JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ANDRÉ CHARRUEAU

Sur la théorie des milieux continus en équilibre limite et sur la théorie des voiles minces

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 23 (1944), p. 77-89.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1944_9_23__77_0>

Sur la théorie des milieux continus en équilibre limite et sur la théorie des voiles minces;

PAR ANDRÉ CHARRUEAU.

I. — Introduction.

Nous allons exposer les bases d'ordre *analytique* de la théorie des *milieux continus isotropes en équilibre limite plan* et celles de la théorie des *voiles minces* [1].

Le paragraphe II de ce travail renferme diverses considérations dont nous ferons l'application, dans les paragraphes III et IV, aux deux questions susindiquées.

II. — Considérations préliminaires.

Soient les trois équations

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{\partial z_2}{\partial y} = X, \tag{1}$$

$$\frac{\partial z_2}{\partial x} + \frac{\partial z_3}{\partial y} = Y, \tag{2}$$

$$F(x, y, z_1, z_2, z_3) = 0, \tag{3}$$

où z_1, z_2, z_3 sont des fonctions inconnues de x et y;

X et Y, des fonctions données de x et y;

F, une fonction donnée de x, y, z_1, z_2, z_3.

Posons

$$\frac{\partial F}{\partial y} = P_y, \qquad \frac{\partial F}{\partial z_1} = P_1, \qquad \frac{\partial F}{\partial z_2} = P_2, \qquad \frac{\partial F}{\partial z_3} = P_3. \tag{4}$$

Dans les formules (4), les dérivations sont faites en regardant x, y, z_1, z_2, z_3 comme des variables indépendantes.

[1] Les ingénieurs appellent « voiles minces » des parois dont l'épaisseur peut être regardée comme infiniment petite par rapport à leurs autres dimensions. Ils admettent que, en chaque point, les contraintes sont situées dans le plan tangent à la surface moyenne du voile.

Dérivant (3) par rapport à y, nous avons

$$P_y + P_1 \frac{\partial z_1}{\partial y} + P_2 \frac{\partial z_2}{\partial y} + P_3 \frac{\partial z_3}{\partial y} = 0. \tag{5}$$

Posons

$$\frac{\partial^{i+j} z_1}{\partial x^i \partial y^j} = p_{i,j}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial^{i+j} z_2}{\partial x^i \partial y^j} = \varpi_{i,j}. \tag{7}$$

Supposant

$$P_3 \neq 0, \tag{8}$$

éliminons $\frac{\partial z_3}{\partial y}$ de (2) au moyen de (5) et, dans P_1, P_2, P_3, P_y, remplaçons z_3 par une de ses valeurs, en fonction de x, y, z_1, z_2, définies par (3). On pourrait évidemment, moyennant une hypothèse différente, procéder d'une autre manière en éliminant soit z_1 et $\frac{\partial z_1}{\partial x}$, soit z_2, $\frac{\partial z_2}{\partial x}$ et $\frac{\partial z_2}{\partial y}$ $\left(\text{au lieu de } z_3 \text{ et } \frac{\partial z_3}{\partial y}\right)$.

Nous avons ici

$$p_{1,0} + \varpi_{0,1} - X = 0, \tag{9}$$

$$P_3 \varpi_{1,0} - P_1 p_{0,1} - P_2 \varpi_{0,1} - (y' P_3 + P_y) = 0. \tag{10}$$

Notre problème est ainsi ramené à l'étude, *pour chaque solution z_3 de (3), d'un système de deux équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre de deux fonctions inconnues, z_1 et z_2, des deux variables x et y.*

Considérons, dans le plan xOy, un arc de courbe, C, coupé en un seul point par toute parallèle à Oy. Posons, pour cet arc,

$$\mu = \frac{dy}{dx} \tag{11}$$

et

$$\Delta = P_3 \mu^2 + P_2 \mu + P_1. \tag{12}$$

L'application au système (9), (10) de la théorie des systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre conduit aux résultats suivants, que l'on peut obtenir aussi, directement, en raisonnant sur le système particulier considéré.

Les données sont supposées vérifier les conditions d'analyticité qu'exigent certaines démonstrations indiquées par la suite.

