JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ANDRÉ LICHNEROWICZ

L'intégration des équations de la gravitation relativiste et le problème des n corps

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 23 (1944), p. 37-63.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1944_9_23__37_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

L'intégration des équations de la gravitation relativiste et le problème des n corps;

PAR ANDRÉ LICHNEROWICZ.

INTRODUCTION.

Depuis les travaux de Cartan, Vessiot et G. Darmois, beaucoup d'auteurs se sont préoccupés de l'intégration rigoureuse des équations de la gravitation relativiste. On doit en particulier à Stellmacher (¹) la démonstration, dans le cas non analytique, du théorème d'unicité relatif à ces équations.

Mais la difficile étude du degré de généralité des espaces-temps d'Einstein et des théorèmes d'existence correspondants a été beaucoup moins approfondie. On sait depuis Cartan que le système des équations d'Einstein est un système en involution et que, par suite, le problème de la détermination des espaces-temps extérieurs se subdivise en deux problèmes distincts que nous avons appelés problème des conditions initiales et problème de l'évolution dans le temps. Le second de ces problèmes se ramène à des considérations classiques, du moins dans le cas analytique. C'est principalement à l'étude du problème des conditions initiales et à ses applications qu'est consacré le présent Mémoire.

Voici d'ailleurs le plan de ce travail.

Après avoir rappelé certains résultats classiques, je précise sous quelle forme peut être posé le problème dit des conditions initiales. Puis j'étudie brièvement les variétés minima attachées à un espace de Riemann hyperbolique. Pour des données de Cauchy portées par une telle variété, on peut intégrer complètement le problème des conditions initiales, en se ramenant à l'intégration d'un système différentiel linéaire du premier ordre et à celle d'une équation non linéaire du second ordre de type elliptique. Je démontre ensuite pour cette équation fondamentale des théorèmes d'unicité et d'existence. Le degré de généralité des espaces-temps extérieurs s'en déduit immédiatement.

(¹) STELLMACHER, *Zum Anfangswert problem der Gravitationsgleichungen* (*Math. Annal.*, Bd. 115, 1937, p. 136).

On sait le rôle joué en mécanique classique par l'équation de Laplace dans la théorie des mouvements irrotationnels d'un fluide incompressible. D'une manière tout à fait analogue, la méthode que j'ai introduite pour la détermination des espaces-temps extérieurs, permet de déterminer le mouvement irrotationnel relativiste le plus général d'un fluide incompressible. Il en est ainsi grâce à un résultat établi antérieurement : les sections d'espace d'un tel mouvement sont des variétés minima du ds^2 associé au fluide.

Dans une dernière partie, j'applique les considérations précédentes à la construction d'exemples de conditions initiales compatibles avec le problème des n corps. Dans le cas du problème des deux corps, l'interaction des deux masses gravitantes se traduit approximativement par une énergie potentielle en accord avec la loi de Newton. Ce résultat est à rapprocher de celui dû à Weyl relatif au système des tensions qui s'exercent entre deux masses fixes.

I. — Le problème des conditions initiales.

1. Les équations gravitationnelles du cas extérieur. — Dans l'espace de Riemann représentatif d'un univers relativiste, donnons-nous un domaine à quatre dimensions et supposons que ce domaine ne soit traversé par aucune forme d'énergie. La métrique correspondante

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \qquad (\alpha, \beta \text{ et tout indice grec} = 1, 2, 3, 4)$$

satisfait, dans tout le domaine considéré, au système des équations d'Einstein du cas extérieur

$$S_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = 0. \tag{1.1}$$

Les dix équations du système (1.1) ne peuvent être indépendantes; leurs premiers membres $S_{\alpha\beta}$ sont effectivement liés par *les quatre conditions de conservation*

$$\nabla_\beta (S^{\alpha\beta}) = 0, \tag{1.2}$$

qui se déduisent, par contraction, des identités de Bianchi.

2. Le problème de Cauchy pour les équations du cas extérieur. — Soit S une hypersurface quatre fois différentiable et deux fois continûment différentiable, que nous supposerons essentiellement *orientée dans l'espace*. Si cette hypersurface peut être représentée par l'équation $f(x^1, x^2, x^3, x^4) = 0$, en tout point de S le paramètre différentiel du premier ordre $\Delta_1 f$ est strictement positif. Effectuons le changement de variables

$$x^{1'} = x^1; \qquad x^{2'} = x^2; \qquad x^{3'} = x^3; \qquad x^{4'} = f(x^1, x^2, x^3, x^4).$$

Dans ce nouveau système de variables, S est représentée par l'équation $x^4 = 0$ et le paramètre différentiel $\Delta_1 x^4 = g^{44}$ correspondant est strictement positif.

Sur l'hypersurface S, donnons-nous les valeurs des potentiels $g_{\alpha\beta}$ et de leurs dérivées premières $\partial_4 g_{\alpha\beta}$ et cherchons à déterminer le champ de gravitation extérieur correspondant dans tout son domaine d'existence. Le problème ainsi posé n'est autre que le problème de Cauchy relatif au système (1.1) de dix équations aux dérivées partielles du second ordre. Les vingt fonctions, données sur S, $g_{\alpha\beta}$ et $\partial_4 g_{\alpha\beta}$, seront dites les données de Cauchy relatives à S.

On sait que, sous l'hypothèse essentielle $g^{44} \neq 0$, le système des dix équations (1.1) est équivalent à l'ensemble d'un système de six équations

$$R_{ij} = 0 \qquad (i, j \text{ et tout indice latin} = 1, 2, 3), \tag{2.1}$$

et d'un système de quatre équations

$$S_\alpha^4 = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4), \tag{2.2}$$

les premiers membres de (2.2) ne contenant aucune dérivée seconde des potentiels $g_{\alpha\beta}$ par rapport à la varieble x^4.

L'étude du système (2.1) montre que c'est un système de type hyperbolique, résoluble par rapport aux dérivées secondes en x^4 (¹); il résulte alors du théorème de Cauchy-Kowalewska que, du moins dans le cas où toutes les données sont analytiques, le problème de Cauchy relatif à (2.1) admet une solution et une seule. D'autre part, pour toute solution de (2.1), les conditions de conservation se réduisent à un système de quatre équations aux dérivées partielles linéaires et homogènes, aux inconnues S_α^4

$$\partial_4 S_\alpha^4 = A_\alpha^{i\beta}\, \partial_i S_\beta^4 + B_\alpha^\beta S_\beta^4.$$

Par suite, si une solution de (2.1) satisfait au système (2.2) sur l'hypersurface S, elle y satisfait dans tout le domaine d'espace-temps qui lui correspond. Le système des équations d'Einstein est ainsi, comme l'a montré Cartan (²), un système en involution.

3. Le problème des conditions initiales. — Le système (2.2) ne fait intervenir sur S que les données de Cauchy. Par suite le problème de l'intégration des équations d'Einstein se trouve divisé en deux problèmes distincts.

1° Le problème des conditions initiales qui consiste dans la recherche de données de Cauchy satisfaisant sur S au système (2.2), appelé système des conditions initiales.

2° Le problème de l'évolution dans le temps qui consiste dans l'intégration du système (2.1) pour des données de Cauchy satisfaisant à (2.2).

(¹) *Cf.* Lichnerowicz, *Sur certains problèmes globaux relatifs au système des équations d'Einstein* (*Thèse*, Paris, 1939, p. 14-18).

(²) E. Cartan, *Bull. Soc. Math. de France*, 59, 1931, p. 88-118.

Comme, à toute solution de (2.2), correspond, du moins dans le cas analytique, une solution et une seule du système des équations d'Einstein, toute méthode régulière d'intégration, sur une hypersurface S, des équations (2.2), permet la construction de l'espace-temps le plus général, solution des équations gravitationnelles du cas extérieur. Le problème des conditions initiales apparaît ainsi comme le problème fondamental de la théorie mathématique de la gravitation einsteinienne. Il demeure encore à peu près inabordé.

