Journal de la société statistique de Paris

Mourre

La courbe des revenus

Journal de la société statistique de Paris, tome 70 (1929), p. 285-301

<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1929__70__285_0>

JOURNAL

DE LA

SOCIÉTÉ DE STATISTIQUE DE PARIS

N° 10. — OCTOBRE 1929

I

LA COURBE DES REVENUS

Un économiste italien bien connu, Vilfredo Pareto, se basant sur les recensements faits, dans divers pays des revenus ou des fortunes des habitants, a établi la formule suivante :

$$N = \frac{A}{x^{\alpha}}$$

où N désigne le nombre d'individus qui ont un revenu supérieur à x et où A et α sont des constantes pour une année et un pays déterminés.

La formule de Pareto, considérée comme une moyenne des résultats de l'expérience, c'est-à-dire des chiffres que nous fournit la statistique, exprime l'allure de la répartition des revenus avec une exactitude très suffisante. Pareto donne, pour des différentes années dans différents pays, les relevés des erreurs commises au moyen de l'emploi de son équation. Ces erreurs sont de l'ordre de quelques centièmes, atteignant rarement 10 % .

Si l'on admet l'exactitude du point de départ, c'est-à-dire l'existence d'une formule mathématique s'appuyant sur l'expérience, il en résulte que toutes les conséquences mathématiques, qu'on tirera de cette formule, seront par elles-mêmes exactes. L'équation de Pareto peut donc constituer un puissant instrument de travail.

Dans une précédente étude parue dans le *Journal de la Société de Statistique* (juillet-septembre 1922), nous avons examiné la progression de la richesse sociale et la hausse du revenu moyen en fonction d'une inégalité croissante, dans la répartition des revenus. Dans la communication actuelle, nous développerons les considérations déjà émises et nous tenterons de tirer de la formule de Pareto, des déductions nouvelles. Nous réfuterons également les critiques tout à fait injustifiées, dont l'équation de Pareto a été l'objet de la part de quelques statisticiens des États-Unis.

***

La première remarque à faire est que l'équation de Pareto ne se vérifie que dans certaines limites. Ses résultats ne doivent pas être considérés comme absolus pour les très gros revenus dont les possesseurs se chiffrent par quelques unités; elle est en défaut pour les valeurs de x trop petites. Pour un revenu nul, elle donne un nombre d'individus infini, ce qui est évidemment impossible.

A ce sujet, les statisticiens américains, auteurs de l'ouvrage : *Income in the United States ; its amount and its distribution*, 1909-1919, MM. Mitchell, King Macaulay et Knauth, s'indignent. Qu'est-ce, disent-ils, qu'une formule qui ne représente qu'une fraction de phénomène? L'équation de Pareto, si elle était vraiment la loi du phénomène, devrait l'embrasser dans sa totalité.

Un peu de réflexion, nous montre la faiblesse de cette critique. On ne peut vraiment demander à la formule de Pareto de s'appliquer aux revenus des milliardaires. En matière de statistique, là où les grands nombres disparaissent commence le règne du hasard. Que l'unique milliardaire d'un pays meure et que sa fortune se partage entre ses nombreux enfants, la répartition des revenus les plus élevés du pays se trouve bouleversée,

Du côté des petits revenus, constatons que la courbe de Pareto, au moins dans les pays où l'on oblige les contribuables à faire des déclarations qui ne soient pas par trop inexactes, s'applique encore jusqu'à des limites très peu élevées. Tel est le cas pour la Prusse, avant la guerre le 1914, où le revenu minimum imposable du célibataire et du chef de famille, s'abaissait à 900 marks, somme ne représentant qu'un « standard of life » bien modeste. Au delà de ce revenu la formule de Pareto peut encore s'appliquer, mais la statistique ne nous fournit plus les chiffres nécessaires, pour vérifier son exactitude.

Quant aux revenus les plus faibles, il est fort naturel qu'ils n'obéissent pas à la loi de Pareto.

Que représentent les gros revenus, les revenus moyens, les petits revenus suffisants pour faire vivre leurs détenteurs d'une manière convenable? C'est l'ensemble de la nation qui produit. qui travaille, qui constitue la structure économique des pays.

Que représentent les revenus extrêmement faibles fournis par un travail insuffisamment rémunéré et par l'assistance?

Ils sont détenus par les vaincus de la vie, les incapables, les paresseux, les infirmes, les malades, les malheureuses victimes du hasard. Une armée en campagne a ses traînards, ses blessés et ses malades. S'étonnera-t-on que cette cohue qui la suit n'ait pas la même hiérarchie, les mêmes cadres que les soldats fortement disciplinés, qui s'avancent sous la conduite de leurs chefs? De même les déchets sociaux ne marchent pas dans le même ordre que les contribuables qui assurent l'existence et le progrès de la communauté. Nous sommes, au point de vue économique, en présence de phénomènes de différente nature qui n'obéissent pas forcément aux mêmes lois.

Nous ne sommes pas du reste privés de renseignements sur la courbe des revenus au-dessous du revenu minimum. La statistique prussienne nous fournit à cet égard des indications précieuses. En 1913, il y avait 7.930.575 familles ou célibataires ayant un revenu égal ou supérieur à 900 marks et dont les revenus totaux s'élevaient à 16 milliards 262 millions de marks. Ce chiffre, fourni par l'administration prussienne, est vraisemblablement au-dessous de la vérité, étant donné l'insuffisance probable des déclarations.

Il y avait 8.086.473 familles ou célibataires ayant moins de 900 marks de revenus. Il est également probable, par suite de l'absence de déclarations des revenus atteignant ou dépassant légèrement le minimum imposable de 900 marks, que ce chiffre devrait être en réalité diminué.

Quoiqu'il en soit, le total des revenus des 8.086.743 familles ou célibataires, fournit certainement un chiffre très important, s'élevant à plusieurs milliards. Les revenus voisins de 900 marks doivent être très nombreux, même les revenus correspondant à un étalon de vie très misérable, forment probablement un total encore élevé.

