JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

LOUIS ROBIN

Complément à l'étude des mouvements d'un liquide visqueux illimité

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 23 (1944), p. 91-96.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1944_9_23__91_0>

Complément à l'étude des mouvements d'un liquide visqueux illimité;

PAR LOUIS **ROBIN**.

Le présent Mémoire est le développement d'une Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* de MM. Jean Leray et Louis Robin, présentée le 5 juillet 1937.

Il fait également suite à l'article *Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace*, par J. Leray (*Acta Math.*, 63, 1934, p. 193-248). En particulier, la définition de la régularité du mouvement que nous adoptons est celle admise dans cet article (p. 217).

Il s'agit d'un travail effectué en collaboration, mais, par suite des circonstances, ce Mémoire a été rédigé par M. Louis Robin seul.

Notations. — t désigne le temps, $t=0$ l'époque initiale, x un point de coordonnées (x_1, x_2, x_3), $u_i(x, t)$ est la vitesse du liquide, $u_i(x, 0)$ est donné. Un élément de volume engendré par x est désigné par δx; ν est le quotient du coefficient de viscosité par la densité, $W(t)$ est l'énergie cinétique de l'ensemble du liquide à l'instant t, divisée par la densité ρ.

On utilise la convention de *l'indice muet :* un terme où un indice figure deux fois représente la somme des termes obtenus en donnant, à cet indice, successivement les valeurs 1, 2, 3.

1. LEMME SUR LA RÉPARTITION DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE. — *Énoncé.* — Soit une fonction $\lambda(x)$, définie dans tout l'espace, partout positive et de gradient borné. Soit $\Lambda(\lambda)$ l'ensemble des points x où $\lambda(x)>\lambda$. Soit un mouvement $u_i(x, t)$ régulier pour $0<t\leqq t_1$. Si l'on a

$$(1) \qquad \liminf_{\lambda\to+\infty} \lambda \iiint_{\Lambda(\lambda)} u_i(x, 0)\, u_i(x, 0)\, \delta x = 0,$$

alors, il existe une suite λ_n, indépendante de t, convergeant vers $+\infty$, telle que

$$(2) \qquad \lambda_n \iiint_{\Lambda(\lambda_n)} u_i(x, t)\, u_i(x, t)\, \delta x \to 0 \qquad (0\leqq t\leqq t_1),$$

cette convergence étant uniforme par rapport à t.

(Cet énoncé est exact tant que le mouvement reste régulier; s'il devient irrégulier, il existe au moins une solution turbulente qui vérifie cet énoncé.)

Démonstration. — Soient deux valeurs λ', λ'' de λ, $\lambda' < \lambda''$; $\Lambda' \supset \Lambda''$, les deux ensembles correspondants.

Nous procédons de façon analogue à ce qui est fait au paragraphe 27 de l'article précité de M. Jean Leray dans les *Acta*, p. 232-234.

Nous introduisons la fonction $f(x)$ suivante

$$\begin{aligned} f(x) &= 0, && \text{pour } \lambda(x) \leqq \lambda', \\ f(x) &= \frac{\lambda(x) - \lambda'}{\lambda'' - \lambda'} && \text{pour } \lambda' \leqq \lambda(x) \leqq \lambda'', \\ f(x) &= 1 && \text{pour } \lambda'' \leqq \lambda(x). \end{aligned}$$

Soient N la borne supérieure du gradient de $f(x)$ et w le maximum de

$$\iiint_{\Lambda'-\Lambda''} u_i(x, t')\, u_i(x, t')\, \delta x, \qquad \text{quand } t' \text{ varie de } 0 \text{ à } t.$$

Nous avons (pour $0 < t \leqq t_1$)

$$\begin{aligned} &\nu \int_0^t dt' \iiint_{\Lambda'} f(x) \frac{\partial u_i(x, t')}{\partial x_j} \frac{\partial u_i(x, t')}{\partial x_j} \delta x + \frac{1}{2} \iiint_{\Lambda'} f(x)\, u_i(x, t)\, u_i(x, t)\, \delta x \\ &= \frac{1}{2} \iiint_{\Lambda'} f(x)\, u_i(x, 0)\, u_i(x, 0)\, \delta x - \nu \int_0^t dt' \iiint_{\Lambda'-\Lambda''} \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} u_i(x, t') \frac{\partial u_i(x, t')}{\partial x_j} \delta x \\ &\quad + \frac{1}{\rho} \int_0^t dt' \iiint_{\Lambda'-\Lambda''} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} p(x, t')\, u_i(x, t')\, \delta x \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t dt' \iiint_{\Lambda'-\Lambda''} \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} u_j(x, t')\, u_i(x, t')\, u_i(x, t')\, \delta x. \end{aligned}$$

