JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

JULIEN KRAVTCHENKO

Sur la continuité des dérivées du potentiel

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 23 (1944), p. 97-161.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1944_9_23__97_0>

Sur la continuité des dérivées du potentiel;

PAR JULIEN **KRAVTCHENKO.**

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

[1] O. HÖLDER, *Beiträge zu Potenzialtheorie.* Diss. Inaug., Stuttgart, 1882.

[2] A. LIAPOUNOFF, *Mémoire sur le potentiel de double couche* (*Journal de Mathématiques*, 5e série, **4**, 1898).

[3] A. KORN, *Sur les équations de l'élasticité* (*Ann. École norm.*, Paris, **24**, 1907, p. 12-42. *Voir* aussi *Ueber Minimalflächen deren Randkurven wenig von ebenen Kurven abweichen* (*Abhandl. der Köng. Preuss Akad. Berlin*, 1904).

[4] N. M. GÜNTHER, *La théorie du potentiel*, du volume de la Collection Émile Borel, Gauthier-Villars, Paris, 1934.

[5] JULIEN KRAVTCHENKO, Thèse : *Sur le problème de représentation conforme de Helmholtz* (*Journal de Mathématiques*, 2e série, **20**, 1941, p. 65-69). Les résultats du présent travail ont été résumés dans une Note des *C. R. de l'Acad. des Sci.*, **213**, 1941, p. 676-678.

[6] G. MORERA, *Sulle derivata secunda della funzione potenziale di spazio* (*Rendiconti del Reale Instituto Lombardo*, série II, vol. XX, fasc. VIII, Milano, 1887).

[7] LÉON LICHTENSTEIN, *Ueber einige Hilfsätze der Potenzial théorie* (*voir* Mémoires parus, le premier dans *Mathematische Zeitschrift*, Band 23, 1925, p. 72-88, puis deux autres dans les *Berchte der Sächsischen Akademie der Wissenschaften*, Band LXXVIII, 1926, p. 147-212 et 213-239).

[8] HENRI VILLAT, *Leçons sur la théorie des tourbillons*, Paris, Gauthier-Villars, 1930, p. 239-255.

[8'] A. OUDART, Thèse : *Sur le schéma de Helmholtz-Kirchhof* (*Journal de Mathématiques*, **22**; *cf.* p. 266-270).

[9] HENRIK PETRINI, *Sur les dérivées premières et secondes du potentiel* (*Acta Mathematica*, **31**, 1907, p. 127-332).

[10] JACQUES HADAMARD, *Leçons sur la propagation des ondes*, Paris, Hermann, 1907, p. 1-57.

[11] Mme P. DUBREIL-JACOTIN, *Sur la détermination des ondes permanentes d'ampleur finie. Thèse*, Paris, 1934, p. 31-36 (chez Gauthier-Villars), insérée au *Journal de Mathématiques* pour l'année 1934.

[12] HENRI PONCIN, *Sur les équations du mouvement d'un milieu continu dans le cas des discontinuités stationnaires relatives à la densité* [*Journal de Mathématiques*, 1939, p. 385-440 (*cf.* p. 387)].

[13] CAÏUS JACOB, *Sur la détermination des fonctions harmoniques* [*Thèse*, Paris, 1935 (insérée dans *Mathematica de Cluj* de 1935), p. 6 et 7].

[14] GEORGES GIRAUD, *Sur le problème de Dirichlet généralisé* (*Ann. École norm.*, t. XLIII, 1926, p. 1-128), *cf.* spécialement p. 38 et suivantes; deuxième Mémoire sous le même titre et dans le même Recueil, t. 46, 1939, p. 131-245; *cf.* spécialement p. 136 et suivantes).

[15] ÉDOUARD GOURSAT, *Cours d'Analyse*, t. III, p. 251, formule (8).

CHAPITRE I.

Introduction.

1. On connaît l'importance de la théorie du potentiel; plusieurs problèmes fondamentaux de l'Hydrodynamique, de la théorie de l'Élasticité, de l'Électricité, etc., se ramènent, en dernière analyse, à l'étude des problèmes aux limites intéressant les fonctions harmoniques, celles-ci étant exprimées à l'aide des potentiels convenables.

Une des principales difficultés que l'on rencontre dans la discussion de tels problèmes trouve son origine dans la forme même des expressions utilisées pour représenter les potentiels : celles-ci, en effet (ou certaines de leurs dérivées), perdent toute signification ou présentent des discontinuités sur les multiplicités-supports des masses attirantes. On reconnaît aisément que la manière dont se comportent les expressions envisagées en leurs points de singularité est étroitement liée aux propriétés de régularité des distributions des densités d'une part, et aux propriétés de régularité des multiplicités-supports d'autre part. Un exemple classique justifiera cette assertion. Considérons dans l'espace à trois dimensions un domaine D dont l'élément de volume au point P sera noté $d\tau$; soient $\mu(P)$ la densité cubique de la matière attirante en P, U(M) le potentiel créé par l'ensemble des masses attirantes contenues dans D au point M; on a

$$U(M) = \iiint_D \frac{\mu(P)}{MP}\, d\tau. \tag{1}$$

Il est clair que l'élément différentiel de l'expression précédente de U(M) possède (lorsque M est intérieur à D), une singularité au point M, et cependant on sait que la fonction U(M) admet des dérivées partielles de deuxième ordre continues dans D et vérifie dans ce domaine l'équation de Poisson

$$\Delta U = -4\pi\mu(M)$$

toutes les fois que la fonction $\mu(M)$ admet dans D des dérivées partielles de premier ordre continues; c'est donc bien une hypothèse de régularité concernant la répartition des masses attirantes qui permet de justifier le résultat qui précède.

Pour les applications, il est fort importaut d'établir des propriétés analogues sous des hypothèses plus larges. Dans cet ordre d'idées, nous devons, en premier lieu, signaler les résultats fondamentaux de Hölder [1], de Liapounoff [2] et de Korn [3] dont on trouvera un exposé synthétique (avec d'importants compléments personnels) dans l'ouvrage de M. N. Günther [4]. A titre d'exemple, rappelons un énoncé dû à ces auteurs : si la fonction $\mu(M)$ vérifie dans le domaine D une condition de Hölder (¹) d'indice α

$$|\mu(M) - \mu(P)| \leqq \text{const.}\, |MP|^{\alpha} \qquad (0 < \alpha < 1), \tag{2}$$

M et P étant deux points quelconques intérieurs à D, les dérivées $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$ (x, y, z étant les coordonnées cartésiennes de M), existent dans D et y vérifient une inégalité de la forme (2) *de même indice* α; le laplacien ΔU de U sera encore égal à $-4\pi\mu$ (²). Si l'on fait $\alpha = 1$ dans l'inégalité (2), le résultat précédent doit être retouché et les dérivées $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cdots$ vérifient dans D une inégalité du type (2) où α est aussi voisin de 1 qu'on le veut.

On remarquera que l'énoncé ci-dessus ne se borne pas à faire connaître une condition suffisante pour assurer l'existence des dérivées secondes du potentiel newtonien, défini par (1), mais fournit encore un module de continuité pour des dérivées en cause; c'est là un genre de propositions particulièrement utile dans les applications.

2. Les seules hypothèses de régularité que font intervenir les énoncés précédents intéressent la densité $\mu(M)$; par contre, l'étude des propriétés du potentiel de simple ou de double couche nécessite quelques précisions sur la nature des multiplicités-supports des masses attirantes : ces multiplicités (surfaces ou courbes) seront supposées pourvues de plans tangents ou de tangentes continues (sauf le long de quelques lignes ou en quelques points singuliers). Lorsque le module de continuité de ces éléments de contact est höldérien d'indice α (nous préciserons plus tard le sens de cette locution), en même temps que celui de la densité superficielle $\mu(M)$ des masses attirantes, étalées sur les multiplicités-supports, on peut résumer comme il suit l'ensemble des résultats acquis par les auteurs précités : certaines dérivées des potentiels considérés vérifient une condition de Hölder de même indice.

(¹) Quelques auteurs appellent *condition de Lipschitz généralisée* l'inégalité (2) du texte. G. Giraud m'a signalé, du reste, que la priorité en cette matière appartient, sans conteste, à Lipschitz; nous nous en tiendrons cependant à l'attribution consacrée par l'usage.

(²) Ce résultat est dû à Hölder (*loc. cit.*).

3. A ma connaissance, les problèmes dont on vient de rappeler les énoncés n'ont été étudiés que dans l'hypothèse de la continuité hölderienne. Le but de ce travail est d'appliquer les raisonnements de Liapounoff, Korn et de Günther à des cas plus généraux. Soit $f(MP)$ le module de continuité commun à la densité des masses attirantes (spatiales ou superficielles) et aux multiplicités-supports; de par sa définition même, nous avons, par exemple (cas de la distribution cubique),

$$(3) \qquad |\mu(M)-\mu(P)| \leqq f(MP),$$

où $f(MP)$ est une fonction positive, continue, non décroissante (1) de la distance MP, telle que $f(0)=0$. Nous poserons

$$(4) \qquad \varphi(MP)=\int_0^{MP}\frac{f(r)}{r}\,dr,$$

en admettant essentiellement que l'intégrale du second membre a un sens. D'après cela, $\varphi(MP)$ possède toutes les propriétés d'un module de continuité, puisque c'est une fonction positive, continue, non décroissante de son argument, nulle en même temps que MP. Nous dirons que le module de continuité $\varphi(MP)$ est *associé* au module de continuité $f(MP)$. Nous supposerons de plus qu'à tout nombre positif a correspond une constante $K(f, a)$ telle que

$$(4') \qquad MP\int_{MP}^{a}\frac{f(r)}{r^2}\,dr \leqq K(f, a)\,\varphi(MP)$$

nous nous proposons de faire voir qu'aux masses attirantes et aux multiplicités-supports vérifiant des inégalités telles que (3), correspondent des potentiels dont les dérivées d'ordre déterminé (variable d'une expression à l'autre) possèdent, à une constante multiplicative près, le module de continuité $\varphi(MP)$ associé à $f(MP)$. Si, par exemple, on examine le potentiel newtonien (1) créé par une répartition spatiale des masses, vérifiant (3) à l'intérieur de D, les dérivées $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$ existeront; de plus, celles-ci vérifieront dans le

(1) L'hypothèse de la non-décroissance du module de continuité $f(r)$ est superflue dans beaucoup d'applications. Il suffit souvent que $f(r)$ satisfasse à la condition suivante : ε étant un nombre positif aussi petit que l'on veut, on peut déterminer un nombre positif $\eta(\varepsilon)$ assez petit pour que l'inégalité

$$f(r) \leqq \varepsilon$$

ait lieu dès que

$$0 \leqq r \leqq \eta(\varepsilon).$$

Mais nous avons adopté une définition plus restrictive de $f(r)$, à laquelle satisfont tous les modules de continuité usuels et qui offre de grands avantages.

domaine D l'équation de Poisson et satisferont aux inégalités telles que

$$\left|\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_M - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_{M'}\right| \leqq \text{const.}\,\varphi(MM'),$$

où M et M′ sont deux points intérieurs à D, où const. désigne un nombre positif fixe et où $\varphi(MP)$ se déduit de (3) au moyen de (4). Si, en particulier, $f(MP) = \frac{\text{const.}}{MP^\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, c'est-à-dire si la continuité de la densité est hölderienne, le module $\varphi(MP)$ associé correspondant sera, d'après (4), également hölderien; on retrouve ainsi les résultats de Liapounoff et de Korn. Si, au contraire, $f(MP) = \frac{\text{const.}}{\left|\text{Log}\frac{1}{MP}\right|^n}$, $n > 1$, c'est-à-dire si la densité est à continuité logarithmique, il vient, d'après (4),

$$\varphi(MP) = \frac{\text{const.}}{\left|\text{Log}\frac{1}{MP}\right|^{n-1}};$$

dans ma Thèse, j'ai été amené à considérer d'une manière systématique ce mode de continuité, qui s'introduit d'une manière naturelle dans l'étude des problèmes de représentation conforme de Riemann et de Helmholtz [5]. Cette circonstance semble devoir accroître l'importance (dans le cas du potentiel plan, tout au moins) du module de continuité logarithmique qu'on vient de définir.

Bien entendu, il serait aisé de multiplier les exemples des modules associés satisfaisant aux conditions (4) et (4′) et à toutes les conditions complémentaires de régularité qui seront énumérées au paragraphe 9 *bis*; nous nous bornerons aux exemples précités qui paraissent à la fois les plus connus, les plus simples et les plus utiles.

Remarque. — Nos conclusions s'appliquent à tous les modules usuels de continuité, excepté la continuité au sens de Lipschitz

$$f(MP) = \text{const.}\,MP.$$

Dans ce cas, en effet, le module de continuité $\varphi(MP)$ qui intervient dans les applications n'est plus donné par la formule (4), mais, pour des raisons qui seront précisées au paragraphe 9 *bis*, est de la forme

$$\varphi(MP) = \text{const.}\,MP\left|\text{Log}\frac{1}{MP}\right|,$$

donc, *a fortiori*, de la forme

$$\varphi(MP) = \text{const.}\,MP^\alpha,$$

où α est une constante aussi voisine de l'unité qu'on le veut. Pour éviter les redites, nous exclurons une fois pour toutes le cas où le module $f(\mathrm{MP})$ soit lipschitzien. Ceci ne constitue pas une restriction sérieuse puisque le module de continuité lipschitzien a été étudié directement par plusieurs auteurs. Du reste, les méthodes du présent Mémoire peuvent être étendues à ce mode de continuité [*cf.*, p. 106, le renvoi (1) à la formule (4') du paragraphe **9** *bis*].

4. En dernière analyse, les propriétés de continuité des dérivées du potentiel que nous aurons à considérer tiennent à l'existence de l'intégrale $\int_0^{\mathrm{MP}} \frac{f(r)}{r}\,dr$, et à l'inégalité (4'). L'idée d'utiliser l'expression $\varphi(\mathrm{MP})$ [*cf.* (4)] d'une manière générale, sans particulariser la forme de $f(\mathrm{MP})$, est due, semble-t-il, à G. Morera [6]. Mais cet auteur ne s'est placé à ce point de vue que pour établir l'existence de certaines dérivées du potentiel, sans se préoccuper de leur mode de continuité; encore ne l'a-t-il fait que dans le cas particulier du potentiel newtonien.

5. Les méthodes que j'emploie ne sont pas, en général, nouvelles. Pour les démonstrations, j'ai fait de larges emprunts aux Mémoires fondamentaux de Liapounoff et de Korn, ainsi qu'à l'ouvrage déjà cité de M. Günther. J'ai utilisé également quelques résultats de L. Lichtenstein [7] sous la forme que M. H. Villat [8] leur a donnée.

Du reste, les méthodes de ceux qui ont abordé la théorie sont très voisines quant à leur principe. Il s'agit toujours d'étudier les intégrales ou des différences d'intégrales dont le noyau devient singulier au point M, intérieur au domaine d'intégration D et, éventuellement, en un point M_1, voisin de M. On partage alors D en domaines partiels $\mathrm{D} - \mathrm{L}(\mathrm{M}, \mathrm{R})$, $\mathrm{L}(\mathrm{M}, \mathrm{R}) - \mathrm{L}(\mathrm{M}, 2\mathrm{MM}_1)$, $\mathrm{L}(\mathrm{M}, 2\mathrm{MM}_1)$ où $\mathrm{L}(\mathrm{M}, \mathrm{R})$ désigne une sphère centrée sur M et de rayon R assez petit pour que $\mathrm{L}(\mathrm{M}, \mathrm{R})$ soit contenue dans D. De plus, dans la sphère $\mathrm{L}(\mathrm{M}, \mathrm{R})$, l'élément différentiel des intégrales étudiées possède, par hypothèse, certaines propriétés de régularité. Il suit de là que les sommations des noyaux, étendues au domaine $\mathrm{D} - \mathrm{L}(\mathrm{M}, \mathrm{R})$, sont exemptes de singularités, celles étendues au domaine $\mathrm{L}(\mathrm{M}, \mathrm{R}) - \mathrm{L}(\mathrm{M}, 2\mathrm{MM}_1)$ sont bornées, en vertu des hypothèses de régularité, alors que le domaine $\mathrm{L}(\mathrm{M}, 2\mathrm{MM}_1)$ fournit une contribution qui tend vers zéro avec $2\mathrm{MM}_1$. Ce sont de tels artifices qui ont servi à Fatou et à Priwaloff dans leurs études sur les valeurs frontières des fonctions analytiques complexes, définies dans un cercle par la formule de Poisson-Schwarz (voir ma *Thèse*, § 11, *loc. cit.* [5] *cf.* aussi la Thèse de M. A. Oudart, *loc. cit.* [8'], §§ **29** et **29'**).

Les méthodes ne diffèrent que par les transformations appliquées aux noyaux pour mettre en évidence les singularités de ceux-ci. Je me borne, en général, à reprendre les calculs des auteurs précités et à montrer que leurs conclusions subsistent lorsqu'on substitue à l'hypothèse de la continuité hölderienne des hypothèses plus larges qui seront énoncées au paragraphe 9 *bis*. J'ai suivi, en principe, le mode d'exposition adopté par M. Günther; plusieurs artifices utilisés dans ce Mémoire lui sont dus (spécialement ceux que j'emploie dans l'étude des dérivées obliques du potentiel de simple couche et qui ont permis à cet auteur de justifier les résultats que Liapounoff s'est borné à énoncer).

Aussi, ma contribution personnelle à la théorie est-elle des plus modestes. J'ai d'abord montré que toutes les hypothèses préliminaires, connues sous le nom des hypothèses de Liapounoff, ne sont pas indépendantes entre elles. Peut-être ai-je réussi aussi à systématiser un peu plus les procédés disparates auxquels les auteurs précités ont eu recours et, par là, à donner à l'exposé de la théorie un peu plus d'unité et de simplicité; je pense, également, avoir mieux dégagé la provenance des constantes qui interviennent dans les inégalités, ce qui peut avoir son prix dans les applications.

6. H. Petrini [9] a publié un Mémoire fondamental sur le problème de l'existence des dérivées du potentiel; il n'est pas inutile d'insister sur la différence entre son point de vue et celui auquel je me suis constamment placé au cours de ce travail.

Pour Petrini, l'important est de déterminer les conditions à la fois nécessaires et suffisantes pour assurer *l'existence* de certaines dérivées du potentiel *en un point déterminé*, et cela, sans se préoccuper du mode de continuité de celles-ci. Ces résultats, *d'un caractère local* comme on le voit, ramènent le problème à la discussion de la convergence de quelques expressions intégrales. Il est clair, dès lors, qu'on ne peut préciser davantage le mode de continuité des éléments donnés sans que la condition nécessaire et suffisante cesse d'être nécessaire.

Au contraire, nous chercherons à imposer aux données des conditions de continuité suffisantes et explicites, moyennant lesquelles les expressions intégrales du potentiel (ou de ses dérivées) posséderont un module de continuité bien déterminé dans tout le domaine de définition des expressions en cause.

7. Signalons que les résultats obtenus dans ce travail permettent d'étendre sans difficulté la portée de plusieurs travaux récents d'Analyse et de Physique mathématique, travaux qui utilisent d'une manière exclusive la continuité hölderienne.

A titre d'exemple, nous citerons les conclusions de M. J. Hadamard [10], relatives à la propagation des discontinuités dans les milieux fluides, de Mme P. Dubreil [11], relatives aux ondes liquides, de M. H. Poncin [12], relatives à la cinématique des milieux continus, de M. C. Jacob [13], relatives aux problèmes aux limites de la théorie des fonctions harmoniques, de G. Giraud [14], relatives aux équations intégrales, etc. Je ne reviendrai pas sur le détail de ces extensions et je me bornerai à reprendre, à la faveur des résultats nouvellement acquis, un calcul de G. Giraud, important en raison de ses applications à la théorie des équations intégrales. D'une manière générale, on pourra remplacer dans les travaux précités la continuité hölderienne par les conditions moins restrictives introduites au paragraphe 9^{bis} pour obtenir des conclusions encore valables.

J'ai voulu présenter un exposé complet et autonome de la théorie. J'ai donc tenu à éviter, dans toute la mesure du possible, des renvois à d'autres Mémoires originaux et n'ai pas craint de reproduire plus d'une démonstration que d'aucuns pourront trouver inutile parce que trop classique; le lecteur averti n'aura aucune peine à passer les paragraphes correspondants, destinés uniquement à ceux qui désireraient se familiariser pour la première fois avec la théorie du potentiel.

L'étude du problème de la continuité des dérivées du potentiel m'a été suggérée par M. H. Villat; je le remercie très vivement de l'intérêt qu'il a bien voulu porter à mes recherches et des encouragements et des directives que je n'ai cessé de recevoir de lui. J'exprime également toute ma gratitude à M. A. Denjoy pour toutes les utiles indications dont je lui suis redevable.

CHAPITRE II.

Hypothèses de régularité.
Propriétés élémentaires des surfaces de Liapounoff.

8. Pour simplifier et abréger l'exposé, je me bornerai au cas du potentiel newtonien créé par des masses attirantes à trois dimensions, comme aux potentiels de simple et de double couche dans l'espace ordinaire. Mais l'extension au cas de deux ou de plus de trois dimensions serait immédiate. En particulier, le lecteur pourra se reporter aux travaux de M. Giraud, déjà cités pour se rendre compte des retouches qu'il y aurait lieu d'apporter à notre exposition pour l'adapter au cas de n dimensions.

Bien que nous ayons déjà défini (*cf.* § 3) le sens de certaines locutions, nous reprenons la question de nouveau, en raison de son importance.

9. Soit $\mu(M)$ une fonction scalaire du point $M(x, y, z)$ de l'espace ordinaire, rapporté à un système d'axes de coordonnées rectangulaires $Oxyz$; nous admettrons que $\mu(M)$ est définie dans un domaine borné D où elle possède le module de continuité $f(MP)$; cela veut dire que l'on a pour deux points quelconques, M et P, de D

$$|\mu(M) - \mu(P)| \leqq f(MP), \tag{3}$$

où $f(MP)$ est une fonction positive, continue, non décroissante de son argument, nulle pour $MP = 0$.

Nous dirons encore que la fonction $\mu(M)$ vérifie dans D une condition (f), ou que la fonction $\mu(M)$ appartient dans D à l'espace abstrait (f) [1].

9 *bis*. Il faut, maintenant, introduire relativement au module $f(MP)$ quelques hypothèses complémentaires de régularité et de préciser, en particulier, la manière dont $f(MP)$, ou $f(r)$, tend vers zéro avec son argument. Remarquons, d'abord, que l'ordre de l'infiniment petit $f(r)$ n'est pas changé lorsqu'on remplace $f(r)$ par $Kf(r)$, K étant une constante positive fixe; le mode de continuité n'est alors pas altéré et il nous arrivera d'écrire $f(r)$ au lieu de $Kf(r)$, à condition de préciser avec soin la manière dont K peut être majorée.

Il y a grand intérêt à se limiter aux modules les plus réguliers quand on ne vise pas à atteindre une généralité superflue pour les applications. Du reste, chaque module $f(r)$ peut être remplacé par un module dominant $f_1(r)$ [tel que $f(r) \leqq f_1(r)$], la différence $f_1(r) - f(r)$ pouvant devenir aussi petite qu'on le veut et $f_1(r)$ étant une fonction aussi régulière qu'on le veut.

Nous pouvons donc supposer, sans restreindre pratiquement la généralité de notre théorie, que la dérivée $f'(r)$ existe et est continue sauf pour $r = 0$, en général. D'après cela, $\frac{f(r)}{r}$ tend vers une limite déterminée, finie ou infinie, lorsque r tend vers zéro. En tout état de cause, il existe une constante positive k, non nulle telle que

$$\lim_{r=0} \frac{f(r)}{r} \geqq k.$$

Sinon, en effet, nous aurions

$$\lim_{r=0} \frac{f(r)}{r} = 0,$$

en sorte que, d'après (3), toutes les dérivées partielles de $\mu(P)$ seraient nulles et $\mu(P)$ se réduirait à une constante. Il suit de là qu'en écartant le cas de la continuité lipschitzienne

$$f(r) = \text{const.}\, r,$$

où $\lim\limits_{r=0} \frac{f(r)}{r}$ est bornée, on a, en général,

$$\lim_{r=0} \frac{f(r)}{r} = \infty.$$

---

(1) Lorsque la continuité sera höldérienne d'indice α (*cf.* § 1), nous dirons que $\mu(M)$ appartient à l'espace H_α; enfin, lorsque la continuité sera logarithmique d'indice n (*cf.* § 3), nous dirons que $\mu(M)$ appartient à l'espace L_n.

