérêt de voir si des calculs analogues conduiraient les statisticiens d'autres pays à des conclusions semblables.

Arthur LINDER (Berne).

(1) LINDER (Arthur), Der bereinigte Geburtenüberschuss der schweizerischen Bevölkerung. Bevölkerungsfragen, Bericht des Internationalen Kongresses für Bevölkerungswissenschaft, Berlin, 1935, p. 106.