JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

JEAN DIEUDONNÉ

Une généralisation des espaces compacts

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 23 (1944), p. 65-76.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1944_9_23__65_0>

Une généralisation des espaces compacts;

PAR JEAN DIEUDONNÉ.

On sait l'importance qu'a prise, dans les travaux de Topologie de ces dernières années, la notion de *recouvrement ouvert* d'un espace topologique; la position prédominante occupée en Topologie par les espaces *compacts* (1) tient à la propriété fondamentale des recouvrements ouverts d'un tel espace, exprimée par l'axiome de Borel-Lebesgue : de tout recouvrement ouvert, on peut extraire un recouvrement *fini*, c'est-à-dire composé d'un nombre fini d'ensembles. Nous abordons, dans ce travail, l'étude d'une catégorie plus vaste d'espaces topologiques, caractérisés par une propriété moins restrictive de leurs recouvrements ouverts. Nous montrons en particulier que ces espaces, que nous proposons d'appeler *paracompacts*, sont des espaces *normaux;* inversement, un espace normal n'est pas toujours paracompact, mais il en est ainsi des espaces les plus usuels, par exemple des espaces métriques ayant une base dénombrable (2); d'autre part, ces espaces jouissent de propriétés qui les rapprochent encore des espaces compacts, en ce qui concerne les *structures uniformes* compatibles avec leur topologie.

(1) Nous utilisons, dans ce travail, la terminologie et les notations des *Éléments de Mathématique* de N. Bourbaki (*Actual. Scient. et Ind.*, nos 846, 858, 916 et 934). En particulier, les espaces que nous appelons *compacts* sont ceux dits *bicompacts* dans la terminologie d'Alexandroff et Urysohn : le développement de la Topologie générale et de ses applications à l'Analyse montre de plus en plus que c'est cette notion qui est fondamentale, et non celle d'espace « compact » au sens de M. Fréchet; les espaces « compacts » au sens de M. Fréchet, mais non « bicompacts », sont en effet pour la plupart tératologiques. C'est pourquoi de plus en plus nombreux sont les mathématiciens qui, à l'exemple de N. Bourbaki, réservent le nom d'espace « compact » à ceux qui sont vraiment utiles en Mathématiques, c'est-à-dire aux espaces « bicompacts » d'Alexandroff et Urysohn.

(2) On sait que ces espaces ont été qualifiés de « séparables » par M. Fréchet; c'est là une terminologie qui est assez fâcheuse, car, d'une part, elle ne suggère aucune image correspondant à la notion qu'elle désigne, et, d'autre part, elle risque d'engendrer de regrettables confusions avec les « axiomes de séparation » des espaces topologiques, qui ont trait à un tout autre ordre de questions. C'est pourquoi il serait souhaitable que l'emploi de ce terme fût complètement abandonné.

1. Par *recouvrement* d'un espace topologique E, nous entendrons toujours, dans ce qui suit, un recouvrement *ouvert*, c'est-à-dire une famille $\mathcal{R}$ d'ensembles ouverts A_α de E (où l'indice α parcourt un ensemble de puissance quelconque), telle que E soit *réunion* des ensembles A_α. Nous dirons qu'un recouvrement $\mathcal{R}$ est *ponctuellement fini* si un point quelconque de E n'appartient qu'à un nombre *fini* d'ensembles du recouvrement $\mathcal{R}$; nous dirons que $\mathcal{R}$ est *localement fini* [3] si, pour tout point $x \in E$, il existe un voisinage V de x qui ne rencontre qu'un nombre *fini* d'ensembles de $\mathcal{R}$. Un recouvrement localement fini est évidemment ponctuellement fini, mais la réciproque est inexacte [4].

D'autre part, étant donnés deux recouvrements $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}'$ de E, nous dirons que $\mathcal{R}$ est *subordonné* à $\mathcal{R}'$ si tout ensemble du recouvrement $\mathcal{R}$ est *contenu* dans un ensemble du recouvrement $\mathcal{R}'$ (on ne suppose donc pas que $\mathcal{R}$ soit *extrait* de $\mathcal{R}'$, c'est-à-dire que tout ensemble de $\mathcal{R}$ soit aussi un ensemble de $\mathcal{R}'$).

Cela étant, nous appellerons *espace paracompact* tout espace topologique *séparé* E, satisfaisant à l'axiome suivant :

Pour tout recouvrement $\mathcal{R}$ de E, *il existe un recouvrement $\mathcal{R}'$ de* E, *subordonné à $\mathcal{R}$ et localement fini.*

2. Théorème 1. — *Tout espace paracompact est normal.*

Nous procéderons en deux étapes, en montrant successivement qu'un espace paracompact E : 1° est régulier ; 2° est normal.

1° E est *régulier*. Soit en effet F un sous-ensemble fermé de E, et a un point n'appartenant pas à F. Pour tout $x \in F$, il existe par hypothèse (E étant

---

[3] Cette définition est un peu moins restrictive que celle donnée par A. Weil (pour les espaces localement compacts seulement) dans son travail *Sur les espaces à structure uniforme*, p. 34 (*Actual. Scient. et Ind.*, n° 551).