En partant de la formule de Pareto

$$N = \frac{A}{x^\alpha}$$

on arrive facilement à la formule

$$y = \frac{A\alpha}{x^\alpha}$$

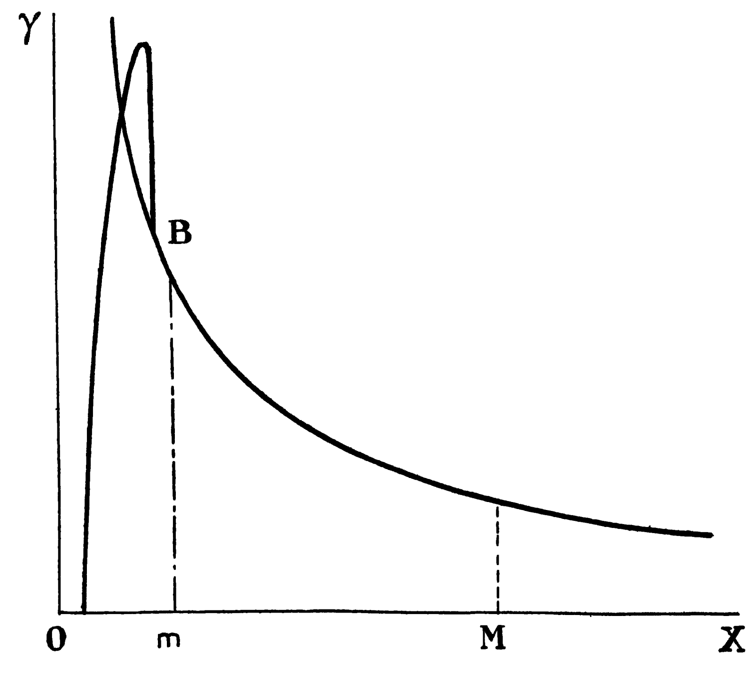
où y représente la somme des revenus pour un revenu déterminé x, ou plus exactement la somme comprise entre x et $x + 1$.

La courbe de la fonction

$$y = \frac{A\alpha}{x^\alpha}$$

a une forme peu différente de celle de la fonction

$$N = \frac{A}{x^\alpha} \qquad \text{(Fig. 1)}$$



Le revenu minimum étant égal à m, il est probable que la courbe de Pareto re prolonge au delà de ce revenu minimum, jusqu'en B, par exemple. A partir de B, la courbe des revenus cesse d'être une courbe de Pareto. Il est probable, qu'elle s'éloignera de la courbe de Pareto en la laissant à sa gauche, car la somme des revenus doit être très élevée au moment où la courbe cesse d'être une courbe de Pareto. De plus, la surface considérée, c'est-à-dire celle représentant la somme des revenus au-dessous de 900 marks est assez grande. Cette surface ne pourrait s'étendre que très peu sur la gauche de la figure, puisqu'elle serait serrée entre la courbe de Pareto et l'axe OY; elle s'étendra donc sur la droite et aura un sommet assez pointu. La courbe s'abaissera rapidement, les revenus extrêmement faibles formant des sommes très rapidement décroissantes, parce qu'ils deviennent de plus en plus petits et parce que leurs détenteurs son de moins en moins nombreux. La surface se fermera entre le point m et le point O, car on peut admettre qu'il n'existe pas de revenu nul, tout pauvre étant plus ou moins assisté.

***

Une des conclusions les plus importantes qu'on peut tirer de la formule de Pareto est la solidarité des classes sociales. *Les revenus de tous les contribuables croissent ou décroissent en même temps.* On peut s'en rendre compte du premier coup par l'examen de la formule du revenu moyen, c'est-à-dire de la somme totale des revenus divisée par le nombre des contribuables.

Nous avons établi dans un précédent travail que le revenu maximum étant pris infini, m représentant le revenu minimum, le revenu moyen avait pour formule

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha - 1}\right) m$$

Ce revenu moyen augmente quand α décroît et diminue quand α croît.

Faisons croître ce revenu minimum m. En considérant ainsi des revenus minima de plus en plus élevés, nous obtiendrons une infinité de revenus moyens et nous arriverons à parcourir toute la courbe. Il en résultera que, quel que soit l'intervalle considéré, de m à l'infini, qu'on considère soit le revenu moyen total, soit un revenu moyen s'appliquant à des zones de plus en plus riches, tous les revenus moyens varieront dans la même proportion. La solidarité des différentes classes sociales serait donc très étroite.

Toutefois un tel résultat ne peut être accepté commme exact. Nous avons commis une erreur en prenant le revenu maximum infini. Il importe de chercher une précision plus grande et de voir comment varie le revenu moyen dans un intervalle déterminé.

Nous avons démontré en 1922 à la *Société de Statistique*, que le revenu moyen entre deux revenus r_1 et r_2 a pour formule.

$$r = \frac{\alpha}{\alpha - 1} r_2 \frac{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{\alpha - 1} - 1}{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{\alpha} - 1}$$

Nous avons également démontré que cette fonction croît, quand α décroît et décroît quand α croît. Il en est ainsi, quel que soit l'intervalle considéré. Donc, que le revenu maximum soit pris infini on fini, la conclusion que les revenus moyens des gros ou des petits contribuables croissent ou décroissent en même temps doit être maintenue.

Il serait utile d'examiner dans quelle proportion les différents changements de la structure sociale se produisent, à mesure qu'on s'avance de la zone des petits revenus, vers celle des revenus supérieurs.

Avant de procéder à cette étude. il convient de se rendre compte du rôle joué par la quantité A dans la formule de Pareto.

Vilfredo Pareto ne donne pas d'explication à ce sujet. Il se borne à rendre A constant, quand la population reste stationnaire. Ce n'est là qu'un cas particulier. Il convient d'envisager le cas plus général où la population varie.

Dans un pays donné on a pour une année donnée A_1 et α_1 on a pour une année ultérieure du même pays A_2 et α_2.

Il est possible que la variation de A_1 ait exercé sur celle de α_1 une influence ou qu'elle n'en ait pas exercé. Peu nous importe du reste. Les variations étant acquises, ce qui nous intéresse, c'est de chercher ce qu'elles expriment au point de vue social.

Or, celles de A_1 ne traduisent aucun changement dans la répartition des revenus. En augmentant ou en diminuant le nombre des contribuables dans la même proportion, quelle que soit leur catégorie, elles amplifient ou diminuent la structure sociale, sans en changer la forme. C'est la seule signification des variations de A qui soit à retenir.

Les variation de α expriment au contraire une modification dans la structure sociale.

Par suite, toutes les fois, que nous étudierons la structure sociale, quand A ne s'éliminera pas de lui-même, dans nos calculs, nous l'éliminerons en le considérant comme une quantité fixe (1).