4. Les équations d'Einstein dans le cas d'un système orthogonal de coordonnées. — Sans nuire à la généralité, nous pouvons toujours supposer que l'espace-temps considéré se trouve rapporté à un système orthogonal de coordonnées, c'est-à-dire à un système de coordonnées tel que les lignes de temps soient orthogonales aux sections d'espace. La métrique de cet espace-temps prend alors la forme

$$ds^2 = V^2 (dx^4)^2 + \overline{ds}^2, \tag{4.1}$$

où l'élément linéaire

$$\overline{ds}^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j, \tag{4.2}$$

qui correspond à une forme quadratique définie négative, représente la métrique des sections d'espace. Les premiers membres des équations d'Einstein s'expriment aisément à l'aide de la fonction V des composantes $\overline{R}_i^j$ du tenseur de Ricci des sections d'espace et du tenseur d'espace défini sur ces sections par les équations

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2V}\partial_4 g_{ij}, \qquad \Omega_i^j = g^{jk}\Omega_{ik}, \qquad \Omega^{ij} = g^{ih} g^{jk}\Omega_{hk}.$$

Du tenseur Ω_{ij} on déduit le scalaire d'espace, carré de sa mesure

$$H^2 = \Omega_i^j\, \Omega_j^i = g_{ih} g_{jk}\Omega^{ij}\Omega^{hk}$$

et, par contraction, le scalaire d'espace

$$K = \Omega_i^i = g_{ij}\Omega^{ij}.$$

Avec ces notations le système (2.1) d'évolution dans le temps peut s'écrire

$$R_i^j \equiv -\frac{1}{V}\partial_4\Omega_i^j - K\Omega_i^j + \overline{R}_i^j - \frac{g^{jk}\nabla_k(\partial_i V)}{V} = 0, \tag{4.3}$$

tandis que le système des conditions initiales prend la forme

$$VR^{4i} \equiv \nabla_j[\Omega^{ij} - g^{ij}K] = 0, \tag{4.4a}$$

$$R_4^4 - \frac{1}{2}R \equiv \frac{1}{2}(K^2 - H^2 - \overline{R}) = 0, \tag{4.4b}$$

où $\overline{R}$ désigne la courbure scalaire des sections d'espace.

Soit alors S une section d'espace déterminée. Avec les notations précédentes, le problème des conditions initiales se trouve ramené à la recherche de fonctions g_{ij}, Ω^{ij}, V, $\partial_4 V$ des trois variables d'espace x^1, x^2, x^3, qui satisfassent sur l'hypersurface S aux équations (4.4). Il est d'ailleurs clair que ces équations ne font intervenir que les fonctions g_{ij} et Ω^{ij} à l'exclusion des fonctions V et $\partial_4 V$.

II. — Hypersurfaces minima dans un espace de Riemann hyperbolique.

5. Les hypersurfaces minima et l'intégration des équations d'Einstein. — Dans toute la suite de ce travail, les hypersurfaces qui sont minima relativement à la métrique

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta, \tag{5.1}$$

de l'espace-temps considéré, joueront un rôle fondamental. De telles variétés minima ont été pour la première fois introduites dans la théorie, d'une manière tout accessoire d'ailleurs, par Levi-Civita et Racine (1). Une confirmation de l'importance de ces variétés découle cependant d'un théorème de l'auteur (2), relatif aux sections d'espace attachées à un fluide incompressible en mouvement irrotationnel, théorème qui sera rappelé et utilisé ultérieurement. Il nous paraît donc indispensable d'étudier sommairement les hypersurfaces minima d'un espace de Riemann hyperbolique et plus particulièrement celles qui sont orientées dans l'espace, au sens de la théorie de la relativité.

6. Équation aux hypersurfaces minima. — Considérons donc l'espace de Riemann hyperbolique à quatre dimensions défini par la métrique (5.1) et cherchons à former l'équation aux dérivées partielles des hypersurfaces minima dans cet espace. Nous raisonnerons dans le cas d'un espace à quatre dimensions, mais tous les résultats établis s'étendent d'eux-mêmes au cas d'un espace de Riemann de type hyperbolique normal à un nombre quelconque de dimensions.

Dans cet espace, donnons-nous une hypersurface S, *partout orientée dans l'espace*, que nous supposerons définie par l'équation

$$f(x^1, x^2, x^3, x^4) = 0$$

et cherchons à exprimer que cette hypersurface est minima. Tout d'abord, S étant orientée dans l'espace, $\Delta_1 f$ est strictement positif et S admet en chaque point un vecteur unitaire normal $\vec{n}$. Par un raisonnement classique du calcul des variations, on montre que la condition du premier ordre pour que S soit

(1) Racine, *Le problème des n corps dans la théorie de la relativité*, Paris, 1934, p. 49.
(2) Lichnerowicz, *Bull. des Sc. math.*, t. 65, 1941, p. 54.

minima peut être traduite par l'équation

$$\operatorname{div}.\vec{n} = 0,$$

où le vecteur $\vec{n}$ a pour composantes respectivement covariantes et contravariantes

$$n_\alpha = \partial_\alpha f(\Delta_1 f)^{-\frac{1}{2}} \qquad n^\alpha = g^{\alpha\beta}\,\partial_\beta f(\Delta_1 f)^{-\frac{1}{2}}.$$

Par suite l'équation aux dérivées partielles du second ordre cherchée peut se mettre sous l'une ou l'autre des deux formes équivalentes

$$\partial_\alpha\left[|g|^{\frac{1}{2}} g^{\alpha\beta}\,\partial_\beta f(\Delta_1 f)^{-\frac{1}{2}}\right] = 0 \tag{6.1}$$

ou

$$\nabla_\alpha\left[g^{\alpha\beta}\,\partial_\beta f(\Delta_1 f)^{-\frac{1}{2}}\right] = 0. \tag{6.2}$$

En évaluant les dérivées de $\Delta_1 f$ qui figurent dans (6.1) ou (6.2), on est conduit, par un calcul aisé, à la forme plus explicite

$$g^{\alpha\beta} g^{\lambda\mu} - g^{\alpha\lambda} g^{\beta\mu})\,\partial_\lambda f\,\partial_\mu f(\partial_{\alpha\beta} f - \Gamma^\rho_{\alpha\beta}\,\partial_\rho f) = 0. \tag{6.3}$$

Les hypersurfaces minima que nous introduirons dans la suite de ce travail, sont les solutions de l'équation (6.3) qui sont partout orientées dans l'espace, c'est-à-dire qui vérifient en outre l'inégalité

$$\Delta_1 f > 0. \tag{6.4}$$

Nous terminerons par une remarque qui nous sera utile dans la recherche des ds^2 dits à symétrie axiale [1]. Supposons que l'espace de Riemann considéré (5.1) admette un groupe d'isométrie dont les trajectoires soient orientées dans l'espace; supposons par exemple que le ds^2 soit tel que les $g_{\alpha\beta}$ soient indépendants de la variable x^1 et cherchons pour un tel ds^2 des solutions de (6.3) de la forme

$$f(x^2, x^3, x^4) = 0.$$

L'équation à quatre variables (6.3) se réduit alors à une équation à trois variables seulement. A toute solution de cette équation satisfaisant à l'inégalité (6.4) correspond une variété minima qui peut être engendrée par des trajectoires du groupe d'isométrie de l'espace.

7. Type de l'équation aux hypersurfaces minima. — Dans ce paragraphe, nous nous proposons d'étudier le type de l'équation (6.3) dans le cas de solutions

---

(1) Delsarte, *Sur les ds^2 d'Einstein à symétrie axiale* (*Actual. sc. et ind.*, Hermann, 1934).

partout orientées dans l'espace. A cet effet posons

$$\vec{h} = \overrightarrow{\mathrm{grad.}} f, \qquad h^2 = \Delta_1 f,$$

et soit $\vec{V}$ un vecteur arbitraire. Le vecteur $\vec{h}$ étant astreint à l'unique condition d'être orienté dans le temps, l'équation considérée sera de type elliptique si, quel que soit le vecteur $\vec{V}$, la forme quadratique Φ attachée à ce vecteur

$$\Phi = (g^{\alpha\beta} g^{\lambda\mu} - g^{\alpha\lambda} g^{\beta\mu}) h_\alpha h_\beta V_\lambda V_\mu$$

présente un signe constant. Or on peut donner de cette forme une interprétation géométrique simple; on a en effet

$$\Phi = h^2 V^2 - (\vec{h}\vec{V})^2.$$

Désignons par $\vec{W}$ le vecteur orthogonal à $\vec{h}$ et tel que l'on ait

$$\vec{W} = \vec{V} - \rho \vec{h},$$

ρ représentant un scalaire. Il vient

$$\Phi = h^2(\vec{W} + \rho\vec{h})^2 - [\vec{h}(\vec{W} + \rho\vec{h})]^2,$$

et par conséquent

$$\Phi = h^2 W^2.$$

Or $\vec{h}$ étant orienté dans le temps, $\vec{W}$ est orienté dans l'espace et par suite

$$h^2 > 0, \qquad W^2 < 0.$$

Il en résulte que, quel que soit $\vec{V}$, Φ est négatif et que l'équation (6.3) est de type elliptique. Nous énoncerons

Théorème. — *Pour toute hypersurface orientée dans l'espace, l'équation* (6.3) *aux hypersurfaces minima est de type elliptique.*

Les seuls théorèmes d'existence que nous possédions actuellement pour l'équation (6.3) sont les théorèmes généraux classiques de la théorie des équations de type elliptique [1]. On sait tous les inconvénients que présentent ces théorèmes. Il serait important de voir si la méthode de Douglas [2] qui fournit des théorèmes d'existence pour les surfaces minima de l'espace euclidien ordinaire peut s'étendre, au moins partiellement, à la détermination des variétés minima d'un espace de Riemann. Il semble que dans le cas d'un espace *hyperbolique*, une telle méthode n'aille pas sans difficultés essentielles.