(2) Liapounoff s'est borné au cas où

$$f(MP) = \text{const.}\, MP^\alpha; \qquad 0 < \alpha < 1.$$

On pourra alors écrire en multipliant, au besoin, $f(r)$ par une constante positive convenable

$$MP \leqq f(MP),$$

de telle sorte que cette inégalité demeure valable dans tous les intervalles bornés de $MP = r$ que l'on aura à envisager. Par exemple, si l'on considère une répartition spatiale des masses attirantes dans un domaine borné D ou une répartition superficielle sur la surface S qui limite D, dont la densité vérifie la condition (f), la constante multiplicative que nous venons d'introduire sera, en général, fonction du diamètre l de l'ensemble $D + S$ et une fonctionnelle du module $f(r)$ lui-même. Comme D est borné, l est borné; par ailleurs, le quotient $\frac{r}{f(r)}$ est borné dans l'intervalle $0 \leqq r \leqq l$, car pour $r \neq 0$, $f(r) \neq 0$, $f(r)$ étant une fonction continue et croissante.

En ce qui concerne l'ordre de l'infiniment petit $f(r)$, il sera toujours supposé que $f(r)$ tend vers zéro assez vite pour assurer l'existence du module associé $\varphi(r)$, défini par (4). Il est clair, par ailleurs, que l'intégrale $\int_\varepsilon^a \frac{f(r)}{r^2} dr$, où a est une constante positive, diverge lorsque ε tend vers zéro. Nous admettrons, cependant, qu'on peut trouver une constante positive $K(f, a)$, qui sera une fonctionnelle de $f(r)$ et de a, telle que [*cf.* § 3] (¹)

$$(4') \qquad \varepsilon \int_\varepsilon^a \frac{f(r)}{r^2} dr \leqq K(f, a) \int_0^\varepsilon \frac{f(r)}{r} dr = K(f, a)\varphi(\varepsilon) \qquad \text{pour } 0 \leqq \varepsilon \leqq a.$$

Remarquons que tous les modules usuels, le cas de la continuité lipschitzienne excepté, satisfont à la condition précédente; en particulier on le vérifie aisément pour la continuité höldérienne $f(r) = \text{const.}\, r^\alpha$, $0 < \alpha < 1$ et pour la continuité logarithmique $f(r) = \frac{\text{const.}}{|\log r|^n}$, $n > 1$. D'une manière plus générale,

(¹) Remarquons qu'il serait aisé d'étendre les méthodes du présent Mémoire à une catégorie de modules de continuité un peu plus générale. En effet, il peut se faire que $f(r)$ ne vérifie pas (4′), mais une inégalité telle que

$$\varepsilon \int_\varepsilon^a \frac{f(r)}{r^2} dr \leqq \psi(\varepsilon),$$

où $\psi(\varepsilon)$ est un module de continuité, plus faible que le module associé $\varphi(\varepsilon)$, c'est-à-dire tel que $\lim_{\varepsilon=0} \frac{\varphi(\varepsilon)}{\psi(\varepsilon)} = 0$. Dans ce cas, les conclusions de ce travail demeurent valables à condition de remplacer partout $\varphi(\varepsilon)$ par $\psi(\varepsilon)$.

Tel est, en particulier, le cas du module lipschitzien $f(r) = \text{const.}\, r$. Son module associé est encore lipschitzien, mais l'inégalité (4′) n'est plus satisfaite. Il suffira alors de choisir pour $\psi(\varepsilon)$ le module $\text{const.}\, r^\alpha$, $0 < \alpha < 1$ (*cf.* la remarque finale du paragraphe 3).

il en sera ainsi toutes les fois que

$$(4'')\qquad \lim_{\varepsilon=0} \varepsilon \frac{f'(\varepsilon)}{f(\varepsilon)} \leqq k < 1,$$

k étant une constante positive. Tout revient, en effet, à vérifier $(4')$ pour de petites valeurs de ε, puisque $\int_\varepsilon^a \frac{f(r)}{r^2}\,dr$ est continue et dérivable tant que $\varepsilon \neq 0$. Or, en appliquant la règle de l'Hopital, nous avons [*cf.* (4)]

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\varepsilon \int_\varepsilon^a \frac{f(r)}{r^2}\,dr}{\varphi(\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon=0} \frac{\int_\varepsilon^a \frac{f(r)}{r^2}\,dr}{\frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon}} - 1.$$

D'après cela, le premier membre sera borné pour $\varepsilon = 0$ en même temps que le premier terme du second membre. Or il vient, en appliquant une deuxième fois la règle de l'Hopital,

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\int_\varepsilon^a \frac{f(r)}{r^2}\,dr}{\frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon}} = \lim \frac{1}{\left[1 - \varepsilon \frac{f'(\varepsilon)}{f(\varepsilon)}\right]}.$$

Comme, d'après $(4'')$ et comme $f'(\varepsilon) \geqq 0$,

$$\lim_{\varepsilon=0} \left[1 - \varepsilon \frac{f'(\varepsilon)}{f(\varepsilon)}\right] \geqq 1 - k > 0,$$

le second membre de l'égalité précédente sera majoré par $\frac{1}{1-k}$, ce qui achève de justifier $(4')$.

Notons enfin, qu'en multipliant, au besoin, $\varphi(r)$ par une constante positive convenable qui dépendra de $f(r)$ et de l'amplitude, toujours finie, de l'intervalle des variations de r, on peut toujours écrire

$$(4''')\qquad f(r) \leqq \varphi(r).$$

Il n'y a besoin de vérifier $(4''')$ que pour de petites valeurs de r, puisque $\varphi(r) > 0$ pour $r > 0$. Or, la règle de l'Hopital donne [*cf.* $(4'')$]

$$\lim_{r=0} \frac{f(r)}{\varphi(r)} = \lim_{r=0} r \frac{f'(r)}{f(r)} \leqq 1.$$

Il suit de là que le quotient $\frac{f(r)}{\varphi(r)}$ reste borné dans le voisinage de $r = 0$, ce qui justifie notre assertion.

Remarques. — *a.* Nous sommes maintenant en mesure de préciser les indications sommaires, données au cours du paragraphe 5, sur la méthode que nous suivrons. En dernière analyse, les intégrales singulières que nous étudierons se présenteront — en posant $MP = r$ et en négligeant des facteurs bornés — sous la forme

$$\int_0^{2MM'} \frac{|\mu(P) - \mu(M)|}{r} dr$$

lorsqu'il s'agit d'intégrations étendues au domaine $L(M, 2MM')$, où sous la forme

$$MM' \int_{2MM'}^{R} \frac{|\mu(P) - \mu(M)|}{r^2} dr,$$

lorsqu'il s'agit d'intégrations étendues au domaine $L(M, R) - L(M, 2MM')$. Comme la densité $\mu(P)$ vérifie une condition (f), nous pourrons majorer les valeurs absolues de ces intégrales par des expressions telles que

$$\int_0^{2MM'} \frac{f(r)}{r} dr \quad \text{et} \quad MM' \int_{2MM'}^{R} \frac{f(r)}{r^2} dr$$

qui, d'après (4), (4′) et (4″), sont respectivement majorées par $\varphi(2MM')$ et $\frac{1}{2}K(f, R)\varphi(2MM')$. On voit donc qu'en fait tous les résultats de Günther et de Liapounoff tiennent à l'existence — dans le cas du module de continuité hölderien — du module associé également hölderien et à l'existence d'une constante telle que $K(f, a)$ [*cf.* (4′)].

b. Pour les applications, il est souvent de la plus haute importance d'expliciter les constantes multiplicatives qui figurent dans l'expression d'un module de continuité. Malheureusement, dans certains cas cette explicitation est très laborieuse si l'on veut aboutir à des énoncés généraux; du reste, les formules obtenues seraient d'une complication qui les rendraient inutilisables. Voici donc la solution intermédiaire à laquelle je me suis arrêté.

Au cours des Chapitres III, IV, V et les trois premiers paragraphes du Chapitre VII (le paragraphe **31** *bis* excepté), je suppose simplement que le module $\varphi(r)$ se déduit de $f(r)$ au moyen de l'opération (4) et qu'il contient en outre en facteur une constante multiplicative telle que les inégalités

$$r < f(r) \leqq \varphi(r)$$

soient vérifiées dans tout le domaine où r est susceptible de varier. Nous avons vu, au cours de ce paragraphe, qu'une telle constante existe toujours et qu'elle peut être majorée par une fonction du diamètre l de la multiplicité-support des masses attirantes. Il suit de là que nous n'emploierons pas dans $\varphi(r)$ la constante multiplicative $K(f, a)$, définie par (4); cela permet de mieux mettre en évidence les propriétés qui résultent de l'hypothèse de régularité que traduit (4′) et de donner aux inégalités des chapitres précités, sans trop les alourdir, une forme aussi explicite que possible.

Au contraire, dans le Chapitre VI et dans les paragraphes finals du Chapitre VII, je me borne à établir l'existence des constantes multiplicatives bornées dans l'expression du module de continuité. Mais je me suis efforcé de conduire la rédaction de manière à permettre au lecteur d'expliciter facilement toutes les limitations désirables dans les applications qu'il aurait à faire des méthodes exposées dans ce Mémoire.

c. Les notations que j'ai choisies offrent, à ce qu'il m'a semblé, l'avantage d'une simplicité relative. Mais cette simplicité n'est pas sans présenter des inconvénients. Pour abréger les écritures, j'utilise la même notation $f(\mathrm{MP})$, pour représenter le module de continuité de la densité $\mu(\mathrm{P})$ des masses attirantes et celui des surfaces sur lesquelles ces masses sont répandues (*cf.* § **10**). Il en résulte que les inégalités que nous aurons à écrire se présentent sous une forme hétérogène. De plus, cette notation condensée ne permet pas de distinguer les propriétés des potentiels qui résultent de l'hypothèse de la régularité des masses attirantes des propriétés qu'entraîne l'hypothèse de régularité de leur multiplicité-support.

10. Nous appellerons S la surface fermée qui limite le domaine D; pour simplifier, nous pourrons supposer que D est d'un seul tenant.

Lorsque nous étudierons les potentiels créés dans l'espace par des répartitions de simple ou de double couche étalées sur S, nous admettrons, en outre, que la surface fermée S possède les propriétés suivantes : on peut décomposer S en un nombre fini de portions de surface d'un seul tenant $S_1, S_2, \ldots, S_n$, que nous appellerons portions régulières de S, chacune des portions S_i étant assujettie à satisfaire aux trois conditions ci-après, que nous appellerons conditions de Liapounoff généralisées ou plus simplement les conditions L_f [1].

1° *En chacun de ses points étrangers à sa frontière,* S_i *admet un plan tangent et, par suite, une normale bien déterminée.*

2° *Soient* M *et* P *deux points de* S_i, $(\vec{N}, \vec{N'})$ *l'angle des demi-normales* $\vec{N}$ *et* $\vec{N'}$ (*extérieures toutes les deux à* S, *pour fixer les idées*) *en* M *et en* P *à* S_i : *on a*

$$\left|(\vec{N'}, \vec{N})\right| \leqq f(\mathrm{MP}), \tag{5}$$

où $f(r)$ désigne un module de continuité (*cf.* § **9**). La fonction $f(\mathrm{MP})$ sera dite le module de continuité de la multiplicité-support S.

3° *Considérons une sphère centrée en un point* M *de* S_i *et de rayon* $\rho(\mathrm{M})$ *assez petit pour que l'intersection de la portion de* S_i, *intérieure à la sphère avec toute*

[1] Dans le cours du Chapitre VIII, nous montrerons que la deuxième des conditions L_f entraîne la troisième; celle-ci est, par suite, surabondante (*cf.* à ce sujet la première partie du Chapitre VIII).

parallèle à la normale en M *à* S_i *se réduise à un point unique. Il est clair que toute sphère concentrique à* M *et de rayon inférieur à* $\rho(M)$ *possède la même propriété. Nous admettrons que l'ensemble des nombres* $\rho(M)$ *relatifs à l'ensemble des points de la surface* S *admet une borne inférieure non nulle* R.

11. Nous désignerons par L(M, R) ou, plus simplement L(M), la sphère ainsi attachée au point M et nous lui donnerons à la suite de M. Günther, le nom de sphère de Liapounoff, et cela bien que O. Hölder l'ait déjà introduite bien avant l'analyste russe. Plus généralement, nous désignerons par L(M, r) toute sphère centrée sur M et de rayon r.

D'après la définition même de R, toute sphère L(M, r) telle que $R \geqq r$ possède la propriété énoncée à l'alinéa 3 du précédent paragraphe; cela nous permettra, le cas échéant, de choisir le rayon commun à toutes les sphères de Liapounoff assez petit, mais fini, de manière à satisfaire à certaines conditions supplémentaires qui seront précisées par la suite.

12. Nous pouvons maintenant nous faire une idée précise des surfaces de Liapounoff S. Celles-ci seront constituées par des portions de surface régulières S_i, se raccordant entre elles le long des arêtes de rebroussement de la surface fermée S; un point M de S_i est dit régulier s'il est étranger à la frontière de S_i. D'après ce qui précède, le plan tangent en M à S_i tend vers une position limite bien déterminée lorsque le point ordinaire M tend vers un point frontière P de S_i. Mais le point P pouvant appartenir à plusieurs portions régulières de S à la fois, la surface S peut admettre en P plusieurs plans tangents. Précisons quelques autres conséquences des hypothèses de Liapounoff.

Soit

$$F_i(x, y, z) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{6}$$

l'équation de la portion S_i de S. D'après la première hypothèse de Liapounoff, il existe une normale en chaque point de S_i; par suite, en chaque point M de S_i les dérivées $\frac{\partial F_i}{\partial x}, \frac{\partial F_i}{\partial y}, \frac{\partial F_i}{\partial z}$ existent et l'une, au moins, de ces dérivées n'est pas nulle (sans quoi les trois cosinus directeurs de la normale seraient nuls, ce qui est impossible). Le théorème fondamental sur les fonctions implicites montre qu'on peut alors résoudre (6) par rapport à l'une, au moins, des variables x, y, z (par rapport à z, pour fixer les idées) et mettre l'équation de S_i sous la forme

$$z = \Phi_i(x, y) \tag{6'}$$

valable dans un voisinage suffisamment petit de M, la fonction $\Phi_i(x, y)$ étant dérivable une fois par rapport à chacun de ses arguments.

13. La troisième hypothèse de Liapounoff nous permettra de préciser le domaine de validité de la forme (6′) de (6) par rapport à un système privilégié d'axes de coordonnées : au paragraphe **20**, nous étendrons ces conclusions à un système d'axes quelconque.

Rapportons S au système d'axes rectangulaires $Mxyz$ dont l'origine coïncide avec le point considéré M de S_i et dont l'axe Mz coïncide avec une des deux demi-normales à S_i en M. Les axes Mx et My seront alors situés dans le plan tangent au point M à la portion S_i de S.

Envisageons ensuite la portion $\Sigma(M, R)$ ou, plus brièvement, $\Sigma(M)$ de S_i intérieure à la sphère $L(M, R)$ ou $L(M)$ (*cf.* § **11**) attachée à M; plus généralement, nous désignerons par $\Sigma(M, r)$ la portion de S_i intérieure à $L(M, r)$. D'après l'alinéa 3 du paragraphe **10**, à tout point p de coordonnées x, y, o, situé à l'intérieur du grand cercle, section de $L(M)$ par le plan $z = 0$, c'est-à-dire, à tout point $p(x, y, 0)$ tel que $x^2 + y^2 \leqq R^2$, il ne correspond qu'un seul point de $\Sigma(M)$ au plus; il suit de là que relativement au système d'axes envisagé, l'équation de $\Sigma(M)$ pourra se mettre sous la forme (6′), puisque chaque point P de $\Sigma(M)$ se projette à l'intérieur du cercle $z = 0$, $x^2 + y^2 = R^2$.

14. Reprenons les notations du deuxième alinéa du paragraphe **10**; les axes $Oxyz$ sont maintenant supposés quelconques. Soient $(\vec{N}, x)$, $(\vec{N}, y)$, $(\vec{N}, z)$ les angles de la normale extérieure, pour fixer les idées, menée à S par un point M de S_i, $(\vec{N}', x)$, $(\vec{N}', y)$, $(\vec{N}', z)$ les éléments analogues, relatifs au point P de S_i. Nous avons

$$\left|\cos(\vec{N}, x) - \cos(\vec{N}', x)\right| = 2\left|\sin\frac{(\vec{N}, x) + (\vec{N}', x)}{2}\right|\left|\sin\frac{(\vec{N}, x) - (\vec{N}', x)}{2}\right|$$
$$\leqq 2\left|\sin\frac{(\vec{N}, x) - (\vec{N}', x)}{2}\right|.$$

Comme pour tout α réel $\left|\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right| \leqq 1$, on en déduit

$$\left|\cos(\vec{N}', x) - \cos(\vec{N}, x)\right| \leqq \left|(\vec{N}', x) - (\vec{N}, x)\right|.$$

Considérons alors le trièdre de sommet O, formé par les demi-droites Ox et les demi-droites parallèles aux demi-normales $\vec{N}$ et $\vec{N}'$; la différence de deux faces de ce trièdre étant inférieure, en valeur absolue, à la troisième face, nous avons

$$\left|(\vec{N}, x) - (\vec{N}', x)\right| \leqq (\vec{N}, \vec{N}')|$$

d'où, en combinant les deux dernières inégalités avec (5), on tire

$$(7) \qquad \left|\cos(\vec{N}, x) - \cos(\vec{N}', x)\right| \leqq f(MP)$$

valable, rappelons-le, pour deux points quelconques M et P de la portion $S_i (i = 1, 2, \ldots, n)$. Des inégalités analogues valent, évidemment, pour les cosinus directeurs restants, $\cos(\vec{N}, y)$ et $\cos(\vec{N}, z)$.

15. Reprenons maintenant le voisinage $\Sigma(M)$ de M sur S_i, introduit au paragraphe **13.** Nous allons établir le lemme suivant :

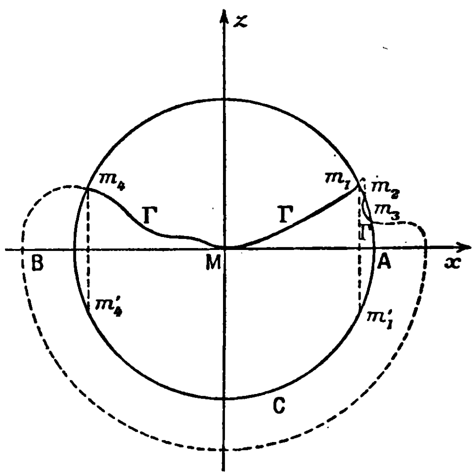
Le domaine $\Sigma(M)$ *est nécessairement d'un seul tenant toutes les fois que le rayon* R *de la sphère* L(M) *correspondante satisfait à la condition*

$$f(\mathrm{R}) \leqq \frac{5}{13}, \tag{8}$$

où $f(r)$ *est le module de continuité de la surface* S (*cf.* § **10**).

Remarquons que, d'après sa définition même, $f(r)$ est une fonction non décroissante et continue de son argument telle que $f(0) = 0$; on pourra donc toujours choisir R assez petit pour que l'inégalité (8) soit vérifiée. *Aussi dans la suite du Mémoire il sera toujours supposé que la longueur* R *vérifie la condition* (8).

Fig. 1.



Cela étant, rapportons $\Sigma(M)$ au système d'axes $Mxyz$ défini au paragraphe **13**; l'équation de $\Sigma(M)$ pourra être mise sous la forme

$$z = \Phi(x, y). \tag{9}$$

Pour étudier $\Sigma(M)$, nous allons considérer $\Sigma(M)$ comme engendrée par des arcs de courbes planes Γ, sections de $\Sigma(M)$ par des plans passant par Mz. Rien n'empêche, pour étudier une telle section, de la supposer contenue dans le plan $y = 0$, en effectuant au besoin une rotation des axes Mxy. L'équation de l'arc Γ cherché sera alors

$$z = \Phi(x, 0), \qquad |x| < \mathrm{R}. \tag{10}$$

Le lemme précité revient donc à dire que l'intersection de l'arc de courbe Γ, représenté par (10) avec le cercle C d'équation $z^2+x^2=R^2$ [section de la sphère L(M) par le plan $y=0$] se compose de deux points (¹) au plus (cette intersection se réduisant à un point unique lorsque M est voisin de la frontière de la portion S_i); en d'autres termes, que la configuration représentée sur la figure 1 $\left(\text{où l'arc } \Gamma \text{ se compose de deux arcs } \widehat{m_1 m_4} \text{ et } \widehat{m_2 m_3}\right)$ est impossible. C'est ce qui va résulter des remarques suivantes, concernant la pente de l'arc Γ; il est clair, d'ailleurs, que cette pente existe puisque Γ est la section plane d'une surface douée de plan tangent.

16. Reprenons les notations du paragraphe **14**; nous avons, P étant un point quelconque de $\Sigma(M)$,

$$|\cos^2(N, z) - \cos^2(N', z)| = |1 - \cos(N', z)| = |\sin^2(N', z)| \leqq (N', z)^2,$$

puisque Mz est orienté suivant la normale en M à $\Sigma(M)$, dont P fait également partie; comme $\Sigma(M)$ est une portion régulière de S, l'alinéa 3 du paragraphe **10** montre que

$$\left|\left(\vec{N'}, z\right)\right| \leqq f(MP).$$

La comparaison des deux dernières inégalités donne, eu égard à (8),

$$\sin^2\left(\vec{N'}, z\right) \leqq [f(MP)]^2 \leqq \frac{25}{169}. \tag{11}$$

17. Cela étant, utilisons le fait que la portion régulière $\Sigma(M)$ de S, possédant un plan tangent en chacun de ses points, est donnée par une équation telle que (9); nous aurons alors

$$\left|\cos\left(\vec{N'}, z\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_P^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_P^2}} \qquad (x^2+y^2 \leqq R^2).$$

On tire de là

$$\sin^2\left(\vec{N'}, z\right) = \frac{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_P^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_P^2}{1+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_P^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_P^2} \leqq [f(MP)]^2$$

et ensuite

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_P^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_P^2 \leqq \frac{f^2}{1-f^2}.$$

(¹) D'abscisses de signes opposés. D'une part, en effet, l'arc Γ passe par M; d'autre part, d'après la troisième hypothèse de Liapounoff, à une valeur de x, il ne peut correspondre qu'un point de Γ.

Il vient alors, eu égard à (11),

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_P^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 \leqq \frac{169}{144}[f(\mathrm{MP})]^2.$$

On déduit de là les majorations

$$(12) \qquad \left|\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_P\right| \leqq \frac{13}{12} f(\mathrm{MP}) \leqq \frac{5}{12}; \qquad \left|\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_P\right| \leqq \frac{13}{12} f(\mathrm{MP}) \leqq \frac{5}{12};$$

valables pour tout point P de $\Sigma(\mathrm{M})$.

Remarque. — Rappelons que les coordonnées x', y' de P, vérifient l'inégalité

$$x'^2 + y'^2 \leqq \mathrm{R}^2.$$

La réciproque n'est pas vraie : à un point x', y', $z' = 0$ du cercle défini par l'équation précédente, il ne correspond pas nécessairement un point de $\Sigma(\mathrm{M})$.

18. Soit m'_1 le point symétrique de m_1 par rapport à Mx; si l'arc $\overset{\frown}{m_2 m_3}$ existe, ses extrémités m_2 et m_3 devront être situées sur l'arc $\overset{\frown}{m_1 \mathrm{A} m'_1}$ du cercle C $\left(\text{ou sur l'arc } \overset{\frown}{m_4 \mathrm{B} m'_4}\right)$, puisque l'intersection de Γ avec toute parallèle à Mz doit se réduire à un point unique. Comme chaque portion de Γ possède une tangente continue [puisque sur S_i dont $\Sigma(\mathrm{M})$ et, par suite, Γ font partie, le plan tangent à S varie d'une manière continue], il existe un point p, au moins, sur l'arc $\overset{\frown}{m_2 m_3}$ où la tangente est parallèle à la corde $m_2 m_3$ (en vertu du théorème de Rolle). Or, le cercle est une courbe convexe; la pente de la droite $m_2 m_3$ est donc au moins égale (en valeur absolue) à la pente de la tangente en m_1 au cercle C. Mais de (10) et (12) il résulte que la pente de Γ est, en valeur absolue, inférieure à $\frac{5}{12}$. Cela montre que le coefficient angulaire de la droite Mm_1 vaut au plus $\frac{5}{12}$. Par suite, le coefficient angulaire de la tangente à C en m_1 est, au moins, égal à $\frac{12}{5}$ en valeur absolue; il en résulterait que la pente de la corde $m_2 m_3$ et, par conséquent, de la tangente à l'arc $\overset{\frown}{m_2 m_3}$ de Γ au point p, précédemment défini, serait, *a fortiori*, supérieure à $\frac{12}{5}$. Or, d'après ce que nous avons vu, la pente de Γ est inférieure à $\frac{5}{12}$ et cette contradiction établit notre lemme.