I Ceci posé, commençons par voir comment la somme des revenus varie en fonction de α entre deux revenus quelconques r_1 r_2 arbitrairement choisis.

La somme des revenus a pour formule

$$F(\alpha) = \frac{A\alpha}{\alpha - 1}\left[\frac{1}{r_1^{\alpha-1}} - \frac{1}{r_2^{\alpha-1}}\right] = \frac{A\alpha}{\alpha - 1}\left[r_1^{1-\alpha} - r_2^{1-\alpha}\right]$$

La dérivée de cette fonction est :

$$F'(\alpha) = A\left[-\frac{1}{(\alpha-1)^2}\left(r_1^{1-\alpha} - r_2^{1-\alpha}\right) + \frac{\alpha}{\alpha-1}\left(-r_1^{1-\alpha} L r_1 + r_2^{1-\alpha} L r_2\right)\right]$$

$$= \frac{A}{(\alpha-1)^2}\left[\varphi(r_2) - \varphi(r_1)\right]$$

(1) Remarquons que les variations de A sont, comme l'indique la statistique, liées d'une manière étroite à celles de la population totale, sans vraisemblablement leur être proportionnelles.

Appelons P la population totale, N le nombre des individus obéissant à la loi de Pareto, Q celui des individus qui ne lui est pas soumis.

On a $P = N + Q$ qui devient quand la population varie $m P = d N + t Q$.

Pour que d égalât m, il faudrait que d égalât t, ce qui n'est nullement certain. Les variations des groupes pauvres Q peuvent, d'après ce que nous enseigne la statistique, n'être pas proportionnelles à celles du groupe riche ou aisé N.

Posons

$$\varphi(r) = r^{1-\alpha} + \alpha(\alpha - 1)\, r^{1-\alpha}\, \mathrm{L}\, r$$

Cette fonction a pour dérivée

$$\begin{aligned}\varphi'(r) &= (1-\alpha) r^{-\alpha}\,[1 + \alpha(\alpha - 1)\,\mathrm{L}\, r] + \alpha(\alpha - 1)\, r^{-\alpha} \\ &= (1-\alpha) r^{-\alpha}\,[1 + \alpha(\alpha - 1)\,\mathrm{L}\, r - \alpha] \\ &= (\alpha - 1)^2\, r^{-\alpha}\,[1 - \alpha\,\mathrm{L}\, r]\end{aligned}$$

On a $\varphi'(r) < 0$. Donc $\varphi(r_2) < \varphi(r_1)$ et $F'(\alpha) < 0$.
Donc $F(\alpha)$ décroît, si α croît.
Donc quand α croît, la somme des revenus décroît dans un intervalle déterminé arbitrairement choisi, à mesure qu'on s'élève dans l'échelle des revenus.

II *Variation relative de la somme des revenus.*

Examinons maintenant si, à mesure qu'on s'avance dans l'échelle des revenus c'est-à-dire si on considére les revenus $r_1\, r_2\, r_3$ croissant d'une manière quelconque, la somme des revenus a des variations relativement plus fortes dans la tranche limitée par les revenus les plus élevés que dans la tranche précédente.

Faisons varier α d'une quantité positive $\Delta\alpha$; $F(\alpha)$ varie d'une quantité négative qui est $F'(\alpha)\,\Delta\alpha$. C'est-à-dire qu'en valeur absolue $F(\alpha)$ décroît de $-F'(\alpha)\,\Delta\alpha$, quantité qui est positive.

La variation relative de la fonction $F(\alpha)$ est en valeur absolue

$$-\frac{F'(\alpha)\,\Delta\alpha}{F(\alpha)}$$

Pour un intervalle $r_1\, r_2$ on aura :

$$\frac{\dfrac{A}{(\alpha-1)^2}\,[\varphi(r_1) - \varphi(r_2)]\,\Delta\alpha}{\dfrac{A\,\alpha}{\alpha - 1}\,(r_1^{1-\alpha} - r_2^{1-\alpha})}$$

Cette expression est proportionnelle à

$$\frac{\varphi(r_1) - \varphi(r_2)}{r_1^{1-\alpha} - r_2^{1-\alpha}} \quad (1)$$

Pour l'intervalle suivant $r_2\, r_3$ la variation relative sera proportionnelle à

$$\frac{\varphi(r_2) - \varphi(r_3)}{r_2^{1-\alpha} - r_3^{1-\alpha}} \quad (2)$$

Pour comparer la variation relative de α dans les deux intervalles nous sommes amenés à comparer les deux quantités (1) et (2).

(1) peut s'écrire

$$1 + \alpha(\alpha - 1)\frac{r_1^{1-\alpha}\,\mathrm{L}\, r_1 - r_2^{1-\alpha}\,\mathrm{L}\, r_2}{r_1^{1-\alpha} - r_2^{1-\alpha}}$$

(2) s'écrit d'une manière analogue.

Nous pouvons supprimer le terme commun 1 et le facteur commun $\alpha(\alpha - 1)$.

Il nous reste à comparer :

$$\frac{r_1^{1-\alpha}\,\mathrm{L}\, r_1 - r_2^{1-\alpha}\,\mathrm{L}\, r_2}{r_1^{1-\alpha} - r_2^{1-\alpha}}$$

et la quantité analogue.

Posons

$$r_1^{\alpha-1} = u_1$$
$$r_2^{\alpha-1} = u_2$$
$$r_3^{\alpha-1} = u_3$$

Les quantités à comparer deviennent :

$$\frac{\frac{1}{u_1}.\frac{\mathrm{L}\,u_1}{\alpha-1} - \frac{1}{u_2}.\frac{\mathrm{L}\,u_2}{\alpha-1}}{\frac{1}{u_1}-\frac{1}{u_2}} \quad (3)$$

et la quantité analogue avec u_2 et u_3.

Multiplions les deux termes de l'expression (3) par $u_1\ u_2$ et supprimons le facteur α—1 qui est commun aux deux expressions.

Nous avons alors à comparer

$$\frac{u_2\,\mathrm{L}\,u_1 - u_1\,\mathrm{L}\,u_2}{u_2 - u_1}$$

et l'expression analogue.

