JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

JEAN LERAY

Sur les équations et les transformations

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 24 (1945), p. 201-248.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1945_9_24__201_0>

Sur les équations et les transformations

(TROISIÈME PARTIE D'UN COURS DE TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE PROFESSÉ EN CAPTIVITÉ);

PAR JEAN LERAY.

Introduction.

Cette troisième et dernière Partie [1] de mon cours est la plus originale : c'est l'étude des questions qu'elle traite qui m'amena à poser les définitions que les deux premières Parties ont appliquées à l'étude de questions relativement plus classiques. La connaissance de la deuxième Partie, celle du paragraphe VI du Chapitre I et celle de la fin du Chapitre II (à partir du nº **34**) sont superflues. Mais les procédés qu'utilise le paragraphe I du Chapitre III [la définition (58) du nombre de Lipschitz Λ_ξ d'une représentation $\xi(x)$, le fait que deux représentations homotopes ont même nombre de Lipschitz, la preuve que l'équation $x = \xi(x)$ possède au moins une solution quand $\Lambda_\xi \neq 0$] joueront un rôle essentiel : le Chapitre VI n'est que le développement de ces procédés; le Chapitre VII est calqué sur le Chapitre VI (*cf.* début du nº **85**); le Chapitre VIII n'est qu'une application immédiate du Chapitre VII, montrant l'intérêt des résultats qu'établit ce Chapitre VII.

Le *Chapitre VI* définit et étudie « *l'indice total* » $i(O)$ des solutions d'une équation $x = \xi(x)$ qui appartiennent à un ensemble ouvert O. Malgré la généralité des hypothèses, les conclusions se rattachent très directement à des notions et à des propositions très élémentaires et très classiques, comme le prouvent les exemples du nº **74** et ceux qui suivent les énoncés des théorèmes 26 et 27. Lorsque l'espace E auquel appartiennent O, x, $\xi(x)$ est un groupe clos, l'indice total $i(O)$ peut être identifié au degré topologique (A.-H., *Abbildungsgrad*) au point 1 de la transformation $x\xi(x)^{-1}$ envisagée sur O : cela résulte immédiatement de la comparaison des propriétés de l'indice total et du degré topologique [*voir* aussi la formule (66) du nº **44**]. Mais en général la notion d'indice total n'a aucun rapport avec celle de degré topologique : la

(1) Dans un travail ultérieur, intitulé « Les modules d'homologie d'une représentation », nous étudierons la topologie des représentations par des méthodes étroitement apparentées à celles que ce Cours de topologie applique à l'étude de la topologie des espaces.

définition du degré topologique, qui est due à M. Brouwer, s'applique à toute représentation d'une pseudomultiplicité dans une pseudomultiplicité de même dimension; si ces pseudomultiplicités ne sont pas orientables, le degré topologique ne peut être défini que mod 2; si elles sont orientables, le signe du degré dépend des conventions d'orientation; or aucune de ces particularités n'apparaît dans la définition de $i(\mathrm{O})$; par contre la valeur de $i(\mathrm{O})$ est altérée quand, sans changer l'ensemble des solutions de $x=\xi(x)$, on modifie le choix de $\xi(x)$. Notre indice total est sûrement moins approprié à l'étude des multiplicités que le degré topologique de M. Brouwer; il convient peut-être à l'étude des groupes topologiques; il est sûrement approprié à l'étude des espaces fonctionnels : les conclusions du Chapitre VII englobent la théorie des équations fonctionnelles que M. J. Schauder et moi avons déduite de notre définition du degré topologique de certaines représentations en lui-même d'un espace de Banach; on peut donc considérer les diverses explications de cette théorie comme des applications du Chapitre VI (*voir* la fin du n° **76**). De telles applications peuvent être multipliées : de nombreux problèmes de la théorie des équations aux dérivées partielles et de la physique mathématique ont été ramenés à des équations du type $x=\xi(x)$, depuis que E. Picard a révélé l'intérêt de ce type d'équations, en créant la Méthode des approximations successives, qui n'en épuise d'ailleurs pas l'étude; le corollaire 25 relie nos considérations et cette Méthode.

Le *Chapitre VII* associe à l'équation $x=\xi(x, x')$, qui dépend du paramètre x', un certain homomorphisme d'anneau de pseudocycles; le paragraphe IV en déduit la définition d'un homomorphisme dont l'analogie avec l'homomorphisme inverse de M. H. Hopf (ou plutôt avec la généralisation qu'en a donnée M. Freudenthal dans la *Compositio math.*, t. 2, p. 163) est la même que celle de l'indice total avec le degré topologique.

Le *Chapitre VII* applique cet homomorphisme à l'étude de certaines homéomorphies. Nous obtenons ainsi (th. 35) une généralisation du *théorème d'Alexander* différente de celles de la deuxième partie (n^{os} **51** et **62**); (toutefois, dans le cas des multiplicités, la généralisation du théorème de dualité de Poincaré que signale le n° **60** relie ces deux généralisations du théorème d'Alexander). Enfin nous donnons une extension (th. 36) du *théorème de l'invariance du domaine* de M. Brouwer, d'où résulte (corol. 36) que l'*alternative de Fredholm* (ou bien l'équation de Fredholm a toujours une solution unique, ou bien l'équation homogène a une solution non nulle) vaut dans les espaces topologiques, linéaires à voisinages convexes. C'est M. J. Schauder (*Math. Annalen*, t. 106, 1932, p. 661-721), rappelons-le, qui le premier généralisa le théorème de l'invariance du domaine à des espaces non euclidiens, les espaces de Banach, et y rattacha l'alternative de Fredholm. M. F. Riesz (*Acta math.*, t. **41**, p. 71-98) avait antérieurement étendu les théorèmes de Fredholm aux espaces de Banach. C'est M. Tychonoff (*Math. Annalen*, t. **111**, p. 767) qui le premier généralisa à des espaces topologiques, linéaires, à voisinages convexes un théorème de topologie algébrique; il s'agissait du théorème du point fixe de M. Brouwer (A.-H., Chap. IX, *Anhang*; n° 43, ex. 1) que MM. Birkhoff et Kellog (*Trans. of Amer. Math. Soc.*, t. 23, 1922), puis M. J. Schauder (*Studia math.*, t. 2, 1930) avaient déjà étendu aux espaces de Banach.

Remarque. — La notion d'espace *convexoïde* (n° **43**) interviendra sans cesse dans nos hypothèses; nos exemples, pour être élémentaires, ne considèreront pas d'autre espace convexoïde que les polyèdres; mais le lemme 48 signale une catégorie étendue d'espaces convexoïdes et simples : les ensembles normaux, bicompacts et convexes de points d'un espace topologique, linéaire à voisinages convexes.

CHAPITRE VI.

ÉQUATIONS.

I. — Préliminaires.

Les trois numéros de ce paragraphe I sont indépendants.

71. Généralisation de la définition des formes de E (n° **12**) et de celle des formes de $E.c$ (n° **27**).

Lemme 25. — *Si* E *est un espace normal, si* E′ *est un ensemble fermé de points de* E *et si* c *est un complexe concret dont les supports sont des ensembles fermés de points de* E′ ($|k| \subset E' \subset E$), *alors l'intersection par* E′ *constitue un isomorphisme des groupes de Betti de* $E.c$ *sur ceux de* $E'.c$.

Démontrer ce lemme, c'est démontrer les deux propositions que voici :

a. Toute classe d'homologie de $E'.c$ est l'intersection par E′ d'une classe d'homologie de $E.c$.

b. Si une classe d'homologie de $E.c$ a pour intersection par E′ la classe nulle, alors cette classe de $E.c$ est elle-même nulle.

Nous utiliserons la proposition suivante, dont la démonstration est analogue à celle du théorème 1.

Généralisation du théorème 1. — Si l'on rétrécit une couverture K′ de E′ en une couverture de E′, alors chaque cycle de $K'.c$ reste dans la même classe d'homologie de $E'.c$.

Démonstration de a. — Soit Z'^p un cycle de $E'.c$; on a $Z'^p = \sum_{q,\alpha} A_\alpha X'^{p+q,\alpha}.x_{q,\alpha}$, les $X'^{p+q,\alpha}$ étant les éléments d'une couverture K′ de E′, les $x_{q,\alpha}$ étant les éléments de c. D'après le lemme **12** (n° **24**) il existe une couverture K de E telle que

$K.E'$ soit un élargissement de K' et que $K.c$ ait même complexe abstrait que $K'.c$; soit $X^{p+q,\alpha}$ l'élément de K qui correspond à $X'^{p+q,\alpha}$; $Z^p = \sum_{q,\alpha} A_\alpha X^{p+q,\alpha}.x_{q,\alpha}$ est un cycle; d'après la généralisation du théorème 1 on a $Z^p.E' \sim Z'^p$.

C. Q. F. D.

Démonstration de b. — (Cette démonstration est apparentée à celle des lemmes 13 et 22). Soit Z^p un cycle de $E.c$ tel que $Z^p.E' \sim o$ dans $E'.c$: il existe une couverture K de E telle que Z^p appartienne à $K.c$ et une couverture K' de E' telle que $Z^p \sim o$ dans $K'.K.c$. D'après le lemme 12 on peut supposer K' du type $K' = K^\star.E'$, $K^\star$ étant une couverture de E; or $K'.K.c$ est identique à $K^\star.K.c$; donc $Z^p \sim o$ dans $K^\star.K.c$; donc $Z^p \sim o$ dans $E.c$.

C. Q. F. D.

Le lemme 25 identifie les groupes de Betti de $E.c$ et $E'.c$. Il peut également s'énoncer comme suit, en convenant d'identifier une forme de $E.c$ avec son intersection par un cycle unité de E'.

LEMME 26. — *Toute forme de* $E'.E.c$ *ayant pour dérivée une forme de* $E.c$ *est homologue à une forme de* $E.c$.

Appliquons les lemmes 25 et 26 aux cycles généraux de $E.c$, que nous définirons comme suit :

Définition. — Toute forme de c constitue une *forme générale* de $E.c$; si L^p est une forme générale de $E.c$, son intersection par une forme d'un ensemble fermé E' de points de E contenant $|L^p|$ est encore une forme générale de $E.c$; si K'^0 est un cycle unité d'un tel ensemble E', L^p et $L^p.K'^0$ sont identifiés; toute combinaison linéaire homogène d'un nombre fini de formes générales est une forme générale. Un cycle général est une forme générale dont la dérivée est nulle.

Nous obtenons la proposition que voici :

Tout cycle général de $E.c$ *appartient à une classe d'homologie bien déterminée de* $E.c$. (Autrement dit : il n'y a pas lieu de définir de classes d'homologie générales : elles se confondraient avec les classes d'homologie.)

Quand c est une couverture de E, cette conclusion s'énonce comme suit :

Définition. — Toute forme de E constitue une *forme générale* de E; si L^p est une forme générale de E son intersection par une forme d'un ensemble fermé E' de points de E contenant $|L^p|$ sera encore une forme générale de E; si K'^0 est un cycle unité d'un tel ensemble E, L^p et $L^p.K'^0$ seront identifiés; toute combinaison linéaire homogène d'un nombre fini de formes générales est une forme générale. Un cycle général est une forme générale dont la dérivée est nulle.

Nous avons prouvé que :

Tout cycle général de l'espace normal E *appartient à une classe d'homologie bien déterminée de* E.

72. Couvertures simpliciales. — Rappelons qu'un complexe K d'éléments $X^{q,\beta}$ est simplicial quand il est connexe et que chacun des sous-complexes ouverts $\underline{X^{q,\beta}}$ est un simplexe.

Le lemme 2 (n° **4**) a pour conséquence immédiate la proposition suivante :

Lemme 27. — *Le produit de deux complexes simpliciaux est simplicial.*

Lemme 28. — *Si* K *est une couverture simpliciale de* E *et si* e *est un ensemble connexe de points de* E, *alors* K.e *est simplicial.*

Démonstration. — K.e étant une couverture de e, qui est connexe, est connexe d'après le lemme 4 (n° **15**). Si $X^{q,\beta}.e \neq 0$, alors $\underline{X^{q,\beta}.e}$ a même complexe abstrait que $\underline{X^{q,\beta}}$, qui est un simplexe.

Lemme 29. — *Si* K *et* $K^\star$ *sont deux couvertures simpliciales d'un même espace connexe* E, *alors* $K.K^\star$ *est simplicial.*

Démonstration. — La formule $K.K^\star = \overset{-1}{\pi}(K \times K^\star)$ du n° **8** exprime que $K.K^\star$ a même complexe abstrait que l'intersection de $K \times K^\star$ par l'ensemble e des points $(x \times x)$; $K \times K^\star$ est simplicial d'après le lemme 27; e, étant homéomorphe à E, est connexe; cette intersection est donc simpliciale en vertu du lemme 28.

73. Dual de l'intersection de deux complexes. — Soient deux complexes K et $K^\star$ (d'éléments $X^{q,\beta}$ et $X^{\star r,\gamma}$); soient k et $k^\star$ (d'éléments $x_{q,\beta}$ et $x^\star_{r,\gamma}$) leurs duals.

Lemme 30. — *Le dual de* $K \times K^\star$ *est* $k \times k^\star$, *l'élément dual de* $X^{q,\beta} \times X^{\star r,\gamma}$ *étant* $x^\star_{r,\gamma} \times x_{q,\beta}$.

Démonstration :

$$\begin{aligned}
&\Big(\sum_{q,\beta,r,\gamma} X^{q,\beta} \times X^{\star r,\gamma} \times x^\star_{r,\gamma} \times x_{q,\beta}\Big)^{\bullet} \\
&\quad = \Big[\Big(\sum_{q,\beta} X^{q,\beta} \times x_{q,\beta}\Big) \times \Big(\sum_{r,\gamma} X^{\star r,\gamma} \times x^\star_{r,\gamma}\Big)\Big]^{\bullet} \\
&\quad = \Big(\sum_{q,\beta} X^{q,\beta} \times x_{q,\beta}\Big)^{\bullet} \times \Big(\sum_{r,\gamma} X^{\star r,\gamma} \times x^\star_{r,\gamma}\Big) \\
&\qquad + \Big(\sum_{q,\beta} X^{q,\beta} \times x_{q,\beta}\Big) \times \Big(\sum_{r,\gamma} X^{\star r,\gamma} \times x^\star_{r,\gamma}\Big)^{\bullet} = 0.
\end{aligned}$$

Le lemme 30 et le lemme 17 (n° **31**) ont pour conséquence immédiate le suivant :

LEMME 31. — *Le dual de* K.K* *est un sous-complexe fermé de* $k \times k^*$.

Explicitons cette proposition : soit $x_{r,\gamma;q,\beta}$ l'élément dual de $X^{q,\beta}.X^{*r,\gamma}$; on a les mêmes coefficients c et c^* dans les formules

$$(1)\qquad \dot{x}_{q,\beta} = \sum_\mu c\begin{pmatrix}\mu\\ q-1\\ \beta\end{pmatrix} x_{q-1,\beta},$$

$$(2)\qquad \dot{x}^*_{r,\gamma} = \sum_\nu c^*\begin{pmatrix}\nu\\ r-1\\ \gamma\end{pmatrix} x_{r-1,\nu},$$

$$(3)\qquad \dot{x}_{r,\gamma;q,\beta} = \sum_\nu c^*\begin{pmatrix}\nu\\ r-1\\ \gamma\end{pmatrix} x_{r-1,\nu;q,\beta} + (-1)^r \sum_\mu c\begin{pmatrix}\mu\\ q-1\\ \beta\end{pmatrix} x_{r,\gamma;q-1,\mu}.$$

On a en particulier

$$(4)\qquad \dot{x}_{0,\gamma;q,\beta} = \sum_\mu c\begin{pmatrix}\mu\\ q-1\\ \beta\end{pmatrix} x_{0,\gamma;q-1,\mu}.$$

Et si K* possède un cycle unité, d'après le n° **31** (dual d'un complexe possédant un cycle unité), dans la formule

$$(5)\qquad \dot{x}_{1,\gamma;q,\beta} = \sum_\nu c^*\begin{pmatrix}\nu\\ 0\\ \gamma\end{pmatrix} x_{0,\nu;q,\beta} - \sum_\mu c\begin{pmatrix}\mu\\ q-1\\ \beta\end{pmatrix} x_{1,\gamma;q-1,\mu},$$

on a

$$\sum_\nu c^*\begin{pmatrix}\nu\\ 0\\ \gamma\end{pmatrix} = 0.$$

Définition. — Soit h un élargissement du dual de K.K* ; soit $y_{r,\gamma;q,\beta}$ l'élément de h qui correspond à $X^{q,\beta}.X^{*r,\gamma}$; supposons $|x_{q,\beta}| \subset |y_{0,\gamma;q,\beta}|$; supposons que K* possède un cycle unité. Nous nommerons *projection* de h sur le dual k de K l'ensemble des deux opérations suivantes :

Nous identifions à $x_{q,\beta}$ tous les $y_{0,\gamma;q,\beta}$ correspondant aux diverses valeurs de γ [la formule (4) s'identifiant donc avec la formule (1)]; puis nous annulons les éléments $y_{r,\gamma;q,\beta}$ d'indice r positif [ces éléments constituent un sous-complexe fermé du fait de la première opération, vu les formules (3) et (5)].

La comparaison de (1) et (3) prouve que cette projection transforme les relations et homologies qui existent entre les formes de h en des relations et homologies qui valent dans k.

Nota. — Cette projection, dont M. Alexandroff fait un usage si fréquent, ne nous servira que deux fois : au n° **74** *b* (lemme 33) et au n° **86** *c*.

II. — L'indice total des solutions d'une équation.

Soit E un espace convexoïde; soit $\xi(x)$ une représentation dans E d'un ensemble fermé de points de E; ce chapitre-ci étudie, par les procédés de la topologie algébrique, celles des solutions de l'équation

$$x = \xi(x), \tag{6}$$

qui appartiennent à un ensemble ouvert O de points de E, O faisant partie du champ de définition de $\xi(x)$. Le cas particulier $O = E$ a déjà été traité au Chapitre III.

Remarque I. — Les coefficients employés dans toutes les homologies de ce chapitre-ci seront des *entiers*.

Remarque II. — Les solutions de (6) constituent un ensemble *fermé* (donc bicompact) de points de E : si $a \neq \xi(x)$, on peut évidemment construire un voisinage de a en tout point x duquel $x \neq \xi(x)$.

74. Définition de $i(L^0)$. — Au cours des nos **74** et **75** nous supposerons seulement que E est un espace de Hausdorff bicompact et connexe et que E possède un recouvrement convexoïde, constitué par des ensembles U :

chaque U est un ensemble fermé et simple;
l'intersection d'un nombre fini d'ensembles U est vide ou est un ensemble U.

Soit L^0 une forme à o dimension de E, telle que $\xi(x)$ soit définie sur $|L^0|$.

a. Définition de $i(L^0, K)$. — Soit K une couverture simpliciale de E dont les éléments $X^{q,\beta}$ aient pour supports des ensembles U; soit k le dual de K : l'élément $x_{q,\beta}$ de K a pour support $|x_{q,\beta}| = |\underline{X^{q,\beta}}|$, qui est simple en vertu du corollaire 12 (no **29**). Les expressions $L^0.\overset{-1}{\xi}(X^{q,\beta})$ sont des formes générales de E (no **71**); l'expression $\sum_{q,\beta} L^0.\overset{-1}{\xi}(X^{q,\beta}).x_{q,\beta}$ est donc une forme générale de $E.k$; d'après le lemme 3 et la formule de définition des complexes duals $\left(\sum_{q,\beta} X^{q,\beta} \times x_{q,\beta}\right)^{\bullet} = o$, la dérivée de cette forme est $\sum_{q,\beta} \dot{L}^0.\overset{-1}{\xi}(X^{q,\beta}).x_{q,\alpha}$, qui est nulle lorsque $|\dot{L}^0|.\overset{-1}{\xi}(|X^{q,\beta}|).|x_{q,\beta}| = o$ quels que soient q et β, c'est-à-dire lorsque

$$|\dot{L}^0|.\overset{-1}{\xi}(|X^{0,\gamma}|).|X^{0,\gamma}| = o, \quad \text{quel que soit } \gamma, \tag{7}$$

ce que nous supposerons. $\sum_{q,\beta} L^0.\overset{-1}{\xi}(X^{q,\beta}).x_{q,\beta}$ est donc un cycle général à o dimension de $E.k$. Or le n° **71**, le lemme **14** (n° **27**) et la convention (29) du n° **31** ont la conséquence suivante :

Lemme 32. — *Si k est dual d'un complexe à cycle unité, si ses supports sont simples et appartiennent à un espace normal* E, *alors tout cycle général à* o *dimension de* $E.k$ *est homologue à un entier positif, négatif ou nul; cet entier est défini sans ambiguïté.*

Ce lemme nous permet donc de définir un entier $i(L^0, K)$ par la relation

$$i(L^0, K) \sim \sum_{q,\beta} L^0 . \overset{-1}{\xi}(X^{q,\beta}) . x_{q,\beta}, \tag{8}$$

chaque fois que K est une couverture simpliciale dont les supports sont des ensembles U vérifiant (7).