Nous en déduisons l'inégalité suivante qui remplace (5.2) de l'article précité

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \iiint_{\Lambda''} u_i(x, t)\, u_i(x, t)\, \delta x < {} & \frac{1}{2} \iiint_{\Lambda'} u_i(x, 0)\, u_i(x, 0)\, \delta x + \frac{\nu M w^{\frac{1}{2}}}{\lambda'' - \lambda'} \int_0^t J(t')\, dt' \\ & + \frac{1}{\rho} \frac{M w^{\frac{1}{2}}}{\lambda'' - \lambda'} \int_0^t dt' \left[\int_{\Lambda'-\Lambda''} p^2(x, t')\, \delta x \right]^{\frac{1}{2}} \\ & + \frac{M w^{\frac{1}{2}}}{\lambda'' - \lambda'} \int_0^t dt' \left[\iiint_{\Lambda'-\Lambda''} \frac{1}{2} u_i(x, t')\, u_i(x, t')\, \delta x \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

d'où l'inégalité ci-après, qui remplace (5.7),

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \iiint_{\Lambda''} u_i(x, t)\, u_i(x, t)\, \delta x < {} & \frac{1}{2} \iiint_{\Lambda'} u_i(x, 0)\, u_i(x, 0)\, \delta x \\ & + \frac{M W^{\frac{1}{2}}(0) w^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{4}}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} \nu^{\frac{3}{4}} (\lambda'' - \lambda')} \left[\pi^{\frac{1}{2}} \nu^{\frac{5}{4}} t^{\frac{1}{4}} + W^{\frac{1}{2}}(0) \right], \end{aligned}$$

cette inégalité devient (5.7), quand $\lambda(x)$ est la distance à l'origine des coordonnées, $\lambda' = R_1$, $\lambda'' = R_2$ et quand on majore w par $W(0)$.

Prenons $\lambda' = \frac{\lambda''}{2} = \lambda_n$, λ_n étant une suite convergeant vers $+\infty$, en sorte que $\lambda_n \iint_{\Lambda(\lambda_n)} u_i(x, 0) u_i(x, 0) \delta x$ tende vers zéro; φ tend vers zéro, car la région $\Lambda' - \Lambda''$ s'éloigne indéfiniment.

Nous avons donc

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\lambda_n}{2} \iiint_{\Lambda(2\lambda_n)} u_i(x, t)\, u_i(x, t)\, \delta x = \lim_{n \to \infty} \lambda_n \iiint_{\Lambda(\lambda_n)} u_i(x, t)\, u_i(x, t)\, \delta x = 0.$$

2. Nouveaux cas de régularité. — *Énoncé.* — Soit un mouvement dont l'état initial vérifie (1); supposons, en outre, l'une des conditions suivantes, réalisée pour $0 < t \leqq t_1$:

a. En tout point x, la vitesse est inférieure à une fonction linéaire de $\lambda(x)$, à coefficients constants.

b. En tout point x, le tourbillon est inférieur à une fonction linéaire de $\lambda(x)$, à coefficients constants.

Alors, ce mouvement est régulier pour $0 < t \leqq t_1$.

Démonstration. — 1° Les formules classiques, qui donnent la vitesse en fonction du tourbillon, vont d'abord nous montrer que *b.* est un cas particulier de *a.*

En effet (*cf.* H. Villat, *Leçons sur la théorie des Tourbillons*, 1930, p. 25), nous avons

$$\vec{V}(x) = \frac{1}{2\pi} \iiint_V \overrightarrow{\operatorname{grad}_x} \frac{1}{r} \wedge \vec{\Omega}'\, d\tau' + \frac{1}{4\pi} \iint_S \overrightarrow{\operatorname{grad}_x} \frac{1}{r} \wedge \left(\vec{V}' \wedge \vec{N}'\right) d\sigma';$$

les lettres accentuées désignent les valeurs des vecteurs au point variable x'.