Nous pouvons retrancher de ces deux expressions un même terme $\mathrm{L}u_2$, L'expression (4) devient :

$$\frac{u_2\,\mathrm{L}\,u_1 - u_1\,\mathrm{L}\,u_2}{u_2 - u_1} - \mathrm{L}\ u_2$$

ou

$$\frac{u_2\,[\mathrm{L}\,u_1 - \mathrm{L}\,u_2]}{u_2 - u_1}$$

et la seconde expression devient :

$$\frac{u_2\,[\mathrm{L}\,u_2 - \mathrm{L}\,u_3]}{u_3 - u_2}$$

Nous pouvons diviser les deux quantités par u_2 et les multiplier par $(u_3\text{-}u_2)$ et par $(u_2\text{-}u_1)$.

Les termes à comparer deviennent $(u_3\text{-}u_2)$ $(\mathrm{L}u_1\text{-}\mathrm{L}u_2)$ et $(u_2\text{-}u_1)$ $(\mathrm{L}u_2\text{-}\mathrm{L}u_3)$.

Ajoutons à ces deux expressions la quantité :

$$(u_2 - u_1)\,(\mathrm{L}u_1 - \mathrm{L}u_2).$$

Les quantités à comparer deviennent

$$(u_3 - u_1)\,(\mathrm{L}u_1 - \mathrm{L}u_2) \quad \text{et} \quad (u_2 - u_1)\,(\mathrm{L}u_1 - \mathrm{L}u_3)$$

Divisons ces deux quantités par $(u_2 - u_1)$ $(u_3 - u_1)$

Nous avons à comparer

$$\frac{\mathrm{L}\,u_1 - \mathrm{L}\,u_2}{u_2 - u_1} \text{ et } \frac{\mathrm{L}\,u_1 \quad \mathrm{L}\,u_3}{u_3 - u_1}$$

Nous posons

$$u_2 = u_1\,(1+\beta)$$
$$u_3 = u_1\,(1+\gamma)$$

γ étant $> \beta$, puisque $u_3 > u_2$.

Nous avons à comparer

$$\frac{\mathrm{L}\, u_1 - \mathrm{L}\, u_1 - \mathrm{L}\,(1+\beta)}{u_1 \beta}$$

et la quantité analogue.

Ces expressions deviennent en les multipliant par u_1

$$-\frac{\mathrm{L}\,(1+\beta)}{\beta} \text{ et } -\frac{\mathrm{L}\,(1+\gamma)}{\gamma}$$

La fonction $\mathrm{L}\,\frac{(1+x)}{x}$ décroît quand x croît, donc

$$\mathrm{L}\,\frac{(1+\beta)}{\beta} > \mathrm{L}\,\frac{(1+\gamma)}{\gamma} \text{ ou } -\frac{\mathrm{L}\,(1+\beta)}{\beta} < -\frac{\mathrm{L}\,(1+\gamma)}{\gamma}$$

Finalement la première expression est $<$ que la seconde, ce qui indique que la variation relative dans l'intervalle $r_1\, r_2$ est $<$ que dans l'intervallle $r_2\, r_3$.

Donc, quand α croît, la somme des revenus décroît de plus en plus, à mesure qu'on s'élève dans l'echelle des revenus.

III *Variation du nombre des contribuables.*

Le nombre des contribuables ayant un revenu compris entre r_1 et r_2 est :

$$\mathrm{F}\,(\alpha) = \mathrm{A}\,[r_1{}^{-\alpha} - r_2{}^{-\alpha}]$$

Cette quantité décroît, si α croît.

La variation relative du nombre des contribuables dans deux intervalles consécutifs $r_1\, r_2$ et $r_2\, r_3$ dépend de

$$-\frac{\mathrm{F}'\,(\alpha)}{\mathrm{F}\,(\alpha)} \text{ pour ces deux intervalles,}$$

ce qui conduit à comparer

$$\frac{-r_2{}^{-\alpha}\,\mathrm{L}\,r_2 + r_1{}^{-\alpha}\,\mathrm{L}\,r_1}{r_1{}^{-\alpha} - r_2{}^{-\alpha}}$$

et l'autre quantité

$$\frac{-r_3{}^{-\alpha}\,\mathrm{L}\,r_3 + r_2{}^{-\alpha}\,\mathrm{L}r_2}{r_2{}^{-\alpha} - r_3{}^{-\alpha}}$$

Nous retrouvons les mêmes quantités à comparer que dans le cas précédent avec cette seule différence que nous avons comme exposant $-\alpha$ au lieu de $1 - \alpha$.

Ces deux exposants étant tous deux négatifs, rien n'est changé dans la démonstration précédente et on aboutit à une conclusion identique.

Par suite, quand α croît, le nombre des contribuables décroît de plus en plus, à mesure qu'on s'élève dans l'échelle de revenus.

IV *Variations du revenu moyen.*

Dans notre étude précédente (1) nous avons établi que la formule du revenu moyen r entre deux revenus quelconques $r_1\, r_2$, était :

$$r = \frac{\alpha}{\alpha - 1}\, r_2 \cdot \frac{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{\alpha - 1} - 1}{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{\alpha} - 1}$$

(1) *Journal de la Société de Statistique de Paris* (juillet-août-septembre 1922).

Posons : $\frac{r_2}{r_1} = \rho$

Nous avons montré que r_2 ayant une valeur constante plus la valeur de ρ est petite, plus faibles sont les variations du revenu moyen en fonction de α.

Il en résulte que si l'on considère deux intervalles $r_0\ r_1$ et $r_1\ r_2$ et l'intervalle total $r_0\ r_2$, la variation du revenu moyen en fonction de α est plus faible dans l'intervalle $r_1\ r_2$ que dans l'intervalle $r_0\ r_1$.

En résumé en prenant par exemple le cas où α croît, c'est-à-dire où le revenu moyen général diminue, à mesure qu'on s'élève dans l'échelle des revenus, si on considère les tranches de sommes de revenu séparées par des revenus croissant d'une manière quelconque, l'avoir social diminue de plus en plus vite, le nombre des possédants décroît de plus en plus rapidement. Sans doute le revenu moyen décroît par contre de moins en moins vite, mais le fait n'est dû qu'au nombre moindre des possédants.