[4] Voici un exemple de recouvrement ponctuellement fini, mais non localement fini : soit E l'ensemble des nombres entiers > 0 et du premier nombre transfini ω de seconde classe, F l'ensemble des nombres transfinis de première et seconde classe, et du premier nombre transfini Ω de troisième classe. On prend sur E (resp. F) la topologie dans laquelle pour tout $x \neq \omega$ (resp. $x \neq \Omega$), l'ensemble $\{x\}$ est un voisinage de x, et où un système fondamental de voisinages de ω (resp. Ω) est l'ensemble des intervalles fermés d'origine x et d'extrémité ω (resp. Ω), x parcourant l'ensemble de tous les nombres $< \omega$ (resp. $< \Omega$). Soit G l'espace produit de E et de F, H le sous-espace de G complémentaire de (ω, Ω). Soit $\mathcal{R}$ un recouvrement de H obtenu en prenant pour chaque point (x, Ω) de H le produit de l'ensemble $\{x\}$ par un voisinage de Ω, pour chaque point (ω, y) le produit d'un voisinage de ω et de $\{y\}$, pour les points (x, y) n'appartenant pas à la réunion de ces voisinages l'ensemble $\{(x, y)\}$; il est immédiat que tout point de H appartient à deux ensembles de $\mathcal{R}$ au plus; mais il existe un ordinal α tel que, pour tout $y > \alpha$, tout voisinage de (ω, y) rencontre une infinité des ensembles de $\mathcal{R}$ qui sont voisinages de points (x, Ω).

séparé) un voisinage ouvert V_x de x et un voisinage ouvert W_x de a sans point commun; considérons le recouvrement $\mathcal{R}$ de E, formé des V_x, où x parcourt F, et du complémentaire F' de F. Il existe un recouvrement localement fini $\mathcal{R}'$ subordonné à $\mathcal{R}$; la réunion U de ceux des ensembles de $\mathcal{R}'$ qui rencontrent F est un ensemble ouvert contenant F; nous allons montrer qu'il existe un voisinage V de a, ne rencontrant pas U, ce qui prouvera la proposition. Or, il existe par hypothèse un voisinage W de a ne rencontrant qu'un nombre fini $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des ensembles de $\mathcal{R}'$; chacun de ceux des A_i qui rencontre F est contenu par définition dans un V_{x_i} correspondant à un point $x_i \in F$; si l'on prend pour V l'intersection de W et des W_{x_i} correspondant à ces points, V est un voisinage de a qui ne rencontre aucun de ceux des A_i qui rencontrent F; *a fortiori*, V ne rencontre pas U.

2° E est *normal*. Soient en effet F et G deux ensembles fermés sans point commun dans E. Pour tout $x \in F$, il existe un voisinage ouvert V_x de x et un voisinage ouvert W_x de G sans point commun (E étant régulier); considérons le recouvrement $\mathcal{R}$ de E formé des V_x, où x parcourt F, et du complémentaire F' de F, et soit $\mathcal{R}'$ un recouvrement localement fini subordonné à $\mathcal{R}$. La réunion U de ceux des ensembles de $\mathcal{R}'$ qui rencontrent F est un ensemble ouvert contenant F; nous allons montrer qu'il existe un voisinage V de G ne rencontrant pas U, ce qui achèvera la démonstration. Or, pour tout $y \in G$, il existe par hypothèse un voisinage T_y de y ne rencontrant qu'un nombre fini $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des ensembles de $\mathcal{R}'$; chacun de ceux des A_i qui rencontre F est contenu par définition dans un V_{x_i}, correspondant à un point $x_i \in F$; soit S_y l'intersection de T_y et des W_{x_i} correspondant à ces points; S_y est un voisinage de y ne rencontrant pas U; si V est la réunion des S_y, où y parcourt G, V est un voisinage de G ne rencontrant pas U.

3. Le théorème 1 conduit aussitôt à se demander si, réciproquement, tout espace normal n'est pas paracompact. Nous allons voir qu'il n'en est rien sur un exemple.

Soit E l'ensemble des nombres ordinaux de première et de seconde classe, muni de la topologie dans laquelle un système fondamental de voisinages d'un point x est formé des intervalles $[y, x]$ ayant ce point pour extrémité et tels que $y < x$. On sait [5] que cet espace est *localement compact* et *complètement normal*. Considérons un recouvrement $\mathcal{R}$ de E formé d'*intervalles ouverts non vides et bornés;* nous allons voir qu'il n'existe aucun recouvrement *ponctuellement fini* $\mathcal{R}'$ subordonné à $\mathcal{R}$. En effet, dans le cas contraire, pour

---

(5) Pour ces propriétés (qui sont bien connues), voir par exemple J. Dieudonné, *Un exemple d'espace normal non susceptible d'une structure uniforme d'espace complet* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **209**, 1938, p. 145-147).

tout $x \in E$, l'intersection des ensembles de $\mathcal{R}'$ contenant x serait un voisinage de x, donc contiendrait un intervalle $[y_x, x]$, où $y_x < x$; d'autre part, un point quelconque z ne pourrait être contenu dans une infinité d'intervalles $[y_x, x]$, donc il existerait un z' tel que la relation $x \geqq z'$ entraîne $y_x \geqq z$; or cette conclusion est absurde ([5]).