Remarque a. — La valeur de $i(L^0)$ n'est pas altérée quand on réduit à $|L^0|$ le champ de définition de $\xi(x)$ (vu le lemme **15**, n° **27**).

b. Définition de $i(L^0)$. — Nous allons prouver que l'entier $i(L^0, K)$ est indépendant du choix de K, ce qui nous permettra de désigner cet entier par le symbole $i(L^0)$. Soit K^* une seconde couverture simpliciale de E, dont les supports sont des ensembles U : il s'agit de prouver que $i(L^0, K) = i(L^0, K^*)$, chaque fois que les deux membres sont définis; cela résulte évidemment du lemme suivant :

Lemme 33. — $i(L^0, K.K^*)$ *est défini et égal à* $i(L^0, K)$ *quand* $i(L^0, K)$ *est défini.*

Démonstration. — $K.K^*$ est une couverture simpliciale de E en vertu du lemme 29; $K.K^*$ a pour supports des ensembles U. Construisons le complexe dual de $K.K^*$: un élément non nul $X^{q,\beta}.X^{*r,\gamma}$ de $K.K^*$ a pour dual l'élément $x_{r,\gamma;q,\beta}$ dont le support est $|x_{r,\gamma;q,\beta}| = |\underline{X^{q,\beta}.X^{*r,\gamma}}| = |\underline{X^{q,\beta}}|.|\underline{X^{*r,\gamma}}| = |x_{q,\beta}|.|x^*_{r,\gamma}|$; envisageons l'élargissement h du dual de $K.K^*$ dont l'élément $y_{r,\gamma;q,\beta}$ correspondant à $x_{r,\gamma;q,\beta}$ a pour support $|y_{r,\gamma;q,\beta}| = |x_{q,\beta}|$. Puisque K satisfait (7), le lemme 32 prouve l'existence d'un entier ι tel que

$$\iota \sim \sum_{q,\beta,r,\gamma} L^0 . \overset{-1}{\xi}(X^{q,\beta}.X^{*r,\gamma}) . y_{r,\gamma;q,\beta}. \tag{9}$$

D'une part, puisque $|x_{r,\gamma;q,\beta}| \subset |y_{r,\gamma;q,\beta}|$, en vertu du lemme **15** (n° **27**), on déduit de (9) la relation

$$\iota \sim \sum_{q,\beta,r,\gamma} L^0 . \overset{-1}{\xi}(X^{q,\beta}.X^{*r,\gamma}) . x_{r,\gamma;q,\beta},$$

c'est-à-dire

$$\iota = i(L^0, K.K^*). \tag{10}$$

D'autre part projetons (n^o **73**) h sur le dual k de K, l'homologie (9) devient

$$\iota \sim \sum_{q,\beta,\gamma} L^0.\overset{-1}{\xi}(X^{q,\beta}.X^{*0,\gamma}).x_{q,\beta},$$

c'est-à-dire, puisque $L^0.\sum_{\gamma}\overset{-1}{\xi}(X^{*0,\gamma}) = L^0$,

$$\iota \sim \sum_{q,\beta} L^0.\overset{-1}{\xi}(X^{q,\beta}).x_{q,\beta},$$

c'est-à-dire

(11) $$\iota = i(L^0, K).$$

De (10) et (11) résulte la relation annoncée,

$$i(L^0, K) = i(L^0, K.K^*).$$

Remarque b. — On peut prouver que $i(L^0)$ est indépendant du choix des ensembles U. A cet effet on a recours à la définition plus générale de $i(L^0)$ que voici : soit K une couverture simpliciale de E possédant un élargissement dont les supports sont des ensembles U^*; on ne suppose pas que cet élargissement soit une couverture; soit $X^{q,\beta}$ un élément de K; soit $U^{q,\beta}$ l'élément correspondant de cet élargissement; soit $u_{q,\beta}$ le dual de $U^{q,\beta}$; $|u_{q,\beta}| = |\underline{U^{q,\beta}}|$ est simple en vertu du corollaire **12**; supposons $|L^0|.\overset{-1}{\xi}(|X^{0,\gamma}|).|U^{0,\gamma}| = 0$ quel que soit γ; d'après le lemme **32** $\sum_{q,\beta} L^0.\overset{-1}{\xi}(X^{q,\beta}).u_{q,\beta}$ est homologue a un entier; cet entier est $i(L^0)$.

75. Propriétés de $i(L^0)$.

Lemme 34. — *Pour que $i(L^0)$ soit défini, il faut et il suffit que $|L^0|$ appartienne au champ de définition de $\xi(x)$ et qu'il existe un recouvrement fini de E constitué par des ensembles U, les U_γ, qui vérifient la condition*

(12) $$|L^0|.\overset{-1}{\xi}(U_\gamma).U_\gamma = 0, \qquad \text{quel que soit } \gamma.$$

Démonstration. — Si (7) est vérifiée, les $|X^0,^\gamma|$ constituent un tel recouvrement. Réciproquement si l'on connaît un tel recouvrement, la couverture de E qu'il engendre est simpliciale (n^o **10**, remarque), ses supports sont des ensembles U et la condition (7) est vérifiée.

Lemme 30. — *$i(L^0) = 0$ lorsqu'il existe un recouvrement fini de E constitué par des ensembles U, les U_γ qui vérifient la condition*

$$|L^0|.\overset{-1}{\xi}(U_\gamma).U_\gamma = 0, \qquad \text{quel que soit } \gamma.$$

Démonstration. — Le deuxième membre de (8) est nul quand on utilise la couverture K qu'engendre ce recouvrement.

Lemme 36. — *On a* $i\left(\sum_\alpha L^{0,\alpha}\right)=\sum_\alpha i\,L^{0,\alpha}$), *lorsque chacun des* $i(L^{0,\alpha})$ *est défini.*

Démonstration. — A chaque α correspond une couverture K_α de E telle que $i(L^{0,\alpha}, K_\alpha)$ soit définie ; construisons l'intersection K des K_α ; d'après le lemme 33 $i(L^{0,\alpha}, K)$ est défini quel que soit α ; on a $i\left(\sum_\alpha L^{0,\alpha}, K\right)=\sum_\alpha i(L^{0,\alpha}, K)$, puisque le second membre de (8) est une fonction linéaire et homogène de L^0.

Lemme 37. — *Supposons* $\xi(x)$ *défini sur* E *tout entier; soit* Λ_ξ *le nombre de Lipschitz de* $\xi(x)$; *soit* E^0 *un cycle unité de* E ; *je dis que* $i(E^0)=\Lambda_\xi$.

Démonstration. — La formule (8) s'identifie à la formule (58) du n° **41**.

Lemme 38. — $i(L^0)$ *est invariant relativement aux homotopies. Plus précisément : envisageons l'équation* $x=\xi_{x'}(x)$, *la représentation* $\xi_{x'}(x)$ *dépendant continûment du paramètre* x', *qui est un point de l'espace topologique* E′ ; L^0 *est fixe; si l'entier correspondant* $i_{x'}(L^0)$ *est défini quel que soit* x' *et si* E′ *est connexe, alors* $i_{x'}(L^0)$ *est indépendant de* x'.

Démonstration. — (*Voir* la démonstration analogue qui constitue l'Annexe à la première Partie). Soit a' un point quelconque de E′. Envisageons K tel que $i_{a'}(L^0, K)$ soit défini. Le lemme 6 permet de construire un élargissement de $\overset{-1}{\xi}_{a'}(K)$ qui possède les deux propriétés suivantes : le support de chaque élément $Y^{q,\beta}$ de cet élargissement contient un voisinage du support de l'élément $\overset{-1}{\xi}_{a'}(X^{q,\beta})$ correspondant ; on a

$$|\dot{L}^0|.|Y^{q,\beta}|.|x_{q,\beta}|, \qquad \text{quels que soient } q \text{ et } \beta.$$

$\sum_{q,\beta} L^0.Y^{q,\beta}.x_{q,\beta}$ est donc un cycle ; d'après le lemme 32 il existe un entier ι tel que

$$\sum_{q,\beta} L^0.Y^{q,\beta}.x_{q,\beta}\sim\iota.$$

D'après le lemme 9 *bis* (Annexe à la première Partie), $\overset{-1}{\xi}_{x'}(K)$ est un rétrécissement du complexe d'éléments $Y^{q,\beta}$ quand x' appartient à un certain voisinage V′ de a' ; on a donc, d'après le lemme 15 (n° **27**)

$$\sum_{q,\beta} L^0.\overset{-1}{\xi}_{x'}(X^{q,\beta}).x_{q,\beta}\sim\iota, \qquad \text{quel que soit } x'\in V'.$$

Autrement dit $i_{x'}(L^0)$ est constant au voisinage de chaque point de E′. Puisque E′ est connexe, $i_{x'}(L^0)$ est donc indépendant de x'.

76. Conclusions. — Supposons E *convexoïde* [1] : E est un espace de Hausdorff, bicompact, connexe, possédant un recouvrement dont les éléments U ont les propriétés suivantes :

a. Chaque ensemble U est fermé et simple ;

b. L'intersection d'un nombre fini d'ensembles U ou bien est vide, ou bien est un ensemble U ;

c. Étant donnés un point x de E et un voisinage V de x, on peut trouver un nombre fini d'ensembles U dont la réunion W possède les propriétés : x est intérieur à W ; $W \subset V$.

Le lemme suivant complète les lemmes 34 et 35.

Lemme 39. — *Soit* F *un ensemble fermé de points de* E. *Pour qu'on puisse construire un recouvrement fini de* E, *constitué par des ensembles* U, *les* U_γ, *qui vérifient la condition* $F.\overset{-1}{\xi}(U_\gamma).U_\gamma = 0$ *quel que soit* γ, *il faut et il suffit que* F *ne contienne aucune solution de l'équation* $x = \xi(x)$.

Démonstration. — Cette condition est manifestement nécessaire. Réciproquement supposons-la vérifiée ; attachons à tout point x de E un ensemble W_x ayant les propriétés suivantes : W_x est la réunion d'un nombre fini d'ensembles U ; x est intérieur à W_x ; si $x \in F$, $\overset{-1}{\xi}(W_x).W_x = 0$; sinon $F.W_x = 0$. Puisque E est bicompact, on peut recouvrir E avec un nombre fini de W_x ; soient U_γ les ensembles constituant ces W_x ; les U_γ constituent un recouvrement de E ; pour chaque valeur de γ on a ou bien $\overset{-1}{\xi}(U_\gamma).U_\gamma = 0$, ou bien $F.U_\gamma = 0$.

Les lemmes 34, 35 et 39 nous fournissent les propositions suivantes :

Lemme 34 *bis*. — *Pour que* $i(L^0)$ *soit défini, il faut et il suffit que* $|\dot{L}^0|$ *ne contienne aucune solution de l'équation* $x = \xi(x)$.

Lemme 35 *bis*. — $i(L^0) = 0$ *quand* $|L^0|$ *ne contient aucune solution de l'équation* $x = \xi(x)$.

Définition de $i\{x = \xi(x) \in O\}$. — Soit O un ensemble ouvert non vide de points de E, dont la fermeture $\overline{O}$ appartient au champ de définition de $\xi(x)$ et dont la frontière $\dot{O} = \overline{O} - O$ ne contient aucune solution de l'équation $x = \xi(x)$. Soit L^0 une forme de E possédant les deux propriétés suivantes :

α. $L^0.O$ est un cycle unité de O ;

β. $|L^0| - O$ ne contient aucune solution de l'équation $x = \xi(x)$.

---

[1] Nous adoptons cette définition-ci des espaces convexoïdes et nous renonçons à la définition plus restreinte qu'énonce le n° **43** : aucun des résultats antérieurement énoncés ne cesse de valoir et la propriété suivante, qui nous sera utile au n° **78**, devient exacte : La réunion W d'un nombre fini d'ensembles U est convexoïde (si elle est connexe).

[Par exemple on envisagera la couverture de E qui est constituée par trois éléments L^0, M^0 et $\dot{L}^0 = -\dot{M}^0$ de supports $|L^0| = \overline{O}$, $|M^0| = E - O$, $|\dot{L}^0| = \dot{O}$].

Je dis que $i(L^0)$ est un entier indépendant du choix de L^0; nous le représenterons par le symbole $i\{x = \xi(x) \in O\}$ ou plus brièvement par $i(O)$ et nous le nommerons « *indice total des solutions intérieures à* O *de l'équation* $x = \xi(x)$ ».

Justification. — $i(L^0)$ est défini, d'après le lemme 34 *bis* et β. Soit $L^{\star 0}$ un second choix de L^0; d'après α, $|L^0 - L^{\star 0}| \subset (|L^0| - O) + (|L^{\star 0}| - O)$; donc, vu le lemme 35 *bis* et β, $i(L^0 - L^{\star 0}) = 0$; d'où, d'après le lemme 36, $i(L^0) = i(L^{\star 0})$.

Nota. — Par définition $i(O)$ sera nul quand O sera vide.

Le théorème suivant récapitule les résultats acquis.

THÉORÈME 22. — *Soit un espace convexoïde* E; *soit* $\xi(x)$ *une représentation dans* E *d'un ensemble fermé de points de* E. *Envisageons l'équation*

$$x = \xi(x). \tag{6}$$

L'ensemble de ses solutions est fermé et bicompact. L'indice total $i(O)$ *des solutions de* (6) *intérieures à un ensemble ouvert* O *de points de* E *est un entier, positif, négatif ou nul, qui est défini chaque fois que* $\overline{O}$ *appartient au champ de définition de* $\xi(x)$ *et que* $\dot{O}$ *est étranger à l'ensemble des solutions de* (6). *Cet indice reste constant, tant qu'il reste défini, lorsque* $\xi(x)$ *varie continûment en fonction d'un paramètre décrivant un espace topologique connexe. Si* $\xi(x)$ *est défini sur* E *tout entier,* $i(E) = \Lambda_\xi$, Λ_ξ *étant le nombre de Lefschetz de* $\xi(x)$. *Si* $\overline{O}$ *appartient au champ de définition de* $\xi(x)$ *et ne contient aucune solution de l'équation* $x = \xi(x)$, *alors* $i(O) = 0$. *Plus généralement : si les* O_α *sont des ensembles ouverts et deux à deux disjoints de points de* E *appartenant à l'ensemble ouvert* O, *si* $\overline{O}$ *appartient au champ de définition de* $\xi(x)$ *et si* $\overline{O} - \sum_\alpha O_\alpha$ *ne contient aucune solution de l'équation* $x = \xi(x)$, *alors* $i(O) = \sum_\alpha i(O_\alpha)$.

Remarque 1. — Le nombre des O_α peut être infini; on se ramène aisément au cas où il est fini : seuls entrent en jeu les O_α contenant des solutions de (6); il sont en nombre fini, puisque l'ensemble des solutions de (6) est bicompact.

Remarque 2. — La valeur de $i(O)$ n'est pas altérée quand on modifie la définition de $\xi(x)$ hors de $\overline{O}$ (vu la remarque *a* du n° **74**).

Remarque 3. — La valeur de $i(O)$ est indépendante du choix des ensembles U (vu la remarque *b* du n° **74**).

Définition. — Soit x une solution de l'équation $x = \xi(x)$; supposons x isolée et intérieure au champ de définition de $\xi(x)$; soit V un voisinage de x, ne contenant pas d'autre solution et intérieur au champ de définition de $\xi(x)$; $i(V)$ est indépendant du choix de V; nous le nommerons *indice de la solution isolée* x. Si O ne contient que des solutions isolées, alors $i(O)$ est la somme de leurs indices; d'où le nom d'indice total donné à $i(O)$.

Applications du théorème 22 : théorèmes d'existence; théorèmes d'unicité. — Le théorème 22 englobe la théorie des équations fonctionnelles que j'ai faite en collaboration avec M. J. Schauder (¹) et, *a fortiori*, la théorie des équations intégrales non linéaires que contient ma Thèse (²). Rappelons les applications que j'ai données de ces deux théories, puisqu'elles peuvent être envisagées comme étant des applications du théorème 22 : j'ai prouvé que le problème de Dirichlet posé par l'étude des *régimes permanents des liquides visqueux* (²) possède toujours une solution au moins, j'ai établi l'existence des *sillages* (³) et j'ai discuté *le problème de Dirichlet* (⁴) posé pour l'équation

$$f(z''_{x^2}, z''_{xy}, z''_{y^2}, z'_x, z'_y, x, y, z) = 0,$$

en opérant comme suit : j'ai ramené chacun de ces problèmes à une équation du type (6) [ou, plus exactement, du type équivalent (24) qu'étudie le paragraphe 4 de ce chapitre]; puis j'ai prouvé que l'indice total des solutions de cette équation était 1, ce qui, vu le théorème 22, établit l'existence d'au moins une solution. En théorie du sillage, pour les obstacles « de grande résistance au courant », j'ai pu montrer que toute solution était isolée et avait l'indice 1, ce qui établit que la solution est unique (antérieurement et par d'autres méthodes, d'autres auteurs — MM. Weinstein, H. Weyl, Friedrichs — avaient établi ce théorème d'unicité, mais pour des catégories d'obstacles beaucoup plus restreintes).

77. Exemples élémentaires. — *a.* $\xi(x)$ *est constant sur* $\overline{O}$. — Supposons que, quel que soit $x \in \overline{O}$ on ait $\xi(x) = c$, c étant un point invariable de E. Alors, $i(O) = 0$ si $c \in E - \overline{O}$; $i(O)$ n'est pas défini si $c \in \dot{O}$; $i(O) = 1$ si $c \in O$.

Les deux premiers cas sont évidents. Pour traiter le troisième, considérons une couverture simpliciale K de E dont les éléments $X^{q,\beta}$ aient les propriétés

---

(¹) *Ann. École Norm. sup.*, t. **51**, 1934, p. 45.

(²) *Journal de Math.*, t. **12**, 1933, p. 1.

(³) *Commentarii Math. Helvetici*, t. 8, 1936, p. 250; M. Kravtchenko, a étudié dans sa Thèse (*Journ. de Math.*, t. **20**, 1941, p. 35), des cas plus compliqués que ceux auxquels je m'étais borné.

(⁴) *Journal de Math.*, t. **18**, 1939, p. 249.

suivantes : chaque $|X^{q,\beta}|$ est une réunion de U; $|X^{q,\beta}|.c = 0$, sauf si $q = \beta = 0$; $|X^{0,0}| \subset O$. Donc tous les $\overset{-1}{\xi}(X^{q,\beta})$ sont nuls sauf $\overset{-1}{\xi}(X^{0,0})$; $L^0 . \overset{-1}{\xi}(X^{0,0}) = L^0$; la relation (8) se réduit à $i(L^0) \sim L^0 . x_{0,0}$, qui donne $i(O) = 1$.

Nota. — Le corollaire 25 énoncera un résultat plus général.

b. E *est un segment de droite réel.* ab désignant l'intervalle $a < x < b$, proposons-nous de calculer $i(ab)$.

α. Supposons $\xi(a) > a$ et $\xi(b) < b$; on peut, en conservant ces deux inégalités, modifier continûment $\xi(x)$ de manière à se ramener au cas où $\xi(x)$ a une valeur constante c sur ab; $a < c < b$; d'où $i(ab) = 1$.

β. Supposons $\xi(a) > a$ et $\xi(b) > b$; on peut, en conservant ces deux inégalités, modifier continûment $\xi(x)$ de manière à se ramener au cas où $\xi(x)$ a une valeur constante c sur ab; $a < b < c$; d'où $i(ab) = 0$.

γ. Supposons $\xi(a) < a$ et $\xi(b) < b$; on se ramène au cas où $\xi(x) = c < a < b$; d'où $i(ab) = 0$.