Premier cas. — $\Delta \neq 0$. Donnons-nous arbitrairement l'arc C et les valeurs de z_1 et z_2 le long de cet arc de manière, toutefois, que nous ayons $\Delta \neq 0$.

On démontre qu'on peut déterminer, pour tout point (x_0, y_0) de C, une série entière en $x - x_0$, $y - y_0$, unique et convergente, représentant z_1 et une série entière en $x - x_0$, $y - y_0$, unique et convergente, représentant z_2.

Deuxième cas. — $\Delta = 0$. Si, le long d'un arc C, on a

$$\Delta = 0, \tag{13}$$

C appartient à une *courbe caractéristique* (¹) du système (9), (10).

Désignons par μ_1 et μ_2 les deux racines de (13). Ce sont des fonctions de x, y, z_1, z_2 que l'on peut déduire des données. On a

$$\mu_1 + \mu_2 = -\frac{P_2}{P_3}, \qquad \mu_1\mu_2 = \frac{P_1}{P_3}. \tag{14}$$

Les courbes caractéristiques ne sont réelles que dans les domaines où l'on a

$$P_2^2 - 4P_1P_3 \geqq 0. \tag{15}$$

Nous supposons μ_2 différent de μ_1.

Nous appellerons courbes caractéristiques de la première famille celles qui correspondent à μ_1 et courbes caractéristiques de la deuxième famille, celles qui correspondent à μ_2.

Considérons, *par exemple, un arc*, C, *d'une courbe de la première famille.*

Pour que l'on puisse déterminer des valeurs prises sur C par les dérivées partielles premières de z_1 et z_2, on doit avoir sur C

$$P_1\,dz_1 - P_3\mu_1\,dz_2 + [-P_1X + \mu_1(YP_3 + P_y)]\,dx = 0. \tag{16}$$

Il s'ensuit que, pour que ce calcul soit possible, *les valeurs de x, y, z_1, z_2 sur* C, fonctions d'une seule variable, x par exemple, doivent satisfaire à

$$dy - \mu_1\,dx = 0 \tag{17}$$

et à (16).

Nous pouvons choisir ces valeurs des *diverses manières* indiquées ci-après :

a. Donnons-nous y en fonction de x; $\frac{dy}{dx}$ est alors une fonction connue de x; d'autre part, μ_1 est une fonction de x, y, z_1, z_2 déduite des données; nous devons prendre, pour la valeur de z_2 sur C, une fonction de x, y, $\frac{dy}{dx}$ et z_1 satisfaisant à (17); et, si nous portons dans (16) cette valeur de z_2, puis si nous remplaçons y et $\frac{dy}{dx}$ par leurs valeurs en fonction de x, nous obtenons une équation différentielle ordinaire du premier ordre qui donne, pour la valeur de z_1 sur C, une fonction de x dépendant d'une constante arbitraire.

(¹) Dans les théories des systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre et des équations aux dérivées partielles du second ordre, lorsqu'il y a deux variables indépendantes x et y, on appelle souvent « courbes caractéristiques » *soit* les lignes situées sur les surfaces intégrales et constituant les supports des multiplicités caractéristiques, *soit* les projections des dites lignes sur le plan xOy (la projection étant faite parallèlement à l'axe des z). Ici, il s'agit de ces projections.

b. Donnons-nous z_2 en fonction de x sur l'arc C, sans nous donner celui-ci; les deux équations (16) et (17) constituent un système de deux équations différentielles ordinaires du premier ordre aux deux fonctions inconnues y et z_1; ce système détermine les valeurs de y et z_1 sur C en fonction de x et de deux constantes arbitraires. Résultat analogue si l'on permute les rôles de z_1 et de z_2.

Tout système de fonctions x, y, z_1, z_2 d'une seule variable satisfaisant à (16) et (17) est une *caractéristique d'ordre nul*.