---

[1] *Cf.* en particulier Hilbert et Courant, *Methoden der Mathematischen Physik*, Springer, Berlin 1937, t. II, p. 288-289.

[2] *Cf.* J. Douglas, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1933, p. 227 et suiv.

8. Condition pour qu'une section d'espace soit minima. — L'espace de Riemann (5.1) étant rapporté à un système orthogonal de coordonnées, supposons que l'une des sections d'espace S soit une variété minima. Il vient pour S, avec les notations précédentes,

$$\partial_i f = 0, \qquad \partial_4 f = 1, \qquad \Delta_1 f = g^{44} = \frac{1}{V^2}.$$

Dans ces conditions, l'équation (6.1) prend la forme

$$\partial_4 \left[|g|^{\frac{1}{2}} \frac{1}{V^2} V \right] = 0,$$

ou, si nous désignons par

$$\bar{g} = \frac{g}{V^2}$$

le discriminant de la forme $\overline{ds}^2$ des sections d'espace

$$\partial_4 |\bar{g}|^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Or, d'après une identité bien connue

$$\frac{\partial_4 |\bar{g}|^{\frac{1}{2}}}{|\bar{g}|^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} g^{ij} \partial_4 g_{ij} = V g^{ij} \Omega_{ij} = VK,$$

V étant strictement positif, il en résulte que K est identiquement nul tout le long de S. Nous énoncerons

Théorème. — *Pour que, dans un système orthogonal de coordonnées, l'une des sections d'espace soit minima, il faut et il suffit que, tout le long de cette section d'espace, le scalaire d'espace* K *soit identiquement nul.*

III. — Intégration du système des conditions initiales dans le cas extérieur.

9. Position du problème. — Nous nous proposons d'intégrer le système des conditions initiales dans l'hypothèse où la variété S qui porte les données de Cauchy est minima pour l'élément linéaire considéré. Étant donnée une variété S, supposée minima pour (5.1), nous pouvons toujours, sans nuire à la généralité, supposer qu'on a rapporté l'espace de Riemann (5.1) à un système orthogonal de coordonnées tel que S soit l'une des sections d'espace associées à ce système. Dans ces conditions, d'après le théorème du paragraphe 8, nous devons adjoindre aux équations (4.4) la condition K = 0.

Nous sommes ainsi conduits à chercher des fonctions g_{ij} et Ω^{ij} des trois variables d'espace (x^i) qui satisfassent au système de cinq équations

(9.1) $$K = 0,$$

(9.2) $$\nabla_j [\Omega^{ij}] = 0,$$

(9.3) $$\bar{R} = -H^2.$$

A cet effet, donnons-nous arbitrairement sur S un élément linéaire tridimensionnel, défini négatif

$$(ds^*)^2 = g^*_{ij}\, dx^i\, dx^j,$$

et cherchons si les fonctions g_{ij} peuvent être choisies de telle façon que $\overline{ds}^2$ soit conforme à $(ds^*)^2$. On pourra poser dans ce cas

$$g_{ij} = e^{2\theta} g^*_{ij}, \tag{9.4}$$

θ désignant une fonction inconnue. Au lieu des six inconnues Ω^{ij} nous adopterons pour nouvelles inconnues six fonctions Π^{ij}, liées aux Ω^{ij} par les relations

$$\Pi^{ij} = e^{k\theta}\Omega^{ij}, \tag{9.5}$$

où k désigne une constante qui sera déterminée ultérieurement. Nous allons former les équations transformées des équations (9.1), (9.2) et (9.3) par ce changement d'inconnues.

10. Les équations transformées des équations (9.1) et (9.2). — Il est immédiat de former l'équation transformée de l'équation (9.1). On a en effet

$$K = g_{ij}\Omega^{ij} = e^{2\theta} g^*_{ij} e^{-k\theta}\Pi^{ij} = e^{(2-k)\theta} g^*_{ij}\Pi^{ij}.$$

Il en résulte que l'équation transformée de (9.1) peut s'écrire

$$g^*_{ij}\Pi^{ij} = 0. \tag{10.1}$$

Désignons par Γ^{h*}_{ij} les coefficients de la connexion riemanienne attachée à $(ds^*)^2$ et par ∇^*_j l'opérateur de dérivation covariante pour cette connexion. Les Γ^h_{ij} et Γ^{h*}_{ij} étant liés par la relation

$$\Gamma^h_{ij} = \Gamma^{h*}_{ij} + g^h_i\, \partial_j\theta + g^h_j\, \partial_i\theta - g^{hl} g_{ij}\, \partial_l\theta, \tag{10.2}$$

on en déduit

$$\nabla_j\Omega^{ij} = e^{-k\theta}[\nabla^*_j\Pi^{ij} - (k-5)\Pi^{ij}\partial_j\theta - K g^{ij}\partial_j\theta].$$

K étant nul d'après (9.1) ou (10.1), nous pouvons choisir la constante k de façon que dans les équations transformées de (9.2) ne figure pas la fonction θ. Nous prendrons donc $k = 5$ et les équations cherchées s'écriront

$$\nabla^*_j\Pi^{ij} = 0, \tag{10.3}$$

où l'on a posé

$$\Pi^{ij} = e^{5\theta}\Omega^{ij}. \tag{10.4}$$

11. L'équation transformée de l'équation (9.3). — La transformation de l'équation (9.3) donne lieu aux remarques suivantes : tout d'abord il résulte des formules (10.2) que le premier membre $\overline{R}$ de cette équation s'évalue facilement à l'aide de la courbure riemanienne scalaire R^* de S dans la métrique $(ds^*)^2$, ainsi que des fonctions g^{ij*}, θ et de leurs dérivées. Nous obtenons ainsi

$$\overline{R} = e^{-2\theta}[-4g^{ij*}\partial_{ij}\theta - 2g^{ij*}\partial_i\theta\,\partial_j\theta - 4\,\partial_h g^{ih*}\partial_i\theta + R^*].$$

D'autre part le carré H^2 du tenseur d'espace Ω^{ij} qui figure au second membre s'exprime aisément à partir du carré du tenseur Π^{ij} évalué dans la métrique $(ds^*)^2$. Il vient

$$H^2 = g_{ih}g_{jk}\Omega^{ij}\Omega^{hk} = e^{-6\theta}g^*_{ih}g^*_{jk}\Pi^{ij}\Pi^{hk},$$

soit

$$H^2 = e^{-6\theta}L^2,$$

où l'on a posé

$$L^2 = g^*_{ih}g^*_{jk}\Pi^{ij}\Pi^{hk}. \tag{11.1}$$

Par suite l'équation transformée de (9.3) peut être mise sous la forme

$$-4g^{ij*}\partial_{ij}\theta - 2g^{ij*}\partial_i\theta\,\partial_j\theta - 4\,\partial_h g^{ih*}\partial_i\theta + R^* = -L^2e^{-4\theta}. \tag{11.2}$$

Une autre forme de la même équation nous sera encore utile. Substituons à l'inconnue θ, la fonction strictement positive φ, définie par la relation

$$\varphi^2 = e^{\theta}.$$

Les deux premiers termes du premier membre de (11.2) s'écrivent dans ces conditions

$$-4g^{ij*}\partial_{ij}\theta - 2g^{ij*}\partial_i\theta\,\partial_j\theta = -8\frac{g^{ij*}\partial_{ij}\varphi}{\varphi},$$

et nous pouvons substituer à l'équation (11.2), l'équation strictement équivalente à l'inconnue φ

$$-8\Delta_2^*\varphi + 8\Gamma_{hi}^{h*}g^{ij*}\partial_j\varphi + R^*\varphi = -\frac{L^2}{\varphi^7}, \tag{11.3}$$

où $\Delta_2^*\varphi$ désigne le paramètre différentiel du second ordre de φ relatif à la métrique $(ds^*)^2$.

12. Sur l'intégration du système des conditions initiales. — Étant donné arbitrairement l'élément linéaire défini négatif $(ds^*)^2$, il nous faut donc déterminer les fonctions inconnues Π^{ij} et θ de façon à satisfaire aux cinq équations

$$g^*_{ij}\Pi^{ij} = 0, \tag{12.1}$$

$$\nabla^*_j\Pi^{ij} = 0, \tag{12.2}$$

$$-4g^{ij*}\partial_{ij}\theta - 2g^{ij*}\partial_i\theta\,\partial_j\theta - 4\,\partial_h g^{ih*}\partial_i\theta + R^* = -L^2e^{-4\theta}. \tag{12.3}$$

Soit Δ un domaine à trois dimensions de S, dont nous supposerons que la frontière est représentée par l'équation $x^3 = 0$. Donnons-nous arbitrairement dans ce domaine les composantes Π^{11} et Π^{22}. En utilisant au besoin un changement de coordonnées conservant la frontière de Δ, nous pouvons toujours supposer que la fonction g^{*}_{12} ne s'annule pas dans Δ. Par suite nous pouvons tirer de l'équation (12.1) la valeur de la composante Π^{12} en fonction de Π^{11} et Π^{22} et des fonctions encore inconnues Π^{13}, Π^{23}, Π^{33}. En reportant Π^{12} dans les équations (12.2), nous nous trouvons ramenés, pour déterminer les trois composantes Π^{13}, Π^{23}, Π^{33}, à un système $\mathcal{L}$ de trois équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre, dont la première est résoluble par rapport à $\partial_3\Pi^{13}$, la seconde par rapport à $\partial_3\Pi^{23}$, la troisième par rapport à $\partial_3\Pi^{33}$. De la connaissance sur la frontière de Δ des valeurs de Π^{13}, Π^{23}, Π^{33}, nous déduirons, par intégration du système $\mathcal{L}$, les valeurs dans Δ de ces trois composantes. La théorie d'un système tel que $\mathcal{L}$ étant classique, nous n'insisterons pas davantage sur cette intégration.