La marche suivie permet de préciser le domaine de validité des formules (9) et (10). D'après ce qui précède, la valeur absolue de l'abscisse du point m_1 est minorée par $\frac{12}{13}\mathrm{R}$, donc *a fortiori* par $\frac{5}{13}\mathrm{R}$, puisque le coefficient angulaire de Mm_1 est majoré, en module, par $\frac{5}{12}$. Par suite, la représentation (9) et (10) du voisinage $\Sigma(M)$ de M sur S sera, à coup sûr, valable pour la portion $d(M)$ de $\Sigma(M)$ qui se projette sur le plan Mxy à l'intérieur du cercle $C(R)$ défini par

$$x^2+y^2 \leqq \frac{25}{169} R^2. \tag{13}$$

Si, en particulier, le point M est un point ordinaire de S_i et si le rayon R est assez petit pour que $L(M)$ ne contienne aucune arête de rebroussement de S, chaque point du plan $z=0$ dont les coordonnées x et y vérifient (13) est la projection d'un seul point de $\Sigma(M)$. Le domaine $d(M)$ ainsi défini sera utilisé dans la suite (*cf.* § **26**).

19. Voici un second corollaire des hypothèses de Liapounoff. En respectant les conventions des paragraphes **13** et **14**, le nouveau lemme s'énonce comme suit.

L'intersection de $\Sigma(M)$ *avec toute droite dont l'angle avec la normale* Mz *à* $\Sigma(M)$ *en* M *est inférieur à une constante* ω, *ne dépendant que de* R, *se réduit à un point unique. Lorsque le rayon* R *de* $L(M)$ *vérifie* (8), *on peut prendre* $\omega = \frac{\pi}{3}$.

En effet, choisissons l'axe Mx de manière que le plan Mxz soit parallèle à la droite D, satisfaisant aux conditions de l'énoncé et, par suite, inclinée de moins de $\frac{\pi}{3}$ sur Mz $\left(\text{c'est-à-dire de plus de } \frac{\pi}{6} \text{ sur } Mxy\right)$; d'après cela, D sera contenue dans le plan $y=c$. La section de $\Sigma(M)$ par ce plan sera un arc de courbe défini par les équations

$$z=\Phi(x, c), \qquad y=c, \tag{14}$$

x pouvant varier dans l'intervalle $(-R, R)$ au plus. Si l'intersection de l'arc (14) avec D se composait de plus d'un point, il y aurait, sur cet arc au moins un point P en lequel la tangente à l'arc serait parallèle à D; en effet, $\Sigma(M)$ est une portion de S_i; son intersection avec le plan $y=c$ possède donc une tangente continue, en sorte que le théorème de Roll s'applique à l'arc de (14) soutenu par la corde D. Au point P on aurait donc

$$\left|\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_P\right| \geqq \operatorname{tang}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{5}{12}.$$

Or, d'après (12), le premier membre doit être inférieur à $\frac{5}{12}$, et cette contradiction justifie notre lemme.

Remarque. — Le même raisonnement montre, d'ailleurs, que si le rayon R, commun à toutes les sphères de Liapounoff tend vers zéro, ω tend uniformément vers $\frac{\pi}{2}$; on aurait donc pu choisir R de manière que ω soit aussi voisin de $\frac{\pi}{2}$ qu'on le veut.

20. Attachons alors à chaque point M de S_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) un cône de révolution de sommet M, axé sur la normale en M à S_i et d'ouverture 2ω (*cf.* § **19**); nous noterons G(M) cette surface auxiliaire et nous lui donnerons le nom de cône de Günther. D'après le lemme du précédent paragraphe, toute parallèle à une droite passant par M et contenue dans G(M) coupe Σ(M) en un point unique. Je dis, de plus, que si la condition (8) est satisfaite, tout trièdre trirectangle $Mxyz$, de sommet M a une arête au moins à l'intérieur de G(M) et cela quelles que soient les orientations des axes Mx, My et Mz. Si, en effet, les droites Mx, My, Mz étaient toutes trois extérieures à G(M), les trois cosinus directeurs de la normale MN en M — qui coïncide avec l'axe de G(M) — à la surface S seraient inférieurs en valeur absolue à $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ et on aurait

$$\cos^2(N, x) + \cos^2(N, y) + \cos^2(N, z) \leqq 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 < 1.$$

Or cette inégalité est incompatible avec la condition

$$\cos^2(N, x) + \cos^2(N, y) + \cos^2(N, z) = 1,$$

à laquelle sont assujettis les trois cosinus directeurs en cause. Le lemme du paragraphe **19** montre alors que toute parallèle à l'un, au moins, des axes Mx, My ou Mz rencontre le voisinage Σ(M) en un point au plus; il en sera, par suite de même des parallèles à l'une, au moins, des arêtes d'un trièdre trirectangle quelconque $Oxyz$, en sorte que l'équation de la portion Σ(M) d'une surface de Liapounoff pourra être toujours résolue par rapport à l'une, au moins, des coordonnées x, y, z et prendra l'une, au moins, des formes

$$z = \Phi(x, y), \qquad y = \Phi_1(z, x), \qquad x = \Phi_2(y, z),$$

valable dans un domaine d'aire non nulle.

21. Malgré son caractère intuitif et élémentaire à la fois, la conclusion ci-dessus est de grande importance; nous allons montrer qu'on peut décomposer toute surface de Liapounoff en un nombre fini de domaines simplement connexes et réguliers, chacun de ces domaines étant représentable par l'une, au moins des formules ci-dessus et cela par rapport à un système arbitraire d'axes.

Menons, en effet, un réseau de plans, parallèles au plan Oxy, équidistants entre eux, la distance de deux plans consécutifs [évaluée en fonction du rayon R des sphères L(M) relatives à S] étant égale à $\frac{R}{\sqrt{3}}$. Construisons, de même, les réseaux similaires relatifs aux plans Oxy et Oyz. L'espace est ainsi empli de cubes que nous appellerons cubes c. Cela posé, remarquons que le domaine D, limité par S, est, par hypothèse, borné; cela veut dire qu'il existe une suite de cubes $c, c_1, c_2, \ldots, c_k$ (k borné) telle que tout point de D, et, par suite, tout point de S, fasse partie de l'un, au moins, des cubes de la suite. La propriété reste vraie, *a fortiori* pour la suite des sphères K_i, circonscrites aux cubes c_i. Or, le rayon des K_i est égal à $\frac{R}{2}$. Si donc on prend un point M_i situé sur la portion de S, intérieure à la sphère K_i, cette sphère K_i (et, par suite, la portion considérée de S) serait intérieure à la sphère $L(M_i)$ dont le rayon, par définition, est le double de celui de K_i. Cela montre que toute la surface S peut être recouverte à l'aide de la suite $L(M_i)$ ($i = 1, 2, \ldots, k$) de sphères de Liapounoff et, par suite, de domaines $\Sigma(M_i)$ correspondants; cela justifie le résultat annoncé. Réciproquement, toute surface décomposable en un nombre fini de portions telles que $\Sigma(M_i)$ est une surface de Liapounoff pourvu que (5) soit valable pour chaque $\Sigma(M_i)$.

Or, les identités intégrales, telles que les formules de Green et de Stokes, s'appliquent aux surfaces formées par un nombre fini de portions telles que $\Sigma(M)$. Si, par exemple, S est une surface fermée de Liapounoff, $\vec{n}$ le vecteur unitaire porté par la normale extérieure à cette surface, $U(x, y, z)$ une fonction scalaire suffisamment régulière $\Big($possédant, par exemple, des dérivées partielles $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$ intégrables dans le domaine D limité par S$\Big)$, on a

$$\iiint_D \Delta U \, dx\, dy\, dz = \iint_S \vec{n} . \overrightarrow{\text{grad}}\, U \, d\sigma,$$

$d\sigma$ désignant l'élément d'aire de S; on trouvera la démonstration de ce résultat dans tout traité d'Analyse (¹). L'intégrale du second membre se définit sans difficulté, puisqu'elle est égale à la somme d'un nombre fini d'expressions telles que $\iint_{S_i}$. On connaît, d'autre part, le rôle fondamental que jouent de telles identités dans la théorie des fonctions harmoniques; cela justifie l'étude détaillée des surfaces de Liapounoff auxquelles s'appliquent les relations intégrales en cause.

22. Nous allons, maintenant, faire connaître quelques propriétés des surfaces de Liapounoff qui nous seront spécialement utiles dans l'étude des potentiels de simple et de double couches. Reprenons le système d'axes $Mxyz$, défini au paragraphe **13**. Nous avons reconnu que relativement à ce système d'axes l'équation de $\Sigma(M)$, lorsque M était un point ordinaire de S, était de la forme

$$z = \Phi(x, y)$$

dans un voisinage fini du point M, situé dans le plan Mxy, par exemple,

(¹) *Cf.* M. GÜNTHER, *loc. cit.*, pp. 108-116.

dans le domaine défini par (13). Comme dans ce dernier domaine, les dérivées $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$ et $\frac{\partial\Phi}{\partial y}$ existent, le théorème des accroissements finis s'applique et nous avons, $\Phi(0, 0)$ étant nul,

$$z = y\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_{x,\theta y} + x\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_{\theta_1 x,0}, \tag{15}$$

où les indices indiquent les valeurs où l'on calcule les dérivées partielles, et où θ et θ_1 sont des nombres compris entre 0 et 1. Le point M étant, par hypothèse, un point ordinaire de S, il existe un point Q de $\Sigma(M)$ dont les coordonnées soient x, θy, $\Phi(x, \theta y)$ et un point Q′ de $\Sigma(M)$ de coordonnées $\theta_1 x$, 0, $\Phi(\theta_1 x, 0)$. Soit r la plus grande des distances MQ ou MQ′; les inégalités (12) s'appliquant et la fonction $f(\mathrm{MP})$ étant non décroissante, nous avons

$$\left|\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_{Q}\right| \leqq \frac{13}{12} f(r), \qquad \left|\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_{Q'}\right| \leqq \frac{13}{12} f(r). \tag{15′}$$

Mais les droites MQ et MQ′ coupent $\Sigma(M)$ en deux points; elles sont, par suite, extérieurs au cône G(M). Il s'ensuit que les longueurs des projections des segments MQ et MQ′ sur Mxy sont, d'une part, minorées par le nombre $r\sin\omega$ [*cf.* pour G(M) et ω les paragraphes **19** et **20**] et majorées, d'autre part, par la longueur de la projection de MP sur Mxy, donc majorées par MP; il s'ensuit qu'on peut écrire

$$r\sin\omega < \mathrm{MP},$$

d'où

$$f(r) \leqq f\left(\frac{\mathrm{MP}}{\sin\omega}\right).$$

Moyennant (15′), (15) donne, eu égard à l'inégalité précédente,

$$\frac{|z|}{\mathrm{MP}} \leqq \frac{13}{6} f\left(\frac{\mathrm{MP}}{\sin\omega}\right). \tag{16}$$

Il faut remarquer que cette inégalité n'a été démontrée que sous réserve que M est un point ordinaire de la surface S; mais il serait facile, au prix d'un changement insignifiant du raisonnement, de l'étendre aux différents voisinages d'un point M commun à plusieurs portions régulières S_i de S — il suffirait d'englober S_i dans une surface de Liapounoff, autre que S, pour laquelle M serait un point ordinaire.

23. Ceci étant, reprenons les notations du paragraphe **14**; comme, en l'espèce, la normale $\vec{N}$ est orientée suivant Mz, nous avons, en faisant $\cos(N, x) = 0$ dans (7),

$$|\cos(N', x)| \leqq f(\mathrm{MP}), \qquad |\cos(N', y)| \leqq f(\mathrm{MP}). \tag{17}$$

Par ailleurs, nous avons

$$\cos(\overrightarrow{MP}, \vec{N}') = \frac{x}{MP}\cos(N', x) + \frac{y}{MP}\cos(N', y) + \frac{z}{MP}\cos(N', z).$$

Comme $\left|\frac{x}{MP}\right| \leqq 1$, $|\cos(N', z)| \leqq 1$, les inégalités (16) et (17) permettent d'en déduire

$$(18) \qquad \left|\cos(\overrightarrow{MP}, \vec{N}')\right| \leqq 2f(MP) + \frac{13}{6}f\left(\frac{MP}{\sin\omega}\right) \leqq \frac{25}{6}f\left(\frac{MP}{\sin\omega}\right) \leqq 5f\left(\frac{MP}{\sin\omega}\right).$$

24. D'un autre côté, $\cos(N, z) = 1$, car, dans le cas présent, les directions MN et Mz coïncident; l'inégalité (7) s'écrit donc ici [*cf.* (5)]

$$|\cos(N, z) - \cos(N', z)| = 1 - \cos(N', z) = 2\sin^2\frac{(N, N')}{2} \leqq \frac{1}{2}(N, N')^2 \leqq |(N, N')|^2 \leqq [f(MP)]^2.$$

D'après cela [*cf.* (8)],

$$(18') \qquad |\cos(N', N)| = |\cos(N', z)| \geqq 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}.$$

Soit alors $d\sigma$, l'élément d'aire de S au point P, $d\sigma'$ la projection de cette aire sur le plan Mxy; nous avons

$$(19) \qquad |d\sigma| = \left|\frac{d\sigma'}{\cos(N', z)}\right| \leqq \frac{169}{144}|d\sigma'| \leqq 2\,|d\sigma'|.$$

25. Nous sommes maintenant à même de résumer les conséquences déduites des hypothèses de Liapounoff et qui serviront de base aux discussions qui suivent. Nous simplifierons d'ailleurs nos énoncés en nous limitant exclusivement aux voisinages des points ordinaires de S. Désormais, M sera un point intérieur de la portion régulière S_i de S et R désignera le rayon de la sphère de Liapounoff L(M, R) qui ne contiendra aucun point frontière de S_i. D'après les hypothèses faites (M intérieur à S_i), R est différent de zéro, mais il n'est pas minoré uniformément pour tous les points intérieurs de S_i par un nombre positif fixe. Il serait, d'ailleurs, facile de préciser la manière dont se comportent en les points singuliers de S les expressions que nous aurons à considérer et le développement du présent chapitre sont justement destinés à fournir au lecteur tous les instruments indispensables de calcul. Mais nous nous abstiendrons de faire cette extension pour unifier et abréger notre exposition. Le lecteur trouvera, du reste, les résultats définitifs pour les arêtes de rebroussements dans le *Cours d'Analyse* d'Édouard Goursat, par exemple [15], qui seront valables encore dans le cas des surfaces de Liapounoff.

Ceci étant, rappelons une fois encore que R a été choisi assez petit pour satisfaire à l'inégalité (8). Moyennant cela, le voisinage Σ(M) de M sur S sera, d'après (16), (18), (18′) et (19) assez voisin d'un disque plan de rayon R. D'après (16), en effet, les cotes des points de Σ(M) varient assez peu, alors que, d'après (18) et (18′), les ondulations de Σ(M) sont suffisamment amorties.

Enfin, (19) permet de majorer l'aire de $\Sigma(M)$ à l'aide de celle de sa projection sur le plan tangent Mxy. Et ce sont ces propriétés qui garantissent la régularité des expressions que nous aurons à étudier par la suite.

Jusqu'ici nous n'avons pas eu à préciser la manière dont se comporte le module de continuité $f(MP)$ de la surface S dans le voisinage de $MP = 0$. Pour aller plus loin, il nous faut désormais supposer que $f(MP)$ s'évanouit assez rapidement avec MP pour que le module de continuité $\varphi(MP)$, associé à $f(MP)$ au moyen des formules (4) existe et pour que, plus généralement, toutes les hypothèses du paragraphe **9** *bis* soient valables. C'est l'hypothèse que nous ferons désormais; elle nous permettra d'établir la convergence de certaines expressions intégrales attachées aux surfaces de Liapounoff et, en particulier, de développer la théorie élémentaire des potentiels de simple et de double couche.

CHAPITRE III.

Propriétés élémentaires du potentiel de double couche attachées aux surfaces généralisées de Liapounoff.

26. Considérons une distribution superficielle des masses sur S; soient $\mu(P)$ la densité de cette répartition au point P de S, V(M) le potentiel de double couche créé au point M par les masses attirantes envisagées

$$V(M) = \iint_S \mu(P) \frac{\cos(MP, N')}{MP^2} d\sigma. \tag{20}$$

L'élément différentiel de l'intégrale du second membre est une expression régulière de M tant que M est étranger à la surface S. Nous allons faire voir que si S est une surface de Liapounoff, le second membre de (20) est encore convergent lorsque M est un point de S : à condition, toutefois, que la fonction $\mu(P)$ soit bornée

$$|\mu(P)| < A \qquad (A > 0). \tag{21}$$

En effet, il suffira de montrer que l'intégrale

$$I = \iint_{d(M)} \mu(P) \frac{\cos(MP, N')}{MP^2} d\sigma', \tag{21'}$$

étendue à un voisinage $d(M)$ suffisamment petit du point M de S, est finie et que sa valeur absolue tend vers zéro avec le diamètre de $d(M)$.

Or, sans restreindre la généralité ([1]), on peut supposer que M est un point

([1]) D'après ce que nous avons vu au paragraphe **13**, le cylindre considéré dans le texte peut découper sur S des portions appartenant à plusieurs voisinages $\Sigma(M)$ de M; cela se produit lorsque le point M est commun à une ou à plusieurs arêtes de rebroussement de S. Les raisonnements du texte s'appliquent à chacun de ces voisinages et, par suite, à leur somme.

régulier de S; il est possible alors de choisir un nombre positif R_1, assez petit, mais non nul, de façon que la projection de $d(M)$ sur le plan tangent en M à S soit l'intérieur du cercle $C(R_1)$ de centre M et de rayon $R_1 \leqq \frac{5}{13}R$; le domaine $d(M)$ fait alors sûrement partie de $\Sigma(M)$ [*cf.* le paragraphe **18** et, en particulier, l'inégalité (13)], c'est une portion d'un seul tenant, qui se correspond biunivoquement, point par point, avec $C(R_1)$. Rapportons le domaine d'intégration au trièdre $Mxyz$, utilisé au cours des paragraphes **13** et **22**; les majorations (18) et (19) sont valables et nous avons [*cf.* (21)]

$$(22) \qquad \left| \iint_{d(M)} \mu(P) \frac{\cos(MP, N')}{MP^2} d\sigma \right| \leqq \frac{4225}{864} A \iint_{C(R_1)} \frac{f\left(\dfrac{MP}{\sin\omega}\right)}{MP^2} |d\sigma'|.$$

Dans le plan Mxy, passons aux coordonnées polaires ρ et ψ

$$x = \rho\cos\psi, \qquad y = \rho\sin\psi.$$

Le rayon vecteur ρ est la projection de MP sur Mxy; comme la droite MP est extérieure au cône de Günther $G(M)$ (*cf.* les paragraphes **19** et **20**), on a

$$MP\sin\omega \leqq \rho \leqq MP,$$

d'où

$$\frac{MP}{\sin\omega} \leqq \frac{\rho}{\sin^2\omega}, \qquad \frac{1}{MP^2} \leqq \frac{1}{\rho^2},$$

et enfin, le module de continuité $f(r)$ étant une fonction non décroissante de son argument

$$f\left(\frac{MP}{\sin\omega}\right) \leqq f\left(\frac{\rho}{\sin^2\omega}\right).$$

Comme $|d\sigma'| = \rho\, d\rho\, d\psi$, on déduit de là

$$\iint_{C(R_1)} \frac{f\left(\dfrac{MP}{\sin\omega}\right)}{MP^2} |d\sigma'| \leqq \iint_{C(R_1)} \frac{f\left(\dfrac{\rho}{\sin^2\omega}\right)}{\rho} d\rho\, d\psi = 2\pi \int_0^{\frac{R_1}{\sin^2\omega}} \frac{f(r)}{r} dr.$$

Cette inégalité, jointe à (4) (*cf.* § **25**), permet de mettre (22) sous la forme

$$(23) \qquad \left| \iint_{d(M)} \mu(P) \frac{\cos(MP, N')}{MP^2} d\sigma \right| \leqq \frac{4225}{432} \pi A \varphi\left(\frac{R_1}{\sin^2\omega}\right) \qquad \left(R_1 \leqq \frac{5}{13} R\right).$$

Or, d'après la définition même du module de continuité (4), $\varphi\left(\frac{R_1}{\sin^2\omega}\right)$ tend vers zéro avec R_1, en sorte que l'intégrale (20) est bien convergente.

Considérons alors la sphère $L(M, R_1)$ et le voisinage $\Sigma(M, R_1)$ correspondant (*cf.* les paragraphes **11** et **13**); il est clair que $\Sigma(M, R_1)$ est intérieur à $d(M)$, en sorte que

$$\left| \iint_{\Sigma(M, R_1)} \right| \leqq \left| \iint_{d(M)} \right|.$$

En comparant les deux dernières inégalités, on voit que

$$(23') \qquad \begin{aligned} &\left| \iint_{\Sigma(M, R_1)} \mu(P) \frac{\cos(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{N'})}{MP^2} d\sigma \right| \\ &\leqq \iint_{\Sigma(M,R_1)} |\mu(P)| \frac{|\cos(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{N'})|}{\overline{MP}^2} |d\sigma| \\ &\leqq \frac{4225}{432} \pi A \varphi\left(\frac{R_1}{\sin^2\omega}\right) \leqq 10\pi A\varphi\left(\frac{R_1}{\sin^2\omega}\right), \qquad \text{pour } R_1 \leqq \frac{5}{13} R. \end{aligned}$$

Dans la suite, nous aurons souvent l'occasion d'utiliser les majorations (23) et (23′) du potentiel de double couche créé par les masses contenues à l'intérieur de $d(M)$.

Remarque. — On notera que l'énoncé précédent ne repose sur aucune hypothèse de régularité de la densité $\mu(P)$, que nous supposons simplement intégrable sur la multiplicité support S; il suffit donc, pour assurer l'existence du potentiel (20), et aussi de quelques autres expressions qui vont être introduites, que S soit une surface de Liapounoff. Au contraire, l'étude des conditions de dérivabilité ou, simplement, l'étude des modes de continuité des expressions en cause reposeront sur des propriétés de régularité de $\mu(P)$ que nous introduirons en temps utile.

27. Le résultat du précédent paragraphe nous permettra d'étendre au cas des surfaces de Liapounoff les résultats classiques relatifs à l'intégrale de Gauss. Faisons $\mu(P) = 1$ dans (20)

$$V(M) = \iint \frac{\cos(MP, N')}{MP^2} d\sigma,$$

formule où N′ désigne la normale extérieure à D.

On sait que la valeur absolue de $\frac{\cos(MP, N')}{MP^2} d\sigma$ est égale à l'angle solide sous lequel on voit, du point M, l'élément d'aire $d\sigma$ de S, placé au point P. De là les démonstrations élémentaires des formules de Gauss

$$(24) \qquad \iint_S \frac{\cos(MP, N')}{MP^2} d\sigma = \begin{cases} 0, & \text{si M est extérieur à D,} \\ 4\pi, & \text{si M est intérieur à D,} \\ 2\pi, & \text{si M est un point } \textit{ordinaire} \text{ de S.} \end{cases}$$

Mais nous ne saurions nous contenter d'une vérification aussi rapide qui fait appel, d'ailleurs, à des propriétés que toutes les surfaces de Liapounoff ne possèdent pas. En ce qui concerne les deux premières formules (24), nous n'avons qu'à reprendre la marche classique. Considérons donc dans D une fonction harmonique U(M), régulière à l'intérieur de D et possédant sur S une dérivée normale $\frac{dU}{dn}$ régulière. Comme les formules de Green s'appliquent aux surfaces de Liapounoff (*cf.* § **21**), nous pouvons exprimer la valeur de U(M) en chaque point de D, connaissant U(M) sur S et $\frac{dU}{dn}$ sur la même multiplicité

$$U(M) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \frac{dU}{dn}\frac{d\sigma}{MP} + \iint_S U(P)\frac{\cos(MP, N')}{MP^2}d\sigma, \quad \text{si M est intérieur à D,}$$

$$o = \frac{1}{4\pi}\iint_S \frac{dU}{dn}\frac{d\sigma}{MP} + \iint_S U(P)\frac{\cos(MP, N')}{MP^2}d\sigma, \quad \text{si M est extérieur à D;}$$

rappelons que $\frac{dU}{du}$ désigne la dérivée prise suivant la normale extérieure. Or, $U(M) = 1$ est une fonction harmonique, régulière dans D, dont toutes les dérivées partielles sont nulles. Les relations précédentes s'appliquent donc à $U(M) = 1$ et se réduisent dans ce cas particulier aux deux premières formules (24); celles-ci ne sont donc que les corollaires immédiats des formules de Green et s'appliquent à toute surface fermée pour laquelle ces formules demeurent valables.

Passons maintenant à la formule (24_3); M étant un point ordinaire de S, on peut trouver une sphère L(M, *r*) (*cf.* pour les notations, § **11**) telle que la portion $\Sigma(M, r)$ correspondante ne contienne aucun point singulier de S. Appelons $L_1(M, r)$ [ou $L_2(M, r)$] la portion de la surface de L(M, *r*) intérieure (ou extérieure) à D; $\Sigma(M, r)$ et chacune des portions $L_1(M, r)$, $L_2(M, r)$ sont d'un seul tenant, dès que $r \leqq R$ (*cf.* § **15**). D'après cela, les domaines limités par les surfaces fermées de Liapounoff $S - \Sigma(M, r) + L_1(M, r)$, d'une part et $S - \Sigma(M, r) + L_2(M, r)$ d'autre part sont d'un seul tenant; de plus, les relations (24_1) et (24_2) leur sont applicables.

