

T. LOUA

**D'un nouveau mode de calcul de la vie moyenne applicable  
à toutes les tables de mortalité**

*Journal de la société statistique de Paris*, tome 5 (1864), p. 319-322

[http://www.numdam.org/item?id=JSFS\\_1864\\_\\_5\\_\\_319\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1864__5__319_0)

© Société de statistique de Paris, 1864, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (<http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

#### IV.

##### *D'un nouveau mode de calcul de la vie moyenne applicable à toutes les tables de mortalité.*

On n'arrive, le plus souvent, en statistique, à un résultat déterminé, qu'à la condition de longs et minutieux calculs. Tout procédé qui permet de les simplifier, de les abrégés, sans en altérer l'exactitude, et d'économiser ainsi un temps précieux, ne peut donc être accueilli qu'avec intérêt.

Parmi ces calculs, nous avons été amené à choisir ceux qui établissent, à l'aide des données d'une table de décès par âge, la somme des années vécues par les décédés et, par suite, leur âge moyen au moment de la mort. Mais les considérations et résultats qui vont suivre s'appliquent tout aussi bien à une table de survivance, quelle que soit la méthode qui ait servi à l'établir.

Quand on suit les errements habituels, cette somme des années vécues s'obtient en multipliant les décédés de chaque âge par le temps qui s'est écoulé depuis la naissance jusqu'au moment du décès. Le moyen que nous proposons consiste, après avoir préalablement établi les survivants aux divers âges, à multiplier ces survivants (comptés à partir du 2<sup>e</sup> âge) par l'intervalle des âges, et à multiplier les décès correspondants par la moitié de cet intervalle; l'addition des produits amène, dans les deux cas, au résultat cherché.

Avec la première méthode, l'opération exige autant de multiplications différentes qu'il y a de périodes d'âge; avec la seconde, au contraire, le calcul se borne, la table des survivants une fois établie, à quelques multiplications par des facteurs simples, qui se réduisent à deux lorsque ces périodes sont d'égale durée.

L'exemple suivant, où les intervalles d'âge sont conformes à ceux qui ont été adoptés dans les publications officielles du gouvernement français, permet de juger à simple vue de la différence des deux procédés, et des facilités extraordinaires d'exécution que présente le second.

*Comparaison des deux méthodes.*

1 <sup>re</sup> MÉTHODE.			2 <sup>e</sup> MÉTHODE.		
0 - 1	19,569 ×	0.5 = 9,784.5	19,569	100,000	INDICATION DES CALCULS. 19,569 × 0.5      80,431 × 1 12,257 × 2.0      68,174 × 4 68,174 - 12 × 2.5      697,495 × 5 12 × 0.5  Résultats. 9,784.5      80,431 24,514.0      272,696 170,405.0      2,987,475 6.0      » <hr/> 204,709.5      3,340,602 <hr/> 3,545,311.5
1 - 5	12,257 ×	3.0 = 36,771.0	12,257	80,431	
5 - 10	3,943 ×	7.5 = 29,572.5	3,943	68,174	
10 - 15	2,327 ×	12.5 = 29,087.5	2,327	64,231	
15 - 20	2,914 ×	17.5 = 50,995.0	2,914	61,904	
20 - 25	4,352 ×	22.5 = 97,920.0	4,352	58,990	
25 - 30	3,319 ×	27.5 = 91,272.5	3,319	54,638	
30 - 35	2,935 ×	32.5 = 95,387.5	2,935	51,319	
35 - 40	2,878 ×	37.5 = 107,925.0	2,878	48,384	
40 - 45	3,117 ×	42.5 = 132,472.5	3,117	45,506	
45 - 50	3,278 ×	47.5 = 155,705.0	3,278	42,389	
50 - 55	3,809 ×	52.5 = 199,972.5	3,809	39,111	
55 - 60	4,711 ×	52.5 = 270,882.5	4,711	35,302	
60 - 65	5,668 ×	62.5 = 354,250.0	5,668	30,591	
65 - 70	5,975 ×	67.5 = 403,312.5	5,975	24,923	
70 - 75	6,829 ×	72.5 = 495,102.5	6,829	18,948	
75 - 80	5,908 ×	77.5 = 457,870.0	5,908	12,119	
80 - 85	3,967 ×	82.5 = 327,277.5	3,967	6,211	
85 - 90	1,684 ×	87.5 = 147,350.0	1,684	2,244	
90 - 95	447 ×	92.5 = 41,347.5	447	560	
95 - 100	101 ×	97.5 = 9,847.5	101	113	
100 - 101	12 ×	100.5 = 1,206.0	12	12	
					597,495
	100,000	3,545,311.5	100,000		

On voit, par cet exemple, que, dans le premier cas, la somme des années vécues est obtenue par 22 multiplications à facteurs différents; tandis qu'il suffit, dans le second, d'effectuer 7 multiplications par les facteurs les plus simples, 1, 1/2, 1/4, 2 et 4.