Ayant ainsi déterminé complètement dans Δ le tenseur Π^{ij}, de façon qu'il satisfasse aux équations (12.1) et (12.2), il nous reste à déterminer la fonction θ. Celle-ci doit satisfaire à l'équation du second ordre de type elliptique (12.3); dans cette équation L^2 est une quantité connue dès que l'on connaît le tenseur Π^{ij}. Les paragraphes qui vont suivre seront consacrés à l'étude de l'*équation fondamentale* (12.3) ou de l'équation équivalente (11.3) à l'inconnue φ.

Les considérations précédentes déterminent complètement le degré de généralité des espaces-temps solutions des équations d'Einstein du cas extérieur. Nous pouvons nous donner arbitrairement dix fonctions de trois arguments : V, $\partial_k V$, g^{*}_{ij}, Π^{11}, Π^{22}, sous les seules conditions que :

a. V soit strictement positif;

b. la forme quadratique admettant les g^{*}_{ij} pour coefficients soit définie négative.

Les quatre fonctions Π^{13}, Π^{23}, Π^{33} et θ seront déduites respectivement de la connaissance de leurs valeurs à la frontière de Δ par l'intégration d'un système linéaire aux dérivées partielles du premier ordre et d'une équation de type elliptique. Nous déterminerons ainsi le système des données de Cauchy permettant d'engendrer l'espace-temps extérieur le plus général.

13. Les ds^2 à symétrie axiale. — Nous dirons qu'un ds^2

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$$

est à symétrie axiale si les potentiels $g_{\alpha\beta}$ sont indépendants de l'une des variables qui présentent le caractère spatial, la variable x^1 par exemple ([1]). Comme l'ont montré Levi-Civita et Delsarte, de tels ds^2 présentent dans la

---

([1]) La définition donnée ci-dessus ne suppose pas que les trajectoires du groupe d'isométrie forment une congruence de normales et est par suite plus générale que celle de Delsarte (*Cf.* Delsarte, *Op. cit.*, p. 4).

théorie un intérêt tout spécial; il semble en effet que des solutions particulières du problème des n corps rentrent dans cette catégorie : celles qui correspondent au cas où, en mécanique newtonienne, les corps se meuvent en ligne droite. De plus, par échange des rôles joués par l'espace et le temps, les ds^2 à symétrie axiale correspondent aux ds^2 statiques du type le plus général.

Il est facile de déterminer des systèmes de données de Cauchy permettant d'engendrer les ds^2 à symétrie axiale. En effet, d'après une remarque du paragraphe **6**, on peut choisir pour section d'espace une variété minima S qui puisse être engendrée par les trajectoires du groupe d'isométrie de l'espace-temps. Les conditions initiales inconnues portées par la variété S sont alors des fonctions de deux variables seulement x^2 et x^3 qui doivent satisfaire aux cinq équations (12.1), (12.2), (12.3), et leur détermination s'effectue sans aucune difficulté, conformément aux considérations du paragraphe **12**. Il est clair qu'à de telles données de Cauchy, l'intégration du système différentiel (4.3) fait correspondre effectivement un espace-temps à symétrie axiale.

IV. — Théorèmes d'unicité et d'existence pour l'équation fondamentale.

14. Le théorème d'unicité. — Revenons à l'étude de l'équation fondamentale (12.3) ou de l'équation équivalente (11.3). Si, dans l'équation (12.3), nous tenons compte de la relation

$$\partial_h g^{ih*} + \Gamma^{i*}_{hj} g^{hj*} + \Gamma^{h*}_{hj} g^{ij*} = 0,$$

nous pouvons mettre cette équation sous la forme

$$\text{(14.1)} \qquad L(\theta) \equiv -4\Delta^*_2\theta + 4\Gamma^{h*}_{hj} g^{ij*}\partial_i\theta - 2g^{ij*}\partial_i\theta\,\partial_j\theta + R^* + L^2 e^{-4\theta} = 0,$$

où $\Delta^*_2\theta$ est le paramètre différentiel du second ordre de la fonction θ, évalué dans la métrique $(ds^*)^2$.

Soit Δ un domaine borné à trois dimensions porté par la variété S et soit D le bord de ce domaine. Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant :

Théorème d'unicité. — *Il existe au plus une solution de l'équation* (14.1) *admettant dans* Δ *des dérivées continues jusqu'au second ordre, contenue dans* $\Delta + D$, *et prenant sur* D *des valeurs imposées.*

Supposons en effet qu'il existe deux solutions θ et τ de l'équalion (14.1) satisfaisant aux hypothèses du théorème précédent et telles que la différence $\omega = \tau - \theta$ s'annule sur D. Il vient par soustraction

$$L(\tau) - L(\theta) = -4\Delta^*_2\omega + 2[2\Gamma^{h*}_{hj} - (\partial_j\theta + \partial_j\tau)]g^{ij*}\partial_i\omega + L^2 e^{-4\theta}(e^{-4\theta} - 1) = 0.$$

Or il existe une fonction ψ continue dans Δ telle que l'on ait

$$e^{-4\omega} - 1 = -4\omega e^{-4\psi}.$$

Par suite la fonction ω satisfait à une relation de la forme

$$-4\Delta_2^*\omega + A^i \partial_i\omega + C\omega = 0,$$

où les A^i sont des fonctions continues dans Δ et où

$$C = -4L^2 e^{-4(\theta+\psi)}$$

est ***négatif ou nul***. Il résulte alors d'un théorème classique de la théorie des équations linéaires de type elliptique que la fonction ω, qui s'annule sur D, se réduit nécessairement à zéro dans toute l'étendue du domaine Δ, ce qui assure l'unicité de la solution de l'équation (14.1).

15. Existence d'une solution de l'équation fondamentale. — L'équation (14.1) peut se mettre sous la forme

$$-\Delta_2^*\theta = f(P, \theta, \partial_i \theta), \tag{15.1}$$

où P désigne le point courant de la variété S et où

$$f(P, \theta, \partial_i\theta) = -\Gamma_{hj}^{h*} g^{ij*} \partial_i\theta + \frac{1}{2} g^{ij*} \partial_i\theta\, \partial_j\theta - \frac{1}{4} R^* - \frac{1}{4} L^2 e^{-4\theta}.$$

Nous allons montrer l'existence d'une solution pour le problème de Dirichlet relatif à l'équation (15.1), pourvu que le domaine fondamental Δ ait été choisi suffisamment petit [1]. Sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer que la solution considérée est astreinte à s'annuler sur le bord D du domaine Δ.

Soit G(P, Q) la fonction de Green de l'équation $\Delta_2^*\theta = 0$, fonction qui n'est jamais négative, et considérons la suite des fonctions θ_n définies par la formule de récurrence

$$\theta_{n+1} = -\int_\Delta G(P, Q) f[Q, \theta_n(Q), \partial_i \theta_n(Q)]\, dV_Q \qquad (\theta_0 = 0), \tag{15.2}$$

où dV_Q désigne l'élément de volume de centre Q du domaine Δ. La fonction f considérée est telle qu'à tout nombre positif M, on peut faire correspondre un nombre positif A tel que les inégalités

$$|\tau| < M, \qquad |\partial_i \tau| < M$$

entraînent dans le domaine Δ

$$|f(P, \tau, \partial_i\tau)| < A.$$

[1] *Cf.* Courant et Hilbert; *Methoden der Mathematischen Physik*, t. II, Springer, 1937, p. 287.

