JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. FAVARD

Sur les multiplicateurs d'interpolation

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 23 (1944), p. 219-247.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1944_9_23__219_0>

Sur les multiplicateurs d'interpolation;

Par J. FAVARD.

Introduction.

Pour une fonction $f(x)$ définie et continue dans l'intervalle $0 \leqq x \leqq 1$, et satisfaisant éventuellement à d'autres conditions qui seront précisées, j'appelle *multiplicateurs d'interpolation* une suite de fonctions

$$A_n^k(x) \quad (k=0, 1, \ldots, n-1;\ n=1, 2, \ldots)$$

définies pour $0 \leqq x \leqq 1$ et telles qu'on ait

$$\lim_{n \to \infty} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) A_n^k(x) \right\} = f(x) \qquad (\text{pour } 0 < x < 1).$$

Une telle suite s'introduit naturellement dans ce qu'on peut appeler *le deuxième problème de l'interpolation :*

Connaissant les valeurs de $f(x)$ aux points $\frac{k}{n}$, trouver une suite d'expressions analytiques tendant vers $f(x)$. Dans la première Partie de ce travail, j'établis (n° 3) deux résultats fondamentaux, l'un relatif aux multiplicateurs non négatifs et aux fonctions continues, l'autre relatif aux multiplicateurs de signe quelconque et aux fonctions à variation bornée.

Ces résultats s'établissent comme leurs analogues relatifs aux *intégrales dites singulières*, et ce rapprochement est à l'origine du travail.

A côté de diverses remarques dictées par cette analogie, on trouvera aussi dans la première Partie un résultat général relatif à l'approximation, et deux résultats relatifs aux multiplicateurs d'interpolation pour les fonctions de deux variables.

Dans la deuxième Partie nous examinons des exemples de multiplicateurs; les $A_n^k(x)$ sont des fonctions analytiques, car si l'on n'exigeait rien de tel, les exemples seraient faciles à imaginer $\left[\text{à commencer par celui de la fonction d'interpolation linéaire dans le segment } \left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)\right]$, mais de peu d'intérêt; en fait, et par diverses transformations, nous essaierons d'obtenir pour les $A_n^k(x)$

des polynomes, ou des polynomes trigonométriques dans le cas d'une fonction périodique.

Cependant, dans le cas des multiplicateurs positifs, la somme écrite au premier membre de l'égalité ci-dessus peut être interprétée comme une *espérance mathématique* relative à une certaine *loi de probabilité* (c'est ce qu'on peut faire pour le premier en date des exemples de multiplicateurs d'interpolation, les polynomes de Bernstein qui se rattachent à la loi normale), et c'est sous cet angle que j'ai voulu examiner des exemples, mais on ne doit pas perdre de vue que beaucoup d'autres auraient pu être trouvés à l'examen des intégrales des *équations aux dérivées partielles de la Physique mathématique :* l'étude des multiplicateurs provenant de la loi normale revient en effet, à ce point de vue, à l'étude de certaines intégrales de l'équation de la chaleur; l'étude de ceux provenant de la loi de probabilité de Cauchy revient à l'étude de certaines fonctions harmoniques. Les équations de la Physique mathématique fournissent aussi des moyens divers de résoudre le deuxième problème d'interpolation sur des courbes ou des surfaces, problème que je ne fais que signaler.

Quant aux *multiplicateurs de signe variable*, je n'examine que ceux provenant du *noyau de Dirichlet* pour les fonctions périodiques. Les fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz permettent un tel jeu dans l'application des multiplicateurs provenant de ce noyau, qu'on peut se demander si l'on ne se trouve pas là devant une propriété caractéristique de ces fonctions.

Je n'ai pas traité ici de la rapidité de la convergence des expressions trouvées suivant les hypothèses faites sur $f(x)$; cependant, à propos des multiplicateurs déduits du noyau de Dirichlet, et de ceux tirés du noyau de Féjer, je remarque qu'ils possèdent la propriété que j'appelle l'*égale convergence dans le champ des fonctions analytiques*, propriété qui semble assez générale et dont on peut se demander si elle n'est pas sans rapport avec la loi dite du logarithme itéré, pour le cas des multiplicateurs rattachés à la loi normale; mais je ne dispose présentement d'aucun document me permettant de décider (Cet article est écrit en captivité, 1944).

I.