Quelle conclusion, au point de vue social, tirer de ces constatations? C'est que les tranches de revenus trés élevés ne représentant que des sommes de revenus superflus, peuvent diminuer très rapidement, c'est que leurs détenteurs peuvent en être privés avec un inconvénient moindre que s'il s'agissait de petits revenus. *Aussi ne faut-il pas s'étonner que les revenus faibles soient plus stables que les revenus élevés.*

***

Zone pauvre en dessous du revenu minimum.

Considérons la formule $N = \frac{A}{x^\alpha}$.

Faisons x égal au revenu minimum m. Considérons m comme une constante, c'est-à-dire partons toujours, quelle que soit l'année choisie, du même revenu minimum.

Conformément à la convention adoptée, faisons A = constante.

Supposons que α diminue, le revenu moyen, s'accroît, la richesse générale augmente. Quant au nombre d'individus groupés sous la loi de Pareto $N = \frac{A}{x^\alpha}$, il s'accroîtra. Mais cette augmentation se fera aux dépens de la zone pauvre dont un certain nombre d'éléments passera dans la zone plus riche N. Le nombre des déchets sociaux diminuera, la pauvreté s'atténuera dans la partie de la courbe située au-dessous du revenu minimum. Donc *la solidarité sociale n'est pas limitée aux contribuables*, elle s'étend aussi des contribuables aux non contribuables, même si la plupart d'entre eux, n'obéissent pas à la loi de Pareto. Toutes les classes sociales sont liées dans la prospérité et dans la misère.

Quand du reste la richesse générale augmente, l'État est amené à relever le revenu minimum imposable; le revenu maximum s'accroît également; la zone représentant la somme des revenus au-dessous du revenu minimum se vide et tend à disparaître pour se reformer à la suite du nouveau revenu minimum choisi. La figure représentant la structure sociale se trouve donc dans toutes ses parties entraînée peu à peu vers la droite.

On peut, du reste, sans le secours des mathématiques, se rendre compte de l'existence d'une solidarité s'étendant à la société tout entière.

A priori, on peut admettre que l'hypothèse d'une opposition d'intérêts, entre les classes les plus pauvres et les classes les plus riches, n'est pas plus invraisemblable que l'hypothèse contraire. Les membres d'une classe sont des travailleurs, ceux de l'autre, sont des capitalistes. La liaison de la prospérité des deux classes n'est nullement évidente.

Mais par contre il est invraisemblable que la prospérité des individus d'une même classe ne croisse pas dans le même sens pour les divers échelons de cette classe. Or, les contribuables les plus pauvres sont, comme les non contribuables les plus riches, des travailleurs. Ils appartiennent à la même classe. Si le salaires des uns croissent, les salaires des autres doivent croître aussi.

Quant aux extrêmes déchets sociaux qui représentent la partie la plus misérable de la population, qui ne peuvent vivre sans l'assistance et constituent par conséquent une classe spéciale, ils doivent profiter de l'accroissement de la richesse générale. En vertu de la solidarité sociale, considérée non plus au point de vue économique, mais au point de vue moral, plus la richesse augmente plus l'assistance est développée.

Il en résulte que tous les éléments de la courbe des non contribuables varie, au point de vue de la prospérité, dans le même sens que ceux formant la courbe des contribuables les plus pauvres. Ceux-ci varient dans le même sens que les éléments situés dans la zone des revenus élevés comme il a été démontré mathématiquement. Donc la *prospérité de toutes les classes sociales varie dans le même sens.*

Nous soulignons l'importance de ces conclusions. Une des thèses les plus chères aux socialistes est l'antagonisme des classes. On n'avait pu jusqu'ici lui opposer aucune réfutation scientifique. On se bornait à des raisonnements de vraisemblance et à des arguments de fait parfois contestables. L'emploi que nous venons de faire de la formule de Pareto ruine une des parties fondamentales de la doctrine socialiste.

***

L'inégalité dans la répartition des revenus s'accroît quand la richesse générale augmente.

Les socialistes peuvent répondre. « Il n'y a pas d'antagonisme de classes, nous le reconnaissons. Mais il ne s'ensuit pas pour cela qu'on ne puisse s'efforcer d'atteindre une répartition des fortunes meilleure que celle qui existe dans la société capitaliste actuelle. D'un côté, il existe une richesse trop grande, donnant lieu à une production somptuaire inutile; d'autre part, on trouve le dénûment et la misère venant d'une production insuffisante des objets de première nécessité. Le remède de cet état de choses serait donc le nivellement des fortunes. »

La formule de Pareto nous permet de détruire ce second pilier de la doctrine socialiste.

Dans notre précédent travail nous avons, en nous conformant à la conception courante de l'inégalité des conditions et en opposant la masse de la for-

tune élevée à celles de la fortune moyenne ou pauvre, donné la définition suivante.

Nous *appelons rapport d'inégalité le rapport de la somme des fortunes (****ou des revenus****) dépassant la fortune moyenne (****ou le revenu moyen****), à la somme des fortunes (****ou des revenus****) inférieurs à la fortune moyenne ou au revenu moyen.*

En prenant le revenu maximum infini, nous avons trouvé dans notre précédent travail que ce rapport avait pour formule

$$\frac{1}{\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^{\alpha-1}-1} \qquad (5)$$

La somme des revenus étant considérée entre une limite inférieure r_1 et une limite supérieure r_2, nous avons trouvé comme formule du rapport d'inégalité en posant $\frac{r_2}{r_1}=\rho$

$$R=\frac{1-\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^{\alpha-1}\left[\frac{\rho^{\alpha-1}-1}{\rho^{\alpha}-1}\right]^{\alpha-1}}{\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^{\alpha-1}\left[\frac{\rho^{\alpha}-\rho}{\rho^{\alpha}-1}\right]^{\alpha-1}-1} \qquad (6)$$

Ces deux fonctions dépendent uniquement de α. Leur étude, entreprise dans le précédent travail déjà cité, montre qu'elles croissent quand α décroît et décroissent quand α croît (1).

Or, il a été démontré que, quand α décroissait, la somme des revenus croissait dans l'intervalle m, M, que le nombre des individus admis au rang des contribuables s'élevait, que le revenu moyen de tous les contribuables croissait, que cet accroissement de richesse s'étendait aux non contribuables et que, par suite les revenus de toute la population s'élevaient. Le progrès de la société est donc, d'après la formule de Pareto, lié à une inégalité croissante des conditions.

Il n'y a pas lieu, du reste, de s'en étonner. A mesure qu'un organisme se perfectionne, il se différencie de plus en plus. Nous sommes en présence d'une loi générale dans la nature.