δ. Supposons enfin $\xi(a) < a$ et $\xi(b) > b$; soit $c > b$; modifions si nécessaire la définition de $\xi(x)$ sur bc en sorte que $\xi(c) < c$; on a, d'après γ, $i(ac) = 0$ et d'après α, $i(bc) = 1$; or

$$i(ac) = i(ab) + i(bc), \qquad \text{d'où} \qquad i(ab) = -1.$$

En résumé, si nous posons signe $[x] = 1$ si $x > 0$, -1 si $x < 0$,

$$\boxed{i(ab) = \frac{1}{2}\,\text{signe}[b - \xi(b)] - \frac{1}{2}\,\text{signe}[a - \xi(a)].}$$

En particulier, si x est une solution de l'équation $x = \xi(x)$ en laquelle $\frac{d}{dx}\xi(x)$ existe et diffère de 1, cette solution, qui est évidemment isolée, a pour indice : signe $\frac{d}{dx}[x - \xi(x)]$.

c. E *est un espace euclidien.* — Pour exprimer que le point x a les coordonnées $x_1, x_2, \ldots x_n$, nous écrivons $x = x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n$; nous avons $\xi(x) = \xi_1(x) \times \xi_2(x) \times \ldots \times \xi_n(x)$. Nous allons prouver la proposition suivante :

THÉORÈME 23. — *Si* E *est euclidien et si x est une solution de l'équation*

$$x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n = \xi_1(x_1, \ldots, x_n) \times \xi_2(x_1, \ldots, x_n) \times \ldots \times \xi_n(x_1, \ldots, x_n)$$

en laquelle le déterminant fonctionnel

$$\frac{D(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2, \ldots, x_n - \xi_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)},$$

existe et diffère de zéro, alors cette solution, qui est évidemment isolée, a un indice égal au signe de ce déterminant. En d'autres termes cet indice est $+1$ *ou* -1

suivant que la transformation $x - \xi(x)$ conserve ou non l'orientation de l'espace au voisinage de cette solution.

Démonstration. — Nous venons de prouver ce théorème quand $n = 1$; une démonstration analogue vaut, quel que soit n, dans le cas particulier où $\xi_\alpha(x)$ ne dépend que de x_α. On peut ramener le cas général à ce cas particulier en modifiant continûment $\xi(x)$ tout en respectant l'hypothèse que x est une solution et que le déterminant fonctionnel y diffère de zéro; cette modification respecte le signe de ce déterminant, le fait que x est une solution isolée et l'indice de cette solution; cet indice est donc toujours égal au signe de ce déterminant.

d. Corollaire 23$_1$. — *L'indice de la solution de l'équation de Fredholm*

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds + f(x) \quad \text{est signe } [D(\lambda)], \qquad \text{quand } D(\lambda) \neq 0.$$

[Les notations sont celles de Goursat (*Traite d'Analyse*, t. III, Chap. 31); notre démonstration s'appuie sur le n° **571** de ce chapitre : *Étude des noyaux* $\sum X_i Y_i$].

Démonstration. — Dans le cas particulier où $K(x, y) = \sum\limits_i X_i(x)\,Y_i(y)$ cette proposition résulte immédiatement du théorème 23. Un passage à la limite permet d'atteindre le cas général à partir de ce cas particulier.

e. E *est le plan de Cauchy (plan complété par un point à l'infini) et* $\xi(x)$ *est méromorphe.* — Les solutions à distance finie de l'équation $x = \xi(x)$ sont les zéros de la fonction méromorphe $x - \xi(x)$, leurs indices étant égaux aux ordres de multiplicité de ces zéros; de même les solutions non nulles de l'équation $x = \xi(x)$ sont les zéros non nuls de la fonction méromorphe $\frac{1}{x} - \frac{1}{\xi(x)}$, leurs indices étant égaux aux ordres de multiplicité de ces zéros. Donc toutes les solutions de l'équation $x = \xi(x)$ sont isolées et tous leurs indices sont positifs.

III. — Équations dont les solutions ont même indice total.

78. Rétrécissement de E. — *Définition.* — Soit E un espace convexoïde, les ensembles U de points de E ayant les propriétés a, b, c (n° **76**); soit e un ensemble fermé de points de E; supposons e convexoïde, les ensembles u de points de e ayant les propriétés a, b, c. Lorsque chaque $U \cdot u$ non vide est un u, nous dirons que e est un « *sous-espace convexoïde* » de E.

Exemples. — 1° La réunion $W = \sum\limits_\alpha U_\alpha$ d'un nombre fini d'ensembles U, si elle est connexe, est un sous-espace convexoïde de E (les u sont les $U \cdot U_\alpha$ non vides).

2° L'ensemble e des points $x \times x$ est un sous-espace convexoïde de l'espace $(E \times E)$; [les u sont les $(U_\lambda \times U_\mu).e$ non vides].

Définition. — Soit e un sous-espace convexoïde de E; *rétrécir* E *en* e sera, par définition, faire jouer à e et à $O.e$ les rôles que E et O ont joués au paragraphe II : on définit ainsi « l'indice total $i(O.e)$ des solutions de $x = \xi(x)$ intérieures à $O.e$ ».

La démonstration du lemme 33 reste valable quand $K^\star$, au lieu d'être une une couverture simpliciale de E dont les supports sont des U, est une couverture simpliciale de e dont les supports sont des u, si du moins $\xi(|L^0|) \subset e$; la relation $i(L^0, K) = i(L^0, K.K^\star)$ signifie que, dans ces conditions, $i(O) = i(O.e)$. En d'autres termes :

THÉORÈME 24. — *Le rétrécissement de* E *en* e *ne modifie pas la valeur de l'indice total des solutions appartenant à* O, *si* $\xi(e) + \xi(\overline{O}) \subset e$.

Exemple. — Supposons que $\xi(x)$ ait sur $\overline{O}$ une valeur constante a et que $a \in O$; je dis que $i(O) = 1$.

Démonstration. — On rétrécit E en a.

[Cette proposition a déjà été démontrée, par un autre procédé, au n° **77** a; le corollaire 25 la généralise].

Notations. — Considérons $\overline{O}$ comme étant le champ de définition de $\xi(x)$; posons

$$\overset{2}{\xi}(x) = \xi[\xi(x)], \quad \ldots, \quad \overset{n}{\xi}(x) = \overset{n-1}{\xi}[\xi(x)];$$

soit $\overset{-n}{\xi}$ la transformation inverse de $\overset{n}{\xi}(x)$. Nous avons $\xi(\overline{O}) \subset \xi(\overline{O})$, donc $\overset{n+1}{\xi}(\overline{O}) \subset \overset{n}{\xi}(\overline{O})$; $\overset{n}{\xi}(\overline{O})$ est fermé (A.-H., Chap. II, § 2, th. II); posons

$$f = \prod_{n>0} \overset{n}{\xi}(\overline{O}) = \lim_{n \to +\infty} \overset{n}{\xi}(\overline{O})$$

(A.-H., Chap. II, § 5, th. II); f est fermé; si f est vide, c'est qu'il existe un entier N tel que $\overset{n}{\xi}(\overline{O})$ soit vide quand $n > N$ (A.-H., Chap. II, § 1, th. II). On a $f = \overset{\pm n}{\xi}(f)$. Toutes les solutions de l'équation $x = \xi(x)$ appartiennent à f; en effet $x = \overset{n}{\xi}(x) \in \overset{n}{\xi}(\overline{O})$; donc $i(O)$ est défini quand $f \subset O$.

THÉORÈME 25. — *Supposons que* $f = \prod_n \overset{n}{\xi}(\overline{O}) = \lim_{n \to +\infty} \overset{n}{\xi}(\overline{O})$ *appartiennent à* O. *Je dis qu'il existe des ensembles fermés* F *de points de* E *satisfaisant à la fois les deux conditions :*

$$f + \xi(F) \subset F \subset O; \tag{13}$$

(14) *l'anneau d'homologie de* F *a une base finie.*

Soit $\Lambda_\xi(F)$ *le nombre de Lefschetz* [1] *de* $\xi(x)$ *envisagé sur l'un de ces ensembles* F; *je dis que*

(15) $$i(O) = \Lambda_\xi(F).$$

Remarque I. — $F = f$ vérifie la condition (13).

Remarque II. — Quand F vérifie (13) mais non (14), il est donc naturel de *définir* $\Lambda_\xi(F)$ comme étant égal à $i(O)$. (*Cf.* n° **55**, remarque).

Remarque III. — Le théorème 17 (n° **43**) peut donc être appliqué à F, même quand F n'est pas convexoïde : l'hypothèse $\Lambda_\xi(F) \neq 0$ entraîne $i(O) \neq 0$; O contient donc au moins une solution de l'équation $x = \xi(x)$; or cette solution appartient nécessairement à f, donc à F.

Démonstration du théorème 25. — Il existe un entier positif n tel que $\overset{n}{\xi}(\overline{O}) \subset O$ (A.-H., Chap. II, § 1, th. II); construisons $n-1$ ensembles ouverts $O_1, O_2, \ldots, O_{n-1}$ vérifiant les conditions

$$O \supset \overline{O_1} \supset O_1 \supset \overline{O_2} \supset O_2 \supset \ldots \supset \overline{O_{n-1}} \supset O_{n-1} \supset \overset{n}{\xi}(\overline{O}) + F$$

et posons

$$V = O . \overset{-1}{\xi}(O_1) . \overset{-2}{\xi}(O_2) . \ldots . \overset{-n+1}{\xi}(O_{n-1});$$

V est ouvert et appartient à O. Puisque $\xi(F) \subset F \subset O_\alpha$ nous avons

$$\overset{\alpha}{\xi}(F) \subset O_\alpha, \quad \text{donc} \quad F \subset \overset{-\alpha}{\xi}(O_\alpha);$$

d'où

$$F \subset V.$$

Puisque toutes les solutions de l'équation $x = \xi(x)$ appartiennent à f et que $f \subset F \subset V \subset O$, nous avons

$$i(O) = i(V).$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\overset{-1}{\xi}(V) &= \overset{-1}{\xi}(O) . \overset{-2}{\xi}(O_1) . \overset{-3}{\xi}(O_2) . \ldots . \overset{-n}{\xi}(O_{n-1}) \supset \overset{-1}{\xi}(\overline{O_1}) . \overset{-2}{\xi}(\overline{O_2}) . \overset{-3}{\xi}(\overline{O_3}) . \ldots . \overset{-n}{\xi}\big(\overset{n}{\xi}(\overline{O})\big) \\ &= \overset{-1}{\xi}(\overline{O_1}) . \overset{-2}{\xi}(\overline{O_2}) . \overset{-3}{\xi}(\overline{O_3}) . \ldots . \overset{-n+1}{\xi}(\overline{O_{n-1}}) \supset \overline{V},\end{aligned}$$

d'où

$$\xi(\overline{V}) \subset V.$$

Il existe donc un nombre fini d'ensembles U dont la réunion W vérifie la condition $F + \xi(\overline{V}) \subset W \subset V$; W est un sous-espace convexoïde de E (n° **78**, en 1). Le rétrécissement de E en W (th. 24) montre que

$$i(V) = \Lambda_\xi(W).$$

---

[1] Nous utilisons la définition du nombre de Lefschetz qu'énonce le n° **55**.

Le théorème 20 (n° 55) établit par ailleurs que

$$\Lambda_\xi(W) = \Lambda_\xi(F).$$

En résumé nous avons prouvé que

$$i(O) = i(V) = \Lambda_\xi(W) = \Lambda_\xi(F). \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Corollaire 25. — *Si pour $n \to +\infty$, $\overset{n}{\xi}(\overline{O})$ converge vers un point de* O, *ce point est une solution isolée d'indice* $+1$.

Démonstration. — $\Lambda_\xi(f) = 1$ quand f est un point (n° **41**, remarque).

En particulier : si une solution a de l'équation $x = \xi(x)$ est telle que ses *approximations successives* $\overset{n}{\xi}(x)$ convergent uniformément vers a quand la premième approximation x appartient à un certain voisinage de a, alors a est une solution isolée d'indice 1.

79. L'équation $x \times x' = \xi(x, x') \times \xi'(x, x')$. — Démontrons le lemme suivant, qui nous sera utile également au Chapitre VII :

Lemme 40. — *Soient un espace convexoïde* E *et un espace de Hausdorff bicompact* E'; *soit* $\xi(x, x')$ *une représentation dans* E *d'un ensemble fermé de points de* $E \times E'$; *soit* S *l'ensemble des solutions de l'équation* $x = \xi(x, x')$, *c'est-à-dire l'ensemble des points* $x \times x'$ *en lesquels* $x = \xi(x, x')$. *Soit* V *un voisinage de* S. *Je dis qu'on peut construire une couverture simpliciale* K *de* E *dont les éléments* $X^{q,\beta}$ *aient pour supports des ensembles* U *vérifiant la condition*

$$(16) \qquad \overset{-1}{\xi}(|X^{q,\beta}|).(|x_{q,\beta}| \times E') \subset V, \qquad x_{q,\beta} \text{ étant le dual de } X^{q,\beta}.$$

Démonstration. — Étant donné un point x' de E', le lemme 39 fournit un recouvrement fini de E dont les éléments $U_{\gamma,x'}$, vérifient la condition

$$\overset{-1}{\xi}(U_{\gamma,x'}).(U_{\gamma,x'} \times x') \subset V.$$

Ce recouvrement engendre une couverture $K_{x'}$ de E dont les élements $X^{q,\beta}_{x'}$ vérifient la condition

$$\overset{-1}{\xi}(|X^{0,\beta}_{x'}|).(|X^{0,\beta}_{x'}| \times x') \subset V;$$

soit $V'_{x'}$ un voisinage de x' tel que

$$\overset{-1}{\xi}(|X^{0,\beta}_{x'}|).(|X^{0,\beta}_{x'}| \times V'_{x'}) \subset V.$$

On peut recouvrir E' au moyen d'un nombre fini de $V'_{x'}$. L'intersection K des $K_{x'}$ correspondants a les propriétés énoncées.

Théorème 26. — *Soient deux espaces convexoïdes* E *et* E'; *soient* $\xi(x, x')$ *et* $\xi'(x, x')$ *deux représentations, dans* E *et dans* E', *d'un ensemble fermé de points de* $E \times E'$. *Soit* O *un ensemble ouvert de points de* $E \times E'$. *Je dis que*

$i\{x \times x' = \xi(x, x') \times \xi'(x, x') \in \mathrm{O}\}$ ne change pas quand on remplace $\xi'(x, x')$ par une autre représentation de $\overline{\mathrm{O}}$ dans E′ qui est égale à $\xi'(x, x')$ en tous les points de $\overline{\mathrm{O}}$ où $x = \xi(x, x')$.

Exemple. — E est l'espace euclidien de coordonnées $x_1, \ldots, x_l$; E′ est l'espace euclidien de coordonnées $x_{l+1}, \ldots, x_m$; $\xi(x, x')$ transforme le point $(x_1 \ldots, x_l, x_{l+1}, \ldots, x_m)$ en le point de coordonnées $\xi_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, \xi_l(x_1, \ldots, x_m)$; $\xi'(x, x')$ transforme le point $(x_1, \ldots, x_l, x_{l+1}, \ldots, x_m)$ en le point de coordonnées $\xi_{l+1}(x_1, \ldots, x_m), \ldots, \xi_m(x_1, \ldots, x_m)$. Supposons que les $\xi_\alpha(x_1, \ldots, x_m)$ sont des fonctions linéaires homogènes. D'après le théorème 23 l'indice de la solution $x_1 = \ldots = x_l = x_{l+1} = \ldots = x_m = 0$ est le signe du déterminant de la substitution $x_\alpha - \xi_\alpha(x_1, \ldots, x_m)$, quand ce déterminant diffère de zéro, ce que nous supposerons; si le théorème 26 est exact ce signe ne doit pas changer quand on ajoute à chacun de $\xi_1, \ldots, \xi_l$ une combinaison linéaire des $x_{l+1} - \xi_{l+1}, \ldots, x_m - \xi_m$. Or l'effet de cette opération est d'ajouter aux l premières lignes de ce déterminant des combinaisons linéaires des suivantes, ce qui n'altère pas sa valeur : le théorème 26 nous fournit donc, dans ce cas particulier, une conclusion exacte.

Démonstration du théorème 26. — $i(\mathrm{O})$ est défini par une relation

$$i(\mathrm{O}) \sim \sum_{q,\beta,r,\gamma} \mathrm{L}^0 . \overset{-1}{\xi'}(\mathrm{X}'^{r,\gamma}) . \overset{-1}{\xi}(\mathrm{X}^{q,\beta}) . (x_{q,\beta} \times x'_{r,\gamma}),$$

$\mathrm{X}^{q,\beta}$ et $\mathrm{X}'^{r,\gamma}$ étant les éléments de couvertures convenablement choisies K et K′ de E et E′, $x_{q,\beta}$ et $x'_{r,\gamma}$ étant les éléments des duals de K et K′. Soit S l'ensemble des points en lesquels $x = \xi(x, x')$; construisons un élargissement C′ de $\mathrm{S}.\overline{\mathrm{O}}.\overset{-1}{\xi}(\mathrm{K}')$ qui soit une couverture de la fermeture $\overline{\mathrm{V}}$ d'un voisinage V de $\mathrm{S}.\overline{\mathrm{O}}$; soient $\mathrm{Y}'^{r,\gamma}$ les éléments de C′; utilisons la couverture K que décrit le lemme 40; je dis que

$$i(\mathrm{O}) \sim \sum_{q,\beta,r,\gamma} \mathrm{L}^0 . \mathrm{Y}'^{r,\gamma} . \overset{-1}{\xi}(\mathrm{X}^{q,\beta}) . (x_{q,\beta} \times x'_{r,\gamma}). \tag{17}$$

En effet le second membre de (17) est, en vertu de (16), un cycle général de $(\mathrm{E} \times \mathrm{E}').(k \times k')$; le lemme 15 (n° **27**) permet de démontrer aisément que ce cycle est homologue à un entier indépendant du choix de C′ et que cet entier est $i(\mathrm{O})$. Cette homologie (17) définit $i(\mathrm{O})$ sans utiliser la définition de ξ' hors de $\mathrm{S}.\overline{\mathrm{O}}$. C. Q. F. D.

Théorème 27. — *Soient* E *et* E′ *deux espaces convexoïdes. Soit* O *un ensemble ouvert de points de* E; *soit* D′ *un domaine* [1] *de* E′. *Soit* $\xi(x, x')$ *une représentation de* $\overline{\mathrm{O}} \times \overline{\mathrm{D}}'$ *dans* E; *soit* $\xi'(x')$ *une représentation de* $\overline{\mathrm{D}}'$ *dans* E′. *Supposons*

[1] Un domaine est un ensemble ouvert et connexe (A.-H. Gebiet).

que $\dot{\mathrm{O}} \times \overline{\mathrm{D}}'$ *ne contienne aucune solution de l'équation* $x = \xi(x, x')$ *et que* $\dot{\mathrm{D}}'$ *ne contienne aucune solution de l'équation* $x' = \xi'(x')$. *Je dis que*

$$(18) \qquad i\{x \times x' = \xi(x, x') \times \xi'(x')\} = i\{x = \xi(x, x') \in \mathrm{O}\}\, i\{x' = \xi'(x') \in \mathrm{D}'\},$$

le calcul de $i\{x = \xi(x, x') \in \mathrm{O}\}$ *étant fait en supposant que* x' *est un point quelconque de* $\overline{\mathrm{D}}'$.

Exemple. — E est l'espace euclidien de coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_l)$; E' est l'espace euclidien de coordonnées $(x_{l+1}, \ldots, x_m)$; $\xi(x, x')$ transforme le point $(x_1, \ldots, x_l, x_{l+1}, \ldots, x_m)$ en le point de coordonnées $\xi_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, \xi_l(x_1, \ldots, x_m)$; $\xi'(x')$ transforme le point $(x_{l+1}, \ldots, x_m)$ en le point de coordonnées $\xi_{l+1}(x_{l+1}, \ldots, x_m), \ldots, \xi_m(x_{l+1}, \ldots, x_m)$. Supposons que les ξ_α sont des fonctions linéaires et homogènes. D'après le théorème 23 l'indice de la solution $x_1 = \ldots = x_l = x_{l+1} = \ldots = x_m = 0$ de l'équation $x \times x' = \xi(x, x') \times \xi'(x')$ est le signe du déterminant D de la substitution

$$\begin{array}{lll} x_1 - \xi_1(x_1, \ldots, x_m), & \ldots, & x_l - \xi_l(x_1, \ldots, x_m), \\ x_{l+1} - \xi_{l+1}(x_{l+1}, \ldots, x_m), & \ldots, & x_m - \xi_m(x_{l+1}, \ldots, x_m) \end{array}$$

(nous supposerons $\mathrm{D} \neq 0$); l'indice de la solution $x_1 = \ldots = x_l = 0$ de l'équation $x = \xi(x, x')$, quand les coordonnées de x' sont nulles, est le signe du déterminant d de la substitution

$$x_1 - \xi_1(x_1, \ldots, x_l, 0, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad x_m - \xi_m(x_1, \ldots, x_l, 0, \ldots, 0);$$

enfin l'indice de la solution $x_{l+1} = \ldots = x_m = 0$ de l'équation $x' = \xi'(x')$ est le signe du déterminant d' de la substitution

$$x_{l+1} - \xi_{l+1}(x_{l+1}, \ldots, x_m), \quad \ldots, \quad x_m - \xi_m(x_{l+1}, \ldots, x_m).$$

Si le théorème 27 est exact nous devons avoir

$$\text{signe } \mathrm{D} = \text{signe } d \times \text{signe } d'.$$

Or nous avons effectivement $\mathrm{D} = dd'$. Le théorème 27 nous fournit donc, dans ce cas particulier, une conclusion exacte.