Désignons alors par k le maximum dans Δ des expressions

$$\int_\Delta G(P, Q)\, dV_Q, \qquad \int_\Delta |\partial_i G(P, Q)|\, dV_Q,$$

maximum qui tend vers zéro avec le volume de Δ et choisissons Δ suffisamment petit pour que $k < \frac{M}{A}$. Les inégalités

$$(15.3) \qquad |\theta_n| < M, \qquad |\partial_i\theta_n| < M$$

entraînent alors, en vertu de (15.2),

$$|\theta_{n+1}| < kA < M, \qquad |\partial_i\theta_{n+1}| < kA < M.$$

Par suite les inégalités (15.3) sont valables pour tout θ_n. Il est alors facile de montrer que, pour Δ suffisamment petit, les fonctions θ_n et $\partial_i\theta_n$ convergent uniformément dans le domaine Δ. Posons en effet

$$D_n(P) = |\theta_{n+1}(P) - \theta_n(P)| + \sum_{i=1}^{i=3} |\partial_i\theta_{n+1}(P) - \partial_i\theta_n(P)|; \qquad \mu_n = \max_{P\in\Delta} D_n(P).$$

On déduit de (15.2) et des inégalités (15.3) qu'il existe une fonction strictement positive $K(P, Q)$ telle que $D_n(P)$ satisfasse à une inégalité de la forme

$$D_{n+1}(P) < \int_\Delta K(P, Q)\, D_n(Q)\, dV_Q,$$

et dont l'intégrale

$$I = \int_\Delta K(P, Q)\, dV_Q$$

tend vers zéro avec le volume de Δ. Si l'on choisit Δ suffisamment petit pour que $I < q < 1$, il vient

$$\mu_n < \mu_0 q^n,$$

ce qui démontre la convergence uniforme dans Δ des fonctions θ_n et $\partial_i\theta_n$. La fonction limite θ satisfait à l'équation intégrale

$$\theta = -\int_\Delta G(P, Q) f[Q, \theta(Q), \partial_i\theta(Q)]\, dV_Q,$$

et par suite satisfait, comme on le montre aisément, à l'équation (15.1).

16. Cas où R^* est négatif ou nul. — Nous supposerons dans ce paragraphe que la métrique $(ds^*)^2$ a été choisie de telle façon que dans un domaine Δ déterminé porté par S, la courbure riemanienne scalaire associée R^* soit essentiellement négative ou nulle. Nous supposerons de plus que, sur l'hypersurface S, on a adopté un système de coordonnées tel que, dans le domaine Δ, le discriminant g^* de $(ds^*)^2$ soit égal à une constante. Dans ces conditions

$$\Gamma_{hi}^{h*} = 0,$$

et l'équation (11.3) se réduit à la forme

$$-\Delta_2^* \varphi + \frac{1}{8} R^* \varphi = -\frac{L^2}{8\varphi^7}. \tag{16.1}$$

Relativement aux solutions de l'équation (16.1), nous nous proposons de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME D'EXISTENCE. — *Pour* L^2 *suffisamment petit, il existe une solution strictement positive de l'équation* (16.1), *régulière dans* Δ *et se réduisant sur le bord* D *de* Δ *à une fonction* f *positive donnée.*

Soit ψ la solution de l'équation

$$-\Delta_2^* \psi + \frac{1}{8} R^* \psi = 0, \tag{16.2}$$

régulière dans Δ et se réduisant sur D à la fonction f. Le scalaire R^* étant négatif ou nul, la fonction ψ ne peut admettre dans Δ de minimum négatif ou nul et est par suite strictement positive dans ce domaine. La fonction $u = \varphi - \psi$ satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$-\Delta_2^* u + \frac{1}{8} R^* u = -\frac{L^2}{8(\psi + u)^7}, \tag{16.3}$$

et s'annule au bord D de Δ. Désignons par $G(P, Q)$ la fonction de Green relative au domaine Δ de l'équation (16.2). En introduisant cette fonction qui n'est jamais négative dans Δ, nous obtenons pour u l'équation intégrale non linéaire

$$u(P) = \int_\Delta \frac{L^2(Q)}{8[\psi(Q) + u(Q)]^7} G(P, Q)\, dV_Q. \tag{16.4}$$

Nous allons former la solution de l'équation (16.4) au moyen des approximations successives $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ définies par la formule de récurrence

$$u_{n+1}(P) = \int_\Delta \frac{L^2(Q)}{8[\psi(Q) + u_n(Q)]^7} G(P, Q)\, dV_Q,$$

avec

$$u_0 = 0.$$

Si nous désignons par M le maximum, quand P varie dans $\Delta + D$, de l'intégrale

$$\int_\Delta \frac{L^2(Q)}{8[\psi(Q)]^7} G(P, Q)\, dV_Q,$$

maximum qui tend vers zéro avec L^2, il est clair que, pour tout n positif

$$0 < u_n \leqq M.$$

La suite des u_n étant ainsi majorée, il est facile d'établir que, pour L^2 suffisamment petit, elle converge uniformément dans le domaine Δ. Posons

$$D_n = \max_{P \in \Delta + D} |u_{n+1}(P) - u_n(P)|, \qquad m = \min_{P \in \Delta + D} \psi(P).$$

En évaluant D_n, il vient

$$D_n \leqq \max_{P \in \Delta + D} \int_\Delta \frac{L^2(Q)}{8[\psi(Q)]^7} G(P, Q) \frac{\left|\left(1 + \frac{u_n}{\psi}\right)^7 - \left(1 + \frac{u_{n-1}}{\psi}\right)^7\right|}{\left(1 + \frac{u_n}{\psi}\right)^7 \left(1 + \frac{u_{n-1}}{\psi}\right)^7} dV_Q,$$

soit en majorant l'intégrale qui figure au second membre

$$D_n \leqq D_{n-1}\, 7 \frac{M}{m}\left(1 + \frac{M}{m}\right)^6.$$

On peut alors choisir M suffisamment petit, pour qu'il existe un nombre q tel que

$$7 \frac{M}{m}\left(1 + \frac{M}{m}\right)^6 < q < 1.$$

On en déduit l'inégalité

$$D_n < D_0 q^n,$$

et par suite la convergence uniforme des u_n. La fonction limite u satisfait à l'équation intégrale (16.4) et par suite à l'équation aux dérivées partielles (16.3), tout en s'annulant au bord D de Δ. La fonction $\psi + u$ remplit effectivement les conditions du théorème d'existence énoncé.

V. — Sur l'intégration du système des conditions initiales dans le cas intérieur.

17. Équations du champ dans le cas intérieur. — Dans l'espace de Riemann représentatif d'un univers relativiste, donnons-nous un domaine à quatre dimensions qui soit occupé par de l'énergie. On sait que, dans ce domaine, la métrique de l'espace satisfait aux équations d'Einstein du cas intérieur

$$S_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta}, \tag{17.1}$$

où le tenseur symétrique $T_{\alpha\beta}$ est de signification purement mécanique. Le fait que l'équation de Poisson peut être déduite par approximation de l'une des équations (17.1) conduit à attribuer à la constante χ la valeur

$$\chi = \frac{8\pi f}{c^2}, \tag{17.2}$$

où f désigne le coefficient de l'attraction newtonienne et c la vitesse de la lumière. Dans l'hypothèse dite du fluide parfait, l'énergie introduite est l'énergie pondérable de la matière et celle correspondant aux forces de pression superficielles, et l'on donne au tenseur $T_{\alpha\beta}$ la forme

$$T_{\alpha\beta} = (\mu + p) u_\alpha u_\beta - p g_{\alpha\beta}, \tag{17.3}$$

où les scalaires positifs μ et p représentent respectivement la densité au repos et la pression du fluide considéré et où le vecteur unitaire u_α définit son vecteur-vitesse généralisé.

Sans nuire à la généralité, nous pouvons encore supposer que l'espace-temps envisagé a été rapporté à un système orthogonal de coordonnées. Avec les notations du paragraphe **4**, les équations du champ peuvent, dans ces conditions, être mises sous la forme

$$R_i^j \equiv -\frac{1}{V}\partial^4 \Omega_i^j - K\Omega_i^j + \overline{R}_i^j - \frac{g^{jk}\nabla_k(\partial_i V)}{V} = \chi\left[(\mu + p) u_i u^j - \frac{1}{2} g_i^j (\mu - p)\right], \tag{17.4}$$

$$\left\{\begin{aligned} &VR^{4i} \equiv \nabla_j(\Omega^{ij} - g^{ij}K) = V\chi(\mu + p) u^4 u^i, \\ &R_4^4 - \frac{1}{2}R \equiv \frac{1}{2}(K^2 - H^2 - \overline{R}) = \chi[(\mu + p) u_4 u^4 - p], \end{aligned}\right. \tag{17.5}$$

où seules les équations (17.4) contiennent les dérivées d'indice 2 des potentiels. On montre ([1]) que la donnée sur une section d'espace S des potentiels et de leurs dérivées premières permet, en adjoignant aux équations (17.5) une « équation d'état »

$$\mu = f(p),$$

de déterminer sur S, μ, p et le vecteur unitaire u^α. L'introduction des équations (17.4) et des conditions de conservation donne ensuite, par des dérivations par rapport à x^4, les valeurs sur S des dérivées successives des quantités $g_{\alpha\beta}$, μ, p, u^α. L'évolution du fluide se trouve ainsi complètement définie.