Prenons pour S une sphère de centre x et dont on fait varier le rayon de 1 à 2. En prenant la moyenne, il vient

$$\int_1^2 \vec{V}(x)\, d\rho = \vec{V}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_1^2 d\rho \iiint_V \overrightarrow{\operatorname{grad}_x} \frac{1}{r} \wedge \vec{\Omega}'\, d\tau'$$
$$+ \frac{1}{4\pi} \iiint_{1 \leq r \leq 2} \overrightarrow{\operatorname{grad}_x} \frac{1}{r} \wedge \left(\vec{V}' \wedge \vec{N}'\right) d\tau'.$$

En désignant par V et Ω les longueurs des vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{\Omega}$, nous avons

$$V(x) = \iiint_{r \wedge 2} \text{fonct. } (x, x')\, \Omega(x')\, \delta x' + \frac{1}{4\pi} \iiint_{1 \leq r \leq 2} \text{fonct. } (x, x')\, V(x')\, \delta x',$$

d'où

$$\mathrm{V}(x) < \text{const.} \max_{r\leq 2} \Omega(x') + \text{const.}\, \mathrm{W}^{\frac{1}{2}}(0),$$

$$\mathrm{V}(x) < \text{const.}\,[a\lambda(x) + b] + \text{const.}\, \mathrm{W}^{\frac{1}{2}}(0),$$

$\lambda(x)$ étant à gradient borné.

2° Restent donc à examiner les conséquences de la condition a. Soit une constante arbitraire λ. Si un point x est étranger à $\Lambda(\lambda+1)$, la vitesse en ce point est, par hypothèse, inférieure à $a\lambda + b$ (a et b constantes données).

Si un point x appartient à $\Lambda(\lambda+1)$, il est à une distance qui a une borne inférieure non nulle de la frontière de $\Lambda(\lambda)$.

Posons

$$\eta(\lambda) = \max_{0\leq t \leq t_1} \iiint_{\Lambda(\lambda)} u_i(x, t)\, u_i(x, t)\, \delta x.$$

D désignant l'espace entier, $\mathrm{T}_{ij}(x-y,\ t-t')$ désignant le tenseur fondamental de M. Oseen, tel que

$$4\pi^{\frac{3}{2}}\mathrm{T}_{ij}(x-y,\ t-t') = \frac{\delta_{ij}}{2}\, \frac{\mathrm{E}(r,\ t-t')}{\nu(t-t')} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i\, \partial x_j},$$

$$\mathrm{E}(r,\ t-t') = \frac{e^{-\frac{r^2}{4\nu(t-t')}}}{[\nu(t-t')]^{\frac{1}{2}}}, \qquad \Phi = \frac{1}{r}\int_0^r \mathrm{E}(\alpha,\ t-t')\, d\alpha,$$

les composantes de la vitesse du fluide peuvent s'écrire [*cf.* formule (3.2), p. 218 de l'article précité de M. J. Leray]

$$\begin{aligned} u_i(x, t) = {} & \frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}}} \iiint_{\mathrm{D}} \frac{e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}}{(\nu t)^{\frac{3}{2}}}\, u_i(y, 0)\, \delta y \\ & - \frac{\partial}{\partial x_k}\int_0^t dt' \iiint_{\mathrm{D}-\Lambda(\lambda)} \mathrm{T}_{ij}(x-y,\ t-t')\, u_j(y, t')\, u_k(y, t')\, \delta y \\ & - \frac{\partial}{\partial x_k}\int_0^t dt' \iiint_{\Lambda(\lambda)} \mathrm{T}_{ij}(x-y,\ t-t')\, u_j(y, t')\, u_k(y, t')\, \delta y. \end{aligned}$$

Nous en déduisons la majorante suivante pour la vitesse en tout point x de $\Lambda(\lambda+1)$ [*cf.* l'inégalité (3.5), p. 221 du même article]

$$\mathrm{B} + \mathrm{A}\int_0^t \left\{ \frac{\mathcal{V}^2(t')}{[\nu(t-t')]^{\frac{1}{2}}};\ \frac{\eta(\lambda)}{\nu^2(t-t')^2} \right\} dt',$$

où A est une constante numérique, B une constante dépendant de l'état initial, où $\{\mathrm{X};\ \mathrm{Y}\}$ désigne la plus petite des deux quantités X et Y et $\mathcal{V}(t)$ le maximum de la vitesse à l'instant t.