Remarquons encore que la société ne peut se développer, au point de vue de la répartition des revenus, dans une forme semblable à elle-même. Qu'elle soit en progression ou en décadence, sa structure future ne sera jamais celle du passé. On ne peut imaginer une société où les revenus de tous ses membres croîtraient ou décroîtraient de 10 % par exemple, puisque toute variation des revenus totaux, toutes choses égales d'ailleurs, entraîne une variation de α et de l'inégalité dans la répartition des revenus.

Sans doute la valeur de α peut être identique pour deux courbes représentatives du nombre des contribuables de deux sociétés, mais il s'agit de deux sociétés différentes et non pas d'une même société ayant évolué dans le temps.

***

(1) Nous n'avons pas étudié mathématiquement le rapport (6); nous avons trouvé plus pratique de dresser un tableau donnant les différentes valeurs de R pour différentes valeurs de α et de ρ, α variant dans les limites que lui assigne la statistique, c'est-à-dire entre 1 et 2.

Machinisme, taylorisme, rationalisation.

Les démonstrations précédentes nous permettent de déterminer l'influence du machinisme, du taylorisme, de la rationalisation sur la prospérité sociale et sur celle des classes ouvrières en particulier.

Les économistes ont en général pris, jusqu'ici, dans la question du machinisme, la position suivante.

Le premier effet du machinisme est la diminution du nombre des ouvriers employés à la production et par suite la baisse des salaires.

Toutefois, peu à peu, de nouveaux débouchés se créent et les chômeurs trouvent d'autres emplois remplaçant ceux qu'ils ont perdus. L'effet final est une augmentation générale de la production, sans qu'elle ait pour rançon une diminution de la demande de main-d'œuvre: la situation des classes ouvrières est donc améliorée par les progrès du machinisme.

Mais un certain nombre d'écrivains socialistes soutient la thèse contraire. Les inventions nouvelles dans le domaine de la mécanique se succèdent, disent-ils, avec une telle rapidité, que de nouveaux débouchés sont insuffisants pour occuper les ouvriers chassés de leur emploi par la machine. En raisonnant ainsi jusqu'au cas limite, évidemment irréel, on pourrait concevoir un progrès du travail mécanique tel, qu'un seul ouvrier suffirait à actionner toutes les machines de l'univers et que la classe ouvrière, désormais sans utilité et sans emploi, mourrait de faim au milieu d'un développement inouï de la science et de la puissance humaine. Telle est l'hypothèse de Sismondi.

Entre ces deux thèses, laquelle choisir? La thèse classique est douée d'une force intuitive plus grande que celle soutenue par les socialistes. Elle a aussi pour elle l'appui des faits. La hausse du pouvoir d'achat des ouvriers dans tous les pays du monde, un cours de XIX^e siècle et dans le premier quart du XX^e siècle, l'aisance dont jouissent les classes ouvrières aux États-Unis, pays où on fait un grand usage des procédés de travail les plus perfectionnés, montre que les progrés de la mécanique n'ont pas nui à la rémunération de la main-d'œuvre.

Mais ce ne sont là que des arguments de vraisemblance. Le raisonnement direct ne peut rien prouver et l'exemple d'un siècle est insuffisant pour assurer définitivement la solidité d'une pareille thèse. Qui sait si, dans les siècles à venir, l'évolution de machinisme et des débouchés ne sera pas différente de celle du passé?

Le taylorisme et la rationalisation évoquent un problème du même genre. Si un ouvrier peut accomplir un travail exécuté auparavant par deux ouvriers, un ouvrier se trouve privé de son emploi. La production augmente : en effet par suite de la baisse du prix de revient, due à un moindre emploi d'ouvriers et à une plus grande abondance de la main-d'œuvre disponible, il y aura un accroissement des profits, de la concurrence et de la consommation. De nouveaux emplois se créeront, pour la main-d'œuvre, mais seront-ils suffisants, pour assurer aux ouvriers un salaire réel aussi élevé qu'avant l'instauration des nouvelles méthodes de travail?

Les conséquences que nous avons déduites de la formule de Pareto nous permettent de résoudre ces problèmes.

Les revenus de toutes les classes sociales variant dans le même sens, il s'ensuit que tout ce qui augmente la production générale profite à toutes les classes sociales, y compris la classe ouvrière.

Donc le machinisme, le taylorisme, la rationalisation augmentent les gains des capitalistes et le salaire réel des ouvriers.

Dans quelle proportion la répartition des capitaux nouvellement produits (1) se fera-t-elle?

Nous avons vu que les revenus élevés avaient des variations plus accentuées que celles des petits revenus doués d'une plus grande stabilité, nous avons montré que l'augmentation de la richesse générale était liée à un accroissement de l'inégalité des codnitions.

Il en résulte que les classes capitalistes obtiennent une part proportionnellement plus large des nouvelles acquisitions sociales que les classes ouvrières.

***

Même si la formule de Pareto ne représente la répartition des revenus qu'avec un large approximation, le sens des résultats obtenus n'en est pas modifié.

MM. Mitchell, King, Macaulay et Knauth, outre la critique déjà réfutée qu'ils adressent à la formule de Pareto de ne se vérifier que dans certaines limites, ont déclaré que cette formule ne s'applique à la réalité qu'avec une trop large approximation détruisant l'intérêt de la découverte.

Ils citent à l'appui de leurs critiques les courbes de déclarations d'impôt sur le revenu aux États-Unis de 1914 à 1919.

Quand on veut vérifier l'exactitude d'une loi, il ne faut pas se placer dans des conditions telles que cette loi ne puisse s'appliquer. Or, les États-Unis étaient le dernier pays à choisir pour constater si l'équation de Pareto cadrait avec la réalité.

Le fisc américain confond en effet avec les revenus des éléments complètement étrangers à la notion de rendement d'un capital. On est tenu aux États-Unis de déclarer comme revenus les gains annuels provenant d'un accroissement de la valeur vénale des capitaux possédés. Or, il est clair que la valeur vénale d'un capital ne modifie pas son rendement. On sait avec quelle facilité aux États-Unis les cours des actions s'élèvent ou s'abaissent, sans que la situation intrinsèque de l'affaire soit changée.