18. Mouvement irrotationnel d'un fluide incompressible. — On sait depuis Levi-Civita l'importance, pour les problèmes de la Mécanique Céleste, de l'étude relativiste des mouvements d'un milieu continu. Parmi ces mouvements, l'un des plus intéressants est le mouvement irrotationnel d'un fluide parfait incompressible, auquel j'ai consacré récemment un travail ([2]). Pour un tel mouvement, on est conduit à poser le problème des conditions initiales d'une manière assez différente de celle que nous venons d'esquisser dans le cas

([1]) *Cf.* G. Darmois, *Les équations de la gravitation einsteinienne* (*Mém. Sc. math.*, 25, p. 27-28) et Lichnerowicz, *Thèse*, Paris, 1939, p. 29-31.

([2]) *Bull. Sc. math.*, 2e série, 65, 1941, p. 46-65.

général, et à reconnaître une analogie profonde avec le problème correspondant du cas extérieur.

Nous rappellerons d'abord quelques définitions. Le mouvement d'un fluide parfait est dit *irrotationnel* lorsque les lignes de courant du fluide, partout tangentes au vecteur-vitesse, sont orthogonales à une même hypersurface. Ces lignes de courant sont alors les trajectoires orthogonales d'une famille à un paramètre d'hypersurfaces S, ce qui assure la *permanence* du mouvement irrotationnel (¹). Le mouvement d'un fluide parfait est dit *incompressible*, si, le long de chaque ligne de courant, la densité μ du fluide est constante. Un tel fluide est en général hétérogène en ce sens que μ varie d'une ligne de courant à l'autre. Il est dit *homogène* si μ est constant dans tout le fluide.

Nous utiliserons enfin le résultat suivant, dont on trouvera la démonstration dans mon travail cité :

Pour que le mouvement irrotationnel d'un fluide parfait soit le mouvement d'un fluide incompressible, il faut et il suffit que les hypersurfaces S *associées au mouvement irrotationnel soient des variétés minima du ds^2.*

Ceci étant posé, considérons le mouvement irrotationnel d'un fluide parfait incompressible et adoptons pour sections d'espace les hypersurfaces S associées à ce mouvement, pour lignes de temps les lignes de courant et pour variable temporelle x^4 l'arc de ligne de courant mesuré dans la métrique d'Eisenhart (¹). Dans un tel système de coordonnées, l'élément linéaire s'écrit

$$ds^2 = V^2(dx^4)^2 + g_{ij}\,dx^i\,dx^j, \tag{18.1}$$

et les composantes du vecteur-vitesse sont données par les formules

$$u_i = 0, \qquad u^4 = V^{-1}. \tag{18.2}$$

D'après le résultat énoncé, il faut et il suffit, pour que le fluide considéré soit incompressible, que l'on ait

$$K = \Omega^i_i = 0, \tag{18.3}$$

et les équations (17.4) et (17.5) du champ de gravitation se réduisent alors aux équations

$$-\frac{1}{V}\partial_4\Omega^j_i + \overline{R}^j_i - \frac{g^{jk}\nabla_k(\partial_i V)}{V} = -\frac{1}{2}\chi g^j_i(\mu - p), \tag{18.4}$$

$$\nabla_j(\Omega^{ij}) = 0, \tag{18.5a}$$

$$\overline{R} = -H^2 - 2\chi\mu. \tag{18.5b}$$

(¹) EISENHART, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **21**, 1924, p. 216.

Dans le cas où le fluide parfait introduit est *homogène*, μ est une constante et la pression p du fluide est liée à la fonction V par la relation [1]

$$V = \frac{\mu}{\mu + p}. \tag{18.6}$$

19. Sur l'intégration des mouvements irrotationnels d'un fluide homogène incompressible. — Donnons-nous une constante positive μ et cherchons à déterminer les mouvements irrotationnels d'un fluide homogène incompressible de densité μ. Soit S une hypersurface minima associée à un tel mouvement irrotationnel et cherchons tout d'abord à déterminer sur S les tenseurs d'espace g_{ij} et Ω_{ij}. La méthode introduite dans le cas extérieur rend cette détermination facile : le changement de fonctions inconnues déjà utilisé

$$g_{ij} = e^{2\theta} g^{\star}_{ij}, \qquad \Pi^{ij} = e^{5\theta} \Omega^{ij}$$

transforme les équations (18.3) et (18.5) en les équations

$$g^{\star}_{ij} \Pi^{ij} = 0, \tag{19.1}$$

$$\nabla^{\star}_{j} \Pi^{ij} = 0, \tag{19.2}$$

$$-4 g^{ij\star} \partial_{ij}\theta - 2 g^{ij\star} \partial_i\theta\, \partial_j\theta - 4\, \partial_j g^{ij\star}\, \partial_i\theta + R^{\star} = -L^2 e^{-4\theta} - 2\chi\mu e^{2\theta}. \tag{19.3}$$

Ainsi la détermination sur S des tenseurs g_{ij} et Ω_{ij} se ramène à l'intégration du système linéaire du premier ordre (19.1), (19.2) aux fonctions inconnues Π^{ij} et à celle de l'équation de type elliptique (19.3) à l'inconnue θ.

Supposons pour un instant connues les valeurs sur l'hypersurface S de la fonction V et de ses dérivées successives. Si l'on tient compte de la relation (18.6) dans le système (18.4), on aboutit aux équations

$$-\partial_4 \Omega^j_i + \overline{R}^j_i V - g^{jk} \nabla_k(\partial_i V) = -\frac{1}{2}\chi g^j_i \mu(2V - 1), \tag{19.4}$$

qui donnent immédiatement les valeurs sur S des $\partial_4 \Omega^j_i$. Par des dérivations par rapport à x^4 effectuées sur les équations (19.4), où μ est considérée comme une constante, on peut déterminer les valeurs des dérivées normales successives du tenseur Ω^{ij}.

Il nous faut maintenant choisir les fonctions V, $\partial_4 V$, ... de façon que le ds^2 correspondant soit effectivement associé au mouvement irrotationnel d'un fluide incompressible de densité μ. Il résulte des équations (18.5_a) que les valeurs sur S des u^i sont nulles. Par suite les valeurs encore inconnues de u^4 et V sont liées par la relation

$$V^2 (u^4)^2 = 1. \tag{19.5}$$

---

[1] Synge, *Proc. London Math. Soc.*, **43**, 1937, p. 391-393.

Les u^i étant nuls sur S, le système différentiel aux lignes de courant se réduit sur cette variété aux équations

$$u^4\,\partial_4 u^i + \Gamma^i_{44}(u^4)^2 = \frac{\partial_j p}{\mu + p} g^{ij},$$

ou en tenant compte de (18.6)

$$u^4\,\partial_4 u^i + \mathrm{L}^i_{44}(u^4)^2 = -\frac{\partial_j \mathrm{V}}{\mathrm{V}} g^{ij}.$$

Or d'après la relation (19.5)

$$\Gamma^i_{44}(u^4)^2 = -\frac{\partial_j \mathrm{V}}{\mathrm{V}} g^{ij}.$$

Par suite il vient sur l'hypersurface S

$$\partial_4 u^i = 0, \qquad \partial_{44} u^i = 0, \qquad \ldots,$$

et le mouvement associé à l'espace-temps intérieur considéré est un mouvement irrotationnel. Pour que ce mouvement corresponde à un fluide incompressible, il faut et il suffit que la quantité K soit identiquement nulle. Or, en vertu des équations (19.1) et (19.4), il vient sur la variété S

$$\mathrm{K} = 0,$$

$$\partial_4 \mathrm{K} = -\overline{\Delta}_2 \mathrm{V} + (\overline{\mathrm{R}} + 3\chi\mu)\mathrm{V} - \frac{3}{2}\chi\mu. \tag{19.6}$$

Il en résulte que la fonction V est astreinte à satisfaire à l'équation de type elliptique

$$-\overline{\Delta}^2 \mathrm{V} + (\overline{\mathrm{R}} + 3\chi\mu)\mathrm{V} - \frac{3}{2}\chi\mu = 0,$$

et ses dérivées successives par rapport à x^4 à satisfaire à des équations analogues, obtenues par dérivations sur (19.6). Si $\dot{\mathrm{V}}$ désigne l'une quelconque de ces dérivées, on a

$$-\overline{\Delta}_2 \dot{\mathrm{V}} + (\overline{\mathrm{R}} + 3\chi\mu)\dot{\mathrm{V}} + \Phi = 0,$$

où Φ représente une fonction régulière des variables x^i, ne dépendant que des g_{ij} et de leurs dérivées d'ordre en x^4 égal à celui de $\dot{\mathrm{V}}$, ainsi que de la fonction V et de ses dérivées d'ordre en x^4 inférieur à celui de $\dot{\mathrm{V}}$. Nous avons ainsi achevé la détermination de l'espace-temps intérieur le plus général correspondant au mouvement irrotationnel d'un fluide homogène incompressible de densité μ. On connaît le rôle joué par l'équation de Laplace dans la théorie classique d'un tel mouvement; il importe de noter qu'il apparaît ici encore une curieuse analogie entre la théorie des équations gravitationnelles du cas extérieur et celle du mouvement irrotationnel d'un fluide incompressible.