Démonstration du théorème 27.

$$i\{x \times x' = \xi \times \xi' \in \mathrm{O} \times \mathrm{D}'\} \sim \sum_{q,\beta,r,\gamma} (\mathrm{L}^0 \times \mathrm{L}'^0).\left(\mathrm{E}^0 \times \overset{-1}{\xi'}(\mathrm{X}'^{r,\gamma})\right).\overset{-1}{\xi}(\mathrm{X}^{q,\beta}).(x_{q,\beta} \times x'_{r,\gamma}),$$

$\mathrm{X}^{q,\beta}$ et $\mathrm{X}'^{r,\gamma}$ étant les éléments de couvertures convenablement choisis de E et E'. Écrivons cette relation sous la forme

$$(19) \qquad i\{x \times x' = \xi \times \xi' \in \mathrm{O} \times \mathrm{D}'\} \sim \left[\sum_{q,\beta} (\mathrm{L}^0 \times \mathrm{E}'^0).\overset{-1}{\xi}(\mathrm{X}^{q,\beta}).(x_{q,\beta} \times \mathrm{E}'^0)\right] \times \left[\mathrm{E}^0 \times \sum_{r,\gamma} \mathrm{L}'^0.\overset{-1}{\xi'}(\mathrm{X}'^{r,\gamma}).x'_{r,\gamma}\right].$$

Faisons l'hypothèse

$$(h) : \xi(x, x') \text{ est défini sur } \overline{\mathrm{O}} \times \mathrm{E}'; \qquad x' \neq \xi(x, x') \text{ sur } \dot{\mathrm{O}} \times \mathrm{E}'.$$

Le lemme 40 nous permet de supposer K choisi tel que

$$\sum_{q,\beta} \overset{-1}{\xi}(|\mathrm{X}^{q,\beta}|).(|x_{q,\beta}| \times \mathrm{E}') \text{ soit étranger à } \dot{\mathrm{O}} = |\dot{\mathrm{L}}^{0}|;$$

le premier crochet du second membre de (19) est donc un cycle général de $(\mathrm{E}\times\mathrm{E}').(k \times \mathrm{E}')$; le second crochet est homologue à $(\mathrm{E}^{0}\times x'_{0,1})\, i\{x' = \xi' \in \mathrm{D}'\}$; (19) s'écrit donc

$$i\{x \times x' = \xi \times \xi' \in \mathrm{O} \times \mathrm{D}'\} \sim \left[\sum_{q,\beta} (\mathrm{L}^{0} \times \mathrm{E}'^{0}).\overset{-1}{\xi}(\mathrm{X}^{q,\beta}).(x_{q,\beta} \times x'_{0,1})\right] i\{x' = \xi' \in \mathrm{D}'\}.$$

Le crochet est homologue à un entier ι *indépendant du choix de* ξ'; donc

$$i\{x \times x' = \xi \times \xi' \in \mathrm{O} \times \mathrm{D}'\} = \iota\, i\{x' = \xi' \in \mathrm{D}'\}.$$

Appliquons cette formule au cas où $\xi'(x')$ a une valeur constante $x' \in \mathrm{D}'$; nous ne modifions pas les valeurs de $i\{x \times x' = \xi \times \xi' \in \mathrm{O} \times \mathrm{D}'\}$ et $i\{x' = \xi' \in \mathrm{D}'\}$, si nous rétrécissons E' en a'; or pour $\mathrm{E}' = a'$,

$$i\{x \times x' = \xi \times \xi' \in \mathrm{O} \times \mathrm{D}'\} = i\{x = \xi \in \mathrm{O}\} \qquad \text{et} \qquad i\{x' = \xi' \in \mathrm{D}'\} = 1;$$

d'où

$$\iota = i\{x = \xi \in \mathrm{O}\},$$

ce qui établit la relation (18), moyennant l'hypothèse supplémentaire (h).

La formule (18) est encore exacte quand on fait l'hypothèse suivante :

(H) $\xi(x, x')$ est définie sur $\overline{\mathrm{O}} \times \mathrm{V}'$, V' étant un voisinage de $\xi'(\overline{\mathrm{D}'})$; $x \neq \xi(x, x')$ sur $\dot{\mathrm{O}} \times \mathrm{V}'$.

En effet un rétrécissement de E' en e' tel que $\xi'(\overline{\mathrm{D}'}) \subset e' \subset \mathrm{V}'$ transforme (H) en (h). Sous les seules hypothèses de l'énoncé, on a donc

$$(20) \qquad i\{x \times x' = \xi \times \xi' \in \mathrm{O} \times \mathrm{D}'_{\alpha}\} = i\{x = \xi \in \mathrm{O}\}\, i\{x' = \xi' \in \mathrm{D}'_{\alpha}\}$$

pour tout domaine D'_{α} de E' tel que $\mathrm{D}'_{\alpha} + \xi'(\overline{\mathrm{D}'_{\alpha}}) \subset \mathrm{D}'$; or on peut trouver un nombre fini de tels domaines D'_{α} dont la réunion contienne toutes les solutions de l'équation $x' = \xi'(x')$ qui appartiennent à D'; on a

$$i\{x \times x' = \xi \times \xi' \in \mathrm{O} \times \mathrm{D}'\} = \sum_{\alpha} i\{x \times x' = \xi \times \xi' \in \mathrm{O} \times \mathrm{D}'_{\alpha}\}$$

et

$$i\{x' = \xi' \in \mathrm{D}'\} = \sum_{\alpha} i\{x' = \xi' \in \mathrm{D}'_{\alpha}\};$$

ces relations jointes à (20) établissent (18).

Corollaire 26-27. — *Soient* E *et* E′ *deux espaces convexoïdes; soit* $\xi'(x)$ *une représentation dans* E′ *d'un ensemble fermé de points de* E; *soit* $\xi(x')$ *une représentation dans* E *d'un ensemble fermé de points de* E′. *Soit* O *un ensemble ouvert de points de* E *en lesquels* $\xi(\xi'(x))$ *est défini. Je dis que*

$$(21)\qquad i\{x=\xi(\xi'(x))\in O\}=i\{x'=\xi'(\xi(x'))\in \overset{-1}{\xi}(O)\}.$$

Démonstration. — D'après le théorème 27 et le n° **77** *a*

$$i\{x=\xi(\xi'(x))\in O\}=i\{x\times x'=\xi(\xi'(x))\times\xi'(x)\in O\times\overset{-1}{\xi}(O)\};$$

d'après le théorème 26

$$i\{x\times x'=\xi(\xi'(x))\times\xi'(x)\in O\times\overset{-1}{\xi}(O)\}=i\{x\times x'=\xi(x')\times\xi'(x)\in O\times\overset{-1}{\xi}(O)\},$$

d'où

$$(22)\qquad i\{x=\xi(\xi'(x))\in O\}=i\{x\times x'=\xi(x')\times\xi'(x)\in O\times\overset{-1}{\xi}(O)\}.$$

La condition

$$x\times x'=\xi(x')\times\xi'(x)\in E\times\overset{-1}{\xi}(O)$$

équivaut d'une part à la condition

$$x\times x'=\xi(x')\times\xi'(x)\in O\times\overset{-1}{\xi}(O)$$

et d'autre part, en posant $O'=\overset{-1}{\xi}(O)$, à la condition

$$x\times x'=\xi(x')\times\xi'(x)\in\overset{-1}{\xi'}(O')\times O';$$

donc

$$(23)\qquad i\{x\times x'=\xi(x')\times\xi'(x)\in O\times\overset{-1}{\xi}(O)\}=i\{x\times x'=\xi(x')\times\xi'(x)\in\overset{-1}{\xi'}(O')\times O'\}.$$

Enfin on a, par analogie avec (22),

$$(24)\qquad i\{x'=\xi'(\xi(x))\in O'\}=i\{x\times x'=\xi(x')\times\xi'(x)\in\overset{-1}{\xi'}(O')\times O'\}.$$

(21) résulte de (22), (23), (24).

80. Cas où E est simple. — Lemme 41. — *Soient un simplexe simplicial* K *et son dual* k, *d'éléments respectifs* $X^{q,\beta}$ et $x_{q,\beta}$. *On peut associer à chaque élément* $X^{q,\beta}$ *de* K *une forme à* $q+1$ *dimensions de* k, *que nous désignerons par le symbole* $f_1(x_{q,\beta})$, *telle que*

$$(25)\qquad \Big[\sum_{q,\beta}X^{q,\beta}\times f_1(x_{q,\beta})\Big]^{\bullet}=\sum_{q,\beta}X^{q,\beta}\times x_{q,\beta}-K^0\times x_{0,0};$$

$K^0=\sum_{\beta}X^{0,\beta}$ *est le cycle unité de* K.

Démonstration. — $\sum_{q,\beta} X^{q,\beta} \times x_{q,\beta}$ est un cycle de $K \times k$, d'après la définition des complexes duals [n° **31**, formule (25)]; d'après le lemme 2 (n° **3**), ce cycle est homologue à un cycle de k : il existe un entier A tel que

$$\sum_{q,\beta} X^{q,\beta} \times x_{q,\beta} \sim AK^0 \times x_{0,0};$$

cette homologie vaut *a fortiori* quand on utilise les coefficients rationnels; puisque dans ce cas la formule (37) du n° **33** vaut, on a nécessairement $A = 1$,

$$\sum_{q,\beta} X^{q,\beta} \times x_{q,\beta} \sim K^0 \times x_{0,0}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Supposons que E soit un espace convexoïde simple; d'après le théorème 12 toute couverture K de E ayant pour supports des ensembles U est un simplexe; le lemme 41 nous permet donc de mettre la définition (8) de $i(L^0)$ sous la forme

$$i(L^0) \sim L^0.x_{0,0} + \sum_{q,\beta} L^0.\left[\overset{-1}{\xi}(X^{q,\beta}).f_1(x_{q,\beta})\right]^{\bullet},$$

donc sous la forme

$$(26) \qquad i(L^0) \sim L^0.x_{0,0} - \sum_{q,\beta} \dot{L}^0.\overset{-1}{\xi}(X^{q,\beta}).f_1(x_{q,\beta}).$$

Or cette formule n'utilise pas la définition de ξ hors de $|\dot{L}^0|$; donc :

Théorème 28. — *Lorsque* E *est simple, l'indice total des solutions appartenant à* O *de l'équation* $x = \xi(x)$ *ne change pas quand on remplace* $\xi(x)$ *par une autre représentation de* $\overline{O}$ *dans* E *qui est égale à* $\xi(x)$ *sur* $\dot{O}$.

Exemple (*voir* le n° **77** *a*). — Supposons que E soit simple et que $\xi(x)$ garde une valeur constante c sur $\dot{O}$; alors $i(O) = 0$ si $c \in E - \overline{O}$; $i(O)$ n'est pas défini si $c \in \dot{O}$; $i(O) = 1$ si $c \in O$.

IV. — Un type d'équation en apparence plus général.

81. Définitions. — Les applications signalées à la fin du n° **76** utilisent non pas des équations du type (6), mais des équations du type suivant

$$(27) \qquad x = \varphi(\tau(x));$$

l'inconnue x est un point d'un espace topologique E; $\tau(x)$ est une représentation d'un ensemble fermé de points de E dans un espace convexoïde T; $\varphi(t)$ est une représentation de T dans E. Nous ramènerons l'étude de l'équation (27) à l'étude de l'équation

$$(28) \qquad t = \tau(\varphi(t))$$

où $t \in T$: (28) est une équation du type (6). Nous définirons *l'indice total* $i\{x = \varphi(\tau(x)) \in O\}$ *des solutions de* (27) *appartenant à un ensemble ouvert* O *de points de* E comme étant égal à $i\{t = \tau(\varphi(t)) \in \overset{-1}{\varphi}(O)\}$.

Remarque 1. — Soient un espace topologique E, une représentation $\tau(x)$ d'un ensemble fermé de points de E dans un espace convexoïde T, une représentation $\tau'(t)$ de T dans un second espace convexoïde T' et une représentation $\varphi(t')$ de T' dans E; envisageons l'équation

$$x = \varphi[\tau'(\tau(x))].$$

La définition de l'indice de ses solutions est, au premier aspect, ambigu on peut poser : soit

$$i\{x = \varphi[\tau'(\tau(x))] \in O\} = i\{t' = \tau'[\tau(\varphi(t'))] \in \overset{-1}{\varphi}(O)\},$$

soit

$$i\{x = \varphi[\tau'(\tau(x))] \in O\} = i\{t = \tau[\varphi(\tau'(t))] \in \overset{-1}{\tau'}\overset{-1}{\varphi}(O)\}.$$

Mais cette ambiguité n'existe pas, car, d'après le corollaire 26-27 [formule (21)] on a

$$i\{t' = \tau'[\tau(\varphi(t'))] \in \overset{-1}{\varphi}(O)\} = i\{t = \tau[\varphi(\tau'(t))] \in \overset{-1}{\tau'}\overset{-1}{\varphi}(O)\}.$$

Remarque 2. — Il est clair que si l'on a $\varphi'(\tau'(x)) = \varphi(\tau(x))$ sans avoir $\tau'(x) = \tau(x)$, $\varphi'(t) = \varphi(t)$, alors les solutions des deux équations $x = \varphi'(\tau'(x))$ et $x = \varphi(\tau(x))$ n'ont aucune raison d'avoir les mêmes indices.

82. Propriétés de l'indice total. — Les théorèmes 22, 24 et 28 fournissent l'énoncé suivant :

Théorème 22 *bis*. — *L'indice total* $i(O)$ *est un entier positif, négatif ou nul, qui est défini quand* $\overline{O}.\varphi(T)$ *appartient au champ de définition de* $\tau(x)$ *et que* $\dot{O}$ *est étranger à l'ensemble des solutions de* (27) — *ensemble qui est bicompact* —; $i(O)$ *ne dépend pas des valeurs prises par* $\tau(x)$ *hors de* $\overline{O}$, *et même, si* T *est simple*, $i(O)$ *ne dépend pas des valeurs prises par* $\tau(x)$ *hors de* $\dot{O}$; $i(O)$ *ne change pas quand on rétrécit* T *en un sous-espace convexoïde contenant* $\tau(\overline{O})$; $i(O)$ *reste constant, tant qu'il reste défini, lorsqu'on modifie continûment* $\varphi(t)$ *et* $\tau(x)$. *Soient* O_α *des ensembles ouverts, deux à deux disjoints, de points de* E *appartenant à un ensemble ouvert* O; *si* $\tau(x)$ *est défini sur* $\overline{O}.\varphi(T)$ *et si* $\overline{O} - \sum_\alpha O_\alpha$ *ne contient aucune solution de* (27), *alors* $i(O) = \sum_\alpha i(O_\alpha)$; *en particulier* $i(O) = 0$ *si* $\tau(x)$ *est défini sur* $\overline{O}.\varphi(T)$ *et si* $\overline{O}$ *ne contient aucune solution de* (27). *Si* $\tau(x)$ *est défini sur* $\varphi(T)$ *et si* $E - O$ *ne contient aucune solution de* (27), *alors* $i(O)$ *est égal au nombre de Lefschetz* $\Lambda_{\tau(\varphi(t))}$ *de la représentation* $\tau(\varphi(t))$ *de* T *est lui-même*.

Le théorème 25 permet de généraliser comme suit la proposition qui termine le théorème 22 *bis*.

THÉORÈME 25 *bis*. — *Considérons* $\overline{\mathrm{O}}.\varphi(\mathrm{T})$ *comme étant le champ de définition de* $\tau(x)$; *soit* f *la limite de la suite décroissante d'ensembles*

$$\tau(\overline{\mathrm{O}}),\quad \tau\varphi\tau(\overline{\mathrm{O}}),\quad \tau\varphi\tau\varphi\tau(\overline{\mathrm{O}}),\quad \ldots,\quad \tau\varphi\tau\varphi\ldots\tau(\overline{\mathrm{O}}),\quad \ldots;$$

f *est fermé;* $f=\overset{-1}{\varphi}\overset{-1}{\tau}(f)$. *Supposons* $\varphi(f)\subset \mathrm{O}$; *il existe des ensembles fermés* F *de points de* T *qui vérifient les deux conditions*

$$f+\tau\varphi(\mathrm{F})\subset\mathrm{F}\subset\overset{-1}{\varphi}(\mathrm{O});\quad \mathrm{F}\ \textit{a une base d'homologie finie}.$$

On a

$$i(\mathrm{O})=\Lambda_{\tau\varphi(t)}(\mathrm{F}).$$

D'où :

COROLLAIRE 25 *bis*. — *Si les ensembles* $\overline{\mathrm{O}}$, $\varphi\tau(\overline{\mathrm{O}})$, $\varphi\tau\varphi\tau(\overline{\mathrm{O}})$. ..., $\varphi\tau$, ... $\varphi\tau(\overline{\mathrm{O}})$, ... *convergent vers un point de* O, *ce point est une solution isolée d'indice* 1.

83. L'ÉQUATION $x=\varphi[\tau(x),\ \tau'(x)]$. — Soient un espace topologique E, deux espaces convexoïdes T et T′, une représentation $\varphi[t,\ t']$ de $\mathrm{T}\times\mathrm{T}'$ dans E et deux représentations $\tau(x)$ et $\tau'(x)$ d'un ensemble fermé de points de E dans T et T′. Soit O un ensemble ouvert de points de E; d'après la définition du n° **81**,

$$i\{x=\varphi[\tau(x);\ \tau'(x)]\in\mathrm{O}\}=i\{t\times t'=\tau(\varphi[t,\ t'])\times\tau'(\varphi[t,\ t'])\}.$$

On déduit aisément des théorèmes 26 et 27 les propositions suivantes :

COROLLAIRE 26. — $i\{x=\varphi[\tau(x),\ \tau'(x)]\in\mathrm{O}\}$ *ne change pas quand on remplace* $\tau'(x)$ *par une autre représentation de* $\overline{\mathrm{O}}$ *dans* T′ *qui lui est égale en tout point* x *de* $\overline{\mathrm{O}}$ *auquel on peut associer un point* t' *de* T′ *tel que* $x=\varphi[\tau(x),\ t']$.

COROLLAIRE 27_1. — *On a*

$$\begin{aligned}(29)\qquad & i\{x=\varphi[\tau(x,\ x'),\ x']\in\mathrm{O}\}\,i\{x'=\varphi'(\tau'(x'))\in\mathrm{D}'\}\\ &=i\{x\times x'=\varphi[\tau(x,\ x'),\ \varphi'(\tau'(x'))]\times\varphi'(\tau'(x'))\in\mathrm{O}\times\mathrm{D}'\}.\end{aligned}$$

Remarque 1. — Le corollaire 26 permet de remplacer dans le second membre de (29) $\tau(x,\ x')$ par $\tau^\star(x,x')$ quand $\tau(x,x')=\tau^\star(x,\ x')$ chaque fois que $x'=\varphi'(\tau'(x'))$.

Remarque 2. — Le corollaire 26 permet de même de remplacer dans le second membre de (29) $\tau'(x')$ par $\tau^\star(x,\ x')$ quand $\tau'(x')=\tau^\star(x,\ x')$ chaque fois que $x=\varphi[\tau(x,\ x'),\ x']$; d'où, en particulier, la proposition suivante :

COROLLAIRE 27_2. — *Supposons qu'il existe une représentation* $\tau^\star(x)$ *telle qu'on ait* $\tau^\star(x)=\tau'(x')$ *chaque fois que* $x=\varphi[\tau(x),\ x']$; *alors*

$$\begin{aligned}(30)\qquad & i\{x=\varphi[\tau(x),\ x']\in\mathrm{O}\}\,i\{x'=\varphi'(\tau'(x'))\in\mathrm{D}'\}\\ &=i\Big\{x=\varphi[\tau(x),\ \varphi'(\tau^\star(x))]\in\mathrm{O}.\overset{-1}{\tau^\star}\big(\overset{-1}{\varphi'}(\mathrm{D}')\big)\Big\}.\end{aligned}$$

Cette formule (30) permet d'établir une partie — la partie la moins intéressante — du théorème 36 (invariance du domaine), par un raisonnement d'ailleurs analogue à celui qui prouvera ce théorème 36 :

THÉORÈME. — *Soient deux espaces topologiques* E *et* E' *et une famille* T *de représentations topologiques* $x' = tx$, $x = t^{-1}x'$ *de* E *sur* E' ($t \in$ T). *Supposons que* T *soit un espace convexoïde. Soit* $x' = \theta(x)$ *une représentation du type* $\theta(x) = \tau(x)x$, *où* $\tau(x)$ *est une représentation dans* T *d'un ensemble fermé de points de* E. *Supposons que* $\theta(x)$ *représente topologiquement un ensemble ouvert* O *de points de* E *sur un ensemble ouvert* O' *de points de* E' [*l'affirmation la plus intéressante du théorème* 36 *sera que cette condition est réalisée sous la seule hypothèse que l'inverse* $\theta'(x')$ *de* $\theta(x)$ *est univoque quand* $x \in$ O]; $\theta'(x')$ *est donc une solution isolée de l'équation* $x = \tau(x)^{-1}x'$; *je dis que son indice est* ± 1.