Le point M étant intérieur à l'un et extérieur à l'autre, nous avons

$$\iint_{S-\Sigma(M,r)} \frac{\cos(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{N'})}{MP^2}d\sigma + \iint_{L_1(M,r)} \frac{\cos(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{N'})}{MP^2}d\sigma = o,$$

$$\iint_{S-\Sigma(M,r)} \frac{\cos(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{N'})}{MP^2}d\sigma + \iint_{L_2(M,r)} \frac{\cos(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{N'})}{MP^2}d\sigma = 4\pi.$$

On observera que dans la première formule la normale $\overrightarrow{N'}$ sur $L_1(M, r)$ est prise vers l'intérieur de L(M, *r*), c'est-à-dire, vers l'extérieur du domaine limité par $S - \Sigma(M, r) + L_1(M, r)$; le fait opposé a lieu sur $L_2(M, r)$ dans la deuxième formule. En additionnant membre à membre les deux relations ci-dessus, on trouve

$$(25) \qquad 2\iint_{S-\Sigma(M,r)} \frac{\cos(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{N'})}{MP^2}d\sigma$$
$$= 4\pi - \left[\iint_{L_1(M,r)} \frac{\cos(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{N'})}{MP^2}d\sigma + \iint_{L_2(M,r)} \frac{\cos(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{N'})}{MP^2}d\sigma\right].$$

Introduisons le cône $G(M)$ de Günther (*cf.* §§ **19** et **20**); $G(M)$, d'après sa propriété fondamentale, est étranger à l'intersection de S avec $L(M, r)$ et découpe sur $L_1(M, r)$ et $L_2(M, r)$ respectivement des calottes égales. Eu égard au sens des normales $\overrightarrow{N'}$ sur L_1 et L_2, on voit que l'élément différentiel $\frac{\cos(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{N'})}{MP^2} d\sigma$ a des valeurs égales et opposées en des points diamétralement opposés des calottes en cause. L'accolade du second membre de (25) se réduit donc aux intégrales de surface prises sur la zone de $L(M, r)$ extérieure au cône $G(M)$. Mais on peut choisir r assez petit pour que l'angle d'ouverture 2ω de $G(M)$ soit aussi voisin de π qu'on le veut (*cf.* la remarque finale du paragraphe **19**); l'aire de la zone sphérique considérée ci-dessus sera alors aussi voisine de zéro qu'on le veut, et il en sera donc de même des intégrales de surface d'élément différentiel $\left|\frac{\cos(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{N'})}{MP^2} d\sigma\right|$ étendues à cette zone. Cela permet de tirer de (25) la relation limite

$$\lim_{r=0} \iint_{S-\Sigma(M,r)} \frac{\cos(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{N'})}{MP^2} d\sigma = 2\pi,$$

qui justifie complètement le dernier résultat de Gauss.

Remarquons qu'en serrant un peu les raisonnements du texte, nous aurions pu étudier l'intégrale de Gauss en un point singulier de la surface; mais nous omettrons cette discussion pour abréger notre exposé.

Les formules de Gauss mettent en évidence, dans le cas particulier où $\mu(P) = \pm 1$, la discontinuité du potentiel de double couche sur la multiplicité support S. Nous allons étendre ces conclusions au cas général où ce potentiel est défini pour (20), toujours, bien entendu, sous réserve que S soit une surface de Liapounoff.

28. Soient M, un point ordinaire de la surface P, $\Sigma(M)$ son voisinage défini au paragraphe **15**, M' un point de l'espace voisin de M (M' est situé ou non sur S). Le potentiel $V(M)$ étant défini par (20), nous avons identiquement [1]

$$(26)\quad \begin{aligned} V(M') - V(M) = {} & I(M') - I(M) + I_1(M') - I_1(M) \\ & + \mu(M)\iint_S \frac{\cos(M'P, N')}{M'P^2} d\sigma - \mu(M)\iint_S \frac{\cos(MP, N')}{MP^2} d\sigma; \end{aligned}$$

on a posé

$$(26'_1)\qquad I(M') = \iint_{S-\Sigma(M)} [\mu(P) - \mu(M)] \frac{\cos(M'P, N')}{M'P^2} d\sigma$$

---

[1] La mise en évidence de $[\mu(P) - \mu(M)]$ ne sera utile que dans les paragraphes ultérieurs, où la densité $\mu(P)$ sera supposée continue.

et

$$(26'_2) \qquad I_1(M') = \iint_{\Sigma(M)} [\mu(P) - \mu(M)] \frac{\cos(M'P, N')}{M'P^2} d\sigma;$$

on formera $I(M)$ et $I_1(M)$ en remplaçant M' par M dans $(26'_1)$ et $(26'_2)$.

Les deux fonctions de M' ainsi définies sont donc des potentiels de double couche, de densité égale à $[\mu(P) - \mu(M)]$. Nous allons étudier la continuité de $I(M')$ dans le voisinage de M.

Supposons que l'on ait

$$(27) \qquad MM' < \frac{R}{8},$$

R étant le rayon de $L(M)$: de la définition même de $\Sigma(M)$ il résulte alors que pour tout point P de la multiplicité $S - \Sigma(M)$, la distance $M'P > \frac{7}{8} R$, en sorte que

$$(27') \qquad \frac{1}{M'P} \leqq \frac{2}{R}.$$

Le second membre de l'inégalité précédente étant un nombre fixe, on voit que le potentiel de double couche $I(M')$ est une fonction analytique et régulière de M' dans la sphère $L\left(M, \frac{R}{8}\right)$; par suite, les expressions $\left|\frac{\partial I(M')}{\partial x'}\right|$, $\left|\frac{\partial I(M')}{\partial y'}\right|$ et $\left|\frac{\partial I(M')}{\partial z'}\right|$ peuvent être majorées dans $L\left(M, \frac{R}{8}\right)$, x', y', z' désignant les coordonnées de M'. Pour préciser, nous avons d'abord [*cf.* (21)]

$$|\mu(P) - \mu(M)| \leqq 2A$$

et puis [*cf.* (27')]

$$\left|\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{M'P^2}\right)\right| = \left|\frac{2\cos(PM', Ox)}{M'P^3}\right| \leqq \frac{16}{R^3}.$$

Si maintenant nous appelons ξ, η, ζ les coordonnées du point courant P, α, β, γ les cosinus directeurs de la normale extérieure $\vec{N'}$ en P à S, nous avons

$$\cos\left(\overrightarrow{M'P}, \vec{N'}\right) = \frac{\alpha(\xi - x') + \beta(\eta - y') + \gamma(\zeta - z')}{M'P}.$$

On tire de là

$$\left|\frac{\partial \cos(M'P, N')}{\partial x'}\right| = \left| -\frac{\alpha}{M'P} - \cos\left(\overrightarrow{M'P}, \vec{N'}\right) \frac{(x' - \xi)}{M'P} \frac{1}{M'P}\right| \leqq \frac{2}{M'P} \leqq \frac{4}{R}$$

et ensuite

$$\left|\frac{\partial}{\partial x'}\left[\frac{\cos(M'P, N')}{M'P^2}\right]\right| \leqq \frac{40}{R^3}.$$

D'après cela, la formule de la différentiation sous le signe $\iint$ s'applique au second membre de $(26'_1)$ lorsque M' est intérieur à $L\left(M, \frac{R}{8}\right)$, et nous avons, en désignant par σ la surface totale de S,

$$\left|\frac{\partial \mathrm{I}(\mathrm{M}')}{\partial x'}\right| \leqq \frac{80}{\mathrm{R}^3}\mathrm{A}\sigma.$$

On déduit de là

$$(28) \qquad |\mathrm{I}(\mathrm{M}') - \mathrm{I}(\mathrm{M})| \leqq \frac{240}{\mathrm{R}^3}\mathrm{A}\sigma\,\mathrm{MM}', \qquad \mathrm{MM}' \leqq \frac{\mathrm{R}}{8}.$$

Le potentiel $\mathrm{I}(\mathrm{M}')$ possède donc dans $\mathrm{L}\left(\mathrm{M}, \frac{\mathrm{R}}{8}\right)$ la continuité lipschitzienne; le résultat du paragraphe **3** *bis* montre qu'on a, *a fortiori*,

$$(28') \qquad |\mathrm{I}(\mathrm{M}') - \mathrm{I}(\mathrm{M})| \leqq \frac{240}{\mathrm{R}^3}\mathrm{A}\sigma\varphi(\mathrm{MM}'),$$

$\varphi(\mathrm{MM}')$ étant le module de continuité, supposé existant, associé au module de continuité $f(\mathrm{MM}')$ de la surface S.

29. Nous allons, à présent, étudier le potentiel $(26'_2)$. Cette fois, il est indispensable de préciser la manière dont le point M′ tend vers M. Nous supposerons d'abord que M′ se déplace sur la surface S; dans ce cas, il est inutile d'admettre la continuité de $\mu(\mathrm{P})$, et il suffit que cette densité vérifie (21) pour justifier notre résultat. De (27), il résulte que M′ appartient alors au domaine $\Sigma\left(\mathrm{M}, \frac{\mathrm{R}}{8}\right)$ (*cf.* § **13**); il en résulte aussi que la sphère $\mathrm{L}(\mathrm{M}, 2\mathrm{MM}')$ est encore intérieure à la sphère $\mathrm{L}(\mathrm{M}, \mathrm{R})$, de sorte que $\mathrm{L}(\mathrm{M}, 2\mathrm{MM}')$ possède toutes les propriétés des sphères de Liapounoff et que, en particulier, $\Sigma(\mathrm{M}, 2\mathrm{MM}')$ est intérieur à $\Sigma(\mathrm{M})$. Comme nous avons [*cf.* $(26'_2)$]

$$\mathrm{I}_1(\mathrm{M}) = \iint_{\Sigma(\mathrm{M}) - \Sigma(\mathrm{M}, 2\mathrm{MM}')} + \iint_{\Sigma(\mathrm{M}, 2\mathrm{MM}')}$$

[et une formule analogue pour $\mathrm{I}_1(\mathrm{M}')$], les limitations (23′) s'appliquent à la deuxième intégrale du second membre, car $\mathrm{R}_1 = 2\mathrm{MM}' \leqq \frac{\mathrm{R}}{4} < \frac{5}{13}\mathrm{R}$. Par suite, il vient

$$\left|\iint_{\Sigma(\mathrm{M}, 2\mathrm{MM}')} [\mu(\mathrm{P}) - \mu(\mathrm{M})]\frac{\cos(\mathrm{MP}, \mathrm{N}')}{\mathrm{MP}^2}\,d\sigma\right| \leqq 20\pi\mathrm{A}\varphi\left(\frac{2\mathrm{MM}'}{\sin^2\omega}\right)$$

puisque $|\mu(\mathrm{P}) - \mu(\mathrm{M})| \leqq 2\mathrm{A}$.

Une majoration à peu près semblable vaut pour l'intégrale

$$\iint_{\Sigma(\mathrm{M}, 2\mathrm{MM}')} [\mu(\mathrm{P}) - \mu(\mathrm{M})]\frac{\cos(\mathrm{M}'\mathrm{P}, \mathrm{N}')}{\mathrm{M}'\mathrm{P}^2}\,d\sigma.$$

Considérons, en effet, la sphère $\mathrm{L}(\mathrm{M}', 3\mathrm{MM}')$, centrée sur M′. D'après (27), $2\mathrm{MM}' < \frac{\mathrm{R}}{4}$, en sorte que $\mathrm{L}(\mathrm{M}', 3\mathrm{MM}')$ est intérieure à $\mathrm{L}(\mathrm{M}, \mathrm{R})$ mais contient $\mathrm{L}(\mathrm{M}, 2\mathrm{MM}')$. Il suit de là que $\Sigma(\mathrm{M}', 3\mathrm{MM}')$ possède toutes les propriétés du voisinage de Liapounoff et contient $\Sigma(M, 2MM')$; comme $3MM' < \frac{3R}{8} < \frac{5}{13}R$, les inégalités (23) et (23′) s'appliquent au potentiel considéré et au voisinage $\Sigma(M', R_1) = \Sigma)M', 3MM')$; nous avons donc

$$\left|\iint_{\Sigma(M,2MM')} [\mu(P)-\mu(M)]\frac{\cos(M'P, N')}{M'P^2}d\sigma\right| \leqq \iint_{\Sigma(M',3MM')} |\mu(P)-\mu(M)|\frac{|\cos(M'P, N')|}{M'P^2}d\sigma$$
$$\leqq 20\pi A\varphi\left(\frac{3MM'}{\sin^2\omega}\right).$$

L'ensemble de ces résultats permet d'écrire, la fonction $\varphi(r)$ étant non décroissante,

$$|I_1(M') - I_1(M)| \leqq 40\pi A\varphi\left(\frac{3MM'}{\sin^2\omega}\right) + J, \tag{29}$$

avec

$$J = \left|\iint_{\Sigma(M)-\Sigma(M,2MM')} [\mu(P)-\mu(M)]\left[\frac{\cos(\overrightarrow{M'P}, \vec{N'})}{M'P^2} - \frac{\cos(\overrightarrow{MP}, \vec{N'})}{MP^2}\right]d\sigma\right|. \tag{29'}$$

Or, on a identiquement

$$\frac{\cos(\overrightarrow{M'P}, \vec{N'})}{M'P^2} - \frac{\cos(\overrightarrow{MP}, \vec{N'})}{MP^2}$$
$$= \frac{M'P\cos(\overrightarrow{M'P}, \vec{N'}) - MP\cos(\overrightarrow{MP}, \vec{N'})}{M'P^3} + MP\cos(\overrightarrow{MP}, \vec{N'})\left(\frac{1}{M'P^3} - \frac{1}{MP^3}\right).$$

Il est facile de transformer le numérateur du premier terme du second membre. Projetons sur l'axe $\vec{N'}$ l'égalité géométrique

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{PM'} - \overrightarrow{PM};$$

il vient, en orientant les droites MM′, PM′ et PM dans les sens $\overrightarrow{MM'}$, $\overrightarrow{PM'}$ et $\overrightarrow{PM}$,

$$\overline{MM'}\cos(\overrightarrow{MM'}, \vec{N'}) = \overline{PM'}\cos(\overrightarrow{PM'}, \vec{N'}) - \overline{PM}\cos(\overrightarrow{PM}, N'),$$

en remarquant que $\cos(\overrightarrow{PM'}, \vec{N'}) = -\cos(\overrightarrow{M'P}, \vec{N'})$ et que $\overline{MM'} = MM'$, $\overline{PM'} = -MP$, $\overline{PM} = -MP$

$$MM'\cos(\overrightarrow{MM'}, \vec{N'}) = M'P\cos(\overrightarrow{M'P}, \vec{N'}) - MP\cos(\overrightarrow{MP}, \vec{N'}).$$

Cela permet d'écrire

$$\frac{\cos(\overrightarrow{M'P}, \vec{N'})}{M'P^2} - \frac{\cos(\overrightarrow{MP}, \vec{N'})}{MP^2}$$
$$= \frac{MM'\cos(\overrightarrow{MM'}, \vec{N'})}{M'P^3} + MP\cos(\overrightarrow{MP}, \vec{N'})\left(\frac{1}{M'P^3} - \frac{1}{MP^3}\right). \tag{30}$$

On remarquera que les formules (29′) et (30) sont valables quelle que soit la position du point M dans l'espace; cette remarque nous servira au cours du paragraphe suivant. Or, nous avons identiquement

$$\cos(\overrightarrow{MM'}, \vec{N'}) = \cos(\overrightarrow{MM'}, \vec{N}) + \cos(\overrightarrow{MM'}, \vec{N'}) - \cos(\overrightarrow{MM'}, \vec{N}),$$

$\vec{N}$, rappelons-le, étant la normale extérieure à S au point M. Comme M est un point régulier de S et comme M′ est sur S, l'inégalité (18) s'applique, à condition d'y remplacer P par M et M par M′; il vient alors

$$\left|\cos(\overrightarrow{MM'}, \vec{N})\right| \leqq \frac{25}{6} f\left(\frac{MM'}{\sin\omega}\right).$$

D'un autre côté

$$\left|\cos(\overrightarrow{MM'}, \vec{N'}) - \cos(\overrightarrow{MM'}, \vec{N})\right| \leqq \left|(\overrightarrow{MM'}, \vec{N'}) - (\overrightarrow{MM'}, \vec{N})\right|.$$

Mais dans le trièdre, dont les arêtes sont orientées parallèlement aux vecteurs $\overrightarrow{MM'}$, $\vec{N}$, $\vec{N'}$, on a les inégalités classiques qui, eu égard à (5), permettent d'écrire

$$\left|(\overrightarrow{MM'}, \vec{N'}) - (\overrightarrow{MM'}, \vec{N})\right| \leqq \left|(\vec{N}, \vec{N'})\right| \leqq f(MP),$$

en sorte qu'en réunissant l'ensemble des résultats précédents et en observant que $MP < \dfrac{MP}{\sin\omega}$

$$(31)\qquad \left|\cos(\overrightarrow{MM'}, \vec{N'})\right| \leqq \left|\cos(\overrightarrow{MM'}, \vec{N})\right| + \left|\cos(\overrightarrow{MM'}, \vec{N'}) - \cos(\overrightarrow{MM'}, \vec{N})\right|$$
$$\leqq \frac{25}{6} f\left(\frac{MM'}{\sin\omega}\right) + f(MP) \leqq \frac{25}{6} f\left(\frac{MM'}{\sin\omega}\right) + f\left(\frac{MP}{\sin\omega}\right).$$

Enfin, nous avons, quelle que soit la position du point M′ dans l'espace,

$$\left|MP\left(\frac{1}{M'P^3} - \frac{1}{MP^3}\right)\right| = \left|\frac{MP^3 - M'P^3}{M'P^3.MP^2}\right| = \frac{|MP - M'P|(MP^2 + M'P^2 + MP.M'P)}{M'P^3.MP^2}$$
$$\leqq \frac{|MP - M'P|(MP + M'P)^2}{M'P^3.MP^2}.$$

Mais $|MP - M'P| \leqq MM'$ et

$$\frac{(MP + M'P)^2}{M'P^2} < 10,$$

d'où

$$\left|MP\left(\frac{1}{M'P^3} - \frac{1}{MP^3}\right)\right| \leqq \frac{MM'}{M'P.MP^2}.$$

En effet, le point P est extérieur à la sphère L(M, 2MM′), puisqu'il décrit le domaine Σ(M) — Σ(M, 2MM′); on a donc

$$(32)\qquad \frac{MP}{M'P} < 2,$$

ce qui justifie la première des inégalités précédentes, alors qu'on tire de la seconde

$$(32') \qquad \left| \mathrm{MP}\left(\frac{1}{\mathrm{M'P^3}} - \frac{1}{\mathrm{MP^3}}\right) \right| \leqq \frac{2\,\mathrm{MM'}}{\mathrm{MP^3}}$$

et finalement, eu égard à (18), l'inégalité

$$(33) \qquad \left| \mathrm{MP}\cos(\overrightarrow{\mathrm{MP}}, \overrightarrow{\mathrm{N'}})\left(\frac{1}{\mathrm{M'P^3}} - \frac{1}{\mathrm{MP^3}}\right) \right| \leqq \frac{250}{3}\,\frac{\mathrm{MM'}}{\mathrm{MP^3}} f\left(\frac{\mathrm{MP}}{\sin\omega}\right),$$

valable, répétons-le, que le point M′ soit sur S ou non, pourvu que P appartienne à $\Sigma(\mathrm{M}) - \Sigma(\mathrm{M}, 2\mathrm{MM'})$.

Dès lors, (21), (30), (31) et (33) permettent de déduire de (29′) l'inégalité

$$(34) \quad \mathrm{J} \leqq \frac{200}{3}\mathrm{A} f\left(\frac{\mathrm{MM'}}{\sin\omega}\right)\mathrm{MM'}\iint_{\Sigma(\mathrm{M})-\Sigma(\mathrm{M},2\mathrm{MM'})} \frac{|d\sigma|}{\mathrm{MP^3}} + \frac{548}{3}\mathrm{A}.\mathrm{MM'}\iint_{\Sigma(\mathrm{M})-\Sigma(\mathrm{M},2\mathrm{MM'})} f\left(\frac{\mathrm{MP}}{\sin\omega}\right)\frac{|d\sigma|}{\mathrm{MP^3}}$$

à condition de remplacer dans (29′) $\frac{1}{\mathrm{M'P}}$ par sa majorante $\frac{2}{\mathrm{MP}}$ [*cf.* (32)].

Pour évaluer les intégrales du second membre de (34), nous utiliserons le système des coordonnées polaires introduit au paragraphe **26**, dont toutes les conclusions s'appliquent; nous avons donc d'abord

$$\frac{1}{\mathrm{MP^3}} < \frac{1}{\rho^3}$$

et puis, compte tenu de (19),

$$|d\sigma| \leqq \frac{169}{144}\rho\, d\rho\, d\psi.$$

D'après la définition même de ω, le domaine d'intégration

$$\Sigma(\mathrm{M}) - \Sigma(\mathrm{M}, 2\mathrm{MM'})$$

se projette sur le plan tangent Mxy en M à S à l'intérieur de la couronne circulaire

$$2\mathrm{MM'}\sin\omega \leqq \rho \leqq \mathrm{R},$$

en sorte que nous avons

$$(34') \qquad \left| \iint_{\Sigma(\mathrm{M})-\Sigma(\mathrm{M},2\mathrm{MM'})} \frac{d\sigma}{\mathrm{MP^3}} \right| \leqq \frac{169}{144}\int_0^{2\pi} d\psi \int_{2\mathrm{MM'}\sin\omega}^{\mathrm{R}} \frac{d\rho}{\rho^2}$$
$$= \frac{169}{72}\pi\left[\frac{1}{2\mathrm{MM'}\sin\omega} - \frac{1}{\mathrm{R}}\right] \leqq \frac{169\pi}{144\sin\omega}\,\frac{1}{\mathrm{MM'}}$$

et ensuite [*cf.* (4) et (4′)], comme $\frac{\mathrm{MP}}{\sin\omega} < \frac{\rho}{\sin^2\omega}$,

$$(35) \qquad \left| \iint_{\Sigma(\mathrm{M})-\Sigma(\mathrm{M},2\mathrm{MM'})} \frac{f\left(\frac{\mathrm{MP}}{\sin\omega}\right)}{\mathrm{MP^3}}\, d\sigma \right| \leqq \frac{169}{144}\int_0^{2\pi} d\psi \int_{2\mathrm{MM'}\sin\omega}^{\mathrm{R}} \frac{f\left(\frac{\rho}{\sin^2\omega}\right)}{\rho^2}\, d\rho$$
$$\leqq \frac{169\pi}{144}\,\frac{\mathrm{K}\left(f, \frac{\mathrm{R}}{\sin^2\omega}\right)}{\sin\omega}\,\frac{\varphi\left(\frac{2\mathrm{MM'}}{\sin\omega}\right)}{\mathrm{MM'}},$$

où $K\left(f, \frac{R}{\sin^2\omega}\right)$ désigne une constante positive bien déterminée, dépendant de la forme de $f(MP)$ et de $\frac{R}{\sin^2\omega}$. Moyennant ces inégalités, (34) donne

$$J \leqq \frac{169}{144}\frac{\pi}{\sin\omega} A\left[100 f\left(\frac{MM'}{\sin\omega}\right) + 200 K\left(f, \frac{R}{\sin^2\omega}\right)\varphi\left(\frac{2MM'}{\sin\omega}\right)\right].$$

Comme $\omega \geqq \frac{\pi}{3}$, on a

$$\frac{1}{\sin\omega} < 2,$$

en sorte que, eu égard à (4‴) et au fait que le module de continuité est une fonction croissante de l'argument, on a

$$\varphi\left(\frac{2MM'}{\sin\omega}\right) \geqq f\left(\frac{MM'}{\sin\omega}\right)$$

et finalement

$$J \leqq 8\pi A\left[100 + 50 K\left(f, \frac{R}{\sin^2\omega}\right)\right]\varphi\left(\frac{2MM'}{\sin\omega}\right). \tag{36}$$

Examinons enfin les deux derniers termes de la formule (26). Les points M et M′ étant des points ordinaires de S, la formule (24_3) s'applique et nous avons

$$\mu(M)\left[\iint_S \frac{\cos(M'P, N')}{M'P^2}\,d\sigma - \iint_S \frac{\cos(MP, N')}{MP^2}\,d\sigma\right] = \mu(M)(2\pi - 2\pi) = 0.$$

L'ensemble des résultats (28′), (29) et (36) permettent alors, compte tenu de la relation précédente, de déduire de (26) l'inégalité

$$|V(M') - V(M)| \leqq \frac{240}{R^3} A\sigma\varphi(MM') + 40\pi A\varphi\left(\frac{3MM'}{\sin^2\omega}\right)$$
$$+ 8\pi A\left[100 + 50 K\left(f, \frac{R}{\sin^2\omega}\right)\right]\varphi\left(\frac{2MM'}{\sin\omega}\right).$$

Mais $\omega \geqq \frac{\pi}{3}$; donc $\frac{1}{\sin^2\omega} \leqq \frac{4}{3}$ et $\frac{3MM'}{\sin^2\omega} \leqq 4MM'$. Comme $\varphi(r)$ est une fonction non décroissante de r, on déduit de là

$$|V(M') - V(M)| \leqq A\left[\frac{240}{R^3}\sigma + 840\pi + 400 K\left(f, \frac{R}{\sin^2\omega}\right)\right]\varphi(4MM'), \qquad MM' \leqq \frac{R}{8}. \tag{37}$$

L'inégalité (37) nous permet alors de conclure :

Lorsque la densité $\mu(P)$ *de répartition des masses attirantes sur une surface de Liapounoff* S *est une fonction bornée et intégrable* [*cf.* (21)], *le potentiel de double couche*

$$V(M) = \iint_S \mu(P)\frac{\cos(MP, N')}{MP^2}\,d\sigma$$

***est une fonction de* M *continue à l'intérieur de chaque portion régulière* S_i *de* S *et y vérifie une condition* (φ) [*cf.* § 9].**

Remarque. — On observera que l'inégalité (37) n'est pas homogène; le terme $\frac{\sigma}{R^3}$ est, en effet, de l'ordre $\frac{1}{R}$, alors que le second terme de la parenthèse est une constante numérique pure. Cela tient à ce que la fonction $f(r)$ n'a pas la même dimension dans toutes les inégalités où elle intervient; tantôt [*cf.* (3)] elle a les dimensions d'une densité, tantôt c'est une quantité sans dimensions [*cf.* (5)]. En particulier, le passage de (28) à (28′) repose sur l'hypothèse que l'inégalité $MM' \leq \varphi(MM')$ est purement numérique. A l'avenir nous aurons à manier plus d'une inégalité hétérogène.