VI. — Sur le problème des *n* corps.

20. Position du problème restreint. — Beaucoup d'auteurs, entre autres de Sitter et Levi-Civita, se sont occupés du problème des *n* corps en relativité générale. Mais ils se sont toujours bornés à la recherche de solutions approchées et les approximations faites apparaissent parfois, notamment chez de Sitter, comme plus ou moins arbitraires. Je me propose ici de construire un exemple de données de Cauchy compatibles avec le problème des *n* corps. A de telles données correspondra une solution *rigoureuse* de ce problème, dont l'évolution dans le temps sera régie par les équations du type (4.3) ou (17.4) et pourra être obtenue par une intégration numérique de ces équations. Ce n'est là encore il est vrai qu'une première ébauche, mais elle est susceptible de fournir des renseignements intéressants sur ce difficile problème de mécanique céleste, envisagé indépendamment de tout recours à des approximations toujours délicates à justifier.

Supposons que l'on puisse tracer dans l'univers considéré une hypersurface S, homéomorphe à l'espace euclidien et orientée dans l'espace. Donnons-nous sur cette hypersurface *n* domaines D_ρ ($\rho = 1, 2, \ldots, n$) bornés disjoints; nous meublerons chacun de ces domaines par une distribution massique pour laquelle, pour simplifier, nous adopterons le type schématique intérieur. Le vecteur-vitesse sera supposé orthogonal à S et la densité μ, variable en chaque point des différents domaines, sera considérée comme donnée.

Dans l'espace-temps doué de sa métrique totale — extérieure et intérieure — menons par chaque point de S la géodésique G normale à S. Celles de ces géodésiques issues des points des domaines D_ρ sont les lignes de courant des distributions matérielles considérées, tandis que celles qui s'appuient sur les bords de ces domaines engendrent les frontières des *n* masses. Nous adopterons pour variable temporelle x^4 l'arc de géodésique G, de telle sorte que l'espace-temps se trouve rapporté au système de coordonnées de Gauss relatif à S, et nous prendrons par suite la métrique de cet espace-temps sous la forme

$$ds^2 = (dx^4)^2 + \varphi^4 g^*_{ij}\, dx^i\, dx^j, \tag{20.1}$$

où les notations sont identiques à celles des paragraphes **9**, **10**, **11**.

Les g^*_{ij} étant donnés de telle façon que la métrique définie négative

$$(ds^*)^2 = g^*_{ij}\, dx^i\, dx^j$$

soit partout régulière sur S et soit conforme à l'espace euclidien à l'infini, nous chercherons à trouver une solution des équations

$$\left\{\begin{aligned} &g^*_{ij}\Pi^{ij} = 0,\\ &\nabla^*_j \Pi^{ij} = 0,\end{aligned}\right. \tag{20.2}$$

$$-8\,\Delta^*_2\varphi + 8\,\Gamma^{h*}_{hi} g^{ij*}\,\partial_j\varphi + R^*\varphi + \frac{L^2}{\varphi^7} = \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{(à l'extérieur des } D_\rho),\\ -2\chi\mu\varphi^5 & \text{(à l'intérieur des } D_\rho),\end{array}\right. \tag{20.3}$$

solution qui soit partout régulière sur S et qui soit telle qu'à l'infini la métrique (20.1) tende asymptotiquement vers la métrique euclidienne et le tenseur Π^{ij} vers zéro [1]. A deux tels tenseurs g_{ij} et Π^{ij} correspondra effectivement par l'intermédiaire des équations

$$(20.4) \qquad -\partial_k\Omega_i^j - K\Omega_i^j + \overline{R}_i^j = \begin{cases} 0 & \text{(à l'extérieur des } D_\rho), \\ -\frac{1}{2}\chi g_i^j \mu & \text{(à l'intérieur des } D_\rho), \end{cases}$$

une solution rigoureuse du problème des n corps.

21. Détermination d'une solution. — Les conditions portant sur la métrique auxiliaire $(ds^*)^2$ sont évidemment satisfaites si nous adoptons pour celle-ci la métrique euclidienne définie par les formules

$$g_{ij}^* = -\delta_{ij} = \begin{cases} 0 \ (\text{pour } i \neq j), \\ -1 \ (\text{pour } i = j). \end{cases}$$

De plus le tenseur Π^{ij} identiquement nul constitue bien une solution partout régulière des équations (20.2) se réduisant à zéro dans le domaine à l'infini; nous pouvons donc prendre

$$\Pi^{ij} = 0.$$

Soit $\Delta\varphi$ le laplacien euclidien ordinaire de la fonction φ. Avec le choix précédent des tenseurs g_{ij}^* et Π^{ij}, l'équation (20.3) prend la forme

$$\Delta\varphi = \begin{cases} 0 & \text{(à l'extérieur de } D_\rho), \\ -\frac{1}{4}\chi\mu\varphi^5 & \text{(à l'intérieur de } D_\rho), \end{cases}$$

ou en tenant compte de la relation (17.2)

$$(21.1) \qquad \Delta\varphi = \begin{cases} 0 & \text{(à l'extérieur des } D_\rho), \\ -\frac{2\pi f}{c^2}\mu\varphi^5 & \text{(à l'intérieur des } D_\rho). \end{cases}$$

Nous sommes ainsi ramenés à chercher une solution strictement positive, partout régulière sur S, de l'équation (21.1), solution qui se réduise à l'unité dans le domaine à l'infini. Il apparaît clairement sur l'équation (21.1) que la fonction φ étant strictement positive ne peut atteindre sa borne inférieure en aucun point à distance finie. Par suite sur S, $\varphi \geqq 1$. D'ailleurs la fonction φ satisfaisant à (21.1) et prenant la valeur 1 à l'infini, satisfait à l'équation intégrale

$$(21.2) \qquad \varphi = 1 + \frac{f}{2c^2}\sum_{\rho=1}^{\rho=n}\int_{D_\rho}\frac{\mu}{r}\varphi^5\,dV,$$

[1] *Cf.* Lichnerowicz, *Thèse,* Paris, 1939, p. 35 et 39.

où r désigne la distance euclidienne et dV l'élément de volume euclidien. Soit φ_0 une fonction continue partout supérieure à 1 sur S. Nous allons construire par approximations successives à partir de la fonction φ_0 une solution de l'équation (21.2). Les approximations successives $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m, \ldots$ étant données par la formule de récurrence

$$\varphi_{m+1} = 1 + \frac{f}{2c^2} \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \int_{D_\rho} \frac{\mu}{r} \varphi_m^5 \, dV, \tag{21.3}$$

il est clair qu'en tout point à distance finie

$$1 < \varphi_m.$$

Posons

$$\alpha = \frac{f}{2c^2} \max \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \int_{D_\rho} \frac{\mu}{r} dV, \qquad \delta_m = \max |\varphi_{m+1} - \varphi_m|,$$

et soit M une borne supérieure de φ_m. Il résulte de (21.3) que φ_{m+1} peut alors être majoré par

$$\varphi_{m+1} < 1 + M^5 \alpha.$$

La borne M étant nécessairement supérieure à l'unité, il est possible de choisir α suffisamment petit (par exemple en adoptant une distribution matérielle suffisamment peu dense) pour que

$$1 + M^5 \alpha < M.$$

Dans ces conditions, il est clair que, quel que soit n, on a

$$1 \leqq \varphi_m < M.$$

On déduit immédiatement de cette majoration

$$\delta_m < \delta_{m-1} 5 M^4 \alpha,$$

et si l'on choisit encore α suffisamment petit, pour qu'il existe un nombre q tel que

$$5 M^4 \alpha < q < 1,$$

et la convergence uniforme des φ_m en résulte. Comme on s'en assure aisément, la fonction limite φ satisfait à l'équation intégrale (21.2) et par suite à l'équation (21.1), est strictement positive et prend la valeur 1 à l'infini.

L'élément linéaire

$$ds^2 = (dx^4)^2 - \varphi^4 \delta_{ij} \, dx^i \, dx^j,$$

associé au tenseur $\Pi^{ij} = 0$, fournit un exemple de conditions initiales compatibles avec le problème des n corps.

VII. — Application au problème des deux corps.

22. Préliminaires. — On sait que de nombreux auteurs (¹) se sont occupés du problème statique des deux corps dans le cas de la symétrie axiale. Ce problème si intéressant au point de vue analytique semble au premier abord dépourvu d'intérêt physique : deux masses coexistantes dans l'univers ne peuvent *a priori* y demeurer en équilibre. Cette incompatibilité se traduit par l'existence hors des masses de certaines singularités du champ extérieur, comme je l'ai établi dans des cas sensiblement plus généraux (²).