Démonstration. — Lorsque l'équation $x = \xi(x)$ possède une solution unique, désignons son indice par $i\{x = \xi(x)\}$. (30) nous donne

$$i\{x = \tau(x)^{-1}x'\}\, i\{x' = \tau(\theta'(x'))a\} = i\{x = \tau(x)^{-1}\tau(x)a\}, \qquad \text{où } a \in \mathrm{O}. \tag{31}$$

L'équation $x = \tau(x)^{-1}\tau(x)a$ est du type $x = \varphi(\tau(x))$, $\varphi(\tau(x))$ ayant une valeur constante a; donc, d'après le corollaire 25 *bis*,

$$i\{x = \tau(x)^{-1}\tau(x)a\} = 1. \qquad \text{D'où } i\{x = \tau(x)^{-1}x'\} = \pm 1.$$

Application de la formule (30) *à l'équation de Fredholm.* — Supposons E linéaire; (30) a pour cas particulier la formule

$$i\{x = \tau(x) + x'\}\, i\{x' = \tau'(x')\} = i\{x = \tau(x) + \tau^*(x)\} \tag{32}$$

où

$$\tau^*(x) = \tau'(x - \tau(x)). \tag{33}$$

Or rappelons le procédé élégant au moyen duquel M. E. Schmidt discute l'équation de Fredholm (*Math. Annalen*, t. 64, p. 161; GOURSAT, *Traité d'Analyse*, t. III, chap. 31, exercice 3). M. E. Schmidt montre qu'il est toujours possible de mettre cette équation sous la forme

$$x = \tau(x) + \tau^*(x) + y, \tag{34}$$

x étant l'inconnue, y étant le paramètre, les transformations linéaires et homogènes $\tau(x)$ et $\tau^*(x)$ possédant les propriétés suivantes :

(35) les valeurs prises par $\tau^*(x)$ appartiennent à un sous-espace E* qui a un nombre fini de dimensions;
on a $\|\tau(x)\| < \frac{1}{2}\|x\|$, $\|x\|$ désignant la distance de l'origine au point x.

La méthode des approximations successives prouve que la représentation $x' = x - \tau(x)$ est topologique; il existe donc une représentation $\tau'(x')$ vérifiant (33); (34) équivaut à

$$x - \tau(x) = \tau'(x - \tau(x)) + y,$$

c'est-à-dire à

$$x' = \tau'(x') + y. \tag{36}$$

Or la discussion de (36) est élémentaire, puisque $\tau'(x') \in E^\star$ et que $E^\star$ a un nombre fini de dimensions : soit d' le déterminant de la transformation linéaire $x' - \tau'(x')$ de $E^\star$ en lui-même; pour que (36) et par suite (34) possèdent des solutions uniques il faut et il suffit que $d' \neq 0$, ce que nous supposerons.

D'après le théorème 23 $i\{x' = \tau'(x')\} = \text{signe}\,[d']$; cette relation portée dans (32) nous donne

$$i\{x = \tau(x) + \tau^\star(x)\} = i\{x = \tau(x) + x'\}\ \text{signe}\,[d'].$$

Or, quand le paramètre k varie de 0 à 1, la solution de l'équation $x = k\tau(x) + x'$ reste unique et son indice reste donc constant; pour $k = 0$ cet indice est $+1$ (n° **77** *a*); donc $i\{x = \tau(x) + x'\} = 1$. Il vient $i\{x = \tau(x) + \tau^\star(x)\} = \text{signe}\,[d']$. En résumé :

Corollaire 27_3. — *Soit une équation de Fredholm, mise sous la forme* (34), *les conditions* (35) *étant vérifiées; définissons une représentation* $\tau'(x')$ *par la relation* (33). *Pour que* (34) *possède une solution unique il faut et il suffit que* $x' - \tau'(x')$ *représente topologiquement* $E^\star$ *sur lui-même; l'indice de cette solution unique est* $+1$ *ou* -1 *suivant que la représentation* $x' - \tau'(x')$ *respecte ou altère l'orientation de* $E^\star$.

CHAPITRE VII.

TRANSFORMATIONS.

I. — Préliminaires.

84. Classes d'homologie de $(E \times E').(k \times E')$. — Nous allons étudier les classes d'homologie de $(E \times E').(k \times E')$ en employant à nouveau et par deux fois un raisonnement analogue à celui du n° **17**.

Lemme 42. — *Soient deux espaces de Hausdorff bicompacts*, E *et* E'; *soit* k *un complexe de* E *à supports simples. Je dis que* $(E \times E').(k \times E')$ *a mêmes classes d'homologie que* $k \times E'$.

Démonstration. — Soit M^p une forme de $(E \times E').(k \times E')$ telle que $\dot{M}^p$ appartienne à $k \times E'$: cela signifie que

$$M^p = \sum_{q,r,\alpha} L^{q,\alpha} \cdot (x_{r,\alpha} \times L'^{p-q+r,\alpha})$$

(les $L^{q,\alpha}$ étant des formes de $E \times E'$, les $x_{r,\alpha}$ des éléments de k et les $L'^{p-q+r,\alpha}$ des formes de E') et que

$$\dot{M}^p = \sum_{r,\beta} x_{r,\beta} \times L'^{p+1-r,\beta}.$$

Nommons poids Q de M^p la plus grande des valeurs prises par q; les termes de poids maximum de $\dot{M}^p$ sont $\sum_{r,\alpha} \dot{L}^{Q,\alpha}.(x_{r,\alpha} \times L'^{p-Q+r,\alpha})$; chacun d'eux est nul; par suite

$$\dot{L}^{Q,\alpha}.|x_{r,\alpha} \times L'^{p-Q+r,\alpha}| = 0.$$

Supposons $Q > 0$; en vertu de la généralisation du théorème 4 donnée au nº **22**, puisque $|x_{r,\alpha}|$ est simple, le cycle $L^{Q,\alpha}.|x_{r,\alpha} \times L'^{p-Q+r,\alpha}|$ est homologue au produit du cycle unité de $|x_{r,\alpha}|$ par un cycle de $|L'^{p-Q+r,\alpha}|$, cycle que le lemme 23 (nº **48**) permet de supposer du type $N'^{Q,\alpha}.|L'^{p-Q+r,\alpha}|$, $N'^{Q,\alpha}$ étant une forme de E'; en vertu du lemme 22 (nº **46**) il existe une forme $N^{Q-1,\alpha}$ de $E \times E'$ telle que

$$(L^{Q,\alpha} - E^0 \times N'^{Q,\alpha} - \dot{N}^{Q-1,\alpha}).|x_{r,\alpha} \times L'^{p-Q+r,\alpha}| = 0;$$

d'où, les ... désignant des termes de poids inférieurs à Q,

$$M^p = \sum_{r,\alpha} \dot{N}^{Q-1,\alpha}.(x_{r,\alpha} \times L'^{p-Q+r,\alpha}) + \ldots = \left[\sum_{r,\alpha} N^{Q-1,\alpha}.(x_{r,\alpha} \times L'^{p-Q+r,\alpha})\right]^{\bullet} + \ldots \sim \ldots;$$

ainsi M^p est homologue à une forme de poids $Q - 1$, ... donc à une forme de poids $Q = 0$.

Supposons donc que M^p soit une telle forme de poids $Q = 0$,

$$M^p = \sum_{r,\alpha} L^{0,\alpha}.(x_{r,\alpha} \times L'^{p+r,\alpha});$$

on a

$$\dot{L}^{0,\alpha}.|x_{r,\alpha} \times L'^{p+r,\alpha}| = 0;$$

soit K^0 le cycle unité de la couverture à laquelle $L^{0,\alpha}$ appartient; à tout point x' de $|L'^{p+r,\alpha}|$ on peut attacher un coefficient $A_{x'}$ tel que

$$L^{0,\alpha}.|x_{r,\alpha} \times x'| = A_{x'} K^0.|x_{r,\alpha} \times x'|,$$

$A_{x'}$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs et est constant sur chacune des composantes connexes de $|L'^{p+r,\alpha}|$; on peut donc construire une forme $N'^{0,\alpha}$ de E' telle que $A_{x'} x'^0 = N'^{0,\alpha}.x'$; on a

$$L^{0,\alpha}.|x_{r,\alpha} \times x'| = (E^0 \times N'^{0,\alpha}).|x_{r,\alpha} \times x'| \qquad \text{pour } x' \in |L'^{p+r,\alpha}|;$$

donc

$$L^{0,\alpha}.(x_{r,\alpha} \times L'^{p+r,\alpha}) = x_{r,\alpha} \times (N'^{0,\alpha}.L'^{p+r,\alpha}),$$

$$M^p = \sum_{r,\alpha} x_{r,\alpha} \times (N'^{0,\alpha}.L'^{p+r,\alpha});$$

M^p est donc une forme de $k \times E'$.

Ainsi toute forme dont la dérivée appartient à $k \times E'$ est elle-même homo logue à une forme de $k \times E'$. Le lemme 42 résulte immédiatement de cette proposition.

Lemme 43. — *$k \times E'$ et E' ont mêmes classes d'homologie, lorsque k est le dual d'un simplexe.*

Démonstration. — D'après le théorème 35 tous les groupes de Betti de k sont nuls, sauf son groupe de Betti de dimension o, qui s'identifie à celui des coefficients. On en déduit, par un raisonnement analogue à celui qui établit le lemme 2, que les classes d'homologie de $k \times E'$ sont les classes $1 \times Z'^p$, les Z'^p étant les classes d'homologie de E'; on convient d'identifier les classes d'homologie $1 \times Z'^p$ et Z'^p.

Les lemmes 42 et 43 ont la conséquence suivante :

Lemme 44. — *Si k est dual d'un simplexe abstrait, si les supports de k sont des ensembles fermés et simples de points d'un espace de Hausdorff bicompact E et si E' est un second espace de Hausdorff bicompact, alors $(E \times E').(k \times E')$ et E' ont mêmes choses d'homologie.*

II. — L'homomorphisme $\psi(Z^p.O)$ associé à une équation dépendant d'un paramètre.

85. Définition de $\psi(Z^p.O)$. — Soient un espace convexoïde *simple* E, un espace topologique E' et une représentation dans E, $\xi(x, x')$, d'un ensemble fermé de points de $E \times E'$; ce paragraphe II étudie, par les procédés de la topologie algébrique, l'équation d'inconnue x, dépendant du paramètre x'

$$x = \xi(x, x'). \tag{37}$$

Soit S l'ensemble des points $x \times x'$ de $E \times E'$ qui vérifient (37). On constate aisément que S *est fermé*. Soit $\psi(x, x')$ la projection de S sur E' (c'est-à-dire la représentation qui transforme le point $x \times x'$ de S en le point x' de E'); on constate aisément que $\psi(F)$ *est fermé*, quand F est un ensemble fermé de points de $E \times E'$.

Étant donné un ensemble ouvert O de points de $E \times E'$, dont la frontière $\dot{O}$ appartient au champ de définition de $\xi(x, x')$, nous allons associer à l'équation (37) *un homomorphisme transformant tout pseudocycle* (Chap. IV, § IV) *Z^p de O en un pseudocyle $\psi(Z^p.O)$ de $E' - \psi(\dot{O})$.* Cet homomorphisme sera apparenté à la notion d'indice total [n° **88**, *b*, (56)]; sa définition sera calquée sur la définition (26) et non sur la définition (8) de $i(L^0)$.

Nota. — Nous aurions pu, en compliquant nos conclusions, supprimer l'hypothèse que E est simple, à condition de nous restreindre au cas où $\overline{O}$

appartient au champ de définition de $\xi(x, x')$; mais, pour les applications du Chapitre VIII, il est essentiel d'éviter cette restriction.

La définition de $\psi(Z^p . O)$ sera la suivante : Soit B' un ensemble normal et bicompact de points de $E' - \psi(\dot{O})$; on a $\dot{O}.S.(E \times B') = 0$; le lemme **40** (n° **79**) nous permet de construire une couverture simpliciale K de E dont les éléments $X^{q,\beta}$ aient pour supports des ensembles U vérifiant la condition

$$(38) \qquad \dot{O}.\overset{-1}{\xi}(|X^{q,\beta}|).(|x_{q,\beta}| \times B') = 0,$$

les $x_{q,\beta}$ étant les éléments du dual k de K. D'après le théorème **12**, K est un simplexe et k a des supports simples; en vertu du lemme **41**, il existe des formes $f_1(x_{q,\beta})$ de k qui vérifient la condition

$$(25) \qquad \Big[\sum_{q,\beta} X^{q,\beta} \times f_1(x_{q,\beta})\Big]^{\bullet} = \sum_{q,\beta} X^{q,\beta} \times x_{q,\beta} - K^0 \times x_{0,0}.$$

Le n° **26** nous permet de construire un élargissement C de $\dot{O}.\overset{-1}{\xi}(K)$ ayant les propriétés suivantes :

C est une couverture de la fermeture $\overline{V}$ d'un voisinage V de $\dot{O}$; le support $|Y^{q,\beta}|$ d'un élément $Y^{q,\beta}$ de C contient un voisinage de $\dot{O}.\overset{-1}{\xi}(|X^{q,\beta}|)$;

$$(39) \qquad |Y^{q,\beta}|.(|x_{q,\beta}| \times B') = 0.$$

D'après le lemme **23** on peut trouver une forme L^p de $E \times B'$ vérifiant les conditions

$$(40) \quad Z^p.(E \times B').(O - \overline{V}.O) \sim L^p.(O - \overline{V}.O); \qquad |L^p| \subset O + V; \qquad |\dot{L}^p| \subset V.$$

Envisageons l'expression, analogue au second membre de (26),

$$(41) \qquad L^p.[x_{0,0} \times B'^0] + (-1)^{p+1} \sum_{q,\beta} \dot{L}^p.Y^{q,\beta}.[f_1(x_{q,\beta}) \times B'^0];$$

puisque $|\dot{L}^p| \subset V$ et que C est une couverture de $\overline{V}$, $\dot{L}^p.Y^{q,\beta}$ est une forme générale de $E \times B'$ (n° **71**) : (41) est une forme générale de $(E \times B').(k \times B')$; compte tenu de (25) la dérivée de cette forme est $\sum_{q,\beta} \dot{L}^p.Y^{q,\beta}.[x_{q,\beta} \times B'^0]$, qui est nul d'après (39); (41) est donc un cycle général de $(E \times B').(k \times B')$; d'après le numéro **71** et le lemme **44** un tel cycle appartient à une classe d'homologie de B', déterminée sans ambiguité, que nous nommerons $\psi(Z^p, O, B', K, f_1, C, L^p)$. Le numéro **86** prouvera que cette classe est indépendante du choix de K, f_1, C, L^p, fait qui nous permettra de la désigner par le symbole $\psi(Z^p, O, B')$. On voit aisément (lemme **15**) que

$$\psi(Z^p, O, b') \sim \psi(Z^p, O, B').b' \quad \text{si } b' \subset B';$$

$\psi(Z^p, O, B')$ est donc l'intersection par B' d'un pseudocycle de E', que nous nommerons $\psi(Z^p . O)$

$$\psi(Z^p, O, B') \sim \psi(Z^p.O).B'.$$

Du fait que (41) est linéaire en L^p résulte que, si $Z^{p,1}$ et $Z^{p,2}$ sont deux pseudocycles de O, on a

$$\psi[(A_1 Z^{p,1} + A_2 Z^{p,2}).O] \sim A_1 \psi(Z^{p,1}.O) + A_2 \psi(Z^{p,2}.O);$$

$\psi(Z^p.O)$ est donc un homomorphisme; il ne respecte pas en général la loi d'intersection [par exemple la formule (56) nous donne

$$\psi(O^0).\psi(O^0) \sim i(O)\,\psi(O^0) \qquad \text{et non } \sim \psi(O^0)].$$

En résumé l'homomorphisme $\psi(Z^p.O)$ sera défini par la relation

$$(42) \qquad \boxed{\psi(Z^p.O).B' \sim L^p.[x_{0,0} \times B'^0] + (-1)^{p+1} \sum_{q,\beta} \dot{L}^p.Y^{q,\beta}.[f_1(x_{q,\beta}) \times B'^0]}$$

dans $(E \times B').(k \times B')$.

86. Justification de la définition de $\psi(Z^p.O)$. — *a. Indifférence du choix de* L^p. — K, f_1, C et par suite V étant supposés choisis, soient L^p et $L^{\star p}$ deux choix de L^p; nous voulons prouver que

$$\psi(Z^p, O, B', K, f_1, C, L^p) \sim \psi(Z^p, O, B', K, f_1, C, L^{\star p}).$$

Nous avons

$$(L^p - L^{\star p}).(O - \overline{V}.O) \sim 0;$$

d'après le lemme 22 (n° **46**), il existe donc deux formes de $E \times B'$, L^{p-1} et l^p, vérifiant les conditions

$$L^p - L^{\star p} = \dot{L}^{p-1} + l^p, \qquad |L^{p-1}| \subset O + V, \qquad |l^p| \subset V;$$

d'où

$$\psi(Z^p, O, B', K, f_1, C, L^p) - \psi(Z^p, O, B', K, f_1, C, L^{\star p})$$
$$\sim (\dot{L}^{p-1} + l^p).[x_{0,0} \times B'^0] + (-1)^{p+1} \sum_{q,\beta} \dot{l}^p.Y^{q,\beta}.[f_1(x_{q,\beta}) \times B'^0];$$

or

$$\dot{L}^{p-1}.[x_{0,0} \times B'^0] = \{L^{p-1}.[x_{0,0} \times B'^0]\}^{\bullet} \sim 0;$$

donc

$$\psi(Z^p, O, B', K, f_1, C, L^p) - \psi(Z^p, O, B', K, f_1, C, L^{\star p})$$
$$\sim l^p.[x_{0,0} \times B'^0] + (-1)^{p+1} \sum_{q,\beta} \dot{l}^p.Y^{q,\beta}.[f_1(x_{q,\beta}) \times B'^0]$$
$$= (-1)^{p+1} \left\{ \sum_{q,\beta} l^p.Y^{q,\beta}.[f_1(x_{q,\beta}) \times B'^0] \right\}^{\bullet}$$
$$+ l^p.\left\{ x_{0,0} \times B'^0 + \left\{ \sum_{q,\beta} Y^{q,\beta}.[f_1(x_{q,\beta}) \times B'^0] \right\}^{\bullet} \right\}$$
$$\sim l^p.\left\{ x_{0,0} \times B'^0 + \left\{ \sum_{q,\beta} Y^{q,\beta}.[f_1(x_{q,\beta}) \times B'^0] \right\}^{\bullet} \right\};$$

[ce calcul est légitime parce que $l^p.Y^{q,\beta}$ est une forme générale de $E\times B'$, vu la relation $|l^p|\subset V$]; d'où, en tenant compte de (25),

$$\psi(Z^p, O, B', K, f_1, C, L^p)-\psi(Z^p, O, B', K, f_1, C, L^{*p})\sim\sum_{q,\beta} l^p.Y^{q,\beta}.[x_{q,\beta}\times B'^0],$$

or le second membre est nul d'après (39).