30. Passons maintenant à l'examen du cas où M′ tend vers M en se déplaçant sur la normale $\overrightarrow{MN}$ à S en M. Remarquons d'abord qu'on peut écrire [*cf.* (24_3), § **24**]

$$\mu(M)\int_S \frac{\cos(MP, N')}{MP^2}\,d\sigma = 2\pi\mu(M),$$

puisque M est un point ordinaire de S, alors que les deux premières formules (24) donnent

$$\mu(M)\iint_S \frac{\cos(M'P, N')}{M'P^2}\,d\sigma = \begin{cases} 4\pi, & \text{si } M' \text{ est intérieur à S,} \\ 0, & \text{si M est extérieur à S.} \end{cases}$$

Comme, par ailleurs, toutes les conclusions du paragraphe **28** subsistent intégralement, moyennant l'inégalité (27) que nous supposerons toujours vérifiée, l'ensemble des résultats précédents permet de déduire de (26) et de (28′)

$$(38) \qquad |V(M') - V(M) - 2\pi\mu(M)| \leq \frac{240}{R^3} A\sigma\varphi(MM') + |I_1(M') - I_1(M)|$$

pour M′ intérieur à D,

$$(38') \qquad |V(M') - V(M) + 2\pi\mu(M)| \leq \frac{240}{R^3} A\sigma\varphi(MM') + |I_1(M') - I_1(M)|$$

pour M′ extérieur à D,

où $I_1(M')$ est encore le potentiel donné par ($26'_2$).

Nous nous proposons de trouver une majorante de $|I_1(M') - I_1(M)|$ qui s'annule avec MM′.

Reprenons à cet effet la marche suivie au paragraphe **29**; nous avons

$$(39) \qquad I_1(M') - I_1(M) | \leq J + \left| \int_{\Sigma(M, 2MM')} [\mu(P) - \mu(M)] \frac{\cos(M'P, M')}{M'P^2}\,d\sigma \right| + \left| \int_{\Sigma(M, 2MM')} [\mu(P) - \mu(M)] \frac{\cos(MP, N')}{MP^2}\,d\sigma \right|.$$

inégalité où l'expression J est définie par (29′).

Les raisonnements du début du paragraphe **29** s'appliquent tels quels à la dernière intégrale (39), en sorte qu'elle est majorée par $20\pi A\varphi\left(\frac{2MM'}{\sin^2\omega}\right)$. D'un autre côté, nous avons dans le triangle rectiligne MM'P

$$M'P\sin\widehat{PM'M} = MP\sin PMM',$$

les angles étant pris en valeur absolue. On déduit de là

$$\frac{1}{M'P} = \frac{\sin\widehat{PM'M}}{\sin\widehat{PMM'}}\cdot\frac{1}{MP} \leqq \frac{1}{\sin\widehat{PMM'}}\,\frac{1}{MP}.$$

Or, la droite MP coupe $\Sigma(M, 2MM')$, intérieure à la portion $\Sigma(M)$, en deux points au moins. Par suite, MP est extérieure au cône de Günther $G(M)$, axé sur la normale en M à S, c'est-à-dire sur MM' (*cf.* § **19** et **20**); on a donc $\widehat{PMM'} > \frac{\pi}{3}$ lorsque P balaie $\Sigma(M, 2MM')$, en sorte que l'inégalité précédente donne

$$\frac{1}{M'P} \leqq \frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{1}{MP} \leqq \frac{2}{MP}.$$

Comme $|\cos(M'P, N')| \leqq 1$, cela permet d'écrire [*cf.* (21) et (23')]

$$(40)\qquad \left|\int_{\Sigma(M,2MM')}[\mu(P)-\mu(M)]\frac{\cos(M'P, N')}{M'P^2}\,d\sigma\right| \leqq 8A\int_{\Sigma(M,2MM')}\frac{d\sigma}{MP^2}$$
$$\leqq 80\pi A\varphi\left(\frac{2MM'}{\sin^2\omega}\right) \leqq 80\pi A\varphi(3MM'),$$

puisque, d'après (27), $2MM' \leqq \frac{R}{4} < \frac{5}{13}R$ et que $\sin\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Tout revient, dès lors, à étudier l'expression J, définie par (29') lorsque M' tend vers M en suivant la normale en M à S. Or, ainsi que nous l'avons fait remarquer au cours du paragraphe **29**, la forme (30) de l'élément différentiel de J est valable quelle que soit la position du point M' dans l'espace; de même, la majoration (33) du second terme du second membre de (30) subsiste moyennant la seule réserve que P appartienne à la portion $\Sigma(M)-\Sigma(M, 2MM')$; or, on a montré qu'alors la contribution à J du terme correspondant s'évanouit en un même temps que MM'. Mais cette fois, nous ne pouvons affirmer que l'intégrale

$$MM'\int_{\Sigma(M)-\Sigma(M,2MM')}\frac{\cos(MM', N')}{M'P^3}[\mu(P)-\mu(M)]\,d\sigma$$

[qui, d'après (29') et (30), figure additivement dans l'expression de J] tende vers zéro avec MM', et cela lorsque la densité $\mu(P)$ est supposée simplement bornée. Si, en effet, on s'en tient à la seule condition (21), le problème revient à étudier la manière dont se comporte pour $MM' = 0$ la quantité

$$MM' \iint_{\Sigma(M)-\Sigma(M,2MM')} \frac{\cos(MM', N')}{M'P^3}\, d\sigma;$$

on se rappellera que, d'après (32), MP et M'P sont du même ordre de grandeur. Or, cette fois, $|\cos(MM', N')|$ est très voisin de 1 si MP est assez petit, car $(MM', N') \neq (N, N')$. D'un autre côté, en reprenant le calcul du paragraphe **29** [*cf.* (35)], on montre aisément que

$$\lim_{MM'=0} MM' \int_{\Sigma(M)-\Sigma(M,2MM')} \frac{d\sigma}{MP^3} > \text{const} > 0.$$

La majorante considérée de J ne tend donc pas vers zéro avec MM' dans le cas où $\mu(P)$ est simplement bornée; il en est par suite de même du second membre de (38) et de (38') [*cf.* (39)]. Pour aller plus loin, nous admettrons donc que la densité $\mu(P)$ est continue et nous écrirons

$$(41) \qquad |\mu(M)-\mu(P)| \leqq f(MP),$$

où $f(MP)$ est un module de continuité. Pour simplifier les démonstrations et unifier notre exposé, nous admettrons encore que $f(MP)$ est identique au module de continuité de S et que, par suite, $f(MP)$ vérifie toutes les hypothèses de régularité que nous avons énoncées au paragraphe **9** *bis*; mais il serait facile d'étendre nos conclusions au cas où $f(MP)$ serait simplement une fonction positive, continue et croissante de MP, nulle en même temps que son argument. Remarquons aussi que (41) permettrait d'améliorer l'inégalité (40); nous aurions pu, en effet, y remplacer la majorante 2A de $|\mu(M')-\mu(M)|$ par $f(2MM')$ qui s'annule avec MM'; mais cela est inutile pour notre objet.

Cela étant, revenons à notre problème. Pour majorer $J = K_1 + K_2$, nous sommes encore conduits [*cf.* (29') et (30)] à majorer les deux intégrales

$$K_1 = \left| \int \frac{MM'\cos(MM', N')}{M'P^3} [\mu(P)-\mu(M)]\, d\sigma \right|$$

et

$$K_2 = \left| \int [\mu(P)-\mu(M)] MP \cos(MP, N') \left(\frac{1}{M'P^3} - \frac{1}{MP^3} \right) d\sigma \right|$$

étendues au domaine $\Sigma(M)-\Sigma(M, 2MM')$. Nous avons [*cf.* (32) et (41)]

$$K_1 \leqq MM' \int_{\Sigma(M)-\Sigma(M,2MM')} \frac{f(MP)}{M'P^3}\, d\sigma \leqq 8MM' \int_{\Sigma(M)-\Sigma(M,2MM')} \frac{f(MP)}{MP^3}\, d\sigma.$$

Or, la dernière intégrale se majore à l'aide de l'inégalité (35), à condition de faire $\sin\omega = 1$ dans celle-ci; il vient donc

$$K_1 \leqq \frac{169}{18} \pi K(f, R) \varphi(2MM').$$

On remarquera que la limitation de K_1 que nous venons d'effectuer utilise d'une manière essentielle l'hypothèse de la continuité de $\mu(P)$. Au contraire, nous n'aurons pas à nous servir de cette propriété pour étudier l'expression K_2 puisque les calculs du paragraphe **29** peuvent lui être appliqués sans modification aucune; nous avons, d'autre part, eu égard à (33) et à (35),

$$K_2 \leqq 2.169\pi A \frac{K\left(f, \frac{R}{\sin^2\omega}\right)}{\sin\omega} \varphi\left(\frac{2MM'}{\sin\omega}\right).$$

Finalement, en remplaçant $\frac{1}{\sin\omega}$ par sa majorante 2, on déduit de ce qui précède

$$\begin{aligned} J &\leqq 169\pi\left[K(f, R)\varphi(2MM') + \frac{2A}{\sin\omega} K\left(f, \frac{R}{\sin\omega}\right)\varphi\left(\frac{2MM'}{\sin\omega}\right)\right] \\ &\leqq 169\pi[K(f, R) + 4AK(f, 4R)]\varphi(4MM'). \end{aligned}$$

Moyennant ce résultat, les inégalités (38) et (38′) s'écrivent [*cf.* (39) et (40)]

$$(42)\quad \left\{ \begin{aligned} &|V(M') - V(M) - 2\pi\mu(M)| \\ &\quad \leqq \left[\frac{240}{R^3} A\sigma + 170\pi K(f, R) + 680\pi AK(f, 4R) + 100\pi A\right]\varphi(4MM') \\ &\qquad\qquad (M' \text{ intérieur à } D); \\ &|V(M') - V(M) + 2\pi\mu(M)| \\ &\quad \leqq \left[\frac{240}{R^3} A\sigma + 170\pi K(f, R) + 680\pi AK(f, 4R) + 100\pi A\right]\varphi(4MM') \\ &\qquad\qquad (M' \text{ extérieur à } D). \end{aligned} \right.$$

Nous pourrons maintenant conclure :

Lorsque la densité $\mu(P)$ *des masses attirantes, répandues sur une surface de Liapounoff* S, *vérifie une condition* (f), *le potentiel de double couche correspondant,* V(M), *défini par* (20), *vérifie l'une des inégalités* (42) *selon que le point* M′ *tend vers* M *suivant la normale extérieure ou intérieure en* M *à* S, *toutes les fois que* $MM' \leqq \frac{R}{8}$, M *étant un point ordinaire de* S.

31. Nous nous proposons maintenant de passer à l'examen du cas général et de montrer que les inégalités (42) subsistent encore si M′ tend vers M en suivant un chemin quelconque n'ayant en commun avec S que son extrémité M. Notre raisonnement utilisera un lemme de pure Géométrie que nous commencerons par faire connaître.

Considérons un point ordinaire M de S, L(M, R) la sphère de Liapounoff correspondante, dont le rayon R est supposé assez petit pour qu'aucun point singulier de S ne soit intérieur à L(M, R); soit M′, un point étranger à S (extérieur ou intérieur à D) tel que $MM' \leqq \frac{R}{8}$ [*cf.* (27)].

Dans ces conditions, nous pouvons énoncer le résultat suivant :

Lemme. — *Si* $MM' \leqq \frac{R}{8}$, *il existe sur* $\Sigma(M)$ *au moins un point* M_0 *tel que* $M'M_0$ *soit confondu avec la normale en* M_0 *à* S.

En effet, envisageons une surface fermée de Liapounoff S_1, dépourvue de lignes singulières; le plan tangent varie d'une manière continue sur cette surface. On sait alors que le minimum de la distance PM′ (M′ étant un point fixe de l'espace et P un point courant sur S_1) est atteint pour un point M_0, ou plusieurs points, tels que $M'M_0$ soit normal à S_1 en M_0; il existe effectivement au moins un point M_0 pour une surface de l'espèce indiquée. Cela étant, considérons la surface de Liapounoff S_1 définie de la manière suivante : S_1 sera formée de $\Sigma(M)$ et d'une portion régulière, tout entière extérieure à L(M, R), se raccordant avec la portion $\Sigma(M)$ le long de l'intersection de celle-ci avec $\Sigma(M)$. [Il est clair qu'il existe une infinité de surfaces telles que S_1.] Soit M_0 un des points que nous venons de définir : je dis qu'il appartient nécessairement à $\Sigma(M)$. En effet, il existe sur $\Sigma(M)$ des points dont la distance au point M′ est inférieure à $\frac{R}{8}$, car $MM' \leqq \frac{R}{8}$, alors que le domaine $S_1 - \Sigma(M)$, étant extérieur à L(M), est éloigné de M′ de $\frac{7}{8}R$ au moins; le minimum de M′P est donc atteint par un point, au moins, de $\Sigma(M)$, ce qui démontre notre proposition.

Cela posé, revenons au potentiel V(M). Considérons un chemin C, n'ayant en commun avec S que le point ordinaire M de S; soit M′ un point de C tel que $MM' \leqq \frac{R}{8}$, M_0 le point de $\Sigma(M)$ tel que $M'M_0$ soit confondu avec la normale à M_0 en S; d'après le lemme précédent, de tels points existent. Nous avons, si C est intérieur à D, pour fixer les idées

$$\begin{aligned}|V(M') - V(M) - 2\pi\mu(M)| &= |V(M') - V(M_0) - 2\pi\mu(M) + V(M_0) - V(M)| \\ &\leqq |V(M') - V(M_0) - 2\pi\mu(M)| + |V(M_0) - V(M)|.\end{aligned}$$

Comme $MM' \leqq \frac{R}{8}$, l'inégalité (37) s'applique à $|V(M_0) - V(M)|$, alors que (42) vaut pour $|V(M') - V(M_0) - 2\pi\mu(M)|$ puisque M_0M' est normale à S en M_0; on peut donc écrire, en désignant par B et B_1 des constantes figurant dans (37) et (42_1)

$$|V(M') - V(M) - 2\pi\mu(M)| \leqq B\varphi(4\,MM_0) + B_1\varphi(4\,M_0M').$$

Mais d'après la propriété extrémale de M_0M', on a

$$M_0M' \leqq MM',$$

en sorte que

$$\varphi(4M_0M') \leqq \varphi(4MM').$$

D'un autre côté, il vient, dans le triangle rectiligne $MM'M_0$,

$$MM_0 \leqq MM' + M'M_0 \leqq 2MM', \qquad \text{d'où} \qquad \varphi(4MM_0) \leqq \varphi(8MM').$$

L'ensemble de ces résultats entraîne

$$(43) \qquad |V(M') - V(M) - 2\pi\mu(M)| \leqq (B + B_1)\varphi(8MM')$$

pour M' intérieur à D et $MM' \leqq \frac{R}{8}$, alors qu'un raisonnement tout semblable permettrait d'écrire

$$(43') \qquad |V(M') - V(M) + 2\pi\mu(M)| \leqq (B + B_1)\varphi(8MM')$$

pour M' extérieur à D et tel que $MM' \leqq \frac{R}{8}$.

On notera que nous ne faisons aucune hypothèse de régularité sur le chemin C suivi par le point M' pour atteindre M. Ces inégalités résolvent complètement le problème que nous nous sommes posé; elles entraînent les importantes conséquences que voici.

Lorsque M' tend vers M, la fonction $V(M')$ qui figure dans (43) et (43'), possède une limite bien déterminée, indépendante du chemin suivi par M'; nous appellerons $V_i(M)$ [$V_e(M)$] la valeur limite de $V(M')$ lorsque M' tend vers M en suivant le chemin C intérieur (extérieur à D); nous avons, en faisant $MM' = 0$ dans (43) et (43'),

$$(43_1) \qquad V_i(M) = V(M) + 2\pi\mu(M),$$

$$(43'_1) \qquad V_e(M) = V(M) - 2\pi\mu(M).$$

On déduit de là les deux formules équivalentes

$$V_i(M) - V_e(M) = 4\pi\mu(M), \qquad V_i(M) + V_e(M) = 2V(M),$$

qui mettent en évidence la discontinuité subie par le potentiel de double couche, défini par (20) en traversant la surface de singularité S en un de ses points ordinaires M.

Les résultats qui précèdent constituent l'extension des formules classiques de Plemelj au cas des surfaces généralisées de Liapounoff.

31 *bis*. Nous terminons ce chapitre en étendant les inégalités (37), (43) et (43'), d'abord au cas où $MM' \geqq \frac{R}{8}$, puis, au cas général où M n'appartiendrait pas à S. La démonstration repose sur cette propriété géométrique des surfaces de Liapounoff [1] : chaque point M de S est accessible de l'intérieur ou de l'extérieur du domaine D limité par S. Cela veut dire que tout point M de S

---

[1] Pour simplifier les raisonnements, nous admettrons dans tout le cours de ce paragraphe que la surface S est dépourvue de singularité. L'extension au cas général est aisée.

peut être joint à un point M', intérieur à D (extérieur à D) par une ligne polygonale de longueur *finie* dont tous les points, à l'exception de M, sont intérieurs (extérieurs à D). Dans le cas des surfaces de Liapounoff, on peut préciser davantage et affirmer : 1° qu'on peut toujours trouver, quels que soient M et M', un chemin polygonal $C(M, M')$ dont le nombre de côtés soit inférieur à un nombre fixe ne dépendant que de la surface; 2° que les points de $C(M, M')$ extérieurs à la sphère $L\left(M, \frac{R}{8}\right)$ sont situés à des distances de S supérieures à une longueur ne dépendant que de la surface S et de la distance de M' à S. En particulier, si la distance de M' à S, que nous désignerons par $\delta(M', S)$, est supérieure à $\frac{R\sqrt{3}}{16}$, les distances à S des points de $C(M, M')$ intérieurs à $L\left(M, \frac{R}{8}\right)$ seront minorées par $\frac{R\sqrt{3}}{16}$. Dans la suite, nous noterons $\delta(A, B)$ la distance de deux ensembles A et B [1].

Ces propriétés sont intuitives et à peu près évidentes. Nous allons en donner une rapide démonstration afin d'établir en toute rigueur l'existence des bornes dont l'énoncé ci-dessus fait mention. Pour simplifier, nous admettrons d'abord que le point M' est intérieur à D. Ceci étant, menons par chaque point M de S la normale intérieure à S et portons sur cette normale une longueur égale à $\frac{R}{8}$: le lieu géométrique des extrémités m de ces segments sera une surface S_1, parallèle à S. Comme S, par hypothèse, est dépourvue de singularités, S_1 sera aussi une surface fermée, limitant un domaine D_1 situé à l'intérieur de D [et qui, en aucun cas, ne peut être multiplement connexe [2]]. D'après cela, deux points quelconques de l'ensemble $D_1 + S_1$ peuvent être joints par un chemin dont tous les points appartiennent à l'ensemble; cette propriété de connexité nous sera utile.

Comme le domaine $S - \Sigma(M)$ est extérieur à la sphère $L(M, R)$, $\delta[m, S - \Sigma(M)]$ est certainement supérieure à $\frac{R}{8}$. La droite Mm étant normale en M à S, la fonction $\delta(m, P)$, P étant un point courant de $\Sigma(M)$, possède pour $M = P$ un extremum égal à $\frac{R}{8}$. Mais, en admettant même que cette fonction puisse avoir sur $\Sigma(M)$ des extremum moindres que $\frac{R}{8}$, nous pourrions assigner à ces extremum une borne inférieure. En effet, d'après les résultats

[1] Rappelons la définition du nombre $\delta(A, B)$; cette longueur est égale à la limite inférieure des distances entre un point de A et un point de B. Si donc a est un point de A et b un point de B, on a

$$\delta(a, b) \geqq \delta(A, B).$$

[2] Cette propriété est une conséquence immédiate de la troisième hypothèse de Liapounoff (*cf.* § **10**) et des raisonnements du paragraphe **18**.

du paragraphe **20**, $\Sigma(M)$ est situé dans la portion de l'espace comprise entre $L(M, R)$ et le cône de Günther $G(M)$, à l'extérieur de ce cône. Par suite, $\delta[m, \Sigma(M)]$ est minorée par $\frac{R}{8}\sin\omega \geqq \frac{R\sqrt{3}}{16}$. Il résulte de tout cela

$$\delta(D_1 + S_1, S) \geqq \frac{R\sqrt{3}}{16}.$$

Construisons alors le cubillage de l'espace, défini au paragraphe **21**, mais en prenant $\frac{R}{32}$ pour longueur commune des arêtes du cube, au lieu de $\frac{R}{\sqrt{3}}$. L'ensemble $D_1 + S_1$ étant borné, pourra être recouvert à l'aide d'un nombre fini k (qui dépend du diamètre de la surface S) de cubes $c_1, c_2, \ldots, c_k$ du cubillage et cela de telle sorte que chaque point de $D_1 + S_1$ fasse partie d'un, au moins, des cubes de la suite $c_i (i = 1, 2, \ldots, k)$ et que, réciproquement, chaque c_i contienne au moins un point de $D_1 + S_1$. La longueur des diagonales des c_i étant égale à $\frac{R\sqrt{3}}{32}$, chaque point M' d'un c_i est distant de $\frac{R\sqrt{3}}{32}$, au moins, de S. Pour le faire voir, raisonnons par l'absurde et supposons que la distance $\delta(M', S)$ à S d'un point M' de c_i soit moindre que $\frac{R\sqrt{3}}{32}$. Soit alors P, un point de c_i appartenant à $D_1 + S_1$, dont l'existence résulte de la définition des c_i. Nous aurions alors avec les hypothèses faites

$$\delta(P, S) \leqq \delta(P, M') + \delta(M', S) < \frac{R\sqrt{3}}{32} + \frac{R\sqrt{3}}{32} < \frac{R\sqrt{3}}{16},$$

le cas de l'égalité étant exclu, d'après ce qui précède. Or, $D_1 + S_1$ est l'ensemble des points intérieurs à D et situés à une distance de S au moins égale à $\frac{R\sqrt{3}}{16}$, en sorte que

$$\delta(P, S) \geqq \frac{R\sqrt{3}}{16}.$$

La contradiction qu'exprime les deux dernières égalités établit notre résultat. Il suit de là, eu égard à la propriété de connexion de l'ensemble $D_1 + S_1$, que deux points quelconques M_1 et M_2 de $D_1 + S_1$ peuvent être joints par une chaîne de cubes $c_{e_1}, c_{e_2}, \ldots, c_{e_r}$, les indices entiers $e_1, e_2, \ldots, e_r$ appartenant à la suite $1, 2, \ldots, k$, et cela de telle sorte que : 1° le cube c_{e_1} contient M_1, le cube c_{e_r} contient M_2 ; 2° deux cubes consécutifs de la chaîne ont en commun au moins un sommet. Dès lors, on peut joindre les points M_1 et M_2 par la ligne polygonale $C_i(M_1, M_2)$— dont le symbole est affecté de l'indice i pour marquer que tous ses points sont intérieurs à D et pour différentier C et C_i — de r côtés, dont les $r - 2$ côtés, étrangers à ses extrémités M_1 et M_2, seraient constitués par les diagonales des cubes $c_{e_2}, c_{e_3}, \ldots, c_{e_{r-1}}$, le premier (dernier) côté étant le segment joignant M_1 (M_2) à un sommet de c_{e_1} (c_{e_r}) adjacent à c_{e_2} ($c_{e_{r-1}}$).