Mais ces singularités peuvent être envisagées comme constituant la représentation des liaisons à appliquer aux deux masses pour leur permettre de ne pas graviter. Weyl, en étudiant ce système de tensions, a obtenu un résultat d'un intérêt physique certain : l'effet global de ces tensions sur l'un des corps est dans certaines conditions une attraction donnée approximativement par la loi de Newton.

En Mécanique céleste, la loi de Newton est employée constamment comme première approximation de la loi relativiste de la gravitation. En toute rigueur, cet emploi n'était justifié que pour le mouvement d'un élément matériel dans le champ d'une masse finie (et non pas pour le mouvement de deux masses comparables). Le résultat de Weyl constituait ainsi une première justification de cet emploi dans des conditions plus larges.

Dans ce qui va suivre, nous allons appliquer les résultats des paragraphes précédents à l'étude d'un univers à deux masses gravitantes et essayer d'en tirer quelques éclaircissements relativement à l'interaction de ces deux masses.

23. Énergie du système des deux masses. — Considérons un univers à deux masses engendré par des conditions initiales du type de celles étudiées aux paragraphes **20** et **21**. Les deux masses considérées occupent respectivement sur S les domaines D_1 et D_2 et admettent respectivement pour densités en les points de ces domaines μ_1 et μ_2. L'élément linéaire correspondant à cet univers peut être mis sous la forme

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - d\sigma^2 \qquad (x^4 = \text{const.}), \tag{23.1}$$

et satisfait sur S aux conditions

$$\Omega_{ij} = 0, \tag{23.2}$$

$$d\sigma^2 = \varphi^4\,\delta_{ij}\,dx^i\,dx^j, \tag{23.3}$$

(¹) *Cf.* Bach et H. Weyl, *Mathem. Zeits.*, 1922, p. 134-145; Palatini, *Rend. Acad. Lincei*, 1923, fasc. 6, p. 263-267; Chazy, *Bull. Soc. Math. France*, 1924, p. 17-38.

(²) Lichnerowicz, *Thèse*, Paris, 1939, p. 69.

où φ est solution de l'équation intégrale

$$(23.4) \qquad \varphi = 1 + \frac{f}{2c^2} \sum_1^2 \int_{D_\rho} \frac{\mu_\rho}{r} \varphi^5 \, dV_\rho.$$

Un élément matériel d'épreuve P, placé en un point quelconque de S, décrit dans l'espace-temps une géodésique de la métrique (23.1). En vertu des conditions (23.2) il décrit, au voisinage de S et par rapport aux variables d'espace, *une géodésique de l'élément linéaire* (23.3) d'un mouvement uniforme. Si nous rapprochons cet énoncé *du principe de Maupertuis*, nous voyons que l'élément matériel P se comporte comme s'il était soumis à un potentiel u proportionnel à φ^4

$$u = k\varphi^4.$$

Pour déterminer la constante k, évaluons le laplacien de u. On a

$$\frac{1}{k}\Delta u = 4\varphi^3 \Delta\varphi + 12\varphi^2 \Delta_1 \varphi,$$

où $\Delta_1 \varphi$ désigne le paramètre différentiel du premier ordre de la fonction φ. En négligeant au second membre les termes de l'ordre de $\frac{1}{C^4}$, il vient

$$\frac{1}{k}\Delta u = 4\Delta\varphi = \begin{cases} 0 & \text{(à l'extérieur des masses),} \\ -\dfrac{8\pi f}{c^2}\mu & \text{(à l'intérieur des masses).} \end{cases}$$

Nous adopterons $k = \frac{C^2}{2}$ de telle sorte que, aux termes en $\frac{1}{C^2}$ près, la fonction u satisfasse à l'équation de Laplace-Poisson

$$\Delta u = \begin{cases} 0 & \text{(à l'extérieur des masses),} \\ -4\pi f\mu & \text{(à l'intérieur des masses).} \end{cases}$$

Si nous considérons chaque élément matériel de l'un des corps, D_1 par exemple, comme un élément P, il lui correspond l'énergie potentielle

$$\mu_1 u = \mu_1 \frac{c^2}{2}\varphi^4.$$

Par intégration, nous aboutirons, pour l'énergie potentielle totale du système des deux corps, à l'expression suivante

$$(23.5) \qquad U = \frac{c^2}{2}\left[\int_{D_1} \mu_1 \varphi^4 \, dV_1 + \int_{D_2} \mu_2 \varphi^4 \, dV_2\right],$$

où φ satisfait à l'équation intégrale (23.4).

24. La loi de Newton. — Sur la formule (23.5) donnant U nous effectuerons deux sortes d'approximations :

a. Comme nous l'avons déjà fait à plusieurs reprises, nous négligerons au second membre les termes de l'ordre de $\frac{1}{C^2}$ au moins.

b. Désignons par d la plus petite distance euclidienne d'un point de l'un des corps à un point de l'autre et par l la plus grande dimension des deux corps. Nous supposerons que le rapport $\frac{l}{d}$ est petit et nous négligerons (1) les termes de l'ordre de $\frac{l^2}{d^2}$ au moins.

La fonction U étant définie par

$$U = \frac{c^2}{2}\sum_{\rho=1}^{\rho=2}\int_{D_\rho}\mu_\rho\left(1+\frac{f}{2c^2}\sum_{\sigma=1}^{\sigma=2}\int_{D_\sigma}\frac{\mu_\sigma}{r}\varphi^5\,dV_\sigma\right)^4 dV_\rho,$$

il vient, à des termes en $\frac{1}{C^2}$ près,

$$U = \frac{c^2}{2}\left\{\sum_{\rho=1}^{\rho=2}\int_{D_\rho}\mu_\rho\,dV_\rho + \frac{2f}{c^2}\sum_{\rho,\sigma=1}^{\rho,\sigma=2}\int_{D_\rho}\mu_\rho\left(\int_{D_\sigma}\frac{\mu_\sigma}{r}\varphi^5\,dV_\sigma\right)dV_\rho\right\}.$$

Posons

$$M_\rho = \int_{D_\rho}\mu_\rho\,dV_\rho.$$

La quantité M_ρ représente la masse totale du corps considéré et nous pouvons mettre la fonction U sous la forme

$$U = \frac{c^2}{2}(M_1+M_2)+f\sum_{\rho,\sigma=1}^{\rho,\sigma=2}\int_{D_\rho}\mu_\rho\left(\int_{D_\sigma}\frac{\mu_\sigma}{r}\,dV_\sigma\right)dV_\rho,$$

ou en négligeant des termes en $\frac{l^2}{d^2}$ au moins

$$U = \frac{c^2}{2}(M_1+M_2)+f\sum_{\rho=1}^{\rho=2}\int_{D_\rho}\mu_\rho\left(\int_{D_\rho}\frac{\mu_\rho}{r}\,dV_\rho\right)dV_\rho+\frac{2fM_1M_2}{d}.$$

Si nous effectuons sur les deux corps un déplacement euclidien, le seul terme de U qui variera sera le dernier. La fonction U se présente donc sous la forme

$$U = B + \frac{2fM_1M_2}{d},$$

(1) *Cf.* Levi-Civita, *Amer. Journ. of Math.*, 59, 1937, p. 11.

où B est invariant par un déplacement euclidien. Nous retrouvons dans le cas de deux masses finies une expression classique de la loi de Newton ([1]).

BIBLIOGRAPHIE.

BACH et H. WEYL, *Math. Zeits.*, 1922, p. 134.

E. CARTAN, *Bull. Soc. Math. France*, 59, 1931, p. 88.

J. CHAZY, *Bull. Soc. Math. France*, 52, 1924, p. 17. *La théorie de la relativité et la Mécanique céleste*, Gauthier-Villars, 1930.

COURANT et HILBERT, *Methoden der Mathematischen Physik*, Springer, 1937.

G. DARMOIS, *Les équations de la gravitation einsteinienne* (*Mém. Sc. math.*, 25, 1927).

DELSARTE, *Sur les ds² d'Einstein à symétrie axiale* (*Actual. scientif. et ind.*, Hermann, 1934).

DOUGLAS, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1933, p. 227.

EISENHART, *Trans. of Amer. Math. Soc.*, 1924, p. 206.

LEVI-CIVITA, *Amer. Journ. of Math.*, 59, 1937, p. 9-22 et 225-234.

LICHNEROWICZ, *Sur certains problèmes globaux relatifs au système des équations d'Einstein* (*Thèse*, Paris, Hermann, 1939). *Bull. des Sc. math.*, 65, 1941, p. 54.

RACINE, *Le problème des n corps dans la théorie de la relativité* (*Thèse*, Paris, Gauthier-Villars, 1934).

SYNGE, *Proc. London Math. Soc.*, 43, 1937, p. 391.

([1]) A la même approximation, nous avons d'ailleurs

$$u = \frac{C^2}{2} + f \sum_{\rho=1}^{\rho=2} \int_{D_\rho} \frac{\mu_\rho}{r} \, dV_\rho.$$