Désignons maintenant par

E_1, le membre de gauche de (9);

E_2, le membre de gauche de (10);

$\dfrac{d^i E_1}{dy^i}$ et $\dfrac{d^i E_2}{dy^i}$, les dérivées partielles du $i^{\text{ième}}$ ordre de E_1 et E_2 par rapport à y, les fonctions z_1, z_2 et leurs dérivées premières étant supposées remplacées préalablement dans E_1 et E_2 par leurs valeurs en x et y;

$\left(\dfrac{d^i E_1}{dy^i}\right)$ et $\left(\dfrac{d^i E_2}{dy^i}\right)$, les parties des dérivées $\dfrac{d^i E_1}{dy^i}$ et $\dfrac{d^i E_2}{dy^i}$ ne renfermant aucune dérivée partielle du $(i+1)^{\text{ième}}$ ordre de z_1, ni de z_2, par rapport à x et y.

Les valeurs *sur* C *des quatre dérivées partielles du premier ordre de* z_1 *et* z_2 doivent satisfaire aux cinq équations

$$(18)\quad \begin{cases} E_1 = 0, \qquad E_2 = 0, \\ (p_{1,0} + p_{0,1}\mu_1)\,dx = dz_1, \qquad (\varpi_{1,0} + \varpi_{0,1}\mu_1)\,dx = dz_2, \\ P_1\,dp_{0,1} - P_3\mu_1\,d\varpi_{0,1} + \left[P_1\left(\dfrac{dE_1}{dy}\right) - \mu_1\left(\dfrac{dE_2}{dy}\right)\right]dx = 0. \end{cases}$$

Les quatre premières équations (18) se réduisent à trois distinctes. On peut tirer de celles-ci, pour $p_{1,0}$, $\varpi_{1,0}$, $\varpi_{0,1}$, des expressions où, des quatre dérivées premières, ne figure que $p_{0,1}$. Et la dernière équation (18) devient une équation différentielle ordinaire du premier ordre dans laquelle x est la variable et la valeur de $p_{0,1}$ sur C, la fonction inconnue. L'intégration de cette équation introduit une constante arbitraire nouvelle.

De même, *les valeurs sur* C *des* $2(n+1)$ *dérivées partielles du* $n^{\text{ième}}$ *ordre de* z_1 *et de* z_2 doivent satisfaire aux $2n+3$ équations

$$(19)\quad \begin{cases} \dfrac{d^{n-1}E_1}{dy^{n-1}} \equiv p_{1,n-1} + \varpi_{0,n} - \dfrac{\partial^{n-1}X}{\partial y^{n-1}} = 0, \\ \dfrac{d^{n-1}E_2}{dy^{n-1}} \equiv P_3\varpi_{1,n-1} - P_1 p_{0,n} - P_2\varpi_{0,n} + \left(\dfrac{d^{n-1}E_2}{dy^{n-1}}\right) = 0, \\ (p_{i+1,n-i-1} + \mu_1 p_{i,n-i})\,dx = dp_{i,n-1-i} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1), \\ (\varpi_{i+1,n-i-1} + \mu_1\varpi_{i,n-i})\,dx = d\varpi_{i,n-1-i} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1), \\ P_1\,dp_{0,n} - P_3\mu_1\,d\varpi_{0,n} + \left[P_1\left(\dfrac{d^n E_1}{dy^n}\right) - \mu_1\left(\dfrac{d^n E_2}{dy^n}\right)\right]dx = 0. \end{cases}$$

Dans le système (19), les quatre équations

$$\frac{d^{n-1}E_1}{dy^{n-1}} = 0, \qquad \frac{d^{n-1}E_2}{dy^{n-1}} = 0,$$

$$(p_{1,n-1} + \mu_1 p_{0,n})\,dx = dp_{0,n-1}, \qquad (\varpi_{1,n-1} + \mu_1 \varpi_{0,n})\,dx = d\varpi_{0,n-1}$$

se réduisent à trois équations distinctes et les $2n+2$ premières équations se réduisent ainsi à $2n+1$ équations distinctes. On peut tirer de celles-ci, pour toutes les dérivées d'ordre n à l'exception de $p_{0,n}$ par exemple, des expressions où, de toutes les dérivées $n^{\text{ièmes}}$, ne figure que $p_{0,n}$. Compte tenu des calculs précédents, la dernière équation (19) peut être regardée comme une équation différentielle ordinaire du premier ordre dans laquelle x est la variable et la valeur de $p_{0,n}$ sur C, la fonction inconnue.

L'intégration de cette équation différentielle introduit une nouvelle constante arbitraire; et il en est ainsi à chaque stade des calculs.

L'équation (16) et la dernière équation (18) sont des formes particulières de la dernière équation (19).

En résumé, le problème de la détermination des séries z_1 et z_2, pour $\Delta = 0$, présente les deux cas suivants :

a. Les valeurs le long d'un arc C, en fonction de x, que l'on se donne pour y, z_1, z_2 satisfont à $\frac{dy}{dx} = \mu_1$ sans satisfaire à (16), ou satisfont à $\frac{dy}{dx} = \mu_2$ sans satisfaire à l'analogue de (16) correspondant à μ_2; *le problème est alors impossible.*

b. Les valeurs le long de C, en fonction de x, que l'on se donne pour y, z_1, z_2 satisfont à $\frac{dy}{dx} = \mu_1$ et à (16), ou bien à $\frac{dy}{dx} = \mu_2$ et à l'analogue de (16); *le problème est alors indéterminé dans les conditions qui viennent d'être précisées.*

On peut démontrer la convergence, sous certaines conditions, des séries obtenues dans le cas *b*, notamment en rattachant ce point à la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre à l'aide de la remarque suivante.

Remarque. — Soient $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ deux fonctions déterminées de x et y telles que

$$(20) \qquad \frac{\partial P}{\partial x} = X, \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = Y.$$

Posons

$$(21) \qquad z_1 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + P, \qquad z_2 = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\,\partial y}, \qquad z_3 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + Q,$$

où Φ est une fonction de x et y à déterminer.

Ces expressions (21) satisfont aux équations (1) et (2); et, en vertu de (3), on doit avoir

$$F\left(x, y, \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + P, -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + Q\right) = 0. \tag{22}$$

Posons

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = u, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = t.$$

L'équation (5) devient ici

$$P_1\left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial y^3} + \frac{\partial P}{\partial y}\right) - P_2\frac{\partial^3\Phi}{\partial x\,\partial y^2} + P_3\left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^2\,\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) + P_y = 0, \tag{23}$$

étant entendu que, dans P_1, P_2, P_3 et P_y, on doit remplacer

$$z_1 \text{ par } \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + P = q + P,$$

$$z_2 \text{ par } -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y} = -p,$$

z_3 par une fonction de $q + P$, p, x, y, solution de (3).

L'équation (23) s'écrit

$$P_3 r - P_2 s + P_1 t + P_1\frac{\partial P}{\partial y} + P_3 Y + P_y = 0, \tag{24}$$

équation *linéaire* dont tous les coefficients sont des fonctions *connues* de x, y, p, q seuls.

C'est une forme *particulière* de *l'équation de Monge-Ampère*.

Les courbes caractéristiques de (22) et de (24) sont identiques à celles du système (9), (10).

Supposons que nous nous donnions les valeurs de z_1 et de z_2 le long d'un arc de courbe n'appartenant pas à une courbe caractéristique. Nous avons aussitôt les valeurs de $p = \frac{\partial u}{\partial x}$ et de $q = \frac{\partial u}{\partial y}$ le long de cet arc et nous en déduisons celles de u le long de l'arc, à une constante arbitraire additive près. Celle-ci se retrouve dans la solution de (24), attendu que cette équation ne renferme pas u. La constante arbitraire est, par suite, sans effet sur les valeurs des fonctions $z_1(x, y) = q + P$, $z_2(x, y) = -p$ qui sont les véritables inconnues du problème.

III. — Équilibres limites plans des milieux continus isotropes.

L'équilibre est supposé limite en tout point. Les forces et les contraintes sont indépendantes de la coordonnée z du système trirectangulaire $Oxyz$ choisi.

Considérons le cas d'un milieu *isotrope hétérogène*. Nous supposons que la *courbe intrinsèque* [1] relative à tout point (x, y, z) du milieu est représentée par une équation dont la forme est indépendante de la position du point et *dans laquelle les deux paramètres x et y figurent comme paramètres* [2].

La contrainte s'exerçant sur les éléments de tout plan perpendiculaire à l'axe des z est une contrainte *principale*, dont la valeur est fonction de x et y seuls. Elle est supposée comprise entre les valeurs des deux autres contraintes principales.

L'étude à faire se ramène donc à celle du milieu dans le plan xOy.

Les compressions seront considérées comme positives.

Désignons par

N_x, la composante normale, comptée positivement dans le sens Ox, de la contrainte s'exerçant sur l'élément dont la demi-normale intérieure est dirigée suivant Ox;

N_y, la composante normale, comptée positivement dans le sens Oy, de la contrainte s'exerçant sur l'élément dont la demi-normale intérieure est dirigée suivant Oy;

T_{xy}, la composante tangentielle, comptée positivement dans le sens Ox, de cette dernière contrainte;

X et Y, les composantes, rapportées à l'unité de surface, de la force extérieure, qui est supposée pouvoir varier dans le plan xOy.

Posons

$$m = \frac{N_x + N_y}{2}. \tag{25}$$

L'équilibre étant limite partout, la circonférence de Mohr, de centre $(m, 0)$, passant par les points (N_x, T_{xy}) et (N_y, T_{xy}), est, pour tout point du milieu, tangente à la courbe intrinsèque relative à ce point. Il s'ensuit que son rayon doit être égal à une fonction *donnée*, a, de m, x et y.

On a donc

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} = X, \tag{26}$$

$$\frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = Y, \tag{27}$$

$$(N_x - N_y)^2 + 4T_{xy}^2 - 4a^2(m, x, y) = 0. \tag{28}$$

a, regardée comme fonction de m, x, y, est donc une fonction donnée de m, x et y, mais m est une fonction inconnue, à déterminer, de x et y.

---

(1) Pour la *définition de la courbe intrinsèque*, voir CAQUOT, *Équilibre des massifs à frottement interne*, 1934, p. 1 et 53 à 57.

(2) CHARRUEAU, *Sur les équilibres limites des milieux continus* (*C. R. Acad. Sc.*, 8 décembre 1941, p. 820 à 822).

Le système (26), (27), (28) est analogue à celui des équations (1), (2), (3).

Soit (ν, τ) le point de tangence, dans le demi-plan $\tau > 0$, de la courbe intrinsèque $\Gamma_{x,y}$ relative au point (x, y) et de la circonférence de Mohr, de centre $(m, 0)$, relative aussi au point (x, y). ν et τ sont des fonctions de m, x, y faciles à déterminer et que nous regarderons comme *connues*.

Les quantités z_1, z_2, z_3, P_1, P_2, P_3, P_y du paragraphe II ont ici les valeurs suivantes

$$z_1 = N_x, \qquad z_2 = T_{xy}, \qquad z_3 = N_y, \tag{29}$$

$$P_1 = 2\left[(N_x - N_y) - 2a\frac{\partial a(m, x, y)}{\partial m}\right], \tag{30}$$

$$P_2 = 8T_{xy}, \tag{31}$$

$$P_3 = -2\left[(N_x - N_y) + 2a\frac{\partial a(m, x, y)}{\partial m}\right], \tag{32}$$

$$P_y = -8a\frac{\partial a(m, x, y)}{\partial y}. \tag{33}$$

On a

$$a^2 = (m - \nu)^2 + \tau^2 \tag{34}$$

et

$$a\frac{\partial a(m, x, y)}{\partial m} = (m - \nu)\left[1 - \frac{\partial \nu(m, x, y)}{\partial m}\right] + \tau\frac{\partial \tau(m, x, y)}{\partial m}. \tag{35}$$

Si $\tan\varphi$ est le coefficient angulaire, par rapport à l'axe de $\Gamma_{x,y}$, de la tangente à cette courbe au point (ν, τ), on a

$$\frac{\partial \tau(m, x, y)}{\partial m} = \frac{\partial \nu(m, x, y)}{\partial m}\operatorname{tg}\varphi \tag{36}$$

et

$$m - \nu = \tau \operatorname{tg}\varphi. \tag{37}$$

La formule (35) s'écrit donc

$$a\frac{\partial a(m, x, y)}{\partial m} = m - \nu. \tag{38}$$

Posons

$$N_x - \nu = \xi, \qquad N_y - \nu = \eta. \tag{39}$$

Compte tenu de (25), (38) et (39), les formules (30) et (32) deviennent

$$P_1 = -4\eta, \tag{40}$$

$$P_3 = -4\xi. \tag{41}$$

Les équations (13) et (16) s'écrivent ici

$$\xi\mu^2 - 2T_{xy}\mu + \eta = 0 \tag{42}$$

et

$$(43)\qquad \eta\, d\mathrm{N}_x - \xi\mu_1\, d\mathrm{T}_{xy} - \left\{ \eta \mathrm{X} - \mu_1 \left[\xi \mathrm{Y} + 2a \frac{\partial a(m, x, y)}{\partial y} \right] \right\} dx = 0.$$

De

$$\tau^2 + \left(\frac{\mathrm{N}_x + \mathrm{N}_y}{2} - \nu \right)^2 = \frac{(\mathrm{N}_x - \mathrm{N}_y)^2}{4} + \mathrm{T}_{xy}^2$$

on tire

$$(44)\qquad \mathrm{T}_{xy}^2 - \tau^2 = (\mathrm{N}_x - \nu)(\mathrm{N}_y - \nu) = \xi\eta.$$

Les deux racines de (42) sont

$$(45)\qquad \mu_1 = \frac{\mathrm{T}_{xy} - \tau}{\xi}, \qquad \mu_2 = \frac{\mathrm{T}_{xy} + \tau}{\xi}.$$

Les équations des *caractéristiques d'ordre nul*, sont :

pour la *première* famille de courbes caractéristiques,

$$(46)\qquad \left\{ \begin{aligned} & dy - \mu_1\, dx = 0, \\ & \mu_2\, d\mathrm{N}_x - d\mathrm{T}_{xy} - \left[\mu_2 \mathrm{X} - \mathrm{Y} - \frac{2a}{\xi} \frac{\partial a(m, x, y)}{\partial y} \right] dx = 0, \end{aligned} \right.$$

et, pour la *seconde* famille de courbes caractéristiques,

$$(47)\qquad \left\{ \begin{aligned} & dy - \mu_2\, dx = 0, \\ & \mu_1\, d\mathrm{N}_x - d\mathrm{T}_{xy} - \left[\mu_1 \mathrm{X} - \mathrm{Y} - \frac{2a}{\xi} \frac{\partial a(m, x, y)}{\partial y} \right] dx = 0. \end{aligned} \right.$$

ξ, η, μ_1, μ_2 sont des fonctions connues de N_x, T_{xy}, x et y.

Ces résultats obtenus, voyons quelles sont, dans le milieu, en un point quelconque du plan $x\mathrm{O}y$, les directions des *lignes de glissement*.

Désignons par θ l'angle que forme avec le demi-axe des x positifs la *demi-normale intérieure* d'un élément.

L'effort tangentiel sur cet élément sera compté positivement dans le sens de la *demi-droite* $\theta - \frac{\pi}{2}$. Pour deux éléments de même direction ayant des demi-normales intérieures opposées, les contraintes ont leurs composantes tangentielles égales, en valeur algébrique, et il en est de même évidemment de leurs composantes normales.

Soit $\tang\alpha$ le coefficient angulaire, par rapport à l'axe des x, de la normale à une direction de glissement. On a

$$\begin{aligned} \nu &= \mathrm{N}_x \cos^2\alpha + \mathrm{N}_y \sin^2\alpha + 2\mathrm{T}_{xy} \sin\alpha \cos\alpha, \\ \pm\tau &= -(\mathrm{N}_y - \mathrm{N}_x) \sin\alpha \cos\alpha - \mathrm{T}_{xy}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha). \end{aligned}$$

On en déduit

$$\xi = \mathrm{N}_x - \nu = [(\mathrm{N}_x - \mathrm{N}_y) \sin\alpha - 2\mathrm{T}_{xy} \cos\alpha] \sin\alpha,$$

et

$$\mathrm{T}_{x} \mp \tau = -[(\mathrm{N}_x - \mathrm{N}_y) \sin\alpha - 2\mathrm{T}_{xy} \cos\alpha] \cos\alpha.$$

D'où

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\xi}{T_{xy} \mp \tau}. \tag{48}$$

Les directions des éléments correspondants ont des coefficients angulaires égaux à

$$-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{T_{xy} \mp \tau}{\xi}.$$

On obtiendrait encore ce résultat facilement au moyen d'une figure de Mohr.

Ainsi donc, en tout point, les éléments de glissement sont dirigés suivant les directions correspondant à μ_1 et à μ_2 des formules (45).

Les courbes caractéristiques se confondent donc avec les lignes de glissement.

Les composantes des contraintes sur les deux éléments, de demi-normales intérieures opposées, dirigés suivant la tangente à la courbe caractéristique de la *première* famille sont égales à ν et τ.

Les composantes analogues, relatives à la courbe caractéristique de la *deuxième* famille, sont égales à ν et $-\tau$.

Les autres considérations du paragraphe II relatives à la résolution du problème de Cauchy dans le cas où le système de solutions est *unique* ou dans le cas de *l'indétermination* s'appliquent ici, également, d'une façon immédiate. Il en est ainsi notamment de la remarque finale dudit paragraphe II.

REMARQUE. — Dans le cas *particulier* de milieux *homogènes*, on a

$$\frac{\partial a(m, x, y)}{\partial y} = 0.$$

Les équations (46) et (47) deviennent

$$\left\{\begin{aligned} dy - \mu_1\, dx &= 0, \\ \mu_2\, dN_x - dT_{xy} - (\mu_2 X - Y)\, dx &= 0 \end{aligned}\right. \tag{49}$$

et

$$\left\{\begin{aligned} dy - \mu_2\, dx &= 0, \\ \mu_1\, dN_x - dT_{xy} - (\mu_1 X - Y)\, dx &= 0. \end{aligned}\right. \tag{50}$$

Pour ce cas, M. Mandel (¹) a signalé déjà que les courbes caractéristiques se confondent avec les lignes de glissement (²).

(¹) *C. R. Acad. Sc.*, 31 janvier 1938, p. 317 et 318.

(²) Entre l'époque où le présent mémoire a été rédigé et celle où les épreuves ont été corrigées, nous avons indiqué d'autres résultats concernant les équilibres limites plans des milieux continus dans trois notes insérées aux *C. R. Acad. Sc.* des 4 octobre, 18 octobre et 8 novembre 1943.

IV. — Équilibre des voiles minces.

Par hypothèse, les contraintes en tout point sont situées dans le plan tangent en ce point à la surface moyenne S du voile.

Soit

$$z = f(x, y) \tag{51}$$

l'équation de S en coordonnées cartésiennes (rectangulaires ou obliques).

Considérons un point quelconque, m, de S et deux éléments linéaires situés sur S, l'un mm_1 parallèle au plan xOz, l'autre mm_2 parallèle au plan yOz. Soient mt_1 et mt_2 les tangentes en m à ces deux éléments d'arcs.

Désignons par :

n_1 et θ, les composantes parallèles à mt_1 et à mt_2 de la contrainte, rapportée à l'unité de longueur, agissant sur mm_2 ;

n_2 et θ, les composantes parallèles à mt_2 et à mt_1 de la contrainte, rapportée à l'unité de longueur, agissant sur mm_1 ;

α_1, o, γ_1 et o, β_2, γ_2, les paramètres principaux respectifs de mt_1 et de mt_2 ;

ω, l'angle des axes Ox et Oy ;

$\frac{X}{\sin\omega}$, $\frac{Y}{\sin\omega}$, $\frac{Z}{\sin\omega}$, les composantes suivant les axes de la force extérieure, par unité de surface de la projection de S sur le plan xOy (faite parallèlement à Oz).

X, Y, Z sont des fonctions *données* de x et y.

Posons

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = R, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = S, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = T, \tag{52}$$

$$Z - \frac{\partial f}{\partial x} X - \frac{\partial f}{\partial y} Y = U, \qquad n_1 \frac{\alpha_1}{\beta_2} = \nu_1, \qquad n_2 \frac{\beta_2}{\alpha_1} = \nu_2. \tag{53}$$

On sait que les équations d'équilibre du voile sont

$$\frac{\partial \nu_1}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial y} = X, \tag{54}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \nu_2}{\partial y} = Y, \tag{55}$$

$$R\nu_1 + 2S\theta + T\nu_2 - U = 0. \tag{56}$$

Ce système d'équations rentre dans le type étudié au paragraphe II. Il présente, d'ailleurs, deux particularités : le premier membre de (56) est une expression *linéaire* des trois fonctions inconnues ν_1, θ, ν_2 et les coefficients R, 2S, T, — U sont *des fonctions données de x et y seuls.*

Nous allons appliquer la théorie relative au système (1), (2), (3), exposée dans le paragraphe II. Nous aurons ici

$$\begin{aligned} z_1 &= \nu_1, & z_2 &= \theta, & z_3 &= \nu_2, \\ P_1 &= R, & P_2 &= 2S, & P_3 &= T, \end{aligned}$$
$$P_y = \frac{\partial R}{\partial y}\nu_1 + 2\frac{\partial S}{\partial y}\theta + \frac{\partial T}{\partial y}\nu_2 - \frac{\partial U}{\partial y}.$$

L'équation (13) s'écrit

$$T\mu^2 + 2S\mu + R = 0. \tag{57}$$

Donc, *les courbes caractéristiques du système* (54), (55), (56) *sont les projections sur le plan xOy des lignes asymptotiques de* S [1] (projections faites parallèlement à l'axe des z).

Les racines de (57) sont

$$\mu_1 = \frac{-S + \sqrt{S^2 - RT}}{T}, \qquad \mu_2 = \frac{-S - \sqrt{S^2 - RT}}{T}.$$

Les équations des *caractéristiques d'ordre nul* sont

$$\left\{ \begin{aligned} &dy - \mu_1\,dx = 0, \\ &(\mu_2\,d\nu_1 - d\theta)T - [(\mu_2 X - Y)T - P_y]\,dx = 0 \end{aligned} \right. \tag{58}$$

et

$$\left\{ \begin{aligned} &dy - \mu_2\,dx = 0, \\ &(\mu_1\,d\nu_1 - d\theta)T - [(\mu_1 X - Y)T - P_y]\,dx = 0. \end{aligned} \right. \tag{59}$$

Les courbes caractéristiques ne sont *réelles* que si

$$S^2 - RT \geqq 0.$$

Les autres considérations du paragraphe II s'appliquent également d'une façon immédiate.

On peut encore traiter la question en partant des équations d'équilibre correspondant à *deux familles quelconques de courbes orthogonales* tracées sur la surface [2] et en les ramenant à un système de deux équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre à deux fonctions inconnues de deux variables.

Remarque. — L'équation (22) prend ici la forme

$$T\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - 2S\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y} + R\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + PR + QT - U = 0, \tag{60}$$

---

(1) Rappelons que, de même, dans la théorie de la *déformation des surfaces*, les courbes constituant les supports des multiplicités caractéristiques sont les *lignes asymptotiques* des surfaces intégrales.

(2) *Voir*, par exemple, Lecornu, *Théorie mathématique de l'élasticité*, p. 24 (*Mémorial des Sciences mathématiques*).

équation *linéaire* aux dérivées partielles du *second ordre* de Φ, et dans laquelle R, S, T, P, Q, U sont des fonctions connues de x et y.

Donnons-nous sur la surface un arc, C, de courbe n'appartenant pas à une ligne asymptotique et, le long de cet arc, des valeurs de ν_1, θ et ν_2 satisfaisant à (56). De

$$(61) \qquad \nu_1 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + P, \qquad \theta = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\, \partial y}, \qquad \nu_2 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + Q,$$

on déduit les valeurs des trois dérivées secondes de Φ le long de la projection de C sur le plan xOy. Comme (60) ne renferme ni Φ, ni ses dérivées partielles du premier ordre, les valeurs des dérivées secondes sur la projection de C déterminent une solution de (60) à une fonction linéaire arbitraire près de x et y. L'existence de cette partie arbitraire est *sans effet*, d'après (61), sur les expressions des inconnues ν_1, θ et ν_2 en fonction de x et y, puisque les dérivées secondes de cette partie arbitraire sont nulles.

Étant donnée la forme *particulière*, avantageuse, de (60), il n'y a pas lieu d'utiliser ici l'équation (24) de la remarque finale du paragraphe II.