Le nombre de côtés de la ligne est borné par k, alors que, d'après la propriété du cubillage ci-dessus, chaque point de la ligne est distant au moins de $\frac{R\sqrt{3}}{16}$ de S. En particulier prenons pour le point M_1 le point m qui correspond sur S_1 au point M de S, et pour M_2 le point M'; il résulte de ce qui précède, que la ligne polygonale C(M, M'), formée du chemin $C_i(m, M')$ qu'on vient de construire et du segment mM, répond à toutes les conditions de l'énoncé donné au début de ce paragraphe. Ce résultat justifie notre lemme dans le cas où $\delta(M', S) \geqq \frac{R\sqrt{3}}{16}$. Si, au contraire, M' appartient au domaine

$$(D+S)-(D_1+S_1),$$

et si, par suite, $\delta(M, S) \leqq \frac{R}{8}$, on associera à M' un point M_0 de S, tel que le segment $M'M_0$ soit normal à S en M_0; nous avons vu qu'il existe au moins un point M_0 répondant à la question et que $\delta(M', M_0) = M'M_0 \leqq \frac{R\sqrt{3}}{16} < \frac{R}{8}$. Soit m_0 le point qui correspond à M_0 sur S_1; il est clair que le chemin polygonal de $(r+2)$ côtés, formé de la ligne polygonale $C_i(m_0, m)$ et des segments Mm et m_0M', répond à la question. Notons, de plus, que la longueur de chaque côté de la ligne est inférieure à $\frac{R}{8}$, puisque $M'm_0 \leqq \frac{R}{8}$ et que le nombre de ses côtés est au plus égal à $k+2$.

Le même raisonnement montre que deux points quelconques M et M' de D + S peuvent être joints par une ligne polygonale C(M, M'), comprenant au plus $k+2$ côtés, la longueur de chaque côté étant majorée par $\frac{R}{8}$ et telle que : 1° les points de la ligne étrangers aux côtés de C(M, M') qui sont adjacents à ses extrémités M et M' sont situés à des distances de S au moins égales à $\frac{R\sqrt{3}}{16}$; 2° le côté adjacent à l'extrémité M (ou M') de la ligne est orienté suivant la normale à S chaque fois que $\delta(M, S)$ [ou $\delta(M', S)$] est au plus égal à $\frac{R}{8}$.

Cela étant, revenons à notre problème. Envisageons le chemin C(M, M') joignant deux points quelconques de $D_1 + S_1$; soient $P_1, P_2, \ldots, P_{r-1}$ $(r \leqq k)$ les sommets intermédiaires. D'après ce que nous avons vu,

$$\delta[C(M_1, M_2), S] \geqq \frac{R\sqrt{3}}{16}.$$

Il suit de là que le potentiel de double couche V(M) est analytique le long de C(M, M'); en chaque point de C(M, M') les dérivées de V(M) peuvent être bornées au moyen de $\frac{1}{R}$ (*cf.* les calculs du paragraphe **28**). Par suite, le long de chaque côté de $C(M, M')$, le potentiel $V(M)$ vérifie une condition de Lipschitz $\left(\text{dont la constante dépend de } \frac{1}{R}\right)$, donc une condition φ (¹)

$$\begin{aligned}
&|V(M_0) - V(P_1)| \leqq \text{const.} MP_1 \leqq \varphi(MP_1),\\
&|V(P_i) - V(P_{i+1})| \leqq \text{const.} P_iP_{i+1} \leqq \varphi(P_iP_{i+1}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, r-2 < k),\\
&|V(P_{r-1}) - V(M')| \leqq \text{const.} P_{r-2}M_2 \leqq \varphi(P_{r-1}M').
\end{aligned}$$

Supposons alors que la distance MM' soit supérieure à $\frac{R}{8}$, ou plus généralement supérieure à une longueur fixe l, différente de zéro. Comme les longueurs de chaque côté de $C(M, M')$ sont majorées par $\frac{R\sqrt{3}}{16}$, le quotient de MP_1, P_iP_{i+1} $(i = 1, 2, \ldots, r-2 < k)$, $P_{r-1}M'$ par MM' est majoré par $\frac{R\sqrt{3}}{16}\frac{1}{l} < a$, a étant un entier assez grand. Il suit de là

$$\varphi(MP_1) \leqq \varphi(aMM'); \qquad \varphi(P_1P_2) \leqq \varphi(aMM'), \ldots,$$

en sorte que les inégalités précédentes entraînent

$$|V(M) - V(M')| \leqq r\varphi(aMM') \leqq k\varphi(aMM').$$

Supposons maintenant que M' soit un point de l'ensemble $(D+S)-(D_1+S_1)$; pour commencer, supposons M' intérieur à D, donc étranger à S, alors que M est encore un point de $D_1 + S_1$. Soient M_0 le point de S associé à M', introduit un peu plus haut, et m_0 le point correspondant de S_1; on a vu que $M_0M' \leqq \frac{R}{8}$, $m_0M_0 = \frac{R}{8}$. D'après cela nous avons, eu égard à (43),

$$\begin{aligned}
&|V(M') - V(M_0) - 2\pi\mu(M_0)| \leqq \varphi(M'M_0),\\
&|V(m_0) - V(M_0) - 2\pi\mu(M_0)| \leqq \varphi(M_0m_0).
\end{aligned}$$

Comme $MM' \geqq l$, les seconds membres de ces inégalités sont majorés par une expression du type $\varphi(aMM')$. D'un autre côté, m_0 et M étant deux points de $D_1 + S_1$, on peut écrire

$$|V(m_0) - V(M)| \leqq k\varphi(aMM')$$

et de la combinaison des trois dernières inégalités, on déduit

$$|V(M) - V(M')| \leqq (k+2)\varphi(aMM'),$$

ce qui vaut pour deux points M et M', intérieurs à D — M étant de plus dans $D_1 + S_1$ — et dont la distance est minorée par une constante fixe l. Rappelons

(¹) Il ne faut pas perdre de vue que le module φ qui figure aux seconds membres des inégalités du texte se déduit du module associé φ défini par (4) en le multipliant par un facteur numérique qui, ici, dépend de $\frac{1}{R}$. Il en sera de même des inégalités qui suivent.

que l'entier k dépend de S par l'intermédiaire de son diamètre et de R, alors que a est fonction de R et de l. D'insignifiantes transformations du raisonnement permettaient d'étendre l'inégalité précédente à deux points quelconques extérieurs à D.

Le même raisonnement prouve encore que

$$|V(M)| - V(M_0) - 2\pi\mu(M_0)| \leqq (k+1)\varphi(aMM'),$$

où M est un point quelconque de $D_1 + S_1$ et M_0 est un point quelconque de S; cela constitue une extension de (43) au cas où $MM' \geqq \frac{R}{8}$. Si maintenant M atteint S à son tour, il suffirait d'envisager le chemin polygonal $MmP_1P_2, \ldots, P_{k-1}m_0M_0$ pour déduire des inégalités qui précèdent l'extension de (37) au cas où $MM' \geqq \frac{R}{8}$. On remarquera que les conclusions qui précèdent reposent essentiellement sur l'hypothèse de l'existence du nombre a, c'est-à-dire sur l'existence de la limite inférieure l de MM'.

Pour être complet, il faudrait donc justifier l'inégalité du type

$$|V(M) - V(M')| \leqq \varphi(aMM')$$

pour tout couple de points M et M' intérieurs à D, c'est-à-dire pour des points tels que leur distance ne soit pas inférieurement bornée par un nombre supérieur à zéro.

Si les deux distances $\delta(M, S)$ et $\delta(M', S)$ sont inférieurement bornées, on montre immédiatement que le segment MM', à partir d'une valeur suffisamment petite de MM', appartient au domaine D et que, de plus, la distance à S de chaque point de ce segment est inférieurement bornée [1]. Il suit de là que le potentiel V vérifie le long de MM' une condition de Lipschitz, donc une condition (φ). C. Q. F. D.

Admettons, à présent, que les distances $\delta(M, S)$ et $\delta(M', S)$ soient inférieures à $\frac{R}{8}$, avec $MM' \leqq \frac{R}{8}$. Soit M_0 le point de S associé à M'; trois cas sont alors possibles :

$$MM' \geqq M'M_0; \qquad \frac{1}{2}M_0M' \leqq MM' \leqq MM_0; \qquad MM' \leqq \frac{1}{2}MM_0.$$

[1] On établit ce résultat en construisant un cubillage de l'espace avec des cubes d'arête égale à $\frac{\varepsilon}{2\sqrt{3}}$, ε étant la plus petite des trois longueurs : MM' et les longueurs $\delta(M, S)$ et $\delta(M', S)$. Dans ces conditions M et M' seront enfermés dans une chaîne de cubes dont chacun sera situé à l'intérieur de D et distant d'au moins $\frac{\varepsilon}{2}$ de la frontière de S. Dès lors, le facteur constant de $\varphi(MM')$ sera fonction de $\frac{1}{\varepsilon}$.

Plaçons-nous dans le premier cas. L'inégalité (43) s'applique, car $M_0M \leqq \frac{R}{8}$ et $M_0M' \leqq \frac{R}{8}$; nous avons

$$|V(M) - V(M_0) - 2\pi\mu(M_0)| \leqq \varphi(8M_0M),$$
$$|V(M') - V(M_0) - 2\pi\mu(M_0)| \leqq \varphi(8M_0M').$$

Comme ici $MM' > M'M_0$, $M_0M \leqq M_0M' + MM' \leqq 2MM'$, ce qui entraîne

$$|V(M) - V(M')| \leqq 2\varphi(16MM').$$

Dans le second cas, les inégalités précédentes sont encore valables; et comme

$$M_0M \leqq M'M_0 + MM' \leqq 3MM' \quad \text{et} \quad \varphi(M_0M') \leqq \varphi(2MM'),$$

il en résulte

$$|V(M) - V(M')| \leqq 2\varphi(24MM').$$

Enfin, dans le troisième cas, l'angle $\widehat{M'M_0M}$ est inférieur à $\frac{\pi}{6}$; cela montre que la droite M_0M est intérieure au cône de Günther $G(M_0)$. Il suffit alors de modifier très légèrement les raisonnements du paragraphe **30** pour justifier l'inégalité

$$|V(M) - V(M')| \leqq \varphi(MM').$$

C'est là une vérification sur laquelle nous n'insisterons pas.

Bien entendu, il serait aisé d'étendre la conclusion du présent paragraphe au cas où le point M' serait extérieur au domaine D.

Nous venons de discuter un peu longuement les propriétés des surfaces de Liapounoff, qui nous ont permis d'étendre à l'ensemble $D + S$ les propriétés locales, traduites par les inégalités (37) et (43), où M désigne un point de S et où intervient la restriction $MM' \leqq \frac{R}{8}$. Voici l'utilité que présente ce genre de raisonnement. Si, à l'avenir, nous rencontrons une fonction $V(M)$ qui vérifie dans D et sur S les inégalités (37) et (43), soumises à la restriction $MM' \leqq \frac{R}{8}$ et qui vérifie l'inégalité $|V(M) - V(M')| \leqq \varphi(MM')$ lorsque M et M' sont des points voisins de la normale en un point de la surface et qui, enfin, possède dans D (c'est-à-dire en chaque point intérieur à D) des dérivées premières bornées en fonction de $\frac{1}{\delta}$ (δ étant la distance de M à S), nous pouvons affirmer que $V(M)$ vérifie aussi des conditions de même forme lorsque $MM' \geqq \frac{R}{8}$; le module de continuité final fait intervenir des constantes multiplicatives dont nous avons précisé le lien avec la surface S. On verra un exemple de telles extensions au paragraphe **58**. Nous avons donc un moyen de passer, sans faire de nouveaux calculs et en n'utilisant que des propriétés intuitivement évidentes, des résultats locaux aux résultats globaux.

CHAPITRE IV.

Des propriétés élémentaires des potentiels de simple couche attachés aux surfaces généralisées de Liapounoff.

32. Considérons une surface généralisée de Liapounoff S qui sera fermée; soient $\mu(P)$ la densité superficielle des masses attirantes répandues sur S dont P est un point courant, M un point quelconque de l'espace. Envisageons le potentiel de simple couche

$$(44) \qquad U(M) = \iint_S \frac{\mu(P)}{MP}\,d\sigma;$$

créé par les masses au point M. Des calculs classiques et tout à fait élémentaires (que nous ne reproduirons pas) prouvent que l'expression (44) est définie sur S, c'est-à-dire, lorsque le point M vient sur S, et, qu'en outre, elle est continue dans tout l'espace et cela sous la seule réserve que $\mu(P)$ soit bornée et intégrable. Nous nous proposons d'étudier les dérivées de la fonction U(M) dans le voisinage de la surface singulière S, sur laquelle l'élément différentiel de l'intégrale (44) devient infini.

33. Supposons que le point M soit un point ordinaire de S. Sur la normale N extérieure en S à M, prenons un point M', voisin de M, mais étranger à S; nous avons [*Cf.* (44)]

$$(44') \qquad U(M') = \iint_S \frac{\mu(P)}{M'P}\,d\sigma.$$

Comme M'P ne devient pas nul sur le domaine d'intégration S, la fonction $U(M') = U(x', y', z')$ (x', y', z' désignant les coordonnées de M') est analytique et régulière au point M'. La formule de la différentiation sous le signe d'intégration s'applique à (44') et nous avons

$$(45) \qquad \left(\frac{dU}{dM'}\right)_{M'} = \iint_S \mu(P)\frac{\cos\left(\overrightarrow{M'P}, \overrightarrow{N}\right)}{M'P^2}\,d\sigma$$
$$= \frac{\partial U}{\partial x'}\cos\left(Ox, \overrightarrow{N}\right) + \frac{\partial U}{\partial y'}\cos(Oy, N) + \frac{\partial U}{\partial z'}\cos(Oz, N),$$

la dérivation étant effectuée au point M' dans la direction $\overrightarrow{M'M}$ de la normale $\overrightarrow{N}$ en M à S. Ceci étant faisons tendre le point M' vers M, en suivant toujours la normale M. Nous allons montrer que la limite de $\left(\frac{dU}{dM'}\right)_{M'}$ de cette expression existe, mais que cette limite est différente suivant que M' atteint M de l'extérieur ou de l'intérieur de D; les limites en cause seront notées dans la suite $\frac{dU}{dn_e}$, $\frac{dU}{dn_i}$

et s'appelleront respectivement dérivées normales extérieure et intérieure du potentiel de simple couche [1].

Le résultat précédent montrera donc que la fonction $\left(\frac{dU}{dn}\right)_{M'}$ [*cf.* (45)] subit une discontinuité en traversant la surface S, singulière pour le potentiel U(M). Nous sommes ainsi conduits à examiner ce que devient l'expression (45) lorsqu'on y fait $M = M'$

$$\frac{dU(M)}{dn} = \iint_S \mu(P) \frac{\cos(\overrightarrow{MP}, \vec{N})}{MP^2} d\sigma, \tag{46}$$

M désignant encore un point ordinaire de S. Nous établirons encore la convergence de l'intégrale du second membre (à laquelle il sera attribué le nom de dérivée normale du potentiel U(M)], nous ferons connaître des conditions suffisantes pour en assurer la continuité sur les portions régulières de S et nous apprendrons à exprimer $\frac{dU}{dn_e}$ et $\frac{dU}{dn_i}$ au moyen d'expressions linéaires de $\frac{dU}{dn}$.

On reconnaît là les résultats classiques bien connus, analogues à ceux que nous avons énoncés à la fin du paragraphe **31**. Cette analogie s'explique aisément. Les formules de définition (20) et (45) du potentiel de double couche et de la dérivée normale du potentiel de simple couche sont, en effet, très voisines; dans l'une, toutefois, intervient l'angle du rayon vecteur $\overrightarrow{M'P}$ avec la normale au point courant P de S, alors que dans l'autre figure l'angle de M'P avec la normale $\vec{N}$ au point fixe M de S.

34. La convergence de l'intégrale (46) s'établit comme celle de l'intégrale (20); nous reprendrons point par point le calcul du paragraphe **26**. Remarquons, d'abord, que (16) entraîne

$$\left|\cos(\overrightarrow{MP}, \vec{N})\right| \leq \frac{13}{6} f\left(\frac{MP}{\sin\omega}\right), \tag{47}$$

puisque l'axe Oz utilisé pour la justification de l'inégalité (16) est confondu avec la normale en M à S. Il vient donc, en reprenant les notations du para-

---

[1] Le lecteur démontrera aisément la relation

$$\frac{dU}{dn_i} = \lim_{M \to M'} \frac{[U(M') - U(M)]}{\overline{M'M}},$$

M' étant un point de la normale intérieure en M à S; $\vec{N}$ étant orienté vers l'extérieur de S, on aura ici : $\overline{MM'} < 0$; un résultat analogue vaut pour $\frac{dU}{dn_e}$. Cela prouve (une fois établi le théorème annoncé dans le texte) que la limite de la dérivée normale $\left(\frac{dU}{dn}\right)_{M'}$ est la dérivée normale de U en M correspondant au côté de S d'où M' atteint M.

graphe **26** et en supposant encore bornée la densité $\mu(P)$ [*cf.* (21) et (22)],

$$\left|\iint_{d(M)} \mu(P)\frac{\cos(\overrightarrow{MP}, \vec{N})}{MP^2}\,d\sigma\right| \leqq \frac{2197}{864}A\iint_{C(R_1)} \frac{f\left(\frac{MP}{\sin\omega}\right)}{MP^2}\,|\,d\sigma'\,|,$$

d'où l'on tirera l'inégalité fondamentale

$$(48)\qquad \left|\iint_{\Sigma(M,R_1)} \mu(P)\frac{\cos(\overrightarrow{MP}, \vec{N})}{MP^2}\,d\sigma\right| \leqq 10\pi A\,\varphi\left(\frac{R_1}{\sin^2\omega}\right), \qquad \text{avec } R_1 \leqq \frac{5}{13}R,$$

analogue à (23) et à (23'). Rappelons que les majorations du paragraphe **26**, utilisées pour aboutir à (48), ne s'appliquent qu'à un point ordinaire de M et à un nombre positif R_1 assez petit pour que le domaine correspondant $\Sigma(M, R_1)$ ne contienne aucun point singulier de S. Il résulte de là que le premier membre de (48) tend vers zéro avec R_1; cela suffit pour assurer la convergence de (46) [et cela moyennant la seule condition (21)], en chaque point ordinaire de S.

35. Nous allons maintenant construire un module de continuité pour la fonction $\frac{dU}{dn}$ définie par (46). La méthode suivie est encore toute pareille à celle des paragraphes **28** et **29** dont toutes les hypothèses seront intégralement respectées; en particulier, la condition (21) est supposée satisfaite.

Soient alors M et M_1 deux points ordinaires, appartenant à une même portion régulière S_i de S; nous admettons que la condition (27) est remplie et nous appellerons $\vec{N}_1$ le vecteur unitaire porté par la normale extérieure en M_1 à S. Posons, pour simplifier les écritures,

$$(49)\quad I(M) = \iint_{S-\Sigma(M)} \mu(P)\frac{\cos(\overrightarrow{MP}, N)}{MP^2}\,d\sigma, \qquad I(M_1) = \iint_{S-\Sigma(M)} \mu(P)\frac{\cos(\overrightarrow{M_1P}, \vec{N}_1)}{M_1P^2}\,d\sigma;$$

$$(49')\quad I_1(M) = \iint_{\Sigma(M)} \mu(P)\frac{\cos(\overrightarrow{MP}, N)}{MP^2}\,d\sigma, \qquad I_1(M_1) = \iint_{\Sigma(M)} \mu(P)\frac{\cos(\overrightarrow{M_1P}, \vec{N}_1)}{M_1P^2}\,d\sigma.$$

Nous avons alors

$$(50)\qquad \frac{dU(M_1)}{dn_1} - \frac{dU(M)}{dn} = [I(M_1) - I(M)] + [I(M_1) - I(M)].$$

On notera que, contrairement à ce qui avait été constaté au cours du paragraphe **28**, les intégrales $I(M_1)$ et $I(M)$ ne sont pas des fonctions analytiques de leurs arguments, puisque les cosinus directeurs de $\vec{N}_1$ et, par suite, l'angle $(\overrightarrow{M_1P}, \vec{N}_1)$, par exemple, n'est pas une fonction analytique de M_1, en sorte que l'élément différentiel de (49) n'est pas dérivable par rapport aux coordonnées de M_1.

Voici comment nous pourrons majorer $|I(M_1)-I(M)|$ en fonction de MM_1. Nous avons, en appelant δ la quantité $|M_1P - MP|$,

$$\frac{1}{M_1P^2} = \frac{1}{MP^2\left(1 \pm \frac{\delta}{MP}\right)^2},$$

donc

$$\left|\frac{1}{M_1P^2} - \frac{1}{MP^2}\right| = \frac{1}{MP^2}\,\frac{\left|\frac{\delta^2}{MP^2} \pm 2\frac{\delta}{MP}\right|}{\left(1 \pm \frac{\delta}{MP}\right)^2} \leqq \frac{\delta}{MP}\,\frac{3}{M_1P^2} \leqq \frac{3.64}{49R^3}\delta \leqq \frac{6}{R^3}MM_1 \leqq \frac{6}{R^3}\varphi(MM_1),$$

puisque $\delta < MM_1$, $\delta < MP$, car $MM_1 < \frac{R}{8}$ alors que sur le domaine $S - \Sigma(M)$, MP est au moins égal à R; il s'ensuit aussi que sur $S - \Sigma(M)$, $M_1P \geqq \frac{7}{8}R$, ce qui achève de justifier le résultat ci-dessus. On déduit de là et de (49) [*cf.* (21)],

$$|I(M_1) - I(M)| \leqq \left|\iint_{S-\Sigma(M)} \mu(P)\frac{\left[\cos(\overrightarrow{M_1P}, \vec{N}_1) - \cos(\overrightarrow{MP}, \vec{N})\right]}{MP^2}\,d\sigma\right| + \frac{6A}{R^3}\left[\iint_{S-\Sigma(M)} \left|\cos(\overrightarrow{M_1P}, \vec{N}_1)\right| d\sigma\right]\varphi(MM_1).$$

La dernière intégrale du second membre est visiblement inférieure à la surface totale σ de S. Quant à la première, l'inégalité (54), qui sera établie un peu plus loin, donne, eu égard à (21) et à (32),

$$\left|\iint_{S-\Sigma(M)} \mu(P)\frac{\left[\cos(\overrightarrow{M_1P}, \vec{N}_1) - \cos(\overrightarrow{MP}, \vec{N})\right]}{MP^2}\,d\sigma\right| \leqq \frac{A\sigma}{R^2}f(MM_1) + 10Af(2l)\frac{\sigma}{R^3}MM_1 \leqq \frac{A\sigma}{R^2}\left[1 + \frac{10f(2l)}{R}\right]\varphi(MM_1),$$

en désignant par l le diamètre S, c'est-à-dire le maximum de la distance de deux points de cette surface; car alors nous avons, par exemple : $f\left(\frac{MM'}{\sin\omega}\right) \leqq (2fMM_1)$

$$2f(2l) \geqq f(2MP) + f(2MM_1).$$

On déduit de là

(51) $$|I(M_1) - I(M)| \leqq \frac{A\sigma}{R^2}\left[1 + \frac{6}{R} + \frac{f(2l)}{R}\right]\varphi(MM_1) \leqq A\sigma K_1(S, f, R)$$

ou

(51') $$K_1(S, f, R) = \frac{1}{R^2}\left[1 + \frac{6}{R} + \frac{10f(2l)}{R}\right],$$

Pour trouver la majorante convenable de $|I_1(M_1)-I_1(M)|$ [*cf.* (49')], nous procéderons comme au paragraphe **29** et nous écrirons encore

$$I(M)=\iint_{\Sigma(M)-\Sigma(M,2MM_1)}\mu(P)\frac{\cos(\overrightarrow{MP},\vec{N})}{MP^2}d\sigma+\iint_{\Sigma(M,2MM_1)}\mu(P)\frac{\cos(\overrightarrow{MP},\vec{N})}{MP^2}d\sigma,$$

une transformation tout analogue valant aussi pour $I_1(M_1)$.