En outre, il y a aux États-Unis de très nombreuses valeurs affranchies de l'impôt sur le revenu. Beaucoup de détenteurs de grosses fortunes, pour éviter un impôt frappant lourdement les tranches élevées des revenus placent dans ces valeurs une partie importante de leurs fortunes qui ne figure plus dans leur déclaration. Ils pratiquent, pour employer un terme consacré, l'*évasion légale* de l'impôt.

Malgré ces particularités de l'impôt sur le revenu aux États-Unis qui font que les déclarations n'y peuvent représenter les revenus réels, la courbe de

(1) Pour nous conformer au langage le plus usité, nous devrions dire capitaux *circulants* nouvellement produits, mais nous rejetons l'emploi du terme circulants que nous estimons mal choisi.

Pareto ne s'applique pas aux États-Unis aussi mal que le prétendent MM. Mitchell, King, Macaulay et Knauth.

Un autre statisticien américain, M. Karsten, dans un article publié dans la *Quaterly Publication of the American statistical Association*, septembre 1920, estime au contraire que la courbe de Pareto, pour les États-Unis, dans les années considérées, suit de très près la réalité et il attribue à la fraude la divergence, selon lui légère, qu'elle présente par rapport à la courbe des déclarations.

Il est en effet singulier que MM. Mitchell, King, Macaulay et Knauth, n'aient pas pensé à la fraude, qu'ils ne se soient pas dit qu'il existait trois courbes, celle de la réalité, celle de Pareto, celle des déclarations, cette dernière étant en principe inexacte, puisque dans tous les pays du monde l'impôt sur le revenu est largement fraudé. De ces deux courbes, la courbe de Pareto, la courbe des déclarations, quelle est celle la plus conforme à la réalité?

Si l'on porte sur l'axe des Y les logarithmes des nombres et sur l'axe des X les logarithmes des revenus, au lieu des nombres et des revenus, on obtient, au lieu de la courbe de Pareto, une droite dont la formule est $\log N = \log A - \alpha \log x$.

En traçant la courbe des déclarations, au lieu d'obtenir une ligne droite, on obtient une courbe légèrement ogivale, différant peu d'une droite. La forme de cette courbe montre que les nombres obtenus sont trop faibles pour les très petits et les très gros revenus.

Une partie importante de cette déviation est vraisemblablement due à la fraude. La fraude est en effet considérable pour les petits revenus qui, bien qu'imposables, ne font très souvent l'objet d'aucune déclaration. Elle s'exerce également sur une large échelle dans la zone des gros revenus, stimulée par le taux progressif de l'impôt et facilitée par la connaissance qu'ont des affaires les détenteurs de grosses fortunes. Aux États-Unis en particulier, comme nous l'avons vu, les effets de l'évasion dite légale s'ajoutent à ceux de la fraude.

Quoiqu'il en soit, bien qu'il paraisse probable que la courbe de Pareto diffère moins de la courbe réelle, que de celle des déclarations, nous ne pouvons en avoir la certitude et nous sommes obligés de nous appuyer uniquement sur la courbe des déclarations, qui seule nous est connue.

Il s'agit de savoir si, même dans les cas les moins favorables comme ceux des États-Unis, les conclusions concernant la structure et la tendance évolutive de la société, auxquelles nous avons abouti, peuvent, d'une manière générale, être maintenues.

Nous allons montrer qu'il en est ainsi.

Si la formule de Pareto ne s'applique aux déclarations qu'avec approximation, on est conduit à remplacer la formule $N = \frac{A}{x^\alpha}$ par la formule $N = \frac{A}{x^\alpha} + \varphi(x)$, $\varphi(x)$ étant un terme correctif qui représente la différence des ordonnées entre la courbe des déclarations et celle de Pareto.

On s'arrange en général pour que la droite représentant la courbe de Pareto à l'aide des logarithmes, traverse la courbe ogivale fournie par la statistique, de manière à rendre $\varphi(x)$ le plus petit possible en valeur absolue.

En considérant les nombres eux-mêmes, au lieu de leurs logarithmes, on obtient la figure (2), où P représente la courbe de Pareto et D celle des déclarations.

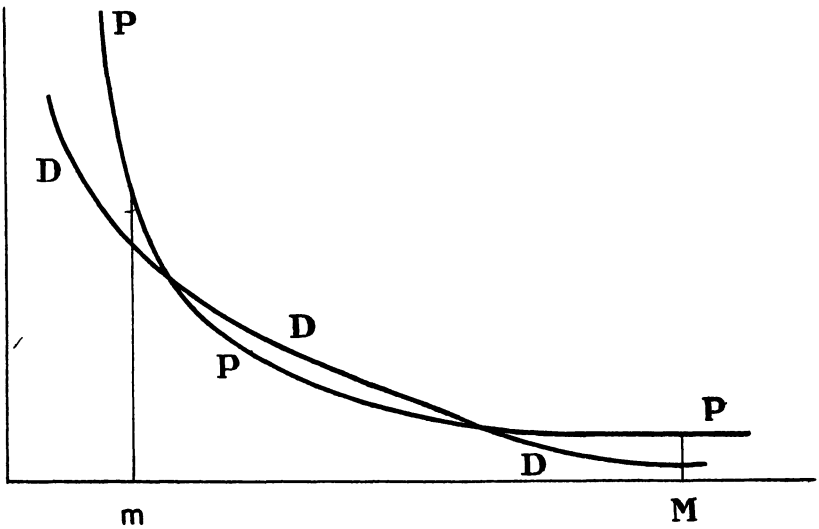


Fig. 2

Avec la formule ci-dessus le nombre des contribuables entre deux revenus r_1 et r_2 est :

$$N_1 - N_2 = \frac{A}{r_1^{\alpha}} - \frac{A}{r_2^{\alpha}} + \varphi(r_1) - \varphi(r_2).$$

Le revenu des contribuables est donné par la formule :

$$\frac{A\alpha}{(\alpha - 1)\, r_1^{\alpha - 1}} - \frac{A\alpha}{(\alpha - 1)\, r_2^{\alpha - 1}} - \int_{r_1}^{r_2} x\,\varphi'(x)\,dx$$

$\int_{r_1}^{r_2} x\,\varphi'(x)\,dx$ representant la différence entre la somme des revenus obtenue au moyen de la courbe des déclarations et de celle de Pareto (fig. 3).