L'identité des résultats est d'ailleurs parfaite, et elle suffirait au besoin pour prouver l'exactitude du procédé; nous allons, toutefois, en donner la démonstration algébrique.

Appelons  $\delta$  l'intervalle des âges, et représentons par  $a, b, c, d, e, f$ , les décès survenus dans les intervalles successifs depuis la naissance jusqu'à la fin de la table; désignons enfin la somme  $a + b + c + d + e + f$  par  $V_0$ , cette somme diminuée de  $a$  par  $V_{-1}$ , et les autres sommes par  $V_{-2}, V_{-3}, \dots, V_{-5}$ .

Si l'on veut calculer la somme des années vécues à partir de la naissance par les décédés  $a$ , on remarque que ces décédés sont morts au milieu du premier intervalle. Si on prend les décédés  $b$ , on constate qu'ils ont vécu d'abord tout l'intervalle  $\delta$ , et comme on les suppose morts au milieu du second, leur vie s'est prolongée de  $\frac{1}{2} \delta$ , et a atteint, par conséquent,  $\delta + \frac{1}{2} \delta$ . Par la même raison, les décédés  $c$  ont vécu  $2\delta + \frac{1}{2} \delta$ ; les décédés  $d$ ,  $3\delta + \frac{1}{2} \delta$ ; les décédés  $e$ ,  $4\delta + \frac{1}{2} \delta$ ; enfin les décédés  $f$ ,  $5\delta + \frac{1}{2} \delta$ .

Ces faits étant vrais, quel que soit le point de départ, il en résulte que, si on veut calculer la somme des années vécues par tous les décédés à partir du deuxième

âge, il est clair d'abord que les décédés *a*, qui sont morts dans le premier âge, ont disparu; restent les décédés *b* qui ont vécu, à partir de cet âge,  $\frac{1}{2}\delta$ ; les décédés *c*,  $\delta + \frac{1}{2}\delta$ ; les décédés *d*,  $2\delta + \frac{1}{2}\delta$ ; les décédés *e*,  $3\delta + \frac{1}{2}\delta$ , etc.

La même opération donnerait les années vécues par les décédés à partir de tous les autres âges de la table.

Il en résulte que, si on appelle *S*, *S'*, *S''*, *S'''*, *S''''* et *S'''''* la somme des années vécues par les décédés à partir de chacun de ces âges, on obtient le tableau de calculs suivant :

$\sqrt{-1} \times \delta$	$\sqrt{-2} \times \delta$				
<i>S</i> =	<i>S'</i> =	<i>S''</i> =	<i>S'''</i> =	<i>S''''</i> =	<i>S'''''</i> =
<i>a.</i> $\frac{1}{2}\delta$	<i>b.</i> $\frac{1}{2}\delta$	<i>c.</i> $\frac{1}{2}\delta$	<i>d.</i> $\frac{1}{2}\delta$	<i>e.</i> $\frac{1}{2}\delta$	<i>f.</i> $\frac{1}{2}\delta$
<i>b.</i> $\delta + \frac{1}{2}\delta$	<i>b.</i> $\frac{1}{2}\delta$	<i>c.</i> $\delta + \frac{1}{2}\delta$	<i>d.</i> $\delta + \frac{1}{2}\delta$	<i>e.</i> $\delta + \frac{1}{2}\delta$	
<i>c.</i> $2\delta + \frac{1}{2}\delta$	<i>c.</i> $\delta + \frac{1}{2}\delta$	<i>d.</i> $2\delta + \frac{1}{2}\delta$	<i>e.</i> $2\delta + \frac{1}{2}\delta$	<i>f.</i> $2\delta + \frac{1}{2}\delta$	
<i>d.</i> $3\delta + \frac{1}{2}\delta$	<i>d.</i> $2\delta + \frac{1}{2}\delta$	<i>e.</i> $3\delta + \frac{1}{2}\delta$	<i>f.</i> $3\delta + \frac{1}{2}\delta$		
<i>e.</i> $4\delta + \frac{1}{2}\delta$	<i>e.</i> $3\delta + \frac{1}{2}\delta$	<i>f.</i> $4\delta + \frac{1}{2}\delta$			
<i>f.</i> $5\delta + \frac{1}{2}\delta$	<i>f.</i> $4\delta + \frac{1}{2}\delta$				