L'inégalité (48) s'applique à la deuxième intégrale du second membre puisque $2MM_1\leqq\frac{R}{4}\leqq\frac{5}{13}R$ [*cf.* (27)] et nous avons en faisant $\omega=\frac{\pi}{3}$

$$\left|\iint_{\Sigma(M,2MM_1)}\mu(P)\frac{\cos(\overrightarrow{MP},\vec{N})}{MP^2}d\sigma\right|\leqq 10\pi A\varphi\left(\frac{2MM_1}{\sin^2\omega}\right)\leqq 10\pi A\,\varphi(3MM_1).$$

Un raisonnement tout analogue à celui du paragraphe **29** nous donnerait de même [*cf.* (40)],

$$\left|\iint_{\Sigma(M,2MM_1)}\mu(P)\frac{\cos(\overrightarrow{M_1P},\vec{N}_1)}{M_1P^2}d\sigma\right|\leqq 10\pi A\,\varphi\left(\frac{3MM_1}{\sin^2\omega}\right)\leqq 10\pi A\,\varphi(4MM_1).$$

On déduit de là l'inégalité

(52) $$|I_1(M_1)-I_1(M)|\leqq 20\pi A\,\varphi(4MM_1)+J.$$

avec

(52') $$J=\left|\iint_{\Sigma(M)-\Sigma(M,2MM_1)}\mu(P)\left[\frac{\cos(\overrightarrow{M_1P},\vec{N}_1)}{M_1P^2}-\frac{\cos(\overrightarrow{MP},\vec{N})}{MP^2}\right]d\sigma\right|.$$

On observera que, jusqu'ici, le parallélisme de ce calcul avec celui du paragraphe **29** [*cf.* (29) et (29')] était très étroit; à partir de cette étape du raisonnement, des divergences vont apparaître et la transformation de l'élément différentiel de (52') diffère sensiblement de celle que nous avons appliquée à l'élément différentiel de (29'). Nous avons

(52) $$\frac{\cos(\overrightarrow{M_1P},\vec{N}_1)}{M_1P^2}-\frac{\cos(\overrightarrow{MP},\vec{N})}{MP^2}$$
$$=\frac{\cos(\overrightarrow{M_1P},\vec{N}_1)-\cos(\overrightarrow{MP},\vec{N})}{M_1P^2}+\cos(\overrightarrow{MP},\vec{N})\left(\frac{1}{M_1P^2}-\frac{1}{MP^2}\right).$$

Or on peut écrire,

$$\left|\frac{1}{M_1P^2}-\frac{1}{MP^2}\right|=\frac{(MP+M_1P)\,|M_1P-MP|}{M_1P^2\,MP^2}\leqq\frac{\left(1+\frac{MP}{M_1P}\right)MM_1}{M_1P.MP^2},$$

d'où, eu égard à (32) et à (47) [comme P balaie le domaine $\Sigma(M)-\Sigma(M,2MM_1)$, (32) s'applique],

(53) $$\left|\cos(\overrightarrow{MP},\vec{N})\right|\left|\frac{1}{M_1P^2}-\frac{1}{MP^2}\right|\leqq 13f\left(\frac{MP}{\sin\omega}\right)\frac{MM_1}{MP^3}.$$

D'un autre côté, on a

$$\left|\cos(\overrightarrow{M_1P}, \vec{N}_1) - \cos(\overrightarrow{MP}, \vec{N})\right|$$
$$= \left|\cos(\overrightarrow{M_1P}, \vec{N}_1) - \cos(\overrightarrow{M_1P}, \vec{N})\right| + \left|\cos(\overrightarrow{M_1P}, \vec{N}) - \cos(\overrightarrow{MP}, \vec{N})\right|.$$

Or [*cf.* (5)]

$$\left|\cos(\overrightarrow{M_1P}, \vec{N}_1) - \cos(\overrightarrow{M_1P}, \vec{N})\right| \leq \left|(\overrightarrow{M_1P}, \vec{N}_1) - (\overrightarrow{M_1P}, \vec{N})\right| = (\vec{N}, \vec{N}_1) \leq f(MM_1).$$

Pour majorer la seconde différence de cosinus, nous utiliserons une fois de plus le système de coordonnées $Mxyz$ défini au paragraphe **22**. Il vient alors, en désignant par x_1, y_1, z_1 les coordonnées de M_1, x, y, z celles du point P dans ce système de référence,

$$\left|\cos(\overrightarrow{M_1P}, \vec{N}) - \cos(\overrightarrow{MP}, \vec{N})\right|$$
$$= \left|\frac{z - z_1}{M_1P} - \frac{z}{MP}\right| = \left|z\left(\frac{1}{M_1P} - \frac{1}{MP}\right) - \frac{z_1}{M_1P}\right| \leq |z| \frac{|M_1P - MP|}{M_1P.MP} + \left|\frac{z_1}{M_1P}\right|.$$

Comme P balaie le domaine $\Sigma(M) - \Sigma(M, 2MM_1)$, nous avons [*cf.* (32)]

$$\left|\cos(\overrightarrow{M_1P}, \vec{N}) - \cos(\overrightarrow{MP}, \vec{N})\right| \leq |z| \frac{2MM_1}{MP^2} + \frac{2|z_1|}{MP},$$

et ensuite, eu égard à (16)

$$\left|\cos(\overrightarrow{M_1P}, \vec{N}) - \cos(\overrightarrow{MP}, \vec{N})\right| \leq \frac{13}{3}\left[\frac{f\left(\frac{MP}{\sin\omega}\right)}{MP} MM_1 + \frac{f\left(\frac{MM_1}{\sin\omega}\right)}{MP} MM_1\right].$$

Mais il faut bien remarquer que l'inégalité (16) dont nous avons fait grand usage au cours de ce paragraphe ne vaut que pour le domaine $\Sigma(M, R_1)$, $R_1 \leq \frac{5}{13}R$. Pour simplifier nos notations et unifier l'exposé, nous supposerons donc que le rayon R a été choisi assez petit pour que toutes les conclusions du paragraphe **22**, et notamment (16), s'appliquent au domaine $\Sigma(M, R) = \Sigma(M)$ correspondant.

L'ensemble des résultats qui précèdent permet d'écrire, eu égard à (32),

$$(54) \quad \frac{\left|\cos(\overrightarrow{M_1P}, \vec{N}_1) - \cos(\overrightarrow{MP}, \vec{N})\right|}{M_1P^2} \leq 4\frac{f(MM_1)}{MP^2} + 20\left[f\left(\frac{MM_1}{\sin\omega}\right) + f\left(\frac{MP}{\sin\omega}\right)\right]\frac{MM_1}{MP^3}.$$

Les inégalités (21), (52), (53) et (54) permettent alors de tirer de (52') le résultat suivant

$$(55) \quad J \leq 33A.MM_1 \iint_{\Sigma(M)-\Sigma(M,2MM_1)} f\left(\frac{MP}{\sin\omega}\right)\frac{d\sigma}{MP^3}$$
$$+ 20Af\left(\frac{MM_1}{\sin\omega}\right)MM_1 \iint_{\Sigma(M)-\Sigma[M,2(MM')]} \frac{d\sigma}{MP^3} + 4Af(MM_1)\iint_{\Sigma(M)-\Sigma(M,2MM_1)} \frac{d\sigma}{MP^2}.$$

Mais la première intégrale du second membre est majorée à l'aide de (35) alors que (34′) permet de majorer la seconde intégrale. Pour étudier le dernier terme, nous procéderons comme au paragraphe **29** et nous utiliserons toujours les coordonnées cylindriques z, ρ, ψ attachées au système de référence $Mxyz$; on trouve ainsi

$$\iint_{\Sigma(M)\Sigma-(M,2MM_1)} \frac{d\sigma}{MP^2} \leqq \int_0^{2\pi} d\psi \int_{2MM_1 \sin\omega}^{R} \frac{d\rho}{\rho} = 2\pi \log \frac{R}{2MM_1 \sin\omega}.$$

Ce qui précède permet de déduire de (55)

$$J \leqq 8\pi A \left\{ \left[15K\left(f, \frac{R}{\sin^2\omega}\right) + 15 \right] \varphi(4MM_1) + f(MM_1) \log \frac{R}{2MM_1 \sin\omega} \right\},$$

en remarquant que $f(MM_1) \leqq f(4MM_1) \leqq \varphi(4MM_1)$ [*cf.* le § **9** *bis*], et que $\frac{1}{\sin\omega} = \frac{2}{\sqrt{3}} < 2$. De (50), (51), (52) et de l'inégalité précédente, on tire alors

$$(56)\quad \left| \frac{dU(M_1)}{dn_1} - \frac{dU(M)}{dn} \right| \leqq \left[K_1 A\sigma + 140\pi A + 120\pi A K\left(f \frac{R}{\sin^2\omega}\right) \right] \varphi(4MM_1) + 8\pi A f(MM_1) \log \frac{R}{2MM_1 \sin\omega},$$

où la constante $K_1(S, f, R)$ est donnée par (51′).

Or les propriétés du module de continuité $f(r)$ [*cf.* § **9** *bis*] prouvent que [1]

$$\lim_{MM_1=0} f(MM_1) \log \frac{R}{2MM_1 \sin\omega} = 0.$$

---

[1] Admettons, en effet, que l'on ait, à partir d'une valeur de r assez petite

$$f(r) \log \frac{1}{r} \geqq a > 0$$

(a étant une constante). On déduit de là

$$f(r) \geqq \frac{a}{\log \frac{1}{r}}$$

et, par suite,

$$\int_\varepsilon^\alpha \frac{f(r)}{r} dr \geqq a \int_\varepsilon^\alpha \frac{dr}{r \log \frac{1}{r}} = \log \left[\left| \frac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{\log \frac{1}{\alpha}} \right| \right].$$

Comme le second membre tend visiblement vers $+\infty$ avec $\frac{1}{\varepsilon}$, il en résulterait que l'intégrale du premier membre serait divergente pour $\varepsilon = 0$. Mais cela est en contradiction avec l'hypothèse faite [*cf.* (4)], suivant laquelle le module de continuité associé $\varphi(r)$ existe, ce qui démontre notre assertion.

Nous pouvons donc énoncer :

Lorsque la densité $\mu(P)$ *des masses attirantes, répandues sur une surface* S *de Liapounoff, est bornée* [*cf.* (21)], *la dérivée normale* $\frac{dU}{dn}$ [*cf.* (46)] *du potentiel de simple couche créé par ces masses possède le module de continuité* (56), *à l'intérieur de chaque portion régulière* S_i *de* S *et cela pourvu que* $MM_1 \leqq \frac{R}{8}$.

Remarque. — La formule (56) prend une forme particulièrement simple lorsque le module $f(r)$ est höldérien ou logarithmique. Si l'on prend, en effet, $f(r) = \text{const.}\, r^\alpha$ $(\alpha < 1)$, c'est-à-dire si le module de continuité de la surface S de Liapounoff est höldérien, on peut majorer l'expression

$$f(r)\log\frac{1}{r} = \text{const.}\, r^\alpha \log\frac{1}{r}$$

par une expression de la forme const.$r^{\alpha-\eta}$, η étant un nombre positif aussi petit qu'on le veut mais non nul. Comme dans ce cas le module $\varphi(r)$ associé à $f(r)$ est aussi de la forme const.r^α, on voit que l'inégalité (56) fournit pour la dérivée normale $\frac{dU}{dn}$ du potentiel de simple couche, un module de continuité du type const.$r^{\alpha-\eta}$.

Si, au contraire,

$$f(r) = \frac{\text{const.}}{\left|\log\frac{1}{r}\right|^n}, \qquad n > 1, \qquad \varphi(r) = \frac{\text{const.}}{\left|\log\frac{1}{r}\right|^{n-1}},$$

on a

$$f(r)\left|\log\frac{1}{r}\right| = \frac{\text{const.}}{\left|\log\frac{1}{r}\right|^{n-1}}.$$

Dans ce cas, $\frac{dU}{dn}$ possède sur toute portion régulière de S un module de continuité logarithmique d'indice $n-1$.

36. Considérons maintenant un point M′ situé sur la normale en M à S — M étant toujours un point ordinaire de S. Si la condition (27) est satisfaite, M′ sera étranger à S. Cela posé, formons l'expression [*cf.* (45) et (46)]

$$\begin{aligned}\left(\frac{dU}{dn}\right)_{M'} - \left(\frac{dU}{dn}\right)_M &= \iint_S \mu(P)\frac{\cos(M'P, N)}{M'P^2}\,d\sigma - \iint_S \mu(P)\frac{\cos(MP, N)}{MP^2}\,d\sigma \\ &= \left[\iint_S \mu(P)\frac{\cos(M'P, N')}{M'P^2}\,d\sigma - \iint_S \mu(P)\frac{\cos(MP, N')}{MP^2}\,d\sigma\right] \\ &\quad + \left[\iint_S \mu(P)\frac{\cos(M'P, N) - \cos(M'P, N')}{M'P^2}\,d\sigma - \iint_S \mu(P)\frac{\cos(MP, N) - \cos(MP, N')}{MP^2}\,d\sigma\right],\end{aligned}$$

où N′, rappelons-le, désigne la normale extérieure à S en P. Or, le premier crochet n'est autre chose que la différence des potentiels de double couche $V(M')-V(M)$ [*cf.* (20)], déjà étudiée au paragraphe **30** [*cf.* (42)], sous réserve que $\mu(P)$ vérifie la condition (f); c'est l'hypothèse que nous ferons désormais. On déduit de là

$$(57)\quad \left\{\begin{array}{ll} \left|\left(\dfrac{dU}{dn}\right)_{M'}-\dfrac{dU}{dn}-2\pi\,\mu(M)\right| \leqq B\,\varphi(4MM')+|I(M')-I(M)|, & \text{si } M' \text{ est intérieur à } D, \\ \left|\left(\dfrac{dU}{dn}\right)_{M'}-\dfrac{dU}{dn}+2\pi\,\mu(M)\right| \leqq B\,\varphi(4MM')+|I(M')-I(M)|, & \text{si } M' \text{ est extérieur à } D \\ \qquad\qquad \left(MM' \leqq \dfrac{R}{8}\right). & \end{array}\right.$$

en appelant B le coefficient de $\varphi(4MM')$ dans le second membre de (42) et en posant

$$(58)\quad \left\{\begin{array}{l} I(M')=\displaystyle\iint_S \mu(P)\frac{\cos(M'P,\,N)-\cos(M'P,\,N')}{M'P^2}\,d\sigma, \\ I(M\,)=\displaystyle\iint_S \mu(P)\frac{\cos(M\,P,\,N)-\cos(M\,P,\,N')}{MP^2}\,d\sigma. \end{array}\right.$$

[Observons que l'hypothèse de la continuité de $\mu(P)$ dans l'espace (f) n'intervient plus dans la suite du calcul; elle nous aura seulement servi à justifier (57).]

Comme nous l'avons fait constamment jusqu'ici, nous décomposerons le domaine d'intégration S des intégrales qui figurent aux seconds membres de (57), en trois portions : $S-\Sigma(M)$, $\Sigma(M)-\Sigma(M,\,2MM')$ et $\Sigma(M,\,2MM')$, — l'inégalité (27) étant supposée toujours satisfaite — et nous appellerons $I_1(M')$, $I_2(M')$, $I_3(M')$, $I_1(M)$, $I_2(M)$, $I_3(M)$ les contributions respectives à $I(M')$ et à $I(M)$ des domaines partiels correspondants, en sorte que

$$(58')\quad \left\{\begin{array}{l} I(M')=I_1(M')+I_2(M')+I_3(M'), \\ I(M\,)=I_1(M\,)+I_2(M\,)+I_3(M\,). \end{array}\right.$$

Nous avons

$$I_1(M')=\iint_{S-\Sigma(M)} \mu(P)\frac{\cos(M'P,\,N)}{M'P^2}\,d\sigma-\iint_{S-\Sigma(M)} \mu(P)\frac{\cos(M'P,\,N')}{M'P^2}\,d\sigma,$$

les intégrales du second membre étant des fonctions analytiques de M' dans le domaine $L(M,\,2MM')$. Dès lors, les limitations du paragraphe **28** s'appliquent mot à mot à chacune des deux expressions en cause; notamment, nous avons le droit de leur appliquer l'inégalité (28') à condition d'y remplacer la majorante 2A de $|\mu(P)-\mu(M)|$ par celle de $|\mu(P)|$, soit A ; il vient donc

$$(59)\quad |I_1(M')-I_1(M)| \leqq \frac{240}{R^3}A\sigma\,\varphi(MM').$$

D'un autre côté, on a

$$|\cos(M'P,\,N')-\cos(M'P,\,N)| \leqq |(N,\,N')| \leqq f(MP),$$
$$|\cos(M\,P,\,N')-\cos(M\,P,\,N)| \leqq |(N,\,N')| \leqq f(MP),$$

en sorte que [*cf.* (58) et (58')]

$$|\mathrm{I}_3(\mathrm{M}')| \leqq \mathrm{A}\iint_{\Sigma(\mathrm{M},2\mathrm{MM}')} \frac{f(\mathrm{MP})}{\mathrm{M'P}^2}\,d\sigma, \qquad |\mathrm{I}_3(\mathrm{M})| \leqq \mathrm{A}\iint_{\Sigma(\mathrm{M},2\mathrm{MM}')} \frac{f(\mathrm{MP})}{\mathrm{MP}^2}\,d\sigma.$$

Or, les intégrales des seconds membres ont été souvent étudiées au cours de ce travail et, notamment, au cours du paragraphe **26**; en utilisant le même système de coordonnées $\mathrm{M}xyz$ et les mêmes coordonnées cylindriques ρ, ψ, z (que nous y avons introduites) et en remarquant que la projection de M'P sur les plan $\mathrm{M}xy$ est égale à celle de MP (puisque MM' est orienté suivant $\mathrm{M}z$), nous avons [*cf.* (19)]

$$\iint_{\Sigma(\mathrm{M},2\mathrm{MM}')} \frac{f(\mathrm{MP})}{\mathrm{M'P}^2}\,d\sigma \leqq 2\iint_{\Sigma(\mathrm{M},2\mathrm{MM}')} \frac{f\left(\frac{\rho}{\sin\omega}\right)}{\rho}\,d\rho\,d\psi \leqq 4\pi\int_0^{2\mathrm{MM}'} \frac{f\left(\frac{\rho}{\sin\omega}\right)}{\rho}\,d\rho = 4\pi\,\varphi\left(\frac{2\mathrm{MM}'}{\sin\omega}\right).$$

Il suit de là

$$(60) \qquad |\mathrm{I}_3(\mathrm{M}')| \leqq 4\pi\mathrm{A}\,\varphi\left(\frac{2\mathrm{MM}'}{\sin\omega}\right), \qquad |\mathrm{I}_3(\mathrm{M})| \leqq 4\pi\mathrm{A}\,\varphi\left(\frac{2\mathrm{MM}'}{\sin\omega}\right).$$

Il nous reste maintenant à majorer $|\mathrm{I}_2(\mathrm{M}') - \mathrm{I}_2(\mathrm{M})|$. Nous allons nous servir d'une transformation de l'élément différentiel de ces intégrales analogue à celle du paragraphe **29**. Nous avons identiquement

$$(61)\quad \mathrm{Q} = \frac{\cos(\overrightarrow{\mathrm{M'P}}, \vec{\mathrm{N}}) - \cos(\overrightarrow{\mathrm{M'P}}, \vec{\mathrm{N}}')}{\mathrm{M'P}^2} - \frac{\cos(\overrightarrow{\mathrm{MP}}, \vec{\mathrm{N}}) - \cos(\overrightarrow{\mathrm{MP}}, \vec{\mathrm{N}}')}{\mathrm{MP}^2}$$

$$= \frac{\left[\mathrm{M'P}\cos(\overrightarrow{\mathrm{M'P}}, \vec{\mathrm{N}}) - \mathrm{MP}\cos(\overrightarrow{\mathrm{MP}}, \vec{\mathrm{N}})\right] - \left[\mathrm{M'P}\cos(\overrightarrow{\mathrm{M'P}}, \vec{\mathrm{N}}') - \mathrm{MP}\cos(\overrightarrow{\mathrm{MP}}, \vec{\mathrm{N}}')\right]}{\mathrm{M'P}^3}$$

$$+ \left[\cos(\overrightarrow{\mathrm{MP}}, \vec{\mathrm{N}}) - \cos(\overrightarrow{\mathrm{MP}}, \vec{\mathrm{N}}')\right] \frac{(\mathrm{MP} - \mathrm{M'P})(\mathrm{MP}^2 + \mathrm{M'P}.\mathrm{MP} + \mathrm{M'P}^2)}{\mathrm{M'P}^3\,\mathrm{MP}^2}.$$

Or, projetons sur les axes $\vec{\mathrm{N}}$ et $\vec{\mathrm{N}}'$ l'égalité vectorielle

$$\overrightarrow{\mathrm{MM}'} = \overrightarrow{\mathrm{PM}'} - \overrightarrow{\mathrm{PM}}.$$

En choisissant pour sens positifs sur les droites M'P, MP et MM' les sens $\overrightarrow{\mathrm{M'P}}$, $\overrightarrow{\mathrm{MP}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{MM}'}$ respectivement, on a

$$-\mathrm{MM}'\cos(\overrightarrow{\mathrm{MM}'}, \vec{\mathrm{N}}) = \mathrm{M'P}\cos(\overrightarrow{\mathrm{M'P}}, \vec{\mathrm{N}}) - \mathrm{MP}\cos(\overrightarrow{\mathrm{MP}}, \vec{\mathrm{N}}),$$

$$-\mathrm{MM}'\cos(\overrightarrow{\mathrm{MM}'}, \vec{\mathrm{N}}') = \mathrm{M'P}\cos(\overrightarrow{\mathrm{M'P}}, \vec{\mathrm{N}}') - \mathrm{MP}\cos(\overrightarrow{\mathrm{MP}}, \vec{\mathrm{N}}').$$

Le numérateur du premier terme du second membre de (61) est donc égal à

$$-\mathrm{MM}'\left[\cos(\overrightarrow{\mathrm{MM}'}, \vec{\mathrm{N}}) - \cos(\overrightarrow{\mathrm{MM}'}, \vec{\mathrm{N}}')\right].$$

Il est, par suite, majoré par

$$\mathrm{MM}'|(\mathrm{N}, \mathrm{N}')| \leqq \mathrm{MM}' f(\mathrm{MP}).$$

En remarquant alors que

$$\left|\cos(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{N}) - \cos(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{N'})\right| \leqq f(MP)$$

et

$$|M'P - MP| \leqq MM',$$

on a [*cf.* (61)]

$$|Q| \leqq MM' f(MP)\left[\frac{1}{M'P^3} + \frac{(MP^2 + MP.M'P + M'P^2)}{M'P^3.MP^2}\right].$$

Comme l'inégalité (32) s'applique, le point P balayant le domaine

$$\Sigma(M) - \Sigma(M, 2MM'),$$

cela donne

$$|Q| \leqq 22\frac{MM'}{MP^3} f(MP),$$

en sorte que [*cf.* (21), (58), (58') et (61)]

$$|I_2(M') - I_2(M)| \leqq 22A.MM' \iint_{\Sigma(M)-\Sigma(M, 2MM')} \frac{f(MP)}{MP^3}\, d\sigma$$

et, enfin [*cf.* (35), où il faut faire $\sin\omega = 1$]

$$|I_2(M') - I_2(M)| \leqq 70\pi A\, K(f, R)\, \varphi(2MM'); \tag{62}$$

l'ensemble des inégalités (59), (60) et (62) permet de déduire de (58) et (58') l'inégalité

$$|I(M') - I(M)| \leqq A\left[\frac{240\sigma}{R^3} + 8\pi + 70\pi K(f, R)\right]\varphi(4MM'),$$

puisque

$$\frac{2MM'}{\sin\omega} = \frac{4MM'}{\sqrt{3}} < 4MM', \qquad \text{lorsque } \omega = \frac{\pi}{3}.$$

Dans ces conditions, on tire de (57)

$$\tag{63} \left\{\begin{array}{ll} \left|\left(\dfrac{dU}{dn}\right)_{M'} - \dfrac{dU}{dn} - 2\pi\mu(M)\right| \leqq B\,\varphi(4MM'), & \text{si } M' \text{ est intérieur à D,} \\ \left|\left(\dfrac{dU}{dn}\right)_{M'} - \dfrac{dU}{dn} + 2\pi\mu(M)\right| \leqq B\,\varphi(4MM'), & \text{si } M' \text{ est extérieur à D,} \\ B = \dfrac{480}{R^3}\sigma A + \pi K(f, R)(170 + 70A) + 108\pi A + 680\pi A\, R(f, 4R). & \end{array}\right.$$

Les inégalités précédentes permettent de conclure :

Lorsque la densité $\mu(P)$ *des masses attirantes, répandues sur une surface* S *de Liapounoff, vérifie une condition* (f) (1), *la dérivée* $\left(\dfrac{dU}{dn}\right)_{M'}$ *du potentiel de simple*

(1) *Cf.* le paragraphe **9**.

couche, définie par (45) *vérifie l'une des inégalités* (63), *suivant que* M' *tend vers* M *en se déplaçant sur la normale intérieure ou extérieure au point* M *de* S; *le point* M *est supposé être un point ordinaire de* S, *le symbole* $\frac{dU}{dn}$ *désigne la dérivée normale du potentiel de simple couche, donnée par* (46).