1. Multiplicateurs positifs. — A tout nombre entier positif n, nous faisons correspondre n constantes non négatives $A_n^k (k = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Supposons que A_n^0 tende vers une limite A lorsque n augmente indéfiniment, que le nombre

$$S_n \equiv \sum_{k=0}^{n-1} A_n^k$$

tende lui aussi vers une limite S et que, si faible que soit le nombre δ positif, les nombres (¹)

$$S_n(\delta) = \sum_{k=0}^{[\delta n]} A_n^k$$

tendent aussi vers S; on aura de ce fait

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sum_{[\delta n]+1}^{n-1} A_n^k \right) = 0.$$

Soit à présent $f(x)$ une fonction bornée définie pour $0 \leqq x \leqq 1$, mais telle que $f(x)$ tende vers une limite $f(+0)$ lorsque x tend vers zéro, posons

$$S_n^f = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) A_n^k,$$

je dis alors que

$$(1) \qquad \lim_{n \to \infty} S_n^f = S f(+0) + A[f(0) - f(+0)].$$

Désignons par M une borne supérieure du module de $f(x)$ et ε positif étant donné, choisissons δ assez petit pour qu'on ait

$$|f(x) - f(+0)| < \varepsilon \qquad (0 < x < \delta),$$

il s'ensuit

$$S_n^f = \sum_0^{[\delta n]} + \sum_{[\delta n]+1}^{n-1} = f(+0) \sum_0^{[\delta n]} A_n^k + \sum_0^{[\delta n]} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(+0) \right] A_n^k + \sum_{[\delta n]+1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) A_n^k,$$

d'où

$$|S_n^f - S_n(\delta) f(+0) - A_n^0 [f(0) - f(+0)]| \leqq \varepsilon S_n(\delta) + M \sum_{[\delta n]+1}^{n-1} A_n^k.$$

Choisissons maintenant n suffisamment grand pour que

$$\sum_{[\delta n]+1}^{n-1} A_n^k \leqq \varepsilon; \qquad |A_n^0 - A| \leqq \varepsilon,$$

il vient

$$|S_n^f - S f(+0) - A[f(0)]| \leqq \varepsilon (S + 4M),$$

inégalité qui démontre notre résultat.

Remarque. — Dans les applications nous supposerons la fonction $f(x)$ continue, alors l'hypothèse relative à A_n^0 est inutile et S_n^f tend vers $S f(0)$.

Ce théorème n'est intéressant que si $0 < S < +\infty$, hypothèse qui sera réalisée dans tous les exemples que nous traiterons; quitte à faire la division

(¹) Dans ce qui suit nous désignerons par $[x]$ la partie entière de x.

nécessaire, nous pouvons alors supposer, soit que $S=1$, soit même que $S_n=1$.

On voit également que

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{[\delta n]} f\left(\frac{k}{n}\right)A_n^k = Sf(+0)+A[f(0)-f(+0)],$$

quel que soit δ donné tel que $0<\delta<1$.

2. Multiplicateurs quelconques. — Supposons à présent que les A_n^k aient un signe quelconque, mais que, en dehors des hypothèses précédentes

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S; \qquad \lim_{n\to\infty} S_n(\delta)=S,$$

on ait aussi, d'une part, uniformément en n,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=\lambda}^{\mu} A_n^k = 0,$$

quels que soient les entiers λ et μ ($\lambda<\mu$) tels que, si petit que soit $\delta>0$, avec

$$[\delta n]<\lambda<\mu\leqq n-1,$$

que, d'autre part, il existe une constante K telle que, quels que soient λ et μ,

$$\left|\sum_{k=\lambda}^{\mu} A_n^k\right| < K \qquad (0\leqq\lambda<\mu\leqq n-1).$$

Soit alors $f(x)$ une fonction à variation bornée pour $0\leqq x\leqq 1$, continue pour $x=0$, avec $|f(x)|<M$, je dis que (¹)

$$\lim_{n\to\infty} S_n^f = Sf(0). \tag{2}$$

Il suffit de considérer le cas d'une fonction non décroissante; en posant

$$f(x)=f(0)+F(x) \qquad (|F(x)|<2M;\ \lim_{n\to\infty}F(x)=0),$$

on aura

$$S_n^f = S_n f(0)+\sum_0^{n-1} F\left(\frac{k}{n}\right)A_n^k,$$

il faut montrer que

$$\lim_{n\to\infty}\sum_0^{n-1} F\left(\frac{k}{n}\right)A_n^k = 0.$$

(¹) Si $f(x)$ n'est pas continue, le second membre de (2) est à remplacer par $Sf(0)+A[f(0)-f(+0)]$, où A est la limite de A_n^0 supposée existante.