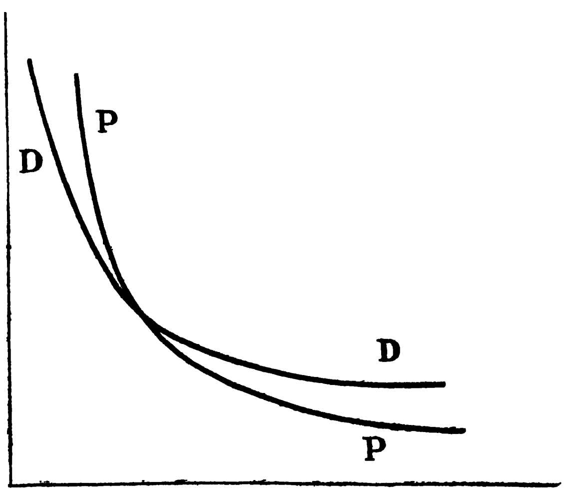


Fig. 3

Pour avoir le revenu moyen pour la totalité des contribuables, faisons $r_1 = m$ (revenu minimum) et $r_2 = M$ (revenu maximum).

Nous obtenons :

$$\frac{\frac{A\,\alpha}{(\alpha-1)\,m^{\alpha-1}} - \frac{A\,\alpha}{(\alpha-1)\,M^{\alpha-1}} - \int_m^M x\,\varphi'(x)\,d\,x}{\frac{A}{m^\alpha} - \frac{A}{M^\alpha} + \varphi(m) - \varphi(M)}$$

L'intégrale $\int_m^M x\,\varphi'(x)\,d\,x$ a une partie d'aire positive et une partie d'aire négative dont on s'efforce de rendre la somme égale à zéro.

D'autre part, la droit qu'on substitue à la courbe ogivale sera tracée d'une manière telle que $\varphi(m) = \varphi(M)$.

Si l'on peut arriver à ce résultat, on trouve que le revenu moyen est le même qu'on prenne la courbe ou la droite.

Il reste à prouver que le revenu moyen varie dans le même sens, que l'on prenne un intervalle arbitrairement choisi ou que l'on considère l'intervalle compris entre le revenu minimum et le revenu maximum, et cela dans le cas où l'on utilise la courbe ogivale, au lieu de la droite de Pareto.

Considérons des arcs de la courbe des déclarations, au lieu de considérer cette courbe totale. En raisonnant de la même manière que précédemment, nous prouverons qu'en substituant à chacun de ces arcs de la courbe des déclarations une courbe de Pareto, le revenu moyen sera identique, soit qu'on considère les arcs de la courbe des déclarations, soit qu'on considère les courbes de Pareto, qui leur sont substituées.

Étant donné que la courbe des déclarations diffère peu de la courbe de Pareto, une variation de α modifiant l'inclinaison de la courbe totale des déclarations produit pour les intervalles partiels une variation dans le même sens.

Il en résulte une variation dans le même sens, pour la courbe de Pareto dans l'intervalle total et pour une autre courbe de Pareto s'appliquant à un intervalle partiel.

Donc tous les revenus varient dans le même sens et toutes les classes sociales sont solidaires. Cette conclusion doit être maintenue, même si la formule de Pareto n'exprime qu'approximativement la réalité.

Il paraît difficile de prouver que la courbe ogivale des déclarations étant substituée à la droite de Pareto, le rapport d'inégalité des revenus varie en raison inverse de α. Étant donné que les termes correctifs ajoutés au numérateur et au dénominateur de rapport d'inégalité sont très petits, il paraît toutefois probable qu'il en est ainsi, mais pour en avoir la certitude, des constatations statistiques seraient nécessaires. Nous nous proposons de les entreprendre dans un travail ultérieur.

Résumons les résultats acquis.

Toutes les classes sociales sont unies dans la prospérité et l'adversité.

La stabilité des revenus faibles est plus grande que celle des revenus élevés.

L'inégalité des fortunes s'accroît avec le développement de la richesse publique.

Le machinisme, le taylorisme, la rationalisation, toutes les découvertes qui augmentent la production profitent à l'humanité tout entière.

Baron MOURRE.

OBSERVATIONS DE M. A. SIMIONOV

Les conclusions du conférencier relatives à la légitimité de l'application de la formule de Pareto à l'étude de la distribution des revenus sont pleinement justifiées surtout en ce qui concerne la tendance des législateurs de faire diminuer l'inégalité des revenus par des mesures fiscales ou économiques.

En qualité de chef de la Statistique des Assurances sociales russes à Moscou, avant l'introduction de la nouvelle politique économique « N. E. P. » du Gouvernement des Soviets, j'ai dirigé plusieurs travaux statistiques devant servir de base à l'estimation des revenus des paysans, ouvriers et employés du pays, pour être imposés par le Gouvernement pour toute l'étendue de la République.

Ces travaux ont été exécutés sous la surveillance du professeur L. K. Lachtin, actuellement décédé, en prenant comme base les formules de distribution de Pareto, dont la « Formule de Pareto » est un cas particulier (du type III).

Le matériel considéré était composé de données sur les salaires des ouvriers et employés des chemins de fer russes, comprenant plusieurs millions d'individus, pour la période précédant la guerre et la révolution, et les matériaux statistiques des membres des Associations professionnelles et des soviets locaux, depuis l'avènement de la Révolution.

L'étude de ce matériel considérable a pu être fait d'une manière satisfaisante, à l'aidé de la variété des courbes de Pearson analogues à celle de Pareto. On a constaté que d'année en année l'inégalité des revenus des ouvriers décroissait et l'année de la Révolution (1918) a présenté le caractère de point critique, toute la courbe de distribution ayant changé brusquement de nature.

Tous les efforts qu'on avait faits depuis afin d'uniformiser les revenus, en diminuant les limites où elles devaient varier, en imposant d'une manière excessive les couches des productions indépendantes, en augmentant la valeur absolue des revenus (inflation) n'ont abouti à un résultat autre que celui d'une misère grandissante, pour l'ensemble de la population.

Cette constatation justifiée aussi par d'autres sources d'informations et soutenue par des considérations de politique générale, a obligé le Gouvernement de laisser une certaine liberté à l'initiative individuelle et d'admettre que la détermination des revenus et des salaires des ouvriers résulte du jeu naturel de plusieurs facteurs économiques, ayant pour base l'initiative personnelle et la production individuelle.