Cela achève de justifier les résultats annoncés au cours du paragraphe **33** et établit, notamment, l'existence des limites $\frac{dU}{dn_i}$ et $\frac{dU}{dn_e}$ qui y sont définies; d'après (63) nous avons

$$(63') \qquad \begin{cases} \dfrac{dU(M)}{dn_i} = \dfrac{dU(M)}{dn} + 2\pi\mu(M), \\ \dfrac{dU(M)}{dn_e} = \dfrac{dU(M)}{dn} - 2\pi\mu(M), \end{cases}$$

en chaque point ordinaire M d'une surface généralisée de Liapounoff S.

CHAPITRE V.

De l'existence des dérivées secondes du potentiel newtonien.

37. Dans le domaine D, limité par une surface fermée de Liapounoff S, considérons une répartition des masses attirantes de densité cubique $\mu(P)$ au point P (de coordonnées ξ, η, ζ) de D. Soit W(M) le potentiel newtonien créé par ces masses au point M de coordonnées x, y, z

$$(64) \qquad W(M) = \iiint_D \frac{\mu(P)}{MP} d\tau = W(x, y, z),$$

où $d\tau$ désigne l'élément de volume au point P.

On sait qu'à l'extérieur de D le potentiel W(M) est une fonction de M harmonique et régulière; toutes ses dérivées existent et sont données par une simple application de la formule de dérivation sous le signe d'intégration. Dans ce qui suit, nous nous occuperons presque exclusivement des points intérieurs à D, et seulement des points intérieurs et exceptionnellement des points frontières de D, c'est-à-dire des points de S. En de tels points l'élément différentiel de W possède une singularité, en sorte que les conclusions précédentes sont en défaut. Rappelons quelques résultats classiques, valables aussi pour les points intérieurs à D sous la seule réserve que la fonction $\mu(P)$ soit bornée et intégrable [*cf.* la condition (21)]; la fonction W possède des dérivées partielles $\frac{\partial W}{\partial x}$, $\frac{\partial W}{\partial y}$ et $\frac{\partial W}{\partial z}$ dans tout l'espace; chacune des dérivées en cause est continue dans tout l'espace au sens de Hölder (*cf.* § **9**) ou, ce qui revient au même, vérifie une condition H_α dans tout l'espace; l'indice α peut d'ailleurs être pris aussi voisin de 1 que l'on veut; on a

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \iiint_D \mu(P) \frac{\xi - x}{MP^3} d\tau \tag{65}$$

et deux autres formules analogues pour exprimer $\frac{\partial W}{\partial y}$ et $\frac{\partial W}{\partial z}$.

38. Mais l'hypothèse (21) ne suffit pas à assurer l'existence et encore moins la continuité des dérivées secondes de W; nous supposerons donc désormais que la densité $\mu(P)$ vérifie une condition (f) dans D (*cf.* § **9**); d'après cela, rappelons-le, on a

$$|\mu(M) - \mu(P)| \leq f(MP), \tag{66}$$

où M et P désignent deux points de D et où $f(MP)$ est un module de continuité assujetti à satisfaire à toutes les conditions de régularité énumérées aux paragraphes **9** et **9** *bis*. Nous nous proposons de montrer que l'inégalité (66) suffit pour assurer l'existence de toutes les dérivées secondes du potentiel W(M) défini par (64) en les points M intérieurs à D, dérivées dont nous formerons d'ailleurs les expressions explicites.

39. Soit $M(x, y, z)$ un point du domaine D étranger à sa frontière S; nous appellerons L(M, R), ou plus simplement L, une sphère centrée sur M et dont le rayon R sera choisi assez petit pour que la sphère L soit tout entière située à l'intérieur de D. De (65) il résulte

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \iiint_{D-L} \mu(P) \frac{\xi - x}{MP^3} d\tau + \iiint_L \mu(P) \frac{(\xi - x)}{MP^3} d\tau = I(x, y, z) + I_1(x, y, z), \tag{67}$$

en désignant respectivement par I et par I_1 les deux intégrales du second membre. A l'intérieur de L, $I(x, y, z)$ est une fonction analytique et régulière du point M dont les dérivées se calculent à l'aide de la formule de différentiation sous le signe d'intégration; nous avons

$$\frac{\partial I}{\partial x} = \iiint_{D-L} \mu(P) \left[\frac{3(\xi - x)^2}{MP^5} - \frac{1}{MP^3} \right] d\tau. \tag{68}$$

Tout revient donc à former la dérivée de I_1; or, nous avons identiquement [*cf.* (67)]

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}[I_1(x+h, y, z) - I_1(x, y, z)] = {} & \frac{\mu(M)}{h} \left[\iiint_L \frac{(\xi - x - h)}{M'P^3} d\tau - \iiint_L \frac{(\xi - x)}{MP^3} d\tau \right] \\ & + \frac{1}{h} \left\{ \iiint_L [\mu(P) - \mu(M)] \frac{(\xi - x - h)}{M'P^3} d\tau \right. \\ & \left. - \iiint_L [\mu(P) - \mu(M)] \frac{(\xi - x)}{MP^3} d\tau \right\}, \end{aligned} \tag{69}$$

où h désigne un nombre tel que $|h| \leqq \mathrm{R}$ (rayon de L) et où M′ est le point de coordonnée $x+h, y, z$, par conséquent intérieur à L. La limite pour $h=0$ du premier terme du second membre se calcule immédiatement. On voit d'abord que le terme en cause peut s'écrire

$$\mu(\mathrm{M}) \frac{\left(\frac{\partial \mathrm{W}_1}{\partial x}\right)_{\mathrm{M}'} - \left(\frac{\partial \mathrm{W}_1}{\partial x}\right)_{\mathrm{M}}}{h},$$

en posant

$$\mathrm{W}_1(\mathrm{M}') = \iiint_{\mathrm{L}} \frac{1}{\mathrm{M}'\mathrm{P}} d\tau.$$

$\mathrm{W}_1(\mathrm{M}')$ est le potentiel newtonien créé au point M′ par la sphère L(M, R) supposée remplie avec de la matière de densité égale à 1. D'après une formule élémentaire bien connue, on a, si M′ est un point quelconque situé à l'intérieur de L(M, R) (¹),

$$\mathrm{W}_1(\mathrm{M}') = \iiint_{\mathrm{L(M,R)}} \frac{1}{\mathrm{M}'\mathrm{P}} d\tau = 2\pi\left(\mathrm{R}^2 - \frac{\mathrm{M}'\mathrm{M}^2}{3}\right) \qquad (\mathrm{M}'\mathrm{M} < \mathrm{R}).$$

Si donc on désigne provisoirement par x', y', z' les coordonnées de M′, il vient, en dérivant les deux expressions ci-dessus de $\mathrm{W}_1(\mathrm{M}')$,

$$\frac{\partial \mathrm{W}_1(x', y', z')}{\partial x'} = -\frac{4}{3}\pi(x'-x) = \iiint_{\mathrm{L(M,R)}} \frac{\xi - x'}{\mathrm{M}'\mathrm{P}^3} d\tau.$$

Posons maintenant $x' = x+h$, $y = y'$, $z' = z$; le premier terme du second membre de (69) s'écrit alors

$$\frac{\mu(\mathrm{M})}{h}\left[\left(\frac{\partial \mathrm{W}_1}{\partial x}\right)_{\mathrm{M}'} - \left(\frac{\partial \mathrm{W}_1}{\partial x}\right)_{\mathrm{M}}\right] = -\frac{4}{3}\pi\mu(\mathrm{M}), \tag{70}$$

(¹) $\mathrm{W}_1(\mathrm{M}')$ se réduit à $\frac{4\pi \mathrm{R}^3}{3} \frac{1}{\mathrm{M}'\mathrm{M}}$ si M′ est à l'extérieur de L; cela résulte du théorème classique sur le potentiel créé par des couches sphériques homogènes. Rappelons comment cette remarque permet de retrouver d'une manière très élémentaire la formule du texte. Partageons le domaine L(M, R) en deux portions en traçant la sphère L(M, MM′). L'attraction newtonienne exercée sur M′ par les masses de L(M, R) extérieure à L(M, MM′) est nulle, puisque le potentiel créé par une couche sphérique homogène en un point intérieur de cette couche est constant. Par suite, le point M′ est soumis à une force, égale à celle qu'exercerait la masse totale de L(M, MM′), soit $\frac{4}{3}\pi \mathrm{MM}'^3$, concentrée au centre M de cette sphère. D'après la formule de Newton, cette force est égale à $-\frac{4}{3}\pi \overrightarrow{\mathrm{MM}'}$; elle dérive donc du potentiel

$$\mathrm{W}_1(\mathrm{M}') = -\frac{2}{3}\pi \mathrm{MM}'^2 + \mathrm{C},$$

où C désigne une constante. On déterminera cette constante en écrivant que sur L(M, R), $\mathrm{W}_1(\mathrm{M}') = \frac{4}{3}\pi \mathrm{R}^2$; on retrouve alors le résultat du texte.

et cela quel que soit h : le terme en cause possède donc bien une limite. Le terme restant du second membre de (69), que nous appellerons $\frac{1}{h}J(h)$, pour simplifier les notations, s'écrit

$$(71)\qquad \frac{1}{h}J(h) = \frac{1}{h}J_1 - \frac{1}{h}J_0 + \frac{1}{h}J_2$$

avec

$$J_1 = \iiint_{L(M,2MM')} [\mu(P)-\mu(M)]\frac{(\xi-x-h)}{M'P^3}d\tau,\qquad J_0 = \iiint_{L(M,2MM')} [\mu(P)-\mu(M)]\frac{(\xi-x)}{MP^3}d\tau,$$

$$J_2 = \iiint_{L(M,R)-L(M,2MM')} [\mu(P)-\mu(M)]\left[\frac{(\xi-x-h)}{M'P^3}-\frac{(\xi-x)}{MP^3}\right]d\tau$$

et en supposant que $MM' = |h| < \frac{R}{2}$. Comme

$$\left|\frac{\xi-x-h}{M'P}\right| \leqq 1,\qquad \left|\frac{\xi-x}{MP}\right| \leqq 1$$

et [*cf.* (66)]

$$\begin{aligned}|\mu(M)-\mu(P)| &= |\mu(M)-\mu(M')+\mu(M')-\mu(P)|\\ &\leqq |\mu(M)-\mu(M')|+|\mu(M')-\mu(P)| \leqq f(MM')+f(M'P),\end{aligned}$$

il vient

$$|J_1| \leqq \iiint_{L(M,2|h|)} \frac{f(M'P)}{M'P^2}d\tau + f(MM')\iiint_{L(M,2|h|)}\frac{d\tau}{M'P^2} \leqq 2f(3MM')\iiint_{L(M,2|h|)}\frac{d\tau}{M'P^2},$$

~~puisque~~ pour un point P balayant la sphère L(M, 2MM'), le maximum de M'P est égal à 3MM', en sorte que $f(M'P) \leqq f(3MM')$ dans tout le domaine considéré. D'un autre côté (¹)

$$\iiint_{L(M,2|h|)}\frac{d\tau}{M'P^2} = 3\pi MM'\log 3 + 4\pi MM',$$

comme on s'en assure immédiatement. Il en résulte

$$(72)\qquad \left|\frac{1}{h}J_1\right| \leqq 6\pi f(3|h|)\log 3 + 8\pi f(3|h|),$$

(¹) Pour justifier rapidement ce résultat, utilisons le système d'axes rectangulaires $Mxyz$, d'origine M parallèles respectivement aux axes $Oxyz$. Introduisons relativement à ce système d'axes les coordonnées polaires ρ, θ, ψ et posons $M'P = r = \sqrt{h^2+\rho^2-2h\rho\cos\theta}$, ce qui suppose que les coordonnées de M' par rapport au trièdre $Mxyz$ sont 0, 0 et h. Nous avons, en supposant $h \geqq 0$,

$$A = \iiint_{L(M,2h)}\frac{d\tau}{M'P^2} = \iiint_{L(M,2h)}\frac{\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\psi}{r^2} = \iiint_{L(M,2h)}\frac{\rho^2\sin\theta}{r^2}\frac{D(\theta,\rho,\psi)}{D(r,\rho,\psi)}dr\,d\rho\,d\psi.$$

Or, comme on s'en assure aisément,

$$\frac{D(\theta,\rho,\psi)}{D(r,\rho,\psi)} = \frac{r}{h\rho\sin\theta},$$

ce qui tend bien vers zéro avec h. Un raisonnement tout semblable s'applique au quotient $\frac{1}{h}J_0$

$$\left|\frac{1}{h}J_0\right| \leqq f(2|h|)\frac{1}{|h|}\iiint_{L(M,2|h|)}\frac{d\tau}{MP^2} = 8\pi f(2|h|). \tag{72'}$$

On déduit de là encore

$$\lim_{|h|=0}\left|\frac{1}{h}J_0\right| = 0.$$

Il nous reste donc à étudier la limite de $\frac{1}{h}J_2$; et c'est cette discussion qui repose sur l'hypothèse de l'existence du module de continuité $\varphi(r)$ associé à $f(r)$, hypothèse dont jusqu'ici nous n'avons pas eu à faire usage. Remarquons, à cet effet, que pour de petites valeurs de h nous avons le développement limité de Taylor,

$$\left[\frac{(\xi-x-h)}{M'P^3} - \frac{\xi-x}{MP^3}\right] = h\left[\frac{3(\xi-x)^2}{MP^5} - \frac{1}{MP^3}\right] + h^2\left[\frac{15(\xi-x_1)^3}{M_1P^7} - \frac{9(\xi-x_1)}{M_1P^5}\right],$$

valable dans le domaine $L(M, R) - L(M, 2|h|)$, où MP et $M'P$ ne s'annulent pas, et où $M_1(x_1, y_1, z_1)$ est un point du segment $MM'(x_1 = x + \theta h,\ y_1 = y,\ z_1 = z;\ 0 < \theta < 1)$. Nous sommes ainsi conduit à écrire

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}J_2 = &\iiint_{L(M,R)-L(M,2|h|)}[\mu(P) - \mu(M)]\left[\frac{3(\xi-x)^2}{MP^5} - \frac{1}{MP^3}\right]d\tau \\ &+ h\iiint_{L(M,R)-L(M,2|h|)}[\mu(P) - \mu(M)]\left[\frac{15(\xi-x_1)^3}{M_1P^7} - \frac{9(\xi-x_1)}{M_1P^5}\right]d\tau.\end{aligned}$$

Mais l'inégalité (32) est valable et s'applique, *a fortiori*, à M_1P et à MP, puisque P est extérieur à la sphère $L(M, 2MM')$ alors que M_1 est intérieur au domaine $L(M, MM')$. Comme, de plus,

$$\frac{|\xi - x_1|}{M_1P} \leqq 1,$$

---

en sorte que

$$A = \frac{2\pi}{h}\int_0^{2h}\rho\, d\rho\int_{|h-\rho|}^{h+\rho}\frac{dr}{r} = \frac{2\pi}{h}\int_0^{2h}\log\frac{h+\rho}{|h-\rho|}\rho\, d\rho = 3\pi h\log 3 + 4\pi h,$$

en prenant l'intégrale définie singulière $\int_0^{2h}\log|h-\rho|\rho\, d\rho$ au sens de Cauchy. Ceci suppose que le point M′ est distinct de M. Sinon, le calcul précédent se simplifie et l'on trouve :

$$\iiint_{L(M,2|h|)}\frac{d\tau}{MP^2} = 8\pi|h|.$$

il vient, eu égard à (66),

$$\left|\iiint_{L(M,R)-L(M,2|h|)} [\mu(P)-\mu(M)]\left[\frac{15(\xi-x_1)^3}{M_1P^7}-\frac{9(\xi-x_1)}{M_1P^5}\right]d\tau\right| \leqq 3.2^7 \iiint_{L(M,R)-L(M,2|h|)} \frac{f(MP)}{MP^4}\,d\tau.$$

Pour évaluer le second membre, passons aux coordonnées polaires ρ, θ, φ d'origine M; nous avons [*cf.* (41)]

$$\iiint_{L(M,R)-L(M,2|h|)} \frac{f(MP)}{MP^4}\,d\tau \leqq 4\pi\int_{2|h|}^{R}\frac{f(\rho)\,d\rho}{\rho^2} \leqq \frac{2\pi}{|h|}K(f,R)\varphi(2|h|),$$

en sorte que

$$\lim_{h \succ 0}\left|h\iiint_{L(M,R)-L(M,2|h|)} [\mu(P)-\mu(M)]\left[\frac{15(\xi-x_1)^3}{M_1P^7}-\frac{9(\xi-x_1)}{M_1P^5}\right]d\tau\right|$$
$$\leqq 3.2^8.\pi K(f,R)\lim_{h\succ 0}\varphi(2|h|)=0.$$

D'un autre côté, les calculs ci-dessus montrent sans difficulté que l'intégrale

$$\iiint_{L(M,R)-L(M,2|h|)} [\mu(P)-\mu(M)]\left[\frac{3(\xi-x)^2}{MP^5}-\frac{1}{MP^3}\right]d\tau$$

est convergente pour $|h|$ tendant vers zéro, puisque son élément différentiel se comporte comme $\frac{f(\rho)}{\rho}$ dans le voisinage de $\rho = MP = 0$. On conclut de là

$$\lim_{h=0}\frac{1}{h}J_2 = \iiint_{L(M,R)} [\mu(P)-\mu(M)]\left[\frac{3(\xi-x)^2}{MP^5}-\frac{1}{MP^3}\right]d\tau.$$

Cette formule, jointe à (70), (71), (72) et (72′) prouve que le second membre de (69) possède une limite pour $|h|=0$; par suite, $\frac{\partial I_1}{\partial x}$ existe et est égale à $-\frac{4\pi}{3}\mu(M)+\lim_{n=0}\left(\frac{1}{h}J_2\right)$; (67) et (68) permettent alors d'écrire

$$(73)\qquad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \iiint_{D-L(M,R)} \mu(P)\left[\frac{3(\xi-x)^2}{MP^5}-\frac{1}{MP^3}\right]d\tau$$
$$+\iiint_{L(M,R)} [\mu(P)-\mu(M)]\left[\frac{3(\xi-x)^2}{MP^5}-\frac{1}{MP^3}\right]d\tau-\frac{4\pi}{3}\mu(M).$$

On obtiendrait, évidemment, des expressions analogues pour $\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$ $\left(\text{ou pour } \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}\right)$ en permutant, dans (73), x avec y (ou avec z) et ξ avec η (ou avec ζ).

40. Formons maintenant les expressions des dérivées rectangles. Partons, à cet effet, de la relation (67) et observons que $I(x, y, z)$ est dérivable au point M, en sorte que

$$(74)\qquad \frac{\partial I}{\partial y} = \iiint_{D-L(M,R)} \mu(P)\frac{3(\xi-x)(\eta-y)}{MP^5}\,d\tau.$$

Quant à $I_1(x, y, z)$, nous avons identiquement, si M′ désigne un point de coordonnées $x' = x$, $y' = y + h$, $z' = z$, tel que $|h| = MM' < \frac{R}{2}$

$$I_1(x', y', z') = \iiint_{L(M, R)} [\mu(P) - \mu(M)] \frac{(\xi - x')}{M'P^3} d\tau,$$

puisque, d'après les calculs du paragraphe **39**, il vient

$$\frac{\partial W_1(x', y', z')}{\partial x'} = \iiint_{L(M, R)} \frac{(\xi - x')}{M'P^3} d\tau = -\frac{4\pi}{3}(x' - x) = 0.$$

Il suit de là

$$(75) \quad \frac{1}{h}[I_1(x, y + h, z) - I_1(x, y, z)]$$
$$= \frac{1}{h} \iiint_{L(M, R) - L(M, 2|h|)} [\mu(P) - \mu(M)](\xi - x)\left(\frac{1}{M'P^3} - \frac{1}{MP^3}\right) d\tau + \frac{1}{h} \iiint_{L(M, 2|h|)} \cdot$$

Comme

$$\left|\frac{\xi - x}{M'P}\right| \leqq 1; \qquad \left|\frac{\xi - x}{MP}\right| \leqq 1,$$

et comme de plus, pour tout point P de $L(M, 2|h|)$ [*cf.* 66)]

$$[\mu(P) - \mu(M)] \leqq f(MP) \leqq f(2|h|),$$

il vient (*cf.* les limitations du précédent paragraphe)

$$\left|\frac{1}{h} \iiint_{L(M, 2|h|)} [\mu(P) - \mu(M)](\xi - x)\left(\frac{1}{M'P^3} - \frac{1}{MP^3}\right) d\tau\right|$$
$$\leqq \frac{f(2|h|)}{MM'}\left[\iiint_{L(M, 2|h|)} \frac{d\tau}{M'P^2} + \iiint_{L(M, 2|h|)} \frac{d\tau}{MP^2}\right] \leqq f(2MM')[3\pi \log 3 + 12\pi].$$

L'intégrale du premier membre tend donc bien vers zéro avec $MM' = |h|$. D'un autre côté, dans le domaine $L(M, R) - L(M, 2|h|)$, étranger aux points M et M′, nous avons le développement limité

$$\frac{1}{M'P^3} - \frac{1}{MP^3} = 3h \frac{(\eta - y_1)}{M_1P^5},$$

où $M_1(x_1, y_1, z_1)$ est un point du segment MM′ : $x_1 = x$, $y_1 = y + \theta h$, $z_1 = z$; $0 < \theta < 1$. On déduit de là

$$\lim_{h=0} \frac{1}{h} \iiint_{L(M, R) - L(M, 2|h|)} [\mu(P) - \mu(M)](\xi - x)\left(\frac{1}{M'P^3} - \frac{1}{MP^3}\right) d\tau$$
$$= \lim_{h=0} \iiint_{L(M, R) - L(M, 2|h|)} [\mu(P) - \mu(M)] \frac{3(\xi - x)(\eta - y_1)}{M_1P^5} d\tau$$
$$= \iiint_{L(M, R)} [\mu(P) - \mu(M)] \frac{3(\xi - x)(\eta - y)}{MP^5} d\tau;$$

en effet, la dernière intégrale a un sens, puisque (on le voit en passant aux coordonnées polaires ρ, θ, ψ d'origine M) celle-ci est majorée par [*cf.* (66)]

$$3\iiint_{L(M,R)} \frac{f(\rho)}{\rho}\sin\theta\, d\rho\, d\psi\, d\theta \leq 12\pi\varphi(R),$$

et que le module $\varphi(\rho)$ existe. D'après ce qui précède, (75) donne

$$\frac{\partial I_1}{\partial y} = \iiint_{L(M,R)} [\mu(P)-\mu(M)]\frac{3(\xi-x)(\eta-y)}{MP^5}\,d\tau,$$

en sorte que, d'après (67),

$$(76)\quad \frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y} = \iiint_{D-L(M,R)} \mu(P)\frac{3(\xi-x)(\eta-y)}{MP^5}\,d\tau + \iiint_{L(M,R)} [\mu(P)-\mu(M)]\frac{3(\xi-x)(\eta-y)}{MP^5}\,d\tau.$$

Bien entendu, les dérivées $\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial z}$ et $\frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial z}$ se déduisent de (76) par simple permutation des coordonnées.

41. Nous pouvons donc conclure :

Lorsque la densité $\mu(P)$ *des masses attirantes, emplissant un domaine* D *borné, à trois dimensions, possède un module de continuité* $f(MP)$, *admettant le module de continuité associé* $\varphi(MP)$, *le potentiel newtonien* W(M) *créé par ces masses, possède toutes les dérivées secondes en chaque point* M intérieur *à* D; *ces dérivées sont données par les formules* (73) *et* (76) *où* R *désigne le rayon d'une sphère, centrée sur* M *et tout entière intérieure à* D.

Ce théorème constitue, à peu de choses près, l'énoncé d'un résultat de Morera [6]. Remarquons, en passant, que les formules (73) permettent de retrouver sans difficultés la formule classique de Poisson

$$\Delta W = -4\pi\mu(M).$$

En effet, la somme des éléments différentiels des dérivées carrées de W est nulle identiquement, puisqu'elle est égale à

$$\frac{3}{MP^5}[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2]-\frac{3}{MP^3}=0,$$

alors que la somme des termes constants vaut, justement, $-4\pi\mu$.

Signalons, pour finir, que le théorème de Hugoniot-Hadamard permet de préciser, de la façon la plus simple, les discontinuités subies par les dérivées secondes de W lorsque le point M traverse la frontière S de D en un point ordinaire de celle-ci — sous réserve que S soit une surface de Liapounoff. Nous renvoyons pour la démonstration de cette propriété à l'ouvrage de M. Günther [4] (*cf.* p. 91-93). Du reste, au Chapitre VII, nous formerons une expression des dérivées secondes de W qui sera valable jusque sur la frontière S de D.

(*A suivre.*)