b. Indifférence du choix de l'élargissement de C. — K et f_1 étant supposés choisis, soient C et C* deux choix de C; on peut trouver un troisième choix c de C qui soit un rétrécissement des deux précédents; choisissons L^p tel que $\psi(Z^p, O, B', K, f_1, c, L^p)$ soit défini; on a, d'après le lemme 15 (n° **27**),

$$\psi(Z^p, O, B', K, f_1, c, L^p)\sim\psi(Z^p, O, B', K, f_1, C, L^p)$$

et

$$\psi(Z^p, O, B', K, f_1, c, L^p)\sim\psi(Z^p, O, B', K, f_1, C^*, L^p);$$

d'où

$$\psi(Z^p, O, B', K, f_1, C, L^p)\sim\psi(Z^p, O, B', K, f_1, C^*, L^p). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

c. Indifférence des choix de K *et* f_1. — Puisque $\psi(Z^p, O, B', K, f_1, C, L^p)$ ne dépend ni de C ni de L^p, nous écrirons $\psi(Z^p, O, B', K, f_1)$ au lieu de $\psi(Z^p, O, B', K, f_1, C, L^p)$. Nous allons prouver que $\psi(Z^p, O, B', K, f_1)$ est indépendant des choix de K et de f_1 par un raisonnement analogue à la démonstration du lemme 33. Soit K* une deuxième couverture simpliciale de E dont les supports sont des ensembles U; K.K* est une couverture simpliciale de E d'après le lemme 29; K.K* a pour supports des ensembles U; construisons le dual de K.K*: l'élément non nul $X^{q,\beta}.X^{*r,\gamma}$ a pour dual l'élément $x_{r,\gamma;q,\beta}$ dont le support est $|x_{r,\gamma;q,\beta}|=|x_{q,\beta}|.|x^*_{r,\gamma}|$; soit h l'élargissement du dual de K.K* dont l'élément $y_{r,\gamma;q,\beta}$ correspondant à $x_{r;\gamma;q,\beta}$ a pour support $|y_{r,\gamma;q,\beta}|=|x_{q,\beta}|$. D'après le théorème 12, K et K.K* sont des simplexes; conformément au lemme 41, soient $f_1(x_{q,\beta})$ et $g_1(y_{r,\gamma;q,\beta})$ des formes de k et de h vérifiant les relations

$$\left[\sum_{q,\beta}X^{q,\beta}\times f_1(x_{q,\beta})\right]^{\bullet}=\sum_{q,\beta}X^{q,\beta}\times x_{q,\beta}-K^0\times x_{0,0}, \tag{25}$$

$$\left[\sum_{q,\beta,r,\gamma}X^{q,\beta}.X^{*r,\gamma}\times g_1(y_{r,\gamma;q,\beta})\right]^{\bullet}=\sum_{q,\beta,r,\gamma}X^{q,\beta}.X^{*r,\gamma}\times y_{r,\gamma;q,\beta}-K^0.K^{*0}\times y_{0,0;0,0}. \tag{43}$$

On peut construire des élargissements C et C* de $\dot{O}.\overset{-1}{\xi}(K)$ et $\dot{O}.\overset{-1}{\xi}(K^*)$ possédant les propriétés suivantes : C et C* sont des couvertures de la fermeture $\overline{V}$ d'un voisinage V de $\dot{O}$; le support $|Y^{q,\beta}|$ d'un élément $Y^{q,\beta}$ de C contient un voisinage de $\dot{O}.\overset{-1}{\xi}(|X^{q,\beta}|)$; le support $|Y^{*r,\gamma}|$ d'un élément $Y^{*r,\gamma}$ de C* contient un voisinage de $\dot{O}.\overset{-1}{\xi}(|X^{*r,\gamma}|)$; $Y^{q,\beta}.Y^{*r,\gamma}=0$ quand $\dot{O}.\overset{-1}{\xi}(X^{q,\beta}).\overset{-1}{\xi}(X^{*r,\gamma})=0$; enfin C vérifie (39).

Soit L^p une forme de $E\times B'$ vérifiant (40); les relations (39), (40) et (43), le numéro **71** et le lemme 44 assurent l'existence d'une classe d'homologie Z'^p

de B' telle que

(44) $$L^p.[y_{0,0;0,0}\times B'^0]+(-1)^{p+1}\sum_{q,\beta,r,\gamma}\dot{L}^p.Y^{q,\beta}.Y^{\star r,\gamma}.[g_1(y_{r,\gamma;q,\beta})\times B'^0]\sim Z'^p$$

dans $(E\times B').(k\times B')$.

D'une part, puisque $|x_{r,\gamma;q,\beta}|\subset|y_{r,\gamma;q,\beta}|$, en vertu du lemme 15 (n° **27**), on déduit de (44) la relation

$$L^p.[x_{0,0;0,0}\times B'^0]+(-1)^{p+1}\sum_{q,\beta,r,\gamma}\dot{L}^p.Y^{q,\beta}.Y^{\star r,\gamma}.[g_1(x_{r,\gamma;q,\beta})\times B'^0]\sim Z'^p$$

qui exprime que

(45) $$\psi(Z^p,\ O,\ B',\ K.K^\star,\ g_1)\sim Z'^p.$$

D'autre part projetons (n° **73**) h sur k; les homologies (43) et (44) se transforment en les suivantes, où les $h_1(x_{r,\gamma;q,\beta})$ sont des formes de k

(46) $$\left[\sum_{q,\beta,r,\gamma}X^{q,\beta}.X^{\star r,\gamma}\times h_1(x_{r,\gamma;q,\beta})\right]^{\bullet}=\sum_{q,\beta}X^{q,\beta}\times x_{q,\beta}-K^0.K^{\star 0}\times x_{0,1},$$

(47) $$L^p.[x_{0,1}\times B'^0]+(-1)^{p+1}\sum_{q,\beta,r,\gamma}\dot{L}^p.Y^{q,\beta}.Y^{\star r,\gamma}.[h_1(x_{r,\gamma;q,\beta})\times B'^0]\sim Z'^p;$$

on peut trouver une forme l_1 de k telle que $\dot{l}_1=x_{0,0}-x_{0,1}$ [car $x_{0,0}\sim x_{0,1}$ d'après la formule (29) du n° **31**]; en retranchant membre à membre (25) et (46) on constate que

$$\sum_{q,\beta,r,\gamma}X^{q,\beta}.X^{\star r,\gamma}\times h_1(x_{r,\gamma;q,\beta})-\sum_{q,\beta}X^{q,\beta}\times f_1(x_{q,\beta})-K^0\times l_1$$

est un cycle de $(K.K^\star)\times k$; puisque $K.K^\star$ est un simplexe, ce cycle est homologue à un cycle de k de dimension 1 (lemme 2, n° **4**), donc à zéro, puisque k est le dual d'un simplexe (n° **35**); d'où

$$\sum_{q,\beta,r,\gamma}Y^{q,\beta}.Y^{\star r,\gamma}\times h_1(x_{r,\gamma;q,\beta})\sim\sum_{q,\beta}Y^{q,\beta}\times f_1(x_{q,\beta})+\dot{V}^0\times l_1;$$

cette homologie portée dans (47) nous donne

$$L^p.[x_{0,1}\times B'^0]+(-1)^{p+1}\dot{L}^p.[l_1\times B'^0]+(-1)^{p+1}\sum_{q,\beta}\dot{L}^p.Y^{q,\beta}.[f_1(x_{q,\beta})\times B'^0]\sim Z'^p,$$

c'est-à-dire

$$\dot{L}^p.[x_{0,0}\times B'^0]+(-1)^{p+1}\sum_{q,\beta}\dot{L}^p.Y^{q,\beta}.[f_1(x_{p,\beta})\times B'^0]\sim Z'^p,$$

c'est-à-dire

(48) $$\psi(Z^p,\ O,\ B',\ K,\ f_1)\sim Z'^p.$$

De (45) et (48) résulte la relation

$$\psi(Z^p,\ O,\ B',\ K.K^\star,\ g_1)\sim\psi(Z^p,\ O,\ B',\ K,\ f_1)$$

qui prouve que $\psi(Z^p,\ O,\ B',\ K,\ f_1)$ est indépendant des choix de K et f_1.

87. Propriétés de $\psi(Z^p.O)$. — *a.* Soient O_α des ensembles ouverts, deux à deux disjoints et en nombre fini, de points de O; supposons que $\overline{O} - \sum_\alpha O_\alpha$ appartienne au champ de définition de $\xi(x, x')$. On n'altère pas la définition de $\psi(Z^p.O).\left[E' - \psi\left(\overline{O} - \sum_\alpha O\right)\right]$ quand, dans les raisonnements des numéros **85** et **86**, on substitue $\overline{O} - \sum_\alpha O_\alpha$ à $\dot{O}$ et $\sum_\alpha L^{p,\alpha}$ à L^p, $L^{p,\alpha}$ étant une forme de $E \times B'$ vérifiant les conditions

$$(40_\alpha)\qquad Z^p.(E\times B').(O_\alpha - \overline{V}.O_\alpha) \sim L^{p,\alpha}.(O_\alpha - \overline{V}.O_\alpha); \quad |L^{p,\alpha}| \subset O_\alpha + V; \quad |\dot{L}^{p,\alpha}| \subset V.$$

D'où

$$(49)\qquad \psi(Z^p.O).\left[E' - \psi\left(\overline{O} - \sum_\alpha O_\alpha\right)\right] \sim \sum_\alpha \psi(Z^p.O_\alpha).\left[E' - \psi\left(\overline{O} - \sum_\alpha \dot{O}_\alpha\right)\right].$$

b. En supposant tous les O_α vides, nous obtenons en particulier la proposition suivante :

$\xi(Z^p.O) \sim 0$ quand $\overline{O}$ appartient au champ de définition de $\xi(x, x')$ et que O ne contient aucune solution de l'équation $x = \xi(x, x')$.

Cette proposition résulte également de (52).

c. Supposons $\xi(x, x')$ défini en tout point de $\overline{O}$; on peut alors définir $\psi(Z^p.O)$ par les relations plus simples que (40) et (42)

$$Z^p.(E\times B').\overline{O} \sim L^p.\overline{O}; \qquad |L^p| \subset O + V;$$
$$\psi(Z^p.O).B' \sim L^p.[x_{0,0}\times B'^0] + (-1)^{p+1}\sum_{q,\beta} \dot{L}^p.\overset{-1}{\xi}(X^{q,\beta}).[f_1(x_{q,\beta})\times B'^0];$$

d'après (25) cette dernière relation peut s'écrire

$$(50)\qquad \psi(Z^p.O).B' \sim \sum_{q,\beta} L^p.\overset{-1}{\xi}(X^{q,\beta}).[x_{q,\beta}\times B'^0];$$

or, d'après le lemme **40**, $\sum_{q,\beta}\overline{O}.\overset{-1}{\xi}(|X^{q,\beta}|).[|x_{q,\beta}|\times B']$ est arbitrairement voisin de $\overline{O}.S.(E\times B')$, S étant l'ensemble des points $x\times x'$ de $E\times E'$ qui vérifient l'équation $x = \xi(x, x')$; par ailleurs $\dot{O}.S.(E\times B')$ est vide; on peut donc se contenter d'assujettir L^p à la condition suivante : L^p est une forme de $E\times B'$ telle que

$$(51)\qquad Z^p.O.S.(E\times B') \sim L^p.O.S.(E\times B') \quad \text{dans } O.S.(E\times B').$$

Il en résulte ceci

$$(52)\qquad \psi(Z^{p,1}.O) \sim \psi(Z^{p,2}.O) \quad \text{quand } Z^{p,1}.O.S \sim Z^{p,2}.O.S$$

et que $\overline{O}$ appartient au champ de définition de $\xi(x, x')$.

d. Choisissons $O = E \times E'$; tout pseudocycle de $E \times E'$ est du type $E^0 \times Z'^p$, Z'^p étant un pseudocycle de E'; choisissons $L^p = E^0 \times (Z'^p . B')$; (42) se réduit à

$$\psi[(E^0 \times Z'^p).(E \times E')] \sim Z'^p. \tag{53}$$

e. Z'^q étant un pseudocycle de E', pour calculer $\psi[(E^0 \times Z'^q).Z^p.O]$ il suffit de remplacer dans le second membre de (42) L^p par $(E^0 \times Z'^q).L^p$; il vient

$$\psi[(E^0 \times Z'^q).Z^p.O] \sim Z'^q.\psi(Z^p.O), \tag{54}$$

en particulier

$$\psi[(E^0 \times Z'^q).O] \sim Z'^q.\psi(O^0). \tag{55}$$

Le théorème suivant récapitule les résultats acquis :

Théorème 29. — *Soient un espace convexoïde* simple E, *un espace topologique* E' *et une représentation dans* E, $\xi(x, x')$, *d'un ensemble fermé de points de* $E \times E'$. *Envisageons l'équation*

$$x = \xi(x, x'). \tag{37}$$

L'ensemble S *des points* $x \times x'$ *de* $E \times E'$ *qui vérifient* (37) *est fermé;* F *étant un ensemble fermé quelconque de points de* $E \times E'$, *la projection* $\psi(F)$ *de* $F.S$ *sur* E' *est un ensemble fermé. Soit* O *un ensemble ouvert de points de* $E \times E'$, *tel que* $\xi(x, x')$ *soit défini sur* $\dot{O}$; (40) *et* (42) [ou (51) *et* (50) *lorsque* $\xi(x, x')$ *est défini sur* $\overline{O}$] *associent à l'équation* (37) *un homomorphisme* $\psi(Z^p.O)$; *cet homomorphisme transforme les pseudocycles* Z^p *de* O *en pseudocycles de* $E' - \psi(\dot{O})$ [*sans respecter la loi d'intersection*]; $\psi(Z^p.O)$ *n'est pas altéré quand on modifie la définition de* $\xi(x, x')$ hors *de* $\dot{O}$. *Supposons que* $\overline{O}$ *appartienne au champ de définition de* $\xi(x, x')$ *: on a* $\psi(Z^{p,1}.O) \sim \psi(Z^{p,2}.O)$ *quand* $Z^{p,1}.O.S \sim Z^{p,2}.O.S$; *en particulier* $\psi(Z^p.O) \sim 0$ *quand* O *ne contient aucune solution de l'équation* $x = \xi(x, x')$. *Si les* O_α *sont des ensembles ouverts, deux à deux disjoints et en nombre fini, de points de* O, *et si* $\xi(x, x')$ *est défini sur* $\overline{O} - \sum_\alpha O_\alpha$, *on a*

$$\psi(Z^p.O).\left[E' - \psi\left(\overline{O} - \sum_\alpha O_\alpha\right)\right] \sim \sum_\alpha \psi(Z^p.O_\alpha).\left[E' - \psi\left(\overline{O} - \sum_\alpha O_\alpha\right)\right].$$

Si Z'^q *est un pseudocycle de* E', *on a*

$$\psi[(E^0 \times Z'^q).(E \times E')] \sim Z'^q; \qquad \psi[(E^0 \times Z'^q).Z^p.O] \sim Z'^q.\psi(Z^p.O),$$
$$\psi[(E^0 \times Z'^q).O] \sim Z'^q.\psi(O^0).$$

88. Cas particuliers. — *a. Rétrécissement de* E'. — Si l'on remplace E' par $e' \subset E'$, alors $\psi(Z^p.O)$ devient $\psi(Z^p.O).e'$.

b. Cas où E' *ne contient qu'un point : relation entre* $\psi(O^0)$ *et l'indice total.* — Supposons E' réduit à un point; identifions $E \times E'$ et E; posons $\xi(x, x') = \xi(x)$; soit O un ensemble ouvert de points de E tel que $\overline{O}$ appartienne au champ de définition de $\xi(x)$ et que $\dot{\mathrm{O}}$ ne contienne aucune solution de l'équation $x = \xi(x)$. Soit L^0 une forme de E telle que $|\mathrm{L}^0| = \overline{\mathrm{O}}$, $|\dot{\mathrm{L}}^0| = \dot{\mathrm{O}}$ et que $\mathrm{L}^0 . \mathrm{O} = \mathrm{O}^0$ soit un cycle unité de O; les relations (50) et (8) nous donnent

$$\psi(\mathrm{O}^0) \sim i(\mathrm{O})\mathrm{E}'^0. \tag{56}$$

Si, au lieu de supposer $\xi(x)$ défini sur $\overline{\mathrm{O}}$, nous le supposons défini seulement sur $\dot{\mathrm{O}}$, $i(\mathrm{O})$ n'est plus défini, mais $\psi(\mathrm{O}^0)$ l'est toujours; il est naturel de définir alors $i(\mathrm{O})$ par la relation (56). En d'autres termes : *les raisonnements de ce chapitre-ci permettent de compléter le théorème* 28 *en définissant* $i(\mathrm{O})$ *quand* E *est simple, que* $\dot{\mathrm{O}}$ *appartient au champ de définition de* $\xi(x)$ *et ne contient aucune solution de l'équation* $x = \xi(x)$.

c. Désignons par ψ^* la projection et l'homomorphisme associés à l'équation

$$x = \xi(x, \eta(x'')), \tag{57}$$

où $\eta(x'')$ est une représentation dans E′ d'un troisième espace topologique E″; posons $\eta(x \times x'') = x \times \eta(x'')$; je dis que

$$\psi^*\big(\overset{-1}{\eta}(x \times x')\big) = \overset{-1}{\eta}\big(\psi(x \times x')\big); \tag{58$_1$}$$

$$\psi^*\big(\overset{-1}{\eta}(\mathrm{Z}^p) . \overset{-1}{\eta}(\mathrm{O})\big) \sim \overset{-1}{\eta}\big(\psi(\mathrm{Z}^p . \mathrm{O})\big). \tag{58$_2$}$$

Démonstration. — (58_1) est évident; (58_2) s'obtient en transformant par $\overset{-1}{\eta}$ les homologies (40) et (42).

d. Supposons que $\xi(x, x') = \xi(x')$ *soit une représentation de* E′ *dans* **E**; je dis que $\psi(\mathrm{Z}^p . \mathrm{O})$ est la projection sur $\mathrm{E}' - \psi(\dot{\mathrm{O}})$ de l'intersection de Z^p par S.O, S étant l'ensemble des points $\xi(x') \times x'$.

Démonstration. — Supposons $\psi(\dot{\mathrm{O}})$ vide, comme (*a*) nous y autorise. Soit Z'^p la projection de $\mathrm{Z}^p . \mathrm{S}$ sur E′. Nous avons $\mathrm{Z}^p . \mathrm{S} \sim (\mathrm{E}^0 \times \mathrm{Z}'^p) . \mathrm{S}$ dans S; donc, d'après (52),

$$\psi(\mathrm{Z}^p . \mathrm{O}) \sim \psi[(\mathrm{E}^0 \times \mathrm{Z}'^p) . (\mathrm{E} \times \mathrm{E}')];$$

d'où, en tenant compte de (53),

$$\psi(\mathrm{Z}^p . \mathrm{O}) \sim \mathrm{Z}'^p.$$ C. Q. F. D.

III. — Équations définissant le même homomorphisme $\psi(\mathrm{Z}^p . \mathrm{O})$.

89. Rétrécissement de E. — *Définition*. — Soit *e* un sous-espace convexoïde (**78**) et *simple* de E; nous nommerons $\psi(\mathrm{Z}^p . \mathrm{O} . e)$ l'homomorphisme que nous obtenons en remplaçant, dans le paragraphe II, E par *e*, O par O.*e* et Z^p par $\mathrm{Z}^p . e$.

Théorème 30. — *Si e est un sous-espace convexoïde de* E, *si e est simple et si* $\xi(e)+\xi(\dot{\mathrm{O}})\subset e$, alors $\psi(\mathrm{Z}^p.\mathrm{O})\sim\psi(\mathrm{Z}^p.\mathrm{O}.e)$.

Démonstration. — Le raisonnement du n° **86** *c* reste valable quand K^*, au lieu d'être une couverture simpliciale de E dont les supports sont des ensembles U, est une couverture simpliciale de e dont les supports sont des ensembles u, si du moins $\xi(\dot{\mathrm{O}})\subset e$. La conclusion de ce raisonnement

$$\psi(\mathrm{Z}^p,\ \mathrm{O}.e,\ \mathrm{B}',\ \mathrm{K}.\mathrm{K}^*,\ g_1)\sim\psi(\mathrm{Z}^p,\ \mathrm{O},\ \mathrm{B}',\ \mathrm{K},\ f_1)$$

signifie que dans ces conditions

$$\psi(\mathrm{Z}^p.\mathrm{O}.e)\sim\psi(\mathrm{Z}^p.\mathrm{O}).$$

90. L'homomorphisme défini par $x\times x'=\xi(x,\ x',\ x'')\times\xi'(x,\ x',\ x'')$.

Théorème 31. — *Soient deux espaces convexoïdes simples* E *et* E′ *et un espace topologique* E″; *soient* $\xi(x,\ x',\ x'')$ *et* $\xi'(x,\ x',\ x'')$ *deux représentations, dans* E *et dans* E′, *d'un ensemble fermé de points de* $\mathrm{E}\times\mathrm{E}'\times\mathrm{E}''$. *Soit* O *un ensemble ouvert de points de* $\mathrm{E}\times\mathrm{E}'\times\mathrm{E}''$, *dont la frontière* $\dot{\mathrm{O}}$ *appartient au champ de définition de* ξ *et* ξ'. *A l'équation* $x\times x'=\xi(x,\ x',\ x'')\times\xi'(x,\ x',\ x'')$ *est associé un homomorphisme* $\Psi(\mathrm{Z}^p.\mathrm{O})$ *de l'anneau des pseudocycles de* O *dans l'anneau des pseudocycles de* $\mathrm{E}''-\Psi(\dot{\mathrm{O}})$. *Je dis que cet homomorphisme ne change pas quand on remplace* $\xi'(x,\ x',\ x'')$ *par une autre représentation de* $\dot{\mathrm{O}}$ *dans* E′ *qui est égale à* $\xi'(x,\ x',\ x'')$ *en les points de* $\dot{\mathrm{O}}$ *où* $x=\xi(x,\ x',\ x'')$.