Or, ayant choisi δ assez petit pour qu'on ait

$$0 \leqq F(x) \leqq \varepsilon \quad \text{pour} \quad 0 \leqq x \leqq \delta,$$

il vient en écrivant

$$\sum_{0}^{n-1} F\left(\frac{k}{n}\right) A_n^k = \sum_{0}^{[\delta n]'} + \sum_{[\delta n]+1}^{n-1}$$

et en appliquant alors le théorème d'Abel à chacune des sommes du second membre,

$$\left|\sum_{0}^{[\delta n]}\right| \leqq |F(\delta)| \operatorname*{Max}_{\lambda, \mu \leqq [\delta n]} \left|\sum_{\lambda}^{\mu} A_n^k\right| \leqq |F(\delta)| \, k \leqq k\varepsilon,$$

$$\left|\sum_{[\delta n]+1}^{n-1}\right| \leqq 2\,M \operatorname*{Max}_{\lambda, \mu > [\delta n]} \left|\sum_{\lambda}^{\mu} A_n^k\right|.$$

Choisissons alors n assez grand pour que

$$\left|\sum_{\lambda}^{\mu} A_n^k\right| \leqq \varepsilon \qquad (\lambda, \mu > [\delta n]),$$

on a, en définitive,

$$\left|\sum_{0}^{n-1} F\left(\frac{k}{n}\right) A_n^k\right| \leqq \varepsilon(K + 2M);$$

ε étant aussi petit que l'on veut, cette inégalité démontre le résultat.

Remarque. — Les deux théorèmes précédents sont vrais si, au lieu de prendre les valeurs de la fonction $f(x)$ aux points $\frac{k}{n}$, on les prend aux points s_n^k ($0 \leqq s_n^k \leqq 1$; $s_n^k < s_n^{k+1}$), à condition que les hypothèses faites sur les A_n^k soient énoncées avec la condition $s_n^k < \delta$.

3. Les résultats ci-dessus seront utilisés sous les formes suivantes, que l'on démontre immédiatement en reprenant les raisonnements précédents pour chaque valeur de x :

PREMIER ÉNONCÉ. — *Soient*

$$A_n^k(x) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1;\ n = 1, 2, \ldots)$$

une suite de fonctions non négatives de x définies pour $0 \leqq x \leqq 1$; *supposons que :*

1° *En posant*

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} A_n^k(x)$$

il existe une constante S *telle que, pour* $0 < x < 1$,

$$\lim_{n \to \infty} S_n(x) = S.$$

2° *Quels que soient* x *et* δ *positif, on a*

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=[n(x-\delta)]}^{[n(x+\delta)]} A_n^k(x) = S. \tag{3}$$

Désignant alors par $f(x)$ *une fonction définie et continue pour* $0 \leq x \leq 1$, *on a*

$$\lim_{n \to \infty} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) A_n^k(x) \right\} = S f(x) \qquad (\text{pour } 0 < x < 1). \tag{4}$$

Deuxième énoncé. — *Les fonctions réelles* $A_n^k(x)$ *ne sont plus supposées non négatives, les hypothèses précédentes sont également admises, mais on suppose de plus que :*

3° *Il existe une fonction finie* $\Phi(x)$ *telle que :*

$$\left| \sum_{k=\lambda}^{\mu} A_n^k(x) \right| < \Phi(x) \qquad (0 \leq \lambda < \mu \leq n-1).$$

4° *Posant, quels que soient* x *et* δ *positif donnés,*

$$\operatorname{Max} \left| \sum_{k=\lambda}^{\mu} A_n^k(x) \right| = L_n(x, \delta)$$

dans les deux cas où

$$[n(x+\delta)] < \lambda < \mu \qquad \text{et} \qquad \lambda < \mu < [n(x-\delta)],$$

alors on suppose que

$$\lim_{n \to \infty} L_n(x, \delta) = 0. \tag{5}$$

Désignant alors par $f(x)$ *une fonction continue à variation bornée pour* $0 \leq x \leq 1$, *on a l'égalité* (4) *ci-dessus.*

Remarque. — Avec quelques modifications sur les hypothèses, les résultats ci-dessus sont faciles à généraliser dans le cas où l'on suppose seulement l'existence de $f(x+0)$ et de $f(x-0)$.

Si les $A_n^k(x)$ ne sont pas nécessairement positifs, mais s'il existe une constante K telle que

$$\left| \sum_{0}^{n-1} A_n^k(x) \right| < K$$

et si on a l'égalité (5), on voit facilement que le premier énoncé s'applique.