On voit, d'après la composition de ces sommes, que *S'* égale *S* diminuée de  $a \times \frac{1}{2}\delta$  et de  $V_{-1} \times \delta$ ; de même la somme *S''* égale *S'* diminuée de  $b \times \frac{1}{2}\delta$  et de  $V_{-2} \times \delta$ , etc., de sorte qu'on peut poser :

$$\begin{aligned} S' &= S - a \cdot \frac{1}{2}\delta - \delta V_{-1} \\ S'' &= S' - b \cdot \frac{1}{2}\delta - \delta V_{-2} \\ S''' &= S'' - c \cdot \frac{1}{2}\delta - \delta V_{-3} \\ S'''' &= S''' - d \cdot \frac{1}{2}\delta - \delta V_{-4} \\ S''''' &= S'''' - e \cdot \frac{1}{2}\delta - \delta V_{-5} \end{aligned}$$

Mais comme il s'agit de trouver la valeur de *S* en fonction des autres sommes, la série qui précède peut se transformer en celle-ci par un simple changement de signes.

$$\begin{aligned} S &= S' + a \cdot \frac{1}{2}\delta + V_{-1} \cdot \delta \\ S' &= S'' + b \cdot \frac{1}{2}\delta + V_{-2} \cdot \delta \\ S'' &= S''' + c \cdot \frac{1}{2}\delta + V_{-3} \cdot \delta \\ S''' &= S'''' + d \cdot \frac{1}{2}\delta + V_{-4} \cdot \delta \\ S'''' &= S''''' + e \cdot \frac{1}{2}\delta + V_{-5} \cdot \delta \\ S''''' &= f \cdot \frac{1}{2}\delta. \end{aligned}$$

Si on remplace, dans ces formules, *S'''''* par sa valeur  $f \cdot \frac{1}{2}\delta$ , ou, ce qui revient au même, si l'on additionne ces diverses sommes, on obtient, après avoir fait disparaître les termes communs aux deux membres de l'égalité, la formule suivante :

$$S = \frac{1}{2}\delta (a + b + c + d + e + f) + \delta (V_{-1} + V_{-2} + V_{-3} + V_{-4} + V_{-5});$$

laquelle se réduit en celle-ci :

$$S = \frac{1}{2}\delta \times SD + \delta S_{-1}V.$$

Ce qui veut dire que, pour obtenir la somme des années vécues par tous les décédés, il suffit de multiplier la somme des décès par la moitié de l'intervalle des âges, et la somme des survivants à partir du deuxième âge, par l'intervalle entier, et d'ajouter ces deux sommes.

Cette règle est générale et indépendante, notamment de la valeur de  $\delta$ , et du nombre de ces intervalles. Il en résulte que, pour avoir la somme des années vécues à partir de chaque âge, il suffit de retrancher de la somme des années vécues par tous les décédés, celle des années vécues jusqu'à l'âge que l'on considère. On obtient ainsi le moyen de calculer la vie moyenne à chaque âge, directement, et sans aucune soustraction; tandis que, par la méthode ordinaire, la vie moyenne à chaque âge ne s'obtient qu'en retranchant du quotient obtenu le nombre d'années écoulées jusqu'à l'âge choisi.

Si l'on fait, dans la formule qui précède,  $\delta = 1$ , et qu'on remplace  $S_{-1} V$  par sa valeur  $S V - V_0$ , la vie moyenne à la naissance s'obtient en divisant la somme des années vécues par  $V_0$ , on a :

$$v. m. = \frac{\frac{1}{2} V_0 + S V - V_0}{V_0} = \frac{S V - \frac{1}{2} V_0}{V_0} = \frac{S V}{V_0} - \frac{1}{2}.$$

D'où la règle, posée dans l'*Annuaire du Bureau des longitudes*, que, pour calculer cette vie moyenne, dans le cas où les décès sont donnés par année d'âge, on divise la somme des survivants par celle des décès, et on retranche  $\frac{1}{2}$  du quotient.

La formule précédente ne change pas de valeur, quand on multiplie les deux termes de la soustraction par  $\delta$ ; il en résulte qu'on peut poser :

$$v. m. = \frac{\delta S V}{V_0} - \frac{1}{2} \delta.$$

Cette formule est très-commode, lorsque les intervalles d'âge sont égaux. — La vie moyenne s'obtient alors, en effet, en divisant la somme des survivants par la somme des décès, et en retranchant du résultat la moitié de l'intervalle d'âges choisi. — Ajoutons qu'on calcule par le même procédé l'âge moyen d'une population donnée, l'âge moyen au mariage, la position d'un centre de gravité, et, en un mot, la somme d'une série de produits, dont les multiplicateurs diffèrent tous d'une même quantité.

T. LOUA.