Démonstration. — La relation (42) qui définit $\Psi(\mathrm{Z}^p.\mathrm{O})$ peut être choisie du type suivant, où $\mathrm{Y}^{q,\beta}$ et $\mathrm{Y}'^{r,\gamma}$ sont les éléments d'élargissements convenables C et C′ de $\dot{\mathrm{O}}.\overset{-1}{\xi}(\mathrm{K})$ et $\dot{\mathrm{O}}.\overset{-1}{\xi'}(\mathrm{K}')$, K et K′ étant deux couvertures convenables de E et E′ :

$$\Psi(\mathrm{Z}^p.\mathrm{O}).\mathrm{B}''\sim\mathrm{L}^p.[x_{0,0}\times x'_{0,0}\times\mathrm{B}''^0] + (-1)^{p+1}\sum_{q,\beta,r,\gamma}\mathrm{L}^p.\mathrm{Y}'^{r,\gamma}.\mathrm{Y}^{q,\beta}.[f_1(x_{q,\beta}\times x'_{r,\gamma})\times\mathrm{B}''^0], \tag{59}$$

les $f_1(x_{q,\beta}\times x'_{q,\gamma})$ étant des formes du produit $k\times k'$ des duals de K et K′ telles que

$$\Big[\sum_{q,\beta,r,\gamma}\mathrm{X}'^{r,\gamma}\times\mathrm{X}^{q,\beta}\times f_1(x_{q,\beta}\times x'_{r,\gamma})\Big]^{\bullet} = \sum_{q,\beta,r,\gamma}\mathrm{X}'^{r,\gamma}\times\mathrm{X}^{q,\beta}\times x_{q,\beta}\times x'_{r,\gamma}-\mathrm{K}'^0\times\mathrm{K}^0\times x_{0,0}\times x'_{0,0}. \tag{60}$$

Soient $f_1(x_{q,\beta})$ et $f_1(x'_{r,\gamma})$ des formes de k et k' vérifiant les relations

$$\Big[\sum_{q,\beta}\mathrm{X}^{q,\beta}\times f_1(x_{q,\beta})\Big]^{\bullet}=\sum_{q,\beta}\mathrm{X}^{q,\beta}\times x_{q,\beta}-\mathrm{K}^0\times x_{0,0}, \tag{25}$$

$$\Big[\sum_{q,\beta}\mathrm{X}'^{r,\gamma}\times f_1(x'_{r,\gamma})\Big]^{\bullet}=\sum_{r,\gamma}\mathrm{X}'^{r,\gamma}\times x'_{r,\gamma}-\mathrm{K}'^0\times x'_{0,0}, \tag{25'}$$

on déduit aisément de (25) et (25') que (60) est satisfait par le choix suivant de $f_1(x_{q,\beta} \times x'_{r,\gamma})$:

$$(61) \quad \begin{cases} f_1(x_{q,\beta} \times x'_{r,\gamma}) = x_{q,\beta} \times f_1(x'_{r,\gamma}) & \text{si } r > 0, \\ f_1(x_{q,\beta} \times x'_{0,\gamma}) = x_{q,\beta} \times f_1(x'_{0,\gamma}) + f_1(x_{q,\beta}) \times x'_{0,0}, \end{cases}$$

(59) peut donc être mis sous la forme

$$(62) \quad \begin{aligned} \Psi(Z^p.\dot{O}).B'' \sim {} & L^p.[x_{0,0} \times x'_{0,0} \times B''^0] \\ & + (-1)^{p+1} \sum_{q,\beta} \dot{L}^p.Y^{q,\beta}.[f_1(x_{q,\beta}) \times x'_{0,0} \times B''^0] \\ & + (-1)^{p+1} \sum_{q,\beta,r,\gamma} \dot{L}^p.Y'^{r,\gamma}.Y^{q,\beta}.[x_{q,\beta} \times f_1(x'_{r,\gamma}) \times B''^0] \\ & \text{dans } (E \times E' \times E'').(k \times k' \times B''). \end{aligned}$$

Soit S l'ensemble des points de $E \times E' \times B''$ en lesquels $x = \xi(x, x', x'')$; puisque par hypothèse $B''.\psi(\dot{O}) = 0$, on a $x' \neq \xi'(x, x', x'')$ en tout point de $S.\dot{O}$. Le lemme 40 nous permet d'effectuer les choix suivants de C et C' :

C' sera, non plus un élargissement de $\dot{O}.\overset{-1}{\xi'}(K')$, mais un élargissement de $S.\dot{O}.\overset{-1}{\xi'}(K')$ satisfaisant aux conditions suivantes :

C' est une couverture de la fermeture $\bar{v}$ d'un voisinage v de $S.\dot{O}$; $|Y'^{r,\gamma}|$ contient un voisinage de $S.\dot{O}.\overset{-1}{\xi'}(|X'^{r,\gamma}|)$;

$$|Y'^{r,\gamma}|.(|x'_{r,\gamma}| \times E' \times B'') = 0.$$

C sera un élargissement de $\dot{O}.\overset{-1}{\xi}(K)$ satisfaisant aux conditions suivantes :

C est une couverture de la fermeture $\overline{V}$ d'un voisinage V de $\dot{O}$; $|Y^{q,\beta}|$ contient un voisinage de $\dot{O}.\overset{-1}{\xi'}(|X^{q,\beta}|)$;

$$|Y^{q,\beta}|.(|x_{q,\beta}| \times E' \times B'') \subset v.$$

L^p satisfera aux conditions (40).

De l'ensemble de ces conditions résulte que le second membre de (62) est encore un cycle général de $(E \times E' \times B'').(k \times k' \times B'')$; le lemme 15 (n° 27) permet de prouver que ce cycle appartient à une classe d'homologie de B'' indépendante du choix de C' et que la relation (62) vaut encore : nous obtenons ainsi une définition de $\Psi(Z^p.O)$ qui n'utilise pas la définition de $\xi'(x, x', x'')$ hors de l'ensemble des solutions de l'équation $x = \xi(x, x', x'')$.

C. Q. F. D.

THÉORÈME 32. — *Soient deux espaces convexoïdes simples* E *et* E' *et un espace topologique* E''; *soit* $\xi(x, x', x'')$ *une représentation dans* E *d'un ensemble fermé de points de* $E \times E' \times E''$; *soit* $\xi'(x', x'')$ *une représentation dans* E' *d'un ensemble* *fermé de points de* $E' \times E''$. *Les symboles* ψ, ψ' *et* Ψ *correspondant respectivement aux trois équations*

$$x = \xi(x, x', x''), \qquad x' = \xi'(x', x'') \qquad et \qquad x \times x' = \xi(x, x', x'') \times \xi'(x', x''),$$

nous avons

$$(63) \qquad \Psi(F) = \psi'(\psi(F)) \qquad [F \subset E \times E' \times E''; \ \psi(F) \subset E' \times E''; \ \Psi(F) \subset E''],$$

$$(64) \qquad \Psi(Z^p.O) \sim \psi'\{\psi(Z^p.O).[E' \times E'' - \psi(\dot{O})]\}$$

(O *est un ensemble ouvert de points de* $E \times E' \times E''$ *tel que* $\xi(x, x', x'')$ *et* $\xi'(x', x'')$ *soient définis sur* $\dot{O}$).

Démonstration de (63). — $\psi(F)$ est la projection sur $E' \times E''$ des points de F où $x = \xi(x, x', x'')$; $\psi'[\psi(F)]$ est la projection sur E'' des points de $\psi(F)$ où $x' = \xi'(x, x', x'')$; or $\Psi(F)$ est la projection sur E'' des points de F où $x = \xi(x, x', x'')$ et $x' = \xi'(x, x', x'')$.

Démonstration de (64). — La relation analogue à (42) qui définit $\Psi(Z^p.O)$ peut être mise sous la forme (62) où les $Y^{p,\beta}$ sont les éléments d'un élargissement de $\dot{O}.\overset{-1}{\xi}(K)$ et les $Y'^{r,\gamma}$ les éléments d'un élargissement de $\dot{O}.\overset{-1}{\xi'}(K')$. Posons

$$M^p = L^p.[x_{0,0} \times E'^0 \times B''^0] + (-1)^{p+1} \sum_{q,\beta} \dot{L}^p.Y^{q,\beta}.[f_1(x_{q,\beta}) \times E'^0 \times B''^0].$$

En vertu de la définition de $\psi(Z^p.O)$ nous avons, V étant un voisinage de $\psi(\dot{O})$,

$$(65) \qquad \psi(Z^p.O).(E' \times B'').(E' \times E'' - V) \sim M^p.[E \times (E' \times E'' - V)],$$

D'autre part, puisque

$$\dot{M}^p = \sum_{q,\beta} \dot{L}^p.Y^{q,\beta}.[x_{q,\beta} \times E'^0 \times B''^0],$$

la relation (62) peut s'écrire

$$\Psi(Z^p.O).B'' \sim M^p.[E^0 \times x'_{0,0} \times B''^0] + (-1)^{p+1} \sum_{r,\gamma} \dot{M}^p.Y'^{r,\gamma}.|E^0 \times f_1(x'_{r,\gamma}) \times B''^0]$$

et la relation que nous voulons établir, (64), s'écrit

$$(66) \quad \psi'\{\psi(Z^p.O).[E' \times E'' - \psi(\dot{O})]\} \sim M^p.[E^0 \times x'_{0,0} \times B''^0] + (-1)^{p+1} \sum_{r,\gamma} \dot{M}^p.Y'^{r,\gamma}.|E^0 \times f_1(x'_{r,\gamma}) \times B''^0].$$

Le système (65), (66) est analogue au système (40), (42) appliqué à la définition de $\psi'\{\psi(Z^p.\dot{O}).[E' \times E'' - \psi(\dot{O})]\}$: la seule différence entre ces deux systèmes est que $\dot{M}^p$, au lieu d'être une forme de $E' \times B''$ est une forme générale de $(E \times E' \times B'').(k \times E' \times B'')$; il est encore possible, malgré cette différence, de définir $\psi'\{\psi(Z^p.O).[E' \times E'' - \psi(\dot{O})]\}$ par le système (65),

(66) car le raisonnement du n° **86** *a* et le lemme 22, sur lequel s'appuie ce raisonnement, restent valables quand on substitue à la notion de forme de E celle de forme générale de $(E^\star \times E).(k^\star \times E)$, $k^\star$ étant le dual d'un simplexe, les supports de $k^\star$ étant des ensembles fermés et simples de points de $E^\star$.

IV. — Application aux transformations.

91. Transformations et homomorphismes associés a certaines équations. — Soient un espace convexoïde *simple* T et deux espaces topologiques E et E'; soit $\varphi[t, x']$ une représentation de $T \times E'$ dans E; soit $\tau(x)$ une représentation dans T d'un ensemble fermé de points de E; nous allons étudier l'équation

$$x = \varphi[\tau(x), x'] \tag{67}$$

par l'intermédiaire de l'équation

$$t = \tau(\varphi[t, x']) \tag{68}$$

qui est du type (37).

La transformation $\theta(x)$. — Étant donné un point x de E, en lequel $\tau(x)$ est défini, nous nommerons $\theta(x)$ l'ensemble des points x' vérifiant (67). Étant donné un point x' de E' nous nommerons $\overset{-1}{\theta}(x')$ l'ensemble des points x vérifiant (67). Les conditions $x' \in \theta(x)$ et $x \in \overset{-1}{\theta}(x')$ sont donc équivalentes. Soit S l'ensemble des points $t \times x'$ qui vérifient (68); soit $\psi(t, x')$ la représentation qui transforme un point $t \times x'$ de S en le point x' de E'. Nous avons

$$\theta(x) = \psi\left(\overset{-1}{\varphi}(x)\right); \tag{69_1}$$

$$\overset{-1}{\theta}(x') = \varphi(S.(T \times x')). \tag{69_2}$$

Nous posons

$$\theta(e) = \sum_{x \in e} \theta(x) \qquad \text{et} \qquad \overset{-1}{\theta}(e') = \sum_{x' \in e'} \overset{-1}{\theta}(x').$$

Soit F un ensemble fermé de points de E; puisque φ est continue, $\overset{-1}{\varphi}(F)$ est un ensemble fermé; d'après le théorème 29, ψ transforme tout ensemble fermé en ensemble fermé; donc $\theta(F) = \psi\left(\overset{-1}{\varphi}(F)\right)$ *est fermé*. Soit B' un ensemble bicompact de points de E'; $T \times B'$ est bicompact; puisque S est fermé (théorème 29) $S.(T \times B')$ est bicompact et par suite $\overset{-1}{\theta}(B') = \varphi[S.(T \times B')]$ *est bicompact*.

L'*homomophisme* $\theta(Z^p.O)$. — Soit ψ l'homomorphisme associé à l'équation (68); soit O un ensemble ouvert de points de E; soit Z^p un pseudocycle de O; $\overset{-1}{\varphi}(O)$ est un ensemble ouvert de points de $T \times E'$; $\overset{-1}{\varphi}(Z^p)$ est un pseudocycle de $\overset{-1}{\varphi}(O)$; supposons $\tau(x)$ défini sur $\dot{O}$; $\tau[\varphi(t, x')]$ est défini sur l'ensemble $\overset{-1}{\varphi}(\dot{\mathrm{O}})$ qui contient la frontière $\overset{-1}{\varphi}(\mathrm{O})^{\cdot}$ de $\overset{-1}{\varphi}(\mathrm{O})$; $\psi\left[\overset{-1}{\varphi}(\mathrm{Z}^p).\overset{-1}{\varphi}(\mathrm{O})\right]$ est donc un pseudocycle de l'ensemble $\mathrm{E}'-\psi\left(\overset{-1}{\varphi}(\mathrm{O})^{\cdot}\right)$ qui contient l'ensemble $\mathrm{E}'-\psi\left(\overset{-1}{\varphi}(\dot{\mathrm{O}})\right)=\mathrm{E}'-\theta(\dot{\mathrm{O}})$; nous poserons

$$(70)\qquad \theta(\mathrm{Z}^p.\mathrm{O})\sim\psi\left[\overset{-1}{\varphi}(\mathrm{Z}^p).\overset{-1}{\varphi}(\mathrm{O})\right].[\mathrm{E}'-\theta(\dot{\mathrm{O}})].$$

Les théorèmes 29 et 30 nous fournissent l'énoncé suivant :

Théorème 29 *bis*. — *Soit* $\theta(x)$ *la transformation* (*en général multivoque*) *associée à l'équation* (67); $\theta(x)$ *transforme tout ensemble fermé de points de* E *en un ensemble fermé de points de* E'; $\overset{-1}{\theta}(x')$ *transforme tout ensemble bicompact de points de* E' *en un ensemble bicompact de points de* E. *Soit* O *un ensemble ouvert de points de* E *tel que* $\tau(x)$ *soit défini sur* $\dot{\mathrm{O}}$; *l'homomorphisme* $\theta(\mathrm{Z}^p.\mathrm{O})$ *transforme les pseudocycles de* O *en pseudocycles de* $\mathrm{E}'-\theta(\dot{\mathrm{O}})$ [*sans respecter la loi d'intersection*]; $\theta(\mathrm{Z}^p.\mathrm{O})$ *n'est pas altéré quand on modifie la définition de* $\tau(x)$ *hors de* $\dot{\mathrm{O}}$, *ni quand on rétrécit* T *en un sous-espace convexoïde et simple contenant* $\tau(\dot{\mathrm{O}})$. *Soient* O_α *des ensembles ouverts, deux à deux disjoints et en nombre fini, de points de* O; *si* $\tau(x)$ *est défini sur* $\overline{\mathrm{O}}-\sum_\alpha \mathrm{O}_\alpha$, *alors*

$$(71)\qquad \theta(\mathrm{Z}^p.\mathrm{O}).\left[\mathrm{E}'-\theta\left(\overline{\mathrm{O}}-\sum_\alpha \mathrm{O}_\alpha\right)\right]\sim\sum_\alpha\theta(\mathrm{Z}^p.\mathrm{O}_\alpha).\left[\mathrm{E}'-\theta\left(\overline{\mathrm{O}}-\sum_\alpha \mathrm{O}_\alpha\right)\right].$$

Si $\tau(x)$ *est défini sur* $\overline{\mathrm{O}}$ *et si* $\theta(\mathrm{O})$ *est vide, alors* $\theta(\mathrm{Z}^p.\mathrm{O})\sim 0$. *Si* Z^q *est un pseudocycle de* E, Z^p *étant toujours un pseudocycle de* O, *on a*

$$(72_1)\qquad \theta(\mathrm{Z}^q.\mathrm{E})\sim\overset{-1}{\varphi}(\mathrm{Z}^q),$$

$$(72_2)\qquad \theta(\mathrm{Z}^q.\mathrm{Z}^p.\mathrm{O})\sim\overset{-1}{\varphi}(\mathrm{Z}^q).\theta(\mathrm{Z}^p.\mathrm{O}),$$

$$(72_3)\qquad \theta(\mathrm{Z}^q.\mathrm{O})\sim\overset{-1}{\varphi}(\mathrm{Z}^q).\theta(\mathrm{O}^0).$$

Remarque 1. — Pour définir l'homomorphisme $\theta(\mathrm{Z}^p.\mathrm{O})$ il ne suffit pas de donner la transformation $\theta(x)$: il faut préciser à quelle équation du type (67) est associé cet homomorphisme.

Remarque 2. — Si $\overset{-1}{\theta}(x')$ est une transformation univoque, alors $\overset{-1}{\theta}(x')$ est une représentation (puisque θ transforme tout ensemble fermé en un ensemble fermé).

Remarque 3. — $\theta(x)$ est une transformation univoque, si E et E' sont des espaces de Hausdorff et si E' est bicompact, alors $\theta(x)$ est une représentation (car $\overset{-1}{\theta}$ transforme alors tout ensemble fermé en un ensemble fermé).

92. Cas particuliers. — *a. Rétrécissement de* E′. — Si l'on remplace E′ par $e' \subset E'$, alors $\theta(Z^p.O)$ devient $\theta(Z^p.O).e'$.

b. Cas où E′ *ne contient qu'un point : relation entre* $\theta(O^0)$ *et l'indice total.* — L'équation (67) se réduit alors à l'équation (27) $x = \varphi[\tau(x)]$; soit $i(O)$ l'indice total de celles de ses solutions qui appartiennent à O; si $\tau(x)$ est défini sur $\overline{O}$ et si $\dot{O}$ ne contient aucune solution, nous avons, d'après (56),

(73) $$\theta(O^0) \sim i(O)E'^0.$$

c. Désignons par θ^* la transformation et l'homomorphisme associés à l'équation

(74) $$x = \varphi[\tau(x), \eta(x'')],$$

où $\eta(x'')$ est une représentation dans E′ d'un quatrième espace topologique E″; nous avons, d'après (58),

(75_1) $$\theta^*(x) = \overset{-1}{\eta}(\theta(x)),$$

(75_2) $$\theta^*(Z^p.O) \sim \overset{-1}{\eta}(\theta(Z^p.O)).$$

d. Supposons $\varphi(t, x') = \varphi(x')$ *indépendant de* t. — Nous avons, d'après le n° **88** *d*,

(76_1) $$\theta(x) = \overset{-1}{\varphi}(x),$$

(76_2) $$\theta(Z^p.O) \sim \overset{-1}{\varphi}(Z^p).\left[E' - \overset{-1}{\varphi}(\dot{O})\right].$$

Le Chapitre VIII utilisera la généralisation que voici de cette proposition :

e. Supposons que le rôle de T soit joué par le produit $T \times T'$ de deux espaces convexoïdes, simples et homéomorphes; soit $t' = \iota(t)$ une représentation topologique de T sur T′; supposons θ défini par une équation

$$x = \varphi[\tau(x), \iota(\tau(x)), x'],$$

telle que $\varphi[t, \iota(t), x'] = \varphi'(x')$ soit indépendant de t; je dis que

(77_1) $$\theta(x) = \overset{-1}{\varphi'}(x),$$

(77_2) $$\theta(Z^p.O) \sim \overset{-1}{\varphi'}(Z^p).\left[E' - \overset{-1}{\varphi'}(\dot{O})\right].$$

Démonstration. — (77_1) est évident; pour établir (77_2) il suffit de rétrécir $T \times T'$ en l'ensemble des points $t \times \iota(t)$: nous nous trouvons ramenés au cas *d*.

f. Cas où $\theta(x)$ *est une représentation de* O *dans* E′. — Nous supposons donc $\tau(x)$ défini en tout point de $\overline{O}$. D'après (69_2)

$$S.(E \times x') \subset \overset{-1}{\varphi}(\overset{\rightarrow 1}{\theta}(x'));$$

d'où

(78) $$(E \times x').S.\overset{-1}{\varphi}(O) \subset \overset{-1}{\varphi}(\overset{\rightarrow 1}{\theta}(x')).S.\overset{-1}{\varphi}(O).$$

Réciproquement soit $t\times y'$ un point de $\overset{-1}{\varphi}\big(\overset{-1}{\theta}(x')\big).\mathrm{S}.\overset{-1}{\varphi}(\mathrm{O})$. Posons

$$x=\varphi[t\times y']; \qquad x\in \mathrm{O}.$$

D'une part, puisque $t\times y'\in \mathrm{S}$, nous avons $t=\tau(x)$; d'où $y'=\theta(x)$. D'autre part, puisque $t\times y'\in \overset{-1}{\varphi}\big(\overset{-1}{\theta}(x')\big)$, nous avons $\varphi[t\times y']\in \overset{-1}{\theta}(x')$, c'est-à-dire $x\in \overset{-1}{\theta}(x')$, c'est-à-dire $x'=\theta(x)$.