Donc, $V(t)$ est inférieure à la plus grande des quantités $a\lambda + b$ et

$$B + A\int_0^t \left\{ \frac{\mathcal{V}^2(t')}{[\nu(t-t')]^{\frac{1}{2}}};\ \frac{\eta(\lambda)}{\nu^2(t-t')^2} \right\} dt'.$$

Par suite,

$$\mathcal{V}(t) < a\lambda + b, \qquad \text{pour } 0 \leqq t \leqq t_1,$$

si

$$a\lambda + b > B + A\int_0^t \left\{ \frac{(a\lambda+b)^2}{[\nu(t-t')]^{\frac{1}{2}}};\ \frac{\eta(\lambda)}{\nu^2(t-t')^2} \right\} dt'$$

et, *a fortiori*, si

$$a\lambda + b > B + A\int_0^{+\infty} \left\{ \frac{(a\lambda+b)^2}{(\nu t)^{\frac{1}{2}}};\ \frac{\eta(\lambda)}{\nu^2 t^2} \right\} dt'$$

$$= B + \frac{3A}{\nu}\eta^{\frac{1}{3}}(\lambda)(a\lambda+b)^{\frac{4}{3}} = B + \frac{3A}{\nu}(a\lambda+b)[\eta(a\lambda+b)]^{\frac{1}{3}},$$

ce qui est toujours possible, puisque limite inférieure $\lambda\eta = 0$, pour $\lambda \to \infty$ (lemme ci-dessus). On peut donc prendre λ assez grand pour avoir $\mathcal{V}(t) < a\lambda + b$. Donc $\mathcal{V}(t)$ reste borné, et le mouvement est régulier pour $0 \leqq t \leqq t_1$.

3. Régularité des mouvements ayant une symétrie de révolution et des vitesses situées dans les plans méridiens. — *Énoncé.* — Soit un état initial de vitesses $U_i(x)$ ayant le caractère suivant : il possède une symétrie de révolution et toutes les vitesses rencontrent l'axe de révolution. La vitesse est supposée de carré sommable dans l'espace entier, de quasi-divergence nulle. Nous savons qu'à cet état initial, correspond au moins un mouvement ayant le même caractère.

Théorème. — *Ce mouvement ne devient jamais irrégulier quand la condition* (1) *est vérifiée, λ y représentant la distance à l'axe de révolution, c'est-à-dire si*

$$\liminf_{q_0 \to \infty} q_0 \iiint_{q_0 < q} U_i(x)\, U_i(x)\, \delta x = 0.$$

q étant la distance à l'axe de révolution.

***Démonstration.* — Un théorème de MM. J. Pérès et J. Avanessoff (*C. R. Acad. Sc.*, 198, 1934, p. 538) affirme que la condition *b.* du paragraphe 2 est réalisée.**

***Passage à la limite* $\nu \to 0$. — Supposons, en outre, qu'à l'instant initial le quotient du tourbillon par la distance à l'axe est borné. Faisons tendre vers zéro le coefficient de viscosité. Le mouvement étudié tend vers une limite. Ce mouvement limite, défini pour toutes les valeurs positives de t, obéit aux lois des**

liquides parfaits. Il est à symétrie de révolution et les vitesses sont situées dans les plans méridiens.

4. Compléments. — 1° La relation suivante du paragraphe 2

$$\vec{V}(x) = \frac{1}{2\pi}\iiint_{r\leq 2}\overrightarrow{\mathrm{grad}_x}\frac{1}{r}\wedge\vec{\Omega}'\,d\tau' + \frac{1}{4\pi}\iiint_{1\leq r\leq 2}\overrightarrow{\mathrm{grad}_x}\frac{1}{r}\wedge\left(\vec{V}'\wedge\vec{N}'\right)d\tau',$$

et l'inégalité qui en résulte

$$V(x) < \text{const.}\max_{r\leq 2}\Omega(x') + \text{const.}\,W^{\frac{1}{2}}(0),$$

établissent qu'il suffit que le tourbillon soit borné, pour que la vitesse le soit, donc pour que le mouvement correspondant soit régulier.

2° Il en est, en particulier, ainsi, à tout instant, si les données initiales $U_i(x)$ sont régulières et si, quel que soit t, les équations de compatibilité cinématique (équations obtenues en éliminant la pression des équations de Navier) sont de la forme

$$\nu\,\Delta\xi_i = \frac{d\xi_i}{dt}, \qquad \text{c'est-à-dire si} \qquad \xi_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0,$$

les ξ_i désignant les composantes du tourbillon.

En effet, la démonstration de MM. Pérès et Avanessoff (*C. R. Acad. Sc.*, t. 189 et 198, est entièrement valable dans ce cas.

On a alors une relation entre les composantes de la vitesse, $u_3 = f(u_1, u_2, t)$.

Le cas des mouvements plans, qui rentre dans cette catégorie, correspond à $u_3 = 0$.

Il résulte de la Thèse de M. Jean Leray (*Journal de Mathématiques*, 9e série, 12, 1933, p. 64-82) que le théorème du paragraphe 3 ci-dessus s'applique aussi aux mouvements plans illimités, $\lambda(x)$ représentant la distance à l'origine des coordonnées.