4. Tout espace compact est évidemment paracompact; pour obtenir d'autres exemples d'espaces paracompacts, nous commencerons par établir le théorème suivant :

Théorème 2. — *a. Dans un espace paracompact* E, *tout sous-espace fermé est un espace paracompact.*

b. Si, dans un espace paracompact E, *tout sous-espace ouvert est paracompact, alors tout sous-espace de* E *est paracompact.*

a. Soit F un sous-espace fermé d'un espace paracompact E, et $\mathcal{R}$ un recouvrement de l'espace F; $\mathcal{R}$ est formé d'ensembles A_α ouverts *dans* F, dont chacun est la trace sur F d'un ensemble U_α ouvert *dans* E; soit $\mathcal{R}_1$ le recouvrement ouvert de E formé des U_α et du complémentaire F' de F. Par hypothèse, il existe un recouvrement localement fini $\mathcal{R}'_1$ de E, subordonné à $\mathcal{R}_1$; si un ensemble de ce recouvrement rencontre F, il est nécessairement contenu dans un U_α, donc sa trace sur F est contenue dans un A_α; par suite, les traces sur F des ensembles de $\mathcal{R}'_1$ forment un recouvrement $\mathcal{R}'$ de F, qui est évidemment localement fini et subordonné à $\mathcal{R}$.

b. Soit G un sous-espace d'un espace paracompact E, $(A_\alpha) = \mathcal{R}$ un recouvrement de G; chaque A_α est trace sur G d'un ensemble U_α ouvert dans E; soit U la réunion des U_α. U est un sous-espace ouvert de E, et les U_α forment un recouvrement $\mathcal{R}_1$ de U; si U est paracompact, il existe un recouvrement $\mathcal{R}'_1$ de U, localement fini et subordonné à $\mathcal{R}_1$; les traces sur G des ensembles de $\mathcal{R}'_1$ forment évidemment un recouvrement localement fini de G, subordonné à $\mathcal{R}$.

5. Rappelons qu'un espace *localement compact* E est dit *dénombrable à l'infini* s'il est réunion dénombrable d'ensembles compacts ([6]).

Théorème 3. — *Tout espace localement compact* E *dénombrable à l'infini est paracompact.*

([6]) *Cf.* A. Weil, *loc. cit.*, p. 28; la démonstration qui suit s'apparente aux raisonnements de A. Weil en cet endroit et p. 35 du même travail.

Montrons d'abord que E est réunion d'une suite d'ensembles ouverts relativement compacts U_n tels que $\overline{U}_n \subset U_{n+1}$. En effet, par hypothèse E est réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles compacts K_n, et l'on peut toujours supposer que ces ensembles forment une suite croissante (en remplaçant au besoin K_n par la réunion des K_m d'indice $\leq n$); nous définirons les U_n par récurrence, de sorte que $K_n \subset U_n$. Pour cela, remarquons que tout point de E possède un voisinage ouvert relativement compact; si l'on recouvre K_1 par des voisinages de cette nature, on peut extraire de ce recouvrement un recouvrement fini de K_1; si U_1 est la réunion des ensembles de ce recouvrement, U_1 est relativement compact. Supposons maintenant U_m défini tel que $K_m \subset U_m$ pour $m \leq n$; on peut de même recouvrir l'ensemble compact $\overline{U}_n \cup K_{n+1}$ par un nombre fini de voisinages ouverts relativement compacts; la réunion U_{n+1} de ces voisinages est un ensemble ouvert relativement compact tel que $K_{n+1} \subset U_{n+1}$ et $\overline{U}_n \subset U_{n+1}$.

Cela étant, soit $\mathcal{R} = (A_\alpha)$ un recouvrement quelconque de E. Désignons par V_n l'ensemble compact formé des points de $\overline{U}_n$ qui n'appartiennent pas à U_{n-1}; pour tout point $x \in V_n$, il existe un voisinage W_x de x contenu dans un des A_α, contenu également dans U_{n+1} (puisque $\overline{U}_n \subset U_{n+1}$) et ne rencontrant pas $\overline{U}_{n-2}$ (puisque $\overline{U}_{n-2} \subset U_{n-1}$); on peut recouvrir V_n par un nombre *fini* des W_x. Opérons de même pour tout indice n, et soit $\mathcal{R}'$ le recouvrement de E ainsi obtenu; $\mathcal{R}'$ est évidemment subordonné à $\mathcal{R}$; nous allons voir qu'il est *localement fini*. En effet, soit y un point quelconque de E, n le plus petit entier tel que $y \in U_n$; y n'étant pas contenu dans U_{n-1}, il existe un voisinage T de y contenu dans U_n et ne rencontrant pas $\overline{U}_{n-2}$; par suite T ne peut rencontrer que ceux des ensembles de $\mathcal{R}'$ qui proviennent des recouvrements de V_{n-2}, V_{n-1}, V_n ou V_{n+1}, et ces ensembles sont en nombre fini.