D'où $y'=x'$, c'est-à-dire

$$\overset{-1}{\varphi}\big(\overset{-1}{\theta}(x')\big).\mathrm{S}.\overset{-1}{\varphi}(\mathrm{O})\subset(\mathrm{E}\times x').\mathrm{S}.\overset{-1}{\varphi}(\mathrm{O}). \tag{79}$$

De (78) et (79) résulte

$$\overset{-1}{\varphi}\big(\overset{-1}{\theta}(x')\big).\mathrm{S}.\overset{-1}{\varphi}(\mathrm{O})=(\mathrm{E}\times x').\mathrm{S}.\overset{-1}{\varphi}(\mathrm{O});$$

si Z'^q *est un pseudocycle de* E', nous avons donc

$$\overset{-1}{\varphi}\big(\overset{-1}{\theta}(\mathrm{Z}'^q)\big).\mathrm{S}.\overset{-1}{\varphi}(\mathrm{O})\sim(\mathrm{E}^0\times \mathrm{Z}'^q).\mathrm{S}.\overset{-1}{\varphi}(\mathrm{O}) \qquad \text{dans } \mathrm{S}.\overset{-1}{\varphi}(\mathrm{O});$$

d'où, d'après (52), Z^p *étant pseudocycle de* O,

$$\psi\Big[\overset{-1}{\varphi}\big(\overset{-1}{\theta}(\mathrm{Z}'^q)\big).\overset{-1}{\varphi}(\mathrm{Z}^p).\overset{-1}{\varphi}(\mathrm{O})\Big]\sim\psi\Big[(\mathrm{E}^0\times \mathrm{Z}'^q).\overset{-1}{\varphi}(\mathrm{Z}^p).\overset{-1}{\varphi}(\mathrm{O})\Big],$$

c'est-à-dire, en tenant compte de (54) et (70),

$$\boxed{\theta\Big[\overset{-1}{\theta}(\mathrm{Z}'^q).\mathrm{Z}^p.\mathrm{O}\Big]\sim \mathrm{Z}'^q.\theta(\mathrm{Z}^p.\mathrm{O});} \tag{80}$$

en particulier

$$\theta\Big[\overset{-1}{\theta}(\mathrm{Z}'^q).\mathrm{O}\Big]\sim \mathrm{Z}'^q.\theta(\mathrm{O}^0). \tag{81}$$

93. La transformation $\theta'\big(\theta(x)\big)$ et l'homomorphisme $\theta'\Big[\theta(\mathrm{Z}^p.\mathrm{O}).\big(\mathrm{E}'-\theta(\dot{\mathrm{O}})\big)\Big]$. — Nous utiliserons au Chapitre VIII la proposition suivante :

Théorème 33. — *Soient : trois espaces topologiques* E, E', E''*; deux espaces convexoïdes simples,* T *et* T'*; une représentation* $\varphi[t, x']$ *de* $\mathrm{T}\times\mathrm{E}'$ *dans* E*; une représentation* $\varphi'[t', x'']$ *de* $\mathrm{T}'\times\mathrm{E}''$ *dans* E'*; une représentation* $\tau(x)$ *dans* T *d'un ensemble fermé de points de* E *et une représentation* $\tau'(x')$ *dans* T' *d'un ensemble fermé de points de* E'.

L'équation $x=\varphi[\tau(x), x']$ *définit une transformation* $x'=\theta(x)$ *et un homomorphisme* $\theta(\mathrm{Z}^p.\mathrm{O})$;

l'équation $x'=\varphi'[\tau'(x'), x'']$ *définit une transformation* $x''=\theta'(x')$ *et un homomorphisme* $\theta'(\mathrm{Z}'^p.\mathrm{O}')$.

Supposons que $\tau'\big(\theta(x)\big)$ *soit une représentation dans* T' *du champ de définition de* $\tau(x)$ *(il n'est pas nécessaire de supposer que* $\theta(x)$ *soit une représentation);* *l'équation* $x=\varphi\Big[\tau(x), \varphi'\big[\tau'\big(\theta(x)\big), x''\big]\Big]$ *définit une transformation* $x''=\Theta(x)$ *et un homomorphisme* $\Theta(\mathrm{Z}^p.\mathrm{O})$.

Je dis que

$$(82_1)\qquad \Theta(x)=\theta'(\theta(x));$$

$$(82_2)\qquad \Theta(Z^p.O)\sim\theta'[\theta(Z^p.O).(E'-\theta(\dot{O}))].$$

La formule (82_1) est évidente.

Démonstration de (82_2). — Soient ψ, $\psi^\star$ et ψ' les homomorphismes qui sont respectivement associés aux trois équations du type (37)

$$t=\tau(\varphi[t,x']),\qquad t=\tau(\varphi[t,\varphi'[t',x'']])\qquad\text{et}\qquad t'=\tau'(\varphi'[t',x'']).$$

Convenons d'écrire θ, θ', ... au lieu de $\theta(Z^p.O)$, $\theta'(Z'^p.O')$, ...

D'une part nous avons

$$\theta\sim\psi\overset{-1}{\varphi}\quad\text{et}\quad\theta'\sim\psi'\overset{-1}{\varphi'}\quad\text{d'après la définition (70)}\quad\text{et}\quad\overset{-1}{\varphi'}\psi\sim\psi^\star\overset{-1}{\varphi'}\quad\text{d'après }(58_2);$$

d'où

$$(83)\qquad \theta'\theta\sim\psi'\psi^\star\overset{-1}{\varphi'}\overset{-1}{\varphi}.$$

D'autre part $\psi'\psi^\star$ est, d'après le théorème 32, l'homomorphisme associé à l'équation

$$t\times t'=\tau(\varphi[t,\varphi'[t',x'']])\times\tau'(\varphi'[t',x'']);$$

or

$$\varphi'[t',x'']=\theta(\varphi[t,\varphi'[t',x'']])\qquad\text{quand } t=\tau(\varphi[t,\varphi'[t',x'']]);$$

donc, en vertu du théorème 31, $\psi'\psi^\star$ est aussi l'homomorphisme associé à l'équation

$$t\times t'=\tau(\varphi[t,\varphi'[t',x'']])\times\tau'\big(\theta(\varphi[t,\varphi'[t',x'']])\big);$$

d'où, d'après la définition (70) de Θ,

$$(84)\qquad \Theta\sim\psi'\psi^\star\overset{-1}{\varphi'}\overset{-1}{\varphi}.$$

De (83) et (84) résulte la relation à démontrer : $\Theta\sim\theta'\theta$.

CHAPITRE VIII.

HOMÉOMORPHISMES.

94. Isomorphie d'anneaux de pseudocycles d'ensembles ouverts dont les ensembles complémentaires sont homéomorphes.

Théorème 34. — *Soient deux espaces topologiques,* E *et* E', *et une famille* T *de représentations topologiques* [1] t *de* E *sur* E' : $x'=tx$, $x=t^{-1}x'$. *Supposons que* T *soit un espace convexoïde. Soit* $\tau(x)$ *une représentation dans* T *d'un*

---

[1] Une représentation est dite *topologique* quand son inverse est une représentation.

ensemble fermé F *de points de* E; *supposons que* $\theta(x) = \tau(x)\, x$ *soit biunivoque sur* F. *Je dis que* $F' = \theta(F)$ *est un ensemble fermé de points de* E' *et que* $\theta(x)$ *est une représentation topologique de* F *sur* F'.

Remarque. — E et E', F et F', $\theta(x)$ et $\theta'(x') = \overset{-1}{\theta}(x')$, $\tau(x)$ et $\tau'(x') = \tau(\theta'(x'))^{-1}$ jouent donc des rôles symétriques. Notons que $\theta'(x') = \tau'(x')\, x'$.

Démonstration. — $x' = \theta(x)$ est la transformation associée à l'équation $x = \tau(x)^{-1} x'$; $\theta(F)$ est un ensemble fermé d'après le théorème 29 *bis*; $\overset{-1}{\theta}(x')$, qui est univoque par hypothèse, est continue d'après la 2ᵉ remarque concernant ce théorème.

Théorème 35. — *Adjoignons aux hypothèses qu'énonce le théorème* 34 *la suivante : l'espace convexoïde* T *est simple. Alors l'anneau des pseudocycles de* $O = E - F$ *est isomorphe à l'anneau des pseudocycles de* $O' = E' - F'$ (cette isomorphie ne respecte pas en général la loi d'intersection).

Démonstration. — Soient $\theta(Z^p . O)$ et $\theta'(Z'^p . O')$ les homomorphismes associés aux deux équations

$$x = \tau(x)^{-1} x', \qquad x' = \tau'(x')^{-1} x.$$

Nous avons, d'après le théorème 33 [formule (82_2)],

$$\Theta(Z^p . O) \sim \theta'[\theta(Z^p . O) . O'],$$

$\Theta(Z^p . O)$ étant l'homomorphisme associé à l'équation

$$x = \tau(x)^{-1} \tau(x) x''.$$

Or, d'après le n° **92** *e* [formule (77_2)], cet homomorphisme $\Theta(Z^p . O)$ est l'identité. Donc

$$\theta'[\theta(Z^p . O) . O'] \sim Z^p. \tag{85}$$

Puisque E et E' jouent des rôles symétriques, nous avons de même

$$\theta[\theta'(Z'^p . O') . O] \sim Z'^p. \tag{86}$$

Les formules (85) et (86) prouvent que $\theta(Z^p . O)$ et $\theta'(Z'^p . O')$ sont deux isomorphismes, inverses l'un de l'autre, des anneaux des pseudocycles de O et O' (A.-H. Anhang, I, § 1, n° **8**, second critère d'isomorphie). c. q. f. d.

Exemple (*Théorème d'Alexander*) (A.-H. Chap. XI, § 4, n° **2**, coroll. II). — Si $E = E'$ est un espace euclidien, si F et F' sont deux ensembles homéomorphes et bicompacts (c'est-à-dire fermés et bornés) de points de E, alors les anneaux des pseudocycles de $O = E - F$ et $O' = E' - F'$ sont isomorphes.

Démonstration. — $\tau(x)$ sera la translation qui transforme un point de F en son homologue dans F'.

Contre-exemple. — L'hypothèse que T est simple, donc plus généralement l'hypothèse que l'homéomorphisme entre F et F′ est du type particulier $\theta(x) = \tau(x)\,x$ sont indispensables, comme le prouve le contre-exemple suivant : Sur deux tores E et E′ on peut tracer deux circonférences F et F′ telles que $O = E - F$ se décompose en deux domaines, tandis que $O' = E' - F'$ constitue un seul domaine; le groupe des pseudocycles à o dimension de O a deux éléments de base; celui de O′ n'en a qu'un; ces deux groupes ne sont donc pas isomorphes.

95. Invariance du domaine. — Les coefficients utilisés seront les entiers. Adjoignons aux hypothèses des théorèmes 34 et 35 la suivante : soit D l'une des composantes de O; sur $F + D$, $\tau(x)$ est défini et $\theta(x) = \tau(x)\,x$ est biunivoque, donc topologique. $\theta(D)$, étant connexe et étranger à F′, appartient à l'une des composantes D′ de O′. Si x' est un point de $O' - D'$, nous avons $\theta(D).x' = 0$, donc (th. 29 *bis*) $\theta(D^0.O).x' \sim 0$. Si x' est un point de D′, $\theta(D.O^0).x' \sim a\,x'^0$, a étant un entier indépendant du choix de x' si, comme nous le supposerons, l'hypothèse suivante est vérifiée (*Cf.*, n° **61**, La détermination des pseudocycles à o dimension) :

h. Deux points quelconques x' et y' de D′ font partie d'un même ensemble normal, bicompact et connexe B′ de points de D′.

[En effet : si $\theta(D^0.O).B' \sim a B'^0$, on a $\theta(D^0.O)x' \sim a\,x'^0$ et $\theta(D^0.O).y' \sim a y'$.] D'où $\theta(D^0.O) \sim a\,D'^0$.

D'après (85) nous devons avoir $a\theta'(D'^0) \sim D^0$, ce qui exige $a = \pm 1$. Donc

$$\theta(D^0.O) \sim \pm D'^0. \tag{87}$$

Si x' est un point de D′ nous avons donc $\theta(D^0.O).x' \sim \pm x'^0$, ce qui est impossible si $\theta(D).x' = 0$; d'où $D' \subset \theta(D)$. Or $\theta(D) \subset D'$. Donc

$$\theta(D) = D'. \tag{88}$$

En résumé l'hypothèse (h) a pour conséquence les relations (87) et (88). Faire l'hypothèse (h) pour tous les domaines D′ de E′ revient à faire l'hypothèse suivante : E′ possède un système de voisinages tel que deux points quelconques de l'un de ces voisinages peuvent être joints par un ensemble normal, bicompact et connexe de points de ce voisinage (démonstration analogue à celle de A.-H., Chap. I, § 3, th. XX). D'après le n° **92** *b* [formule (73)] (87) peut s'exprimer comme suit : si $x' \in D'$, l'équation $x = \tau(x)^{-1}x'$ possède une solution isolée, dont l'indice est ± 1.

Les résultats obtenus peuvent, en changeant de notations, s'énoncer comme suit :

Théorème 36. — *Adjoignons aux hypothèses du théorème* 34 *la suivante : deux points quelconques d'un domaine quelconque de* E *ou de* E′ *peuvent être joints par* *un ensemble normal, bicompact et connexe de points de ce domaine. [Cette hypothèse est vérifiée quand elle l'est pour un sytème particulier de voisinages.] Alors* $\theta(x)$ *représente l'intérieur de* F *sur l'intérieur de* F', *la frontière de* F *sur celle de* F'; *si* x' *est intérieur à* F', *l'indice de la solution* x *de l'équation* $x = \tau(x)^{-1}x'$ *vaut* ± 1.

Exemple (*Théorème de l'invariance du domaine de Brouwer*) (A.-H., Chap. X, § 2, th. IX). — Si $E = E'$ est un espace euclidien et si F et F' sont deux ensembles homéomorphes et bicompacts (c'est-à-dire fermés et bornés) de points de E, alors toute représentation topologique de F sur F' transforme l'intérieur de F en l'intérieur de F' et la frontière de F en la frontière de F'.

Démonstration. — $\tau(x)$ sera la translation qui transforme un point de F en son homologue de F'.

Contre-exemple. — L'hypothèse, que l'homéomorphisme entre F et F' est du type particulier $\theta(x) = \tau(x)x$, est essentielle, comme le prouve le contre-exemple suivant : $E = E'$ est l'espace de Hilbert, dont chaque point est une suite illimitée de nombres réels $(x_1, x_2, \ldots)$ tels que $x_1^2 + x_2^2 + \ldots$ converge; cet espace est métrique, le carré de la distance des points $(x_1, x_2, \ldots)$ et $(y_1, y_2, \ldots)$ étant $(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots$; la représentation topologique

$$\theta(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$$

transforme l'ensemble F des points vérifiant l'inégalité $x_1^2 + x_2^2 + \ldots \leqq 1$ en l'ensemble F' des points vérifiant les deux conditions : $x_1 = 0$, $x_2^2 + x_3^2 + \ldots \leqq 1$; F et F' sont fermés; F contient des points intérieurs, tandis que F' n'en contient pas.

96. Généralisation de l'alternative de Fredholm. — *Définitions.* — On nomme espace *topologique linéaire* tout espace topologique E dans lequel on peut définir la somme $x + x'$ de deux points x et x' et le produit ax d'un point x par un nombre réel a, ces deux opérations étant continues et ayant les propriétés suivantes :

$$x + x' = x' + x; \qquad (x + x') + x'' = x + (x' + x''); \qquad a(x + x') = ax + ax';$$
$$a(a'x) = (aa')x.$$

On nomme segment joignant deux points x et x' de E l'ensemble des points $ax + (1 - a)x'$ où $0 \leqq a \leqq 1$. On nomme *convexe* tout ensemble de points non vide contenant le segment qui joint deux quelconques de ses points. On nomme *espace topologique, linéaire, à voisinages convexes* tout espace topologique linéaire possédant un système de voisinages convexes. Dans un tel espace :

Lemme 45. — *La fermeture d'un ensemble convexe est convexe.*

Lemme 46. — *L'intersection de deux ensembles convexes est ou vide ou convexe.*

LEMME 47. — *Tout ensemble normal bicompact et convexe est* SIMPLE (en vertu du théorème 6).

LEMME 48. — *Tout ensemble e normal, bicompact et convexe est* CONVEXOÏDE : [D'après les lemmes 46 et 47 les ensembles fermés et convexes de points de e constituent des ensembles U possédant les propriétés a, b, c, énoncées au n° **76**.]

Définition. — On nomme représentation linéaire homogène de E dans E toute représentation $\tau(x)$ vérifiant les conditions

$$\tau(x+x') = \tau(x) + \tau(x'); \qquad \tau(ax) = a\tau(x).$$

LEMME 49. — *Toute transformation linéaire homogène transforme un ensemble convexe en un ensemble convexe.*

M. Schauder a rattaché l'alternative de Fredholm au théorème de l'invariance du domaine; par ce processus nous allons déduire du théorème 36 une généralisation de l'alternative de Fredholm.

COROLLAIRE 36. — *Soit* E *un espace topologique, linéaire, à voisinages convexes. Soit $\tau(x)$ une représentation linéaire homogène de* E *en lui-même. Supposons qu'il existe un ensemble ouvert* O *de points de* E *tels que $\overline{\tau(O)}$ fasse partie d'un ensemble normal et bicompact* B *de points de* E. *Alors, ou bien l'équation $x = \tau(x) + x'$ possède quel que soit x' une solution unique x, dont l'indice est ± 1, ou bien l'équation $x = \tau(x)$ possède une solution $x \neq 0$.*

Démonstration. — En effectuant une translation ([1]) ramenons-nous au cas où l'origine appartient à O; soit V un voisinage convexe de l'origine;

$$\overline{\tau(V)} \subset \overline{\tau(O)} \subset B;$$

donc $T = \overline{\tau(V)}$ est normal et bicompact; d'après les lemmes 49 et 45 T est convexe; donc, d'après le lemme 48, T est convexoïde. Posons $\theta(x) = x - \tau(x)$ et supposons que l'équation $x = \tau(x)$ entraîne $x = 0$; alors $\theta(x) = \theta(x')$ entraîne $x = x'$; $\theta(x)$ est biunivoque. D'après le théorème 36 $\theta(V)$ est donc un domaine D' et, si x' est un point de D', l'indice de la solution x de l'équation $x = \tau(x) + x'$ est ± 1. Si x' n'appartient pas à D', on peut trouver un nombre réel a tel que $x' \in a$D' (a D' étant le transformé de D' par l'homothétie $y = ax$); il suffit de remplacer V par aV et D' par aD' pour conclure de même : l'indice de la solution x de l'équation $x = \tau(x) + x'$ est ± 1.

([1]) Une translation est une transformation $x' = x + y$, y étant un point fixe.