4. Uniformité de la convergence. — 1° Reprenant le cas où *les* $A_n(x)$ *sont non négatifs* et supposant que la *limite* (3) *soit atteinte uniformément, quel que soit* δ *pour*

$$\alpha < x < \beta \qquad (0 \leqq \alpha < \beta \leqq 1),$$

alors $S_n(x)$ tendra uniformément vers S dans le même intervalle; on voit immédiatement que $f(x)$ *étant continue, la convergence du premier membre de* (4) *vers* $S f(x)$ *est uniforme dans* $\alpha < x < \beta$.

En désignant par M une borne supérieure de $|f(x)|$ et par δ un nombre tel que

$$|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon \qquad \text{pour} \quad |h| < \delta,$$

un calcul facile donne

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) A_n^k(x) - S f(x)\right| \leqq 2\,|S_n(x) - S|\,M + \left|S - \sum_{[n(x-\delta)]}^{[n(x+\delta)]}\right| M + \varepsilon S_n(x),$$

or, par hypothèse, on peut trouver un nombre N, tel que, pour $n \leqq N$, on ait

$$|S_n(x) - S| \leqq \varepsilon; \qquad \left|S - \sum_{[n(x-\delta)]}^{[n(x+\delta)]}\right| \leqq \varepsilon \qquad (\alpha \leqq x \leqq \beta),$$

de là

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) A_n^k(x) - S f(x)\right| \leqq \varepsilon(3M + S + \varepsilon),$$

inégalité qui démontre notre résultat.

2° Dans le *deuxième cas, si* $f(x)$ *est une fonction continue à variation bornée*, la convergence uniforme est assurée pour $\alpha < x < \beta$, et si, outre l'hypothèse de la convergence uniforme de $S_n(x)$ vers S, on suppose :

a. l'existence d'une constante K *telle que*

$$\Phi(x) < K;$$

b. la convergence uniforme de $L_n(x, \delta)$ *vers zéro, uniformément en* x *pour* $\alpha < x < \beta$, *quel que soit* $\delta > 0$. En supposant $f(x)$ monotone, et en désignant par M une borne supérieure de son module, on trouve en effet

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) A_n^k(x) - S f(x)\right| \leqq M\,|S_n(x) - S| + 4\,M\,L_n(x, \delta) + 2\,\varepsilon\,\Phi(x).$$

5. Les conditions de convergence et d'uniformité prennent une forme simple dans le cas où

$$A_n^k(x) = B_n\left(\frac{k+1}{n} - x\right) - B_n\left(\frac{k}{n} - x\right) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

$B_n(x)$ étant définie pour $-1 \leqq x \leqq 1$.

On a

$$\sum_{\lambda}^{\mu} A_n^k(x) = B_n\left(\frac{\mu+1}{n} - x\right) - B_n\left(\frac{\lambda}{n} - x\right) \qquad (0 \leqq \lambda < \mu \leqq n-1),$$

et les conditions précédentes seront satisfaites pour $0 < x < 1$, lorsque :

a. les fonctions $A_n^k(x)$ étant non négatives,

$$B_n(1-x) - B_n(-x)$$

tend uniformément vers S, quel que soit x $(0 < x < 1)$, ainsi que

$$B_n(\delta - x) - B_n(-\delta - x),$$

quel que soit δ positif donné et x compris entre 0 et $\frac{1}{n}$.

b. Les fonctions $A_n^k(x)$ ayant un signe quelconque, si l'on a de plus

$$|B_n(x') - B_n(x)| < K,$$

quels que soient x et x', et

$$|B_n(x') - B_n(x)|$$

tendant uniformément vers zéro, quels que soient x et x', tous deux supérieurs à δ, ou tous deux inférieurs à δ (quel que soit δ positif).

6. La forme précédente des $A_n^k(x)$ provient de la comparaison, origine de ce travail, entre les sommes examinées et les intégrales dites singulières et de la forme

$$I_n(x) = \int_0^1 f(t)\varphi_n(t, x)\,dt.$$

Rappelons donc les résultats fondamentaux relatifs à ces intégrales pour en tirer quelques conséquences pour les sommes.

Intégrales à noyau positif (¹). — En supposant

$$\varphi_n(t, x) \geqq 0 \qquad (0 \leqq t \leqq 1;\ 0 \leqq x \leqq 1),$$

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 \varphi_n(t, x)\,dt = S, \qquad