Corollaire. — *Tout espace localement compact* E *possédant une base dénombrable est paracompact* (7).

En effet, soit (U_n) une base de E; pour tout point x de E, il existe un voisinage compact de x, donc il existe un des U_n contenant x et contenu dans ce voisinage, et par suite relativement compact; en ne considérant que ceux des U_n qui sont relativement compacts, on a donc encore une base de E. Mais alors, E est réunion des ensembles compacts $\overline{U}_n$, donc est dénombrable à l'infini.

(7) Plus généralement, tout espace *localement compact* et *métrisable* est paracompact, car un tel espace est somme topologique (Bourbaki, *Top. gén.*, chap. I, § 8) d'espaces localement compacts ayant une base dénombrable, d'après un théorème de P. Alexandroff (*Math. Ann.*, t. **92**, 1924, p. 299-301).

6. On peut généraliser le corollaire précédent en le combinant avec le théorème 2 :

THÉORÈME 4. — *Tout espace* E *métrisable et ayant une base dénombrable est paracompact.*

En effet, un théorème classique d'Urysohn prouve qu'un tel espace peut être considéré comme plongé dans un espace compact métrisable K; or, tout sous-espace *ouvert* de K est localement compact et admet une base dénombrable; le théorème 2 et le corollaire du théorème 3 prouvent donc que tout sous-espace de K est paracompact.

7. Il y a des espaces paracompacts qui ne sont pas compacts, et n'admettent pas de base dénombrable ([7]). C'est ce qui résulte par exemple du théorème suivant :

THÉORÈME 5. — *Le produit d'un espace compact et d'un espace paracompact est paracompact.*

Soient E un espace compact, F un espace paracompact, et $\mathcal{R}$ un recouvrement quelconque de l'espace produit $E \times F$. Pour tout point $(x, y) \in E \times F$, il existe un voisinage $V_{x,y}$ de x dans E et un voisinage $W_{x,y}$ de y dans F tels que le voisinage $V_{x,y} \times W_{x,y}$ de (x, y) soit contenu dans un ensemble de $\mathcal{R}$. Pour un y fixe dans F, les ensembles $V_{x,y} \times W_{x,y}$ (où x parcourt E) forment un recouvrement de l'ensemble compact $E \times \{y\}$, donc il existe un nombre fini de points $x_i \in E$ tels que les $V_{x_i,y} \times W_{x_i,y}$ forment encore un recouvrement de $E \times \{y\}$; si W_y est l'intersection des $W_{x_i,y}$, les ensembles $V_{x_i,y} \times W_y$ forment donc encore un recouvrement de $E \times \{y\}$, et W_y est un voisinage de y dans F. Soit alors $\mathcal{R}_1$ le recouvrement de F formé des W_y; il existe un recouvrement localement fini $\mathcal{R}'_1$ de F subordonné à $\mathcal{R}_1$; chacun des ensembles A_α de $\mathcal{R}'_1$ étant contenu dans un W_y, choisissons pour chaque α un y_α ayant cette propriété, et considérons les ensembles $V_{x_i,y_\alpha} \times A_\alpha$; ces ensembles forment un recouvrement $\mathcal{R}'$ de $E \times F$, qui est évidemment subordonné à $\mathcal{R}$. Montrons que $\mathcal{R}'$ est localement fini; si (a, b) est un point quelconque de $E \times F$, il existe un voisinage U de b qui ne rencontre qu'un nombre fini d'ensembles du recouvrement $\mathcal{R}'_1$; d'après la définition du recouvrement $\mathcal{R}'$, le voisinage $E \times U$ de (a, b) ne rencontrera qu'un nombre fini d'ensembles de $\mathcal{R}'$.

8. Nous allons maintenant étudier certaines structures uniformes compatibles avec la topologie d'un espace paracompact. Auparavant, nous démontrerons une propriété des recouvrements *ponctuellement finis* d'un espace normal, qui généralise un résultat bien connu relatif aux recouvrements *finis* de ces espaces :

THÉORÈME 6. — *Soit* (A_α) *un recouvrement ponctuellement fini d'un espace normal* E. *Il existe un recouvrement* (B_α) *de* E, *ayant même ensemble d'indices, et tel que pour tout indice* α, $\overline{B}_\alpha \subset A_\alpha$.

Considérons tous les recouvrements $\mathcal{R} = (X_\alpha)$ de E ayant même ensemble d'indices I que (A_α) et possédant la propriété suivante : il existe une partie $H_{\mathcal{R}}$ de I telle que, pour $\alpha \in H_{\mathcal{R}}$, $\overline{X}_\alpha \subset A_\alpha$ et, pour $\alpha \notin H_{\mathcal{R}}$, $X_\alpha = A_\alpha \neq \overline{A}_\alpha$. Soit Φ l'ensemble de tous ces recouvrements; il n'est pas vide, car le recouvrement donné $\mathcal{R}_0 = (A_\alpha)$ appartient à Φ, en prenant pour $H_{\mathcal{R}_0}$ l'ensemble des indices α tels que A_α soit à la fois ouvert et fermé. Nous allons *ordonner* l'ensemble Φ : si $\mathcal{R} = (X_\alpha)$ et $\mathcal{R}' = (Y_\alpha)$ nous poserons $\mathcal{R} \leqq \mathcal{R}'$ si $H_{\mathcal{R}} \subset H_{\mathcal{R}'}$, et si, pour tout $\alpha \in H_{\mathcal{R}}$ on a $Y_\alpha = X_\alpha$; il est immédiat que c'est bien une relation d'ordre. Montrons que Φ, ainsi ordonné, est un ensemble *inductif*; en effet, soit Ψ une partie *totalement ordonnée* de Φ; soit K la partie de I, réunion des $H_{\mathcal{R}}$, où $\mathcal{R}$ parcourt Ψ; pour $\alpha \in K$, désignons par Z_α l'ensemble d'indice α de l'un quelconque des recouvrements $\mathcal{R}$ tels que $\alpha \in H_{\mathcal{R}}$ (ensemble qui est le même pour tous ces recouvrements, par hypothèse); si au contraire $\alpha \notin K$, prenons $Z_\alpha = A_\alpha$. Montrons que $\mathcal{C} = (Z_\alpha)$ est un recouvrement de E; en effet, il n'y a qu'un nombre fini d'indices α tels que $x \in A_\alpha$; si l'un de ces indices n'appartient pas à K, on a $x \in Z_\alpha$; si, au contraire, ils appartiennent tous à K, ils appartiennent nécessairement à un même $H_{\mathcal{R}}$ (puisque Ψ est totalement ordonnée); comme $\mathcal{R} = (X_\alpha)$ est un recouvrement de E, x appartient à au moins un des X_α correspondant à ces indices, et comme les Z_α correspondant à ces indices sont respectivement égaux aux X_α, x appartient à un Z_α au moins. Il est clair alors que $\mathcal{C} = K$, et que $\mathcal{C}$ est la borne supérieure de Ψ dans Φ, ce qui prouve que Φ est inductif. Par application du théorème de Zorn, Φ admet un élément *maximal* $\mathcal{M} = (M_\alpha)$; nous allons voir que $H_{\mathcal{M}} = I$, ce qui démontrera le théorème. Sinon, en effet, soit α un indice n'appartenant pas à $H_{\mathcal{M}}$; on a donc $M_\alpha = A_\alpha$; soit U l'ensemble ouvert, réunion des M_β d'indice $\beta \neq \alpha$; le complémentaire N_α de M_α est un ensemble fermé contenu dans U; comme E est normal, il existe un ensemble ouvert V tel que $N_\alpha \subset V$ et $\overline{V} \subset U$; si M'_α désigne le complémentaire de $\overline{V}$, on a $\overline{M'_\alpha} \subset A_\alpha$ et M'_α forme, avec les M_β d'indice $\beta \neq \alpha$ un recouvrement $\mathcal{R}$ de E qui appartient à Φ et est $> \mathcal{M}$, ce qui contredit la définition de $\mathcal{M}$.

9. Si $\mathcal{R} = (A_\alpha)$ est un recouvrement d'un espace topologique E, la réunion $V_{\mathcal{R}}$ des ensembles $A_\alpha \times A_\alpha$ est un *voisinage de la diagonale* Δ dans l'espace produit $E \times E$.

THÉORÈME 7. — *Pour que les ensembles* $V_{\mathcal{R}}$ *correspondant à tous les recouvrements localement finis* $\mathcal{R}$ *d'un espace séparé* E, *forment un système fondamental d'entourages d'une structure uniforme compatible avec la topologie de* E, *il faut et il suffit que* E *soit normal.*

1° La condition est *nécessaire*. En effet, soient F et G deux ensembles fermés sans point commun dans E, A et B les complémentaires de F et G respectivement; A et B forment un recouvrement fini $\mathcal{R} = (A, B)$ de E. Supposons qu'il existe un voisinage symétrique W de la diagonale Δ de $E \times E$ tel que $\overset{2}{W} \subset V_{\mathcal{R}}$; pour tout $x \in F$, on aura, d'après la définition de $V_{\mathcal{R}}$,

$$\overset{2}{W}(x) \subset V_{\mathcal{R}}(x) = B;$$

de même, pour tout $y \in G$, on aura

$$\overset{2}{W}(y) \subset V_{\mathcal{R}}(y) = A;$$

mais comme W est symétrique, on conclut de là que $W(x) \cap W(y)$ est vide, et par suite qu'il en est de même de $W(F) \cap W(G)$; comme $W(F)$ est un voisinage de F, $W(G)$ un voisinage de G, on voit que E est normal.

2° La condition est *suffisante*. Remarquons d'abord que, lorsque $\mathcal{R}$ parcourt l'ensemble des recouvrements localement finis de E, les $V_{\mathcal{R}}$ forment une base de filtre sur $E \times E$; car, si $\mathcal{R} = (A_\alpha)$ et $\mathcal{R}' = (B_\beta)$ sont deux de ces recouvrements, les ensembles $A_\alpha \cap B_\beta$ forment un troisième recouvrement $\mathcal{R}''$ de E, qui est évidemment localement fini, et l'on a $V_{\mathcal{R}''} \subset V_{\mathcal{R}} \cap V_{\mathcal{R}'}$. Pour voir que cette base de filtre constitue un système fondamental d'entourages d'une structure uniforme $\mathcal{U}$, il suffit donc ([8]) de prouver que, pour tout recouvrement localement fini $\mathcal{R} = (A_\alpha)$, il existe un recouvrement localement fini $\mathcal{R}' = (B_\beta)$ tel que $\overset{2}{V}_{\mathcal{R}'} \subset V_{\mathcal{R}}$.

Appliquons deux fois de suite le théorème 6 au recouvrement $\mathcal{R}$ en formant deux nouveaux recouvrements localement finis (A'_α) et (A''_α) tels que, pour tout indice α, on ait $\overline{A'_\alpha} \subset A_\alpha$ et $\overline{A''_\alpha} \subset A'_\alpha$; désignons, pour tout α par B'_α le complémentaire de $\overline{A'_\alpha}$, par B''_α le complémentaire de $\overline{A''_\alpha}$; puis considérons la famille $\mathcal{F}$ composée des ensembles ouverts A'_α, $A_\alpha \cap B''_\alpha$ et B'_α (pour tous les indices α). Soit x un point quelconque de E, et W_x l'intersection de tous les ensembles de $\mathcal{F}$ qui contiennent x; montrons d'abord que W_x est *ouvert*. Comme, pour tout $y \in W_x$, on a $W_y \subset W_x$, il suffit de montrer que W_x est un voisinage de x; or, il existe par hypothèse un voisinage U de x qui ne rencontre qu'un nombre fini des A_α; pour les α tels que A_α ne rencontre pas U, U est donc contenu dans B'_α; l'intersection de U et de W_x est donc l'intersection de U et d'un nombre fini d'ensembles ouverts, et par suite W_x est bien un voisinage de x. Soit alors $\mathcal{R}'$ le recouvrement formé des ensembles W_x distincts; un raisonnement analogue au précédent prouve immédiatement que $\mathcal{R}'$ est un recouvrement localement fini (car pour tout point $x \in E$, il existe un voisinage de x contenu dans tous les B'_α à l'exception d'un nombre fini d'entre eux); si

---

([8]) *Cf.* Bourbaki, *Top. gén.*, chap. II, § 1.

l'on pose pour simplifier $H = V_{\mathcal{R}}$, $K = V_{\mathcal{R}'}$, nous allons montrer que, pour tout $z \in E$, on a $\overset{2}{K}(z) \subset H(z)$, et par suite $\overset{2}{K} \subset H$, ce qui établira la proposition.

Il existe par hypothèse un indice α tel que $z \in A''_\alpha$; si $u \in K(z)$, il existe, par définition, un x tel que $z \in W_x$ et $u \in W_x$; on a nécessairement $x \in A'_\alpha$, sans quoi, d'après la définition de W_x, cet ensemble serait contenu dans B''_α, et par suite ne pourrait contenir z; on en conclut qu'on a aussi $u \in A'_\alpha$. Si maintenant $v \in K(u)$, il existe de même y tel que $u \in W_y$ et $v \in W_y$; on a nécessairement $y \in A_\alpha$, sans quoi W_y serait contenu dans B'_α, et par suite ne contiendrait pas u. On en conclut que $v \in A_\alpha$, autrement dit que $\overset{2}{K}(z) \subset A_\alpha \subset H(z)$.

Reste à prouver que la structure uniforme $\mathcal{U}$ définie par les entourages $V_{\mathcal{R}}$ est compatible avec la topologie de E. Remarquons d'abord que $V_{\mathcal{R}}(x)$ est toujours un voisinage de x; inversement, si U est un voisinage ouvert quelconque de x, il existe un voisinage fermé F de x contenu dans U; si W désigne le complémentaire de F, et $\mathcal{R}$ le recouvrement fini (U, W) de E, on a $V_{\mathcal{R}}(x) = U$, ce qui achève la démonstration [9].

10. Étant donné un espace complètement régulier E, on sait [10] que, parmi toutes les structures uniformes compatibles avec la topologie de E, il

---

[9] Ce raisonnement montre également que, pour que les ensembles $V_{\mathcal{R}}$ correspondant aux recouvrements *finis* $\mathcal{R}$ de E, forment un système fondamental d'entourages d'une structure uniforme compatible avec la topologie de E, il faut et il suffit encore que E soit *normal*. Nous avons communiqué ce résultat et sa démonstration à M. N. Bourbaki en 1937, sans le publier; le théorème a été obtenu indépendamment par M. K. Morita [*On uniform Spaces and the dimension of compact spaces* (*Proc. Phys. Math. Soc. of Japan*, 1940, p. 969-977]. En voici une troisième démonstration dont le principe se rapproche de celle de M. Morita. Comme E est normal, donc complètement régulier, la structure uniforme la moins fine $\mathcal{U}$ rendant uniformément continues les fonctions numériques continues et bornées dans E est compatible avec la topologie de E et rend E précompact, donc son complété $\beta(E) = F$ pour cette structure uniforme est un espace *compact*. On va montrer que les $V_{\mathcal{R}}$ définissent la structure $\mathcal{U}$. En premier lieu, un entourage U de la structure $\mathcal{U}$ est la trace sur $E \times E$ d'un entourage U_0 de la structure uniforme (unique) de l'espace compact F; U_0 contient un ensemble réunion des $A_i \times A_i$, où (A_i) est un recouvrement fini de F; les traces des A_i sur E forment un recouvrement fini $\mathcal{R}$ de E, et l'on a évidemment $V_{\mathcal{R}} \subset U$.

Inversement, nous allons voir que tout $V_{\mathcal{R}}$ contient un entourage de la structure $\mathcal{U}$. Soit $\mathcal{R} = (B_i)$, et soit $\mathcal{R}' = (C_i)$ un recouvrement de E tel que $\overline{C}_i \subset B_i$ pour tout indice i; il existe (théorème d'Urysohn) une fonction continue f_i dans E, égale à 0 dans $\overline{C}_i$, à 1 aux points du complémentaire de B_i, prenant des valeurs comprises entre 0 et 1 aux autres points de E. Considérons l'entourage U de la structure $\mathcal{U}$, formé des couples (x, y) tels que $|f_i(x) - f_i(y)| < 1$ pour tous les indices i; pour un x quelconque dans E, il existe un indice i tel que $x \in C_i$, donc $U(x) \subset B_i \subset V_{\mathcal{R}}(x)$ (puisque ce dernier ensemble est la réunion de tous les B_i auxquels appartient x), ce qui démontre que $U \subset V_{\mathcal{R}}$.

[10] A. Weil, *loc. cit.*, p. 16.

en existe une $\mathfrak{U}_0$ plus fine que toutes les autres (la *structure universelle* de E). Il est naturel de chercher à définir de façon simple le filtre des entourages de cette structure. Comme, pour toute structure uniforme compatible avec la topologie de E, un entourage quelconque est un voisinage de Δ, le filtre des entourages d'une telle structure est toujours moins fin que le filtre $\mathfrak{V}$ des voisinages de Δ dans $E \times E$; on est donc conduit à se demander si $\mathfrak{V}$ ne serait pas un filtre d'entourages d'une structure uniforme compatible avec la topologie de E, auquel cas cette structure serait nécessairement la structure universelle $\mathfrak{U}_0$. Mais la première partie de la démonstration du théorème 7 montre que $\mathfrak{V}$ ne peut être un filtre d'entourages d'une structure uniforme que si E est *normal*. Nous ignorons si, réciproquement, cette condition est suffisante; mais on a le résultat suivant :

THÉORÈME 8. — *Si* E *est un espace paracompact, le filtre des voisinages de la diagonale* Δ *dans* $E \times E$ *est le filtre des entourages de la structure universelle de* E.

Soit U un voisinage quelconque de Δ; il suffit de prouver qu'il existe un voisinage W de Δ tel que $\overset{2}{W} \subset U$. Pour tout $x \in E$, soit A_x un voisinage ouvert de x tel que $A_x \times A_x \subset U$; les A_x forment un recouvrement $\mathcal{R}$ de E. Soit $\mathcal{R}'$ un recouvrement localement fini subordonné à $\mathcal{R}$; on a donc $V_{\mathcal{R}'} \subset U$. D'après le théorème 7, il existe un recouvrement localement fini $\mathcal{R}''$ de E tel que $\overset{2}{V}_{\mathcal{R}''} \subset V_{\mathcal{R}'}$; si l'on pose $W = V_{\mathcal{R}''}$, W remplit les conditions voulues. Cette démonstration prouve en même temps que les $V_{\mathcal{R}}$ forment une base du filtre des entourages de $\mathfrak{U}_0$, lorsque $\mathcal{R}$ parcourt tous les recouvrements localement finis de E.

11. Le théorème suivant est une généralisation aux fonctions numériques définies dans un espace paracompact, d'une propriété classique pour les fonctions numériques définies dans un espace compact.

THÉORÈME 9. — *Soient* E *un espace paracompact,* g *une fonction numérique semi-continue inférieurement dans* E, h *une fonction numérique semi-continue supérieurement dans* E, *telles qu'en tout point* $x \in E$ *on ait* $h(x) < g(x)$. *Dans ces conditions, il existe une fonction numérique* f, *continue dans* E, *et telle que* $h(x) < f(x) < g(x)$ *en tout point de* E.

D'après l'hypothèse, pour tout $x \in E$, il existe un voisinage ouvert U_x de x et un nombre a_x tel qu'en tout point $y \in U_x$, on ait $h(y) < a_x < g(y)$. Soit (A_α) un recouvrement localement fini subordonné au recouvrement formé par les U_x, puis (th. 6) (B_α) un recouvrement de E tel que $\overline{B}_\alpha \subset A_\alpha$ pour tout indice α. Pour chaque indice α, il existe une fonction numérique f_α, continue dans E, égale à $-\infty$ dans le complémentaire de A_α, à a_{x_α} dans B_α, comprise entre $-\infty$ et a_{x_α} pour les autres points de E; x_α désigne dans cette définition un point tel que A_α soit contenu dans U_{x_α}. On aura donc $f_\alpha(x) < g(x)$ pour tout $x \in A_\alpha$, et $h(x) < f_\alpha(x)$ pour tout $x \in B_\alpha$. Posons $f(x) = \sup_\alpha f_\alpha(x)$; cette fonction est bien continue dans E : en effet, pour tout $x \in E$, il existe un voisinage V de x qui ne rencontre qu'un nombre fini des A_α; dans ce voisinage f est donc l'enveloppe supérieure d'un nombre *fini* de fonctions continues distinctes, et par suite est continue. D'autre part, il existe un indice α tel que $x \in B_\alpha$, donc $f(x) \geqq f_\alpha(x) > h(x)$, et il existe un indice β tel que $f(x) = f_\beta(x)$; comme $f(x) > h(x) \geqq -\infty$, on a nécessairement $x \in A_\beta$, donc $f_\beta(x) < g(x)$, ce qui achève la démonstration.

On peut, en s'aidant de ce résultat, montrer que dans le théorème 9, on peut remplacer partout les signes $<$ par $\leqq$ sans modifier la validité de l'énoncé. En effet, on peut se borner au cas où l'on a $-1 \leqq h(x) \leqq g(x) \leqq 1$ pour tout $x \in E$; dans le cas contraire, on remplacerait g par $\frac{g}{1+|g|}$ et h par $\frac{h}{1+|h|}$. On définit alors par récurrence trois suites (f_n), (g_n), (h_n) de fonctions numériques définies dans E, par les conditions suivantes :

1° $g_0(x) = g(x) + 1$, $h_0(x) = h(x) - 1$;

2° f_n est continue dans E et telle que $h_n(x) < f_n(x) < g_n(x)$;

3° $g_n(x) = \operatorname{Min}\left[g(x) + \frac{1}{2^n}, f_{n-1}(x) + \frac{1}{2^n}\right]$, $h_n(x) = \operatorname{Max}\left[h(x) - \frac{1}{2^n}, f_{n-1}(x) - \frac{1}{2^n}\right]$.

On voit aussitôt par récurrence que g_n est semi-continue inférieurement dans E, h_n semi-continue supérieurement, et que $h_n(x) < g_n(x)$ pour tout x, ce qui montre, en vertu du théorème 9, que la définition peut se poursuivre quel que soit n. Il est clair d'autre part que $|f_n(x) - f_{n-1}(x)| \leqq \frac{1}{2^n}$, donc la suite (f_n) converge uniformément dans E vers une fonction f qui est par suite continue, et satisfait évidemment aux inégalités $h \leqq f \leqq g$.

12. Indiquons, pour terminer, un certain nombre de problèmes soulevés par les questions traitées dans ce travail :

I. On a vu (th. 4) que tout espace métrisable ayant une base dénombrable est paracompact : *la propriété s'étend-elle à tous les espaces métrisables?* On saurait sans doute répondre à cette question si l'on trouvait une démonstration directe du théorème 4, mais une telle démonstration ne semble pas facile.

II. D'après le théorème 2, un produit $E \times F$ de deux espaces topologiques ne peut être paracompact que si chacun des espaces E, F est paracompact (ces espaces étant homéomorphes à des sous-espaces fermés de $E \times F$). Inversement, *le produit de deux espaces paracompacts est-il nécessairement paracompact?*

III. *Le théorème 8 s'étend-il à tous les espaces normaux?* Il est encore valable, en tout cas, pour l'espace normal non paracompact E considéré au n° 3 (5).

IV. *Pour un espace paracompact, la structure universelle est-elle toujours une structure uniforme d'espace complet?* Il en est ainsi pour les espaces localement compacts dénombrables à l'infini et pour les espaces métrisables; par contre, la structure universelle de l'espace non paracompact E du n° 3 n'est pas une structure d'espace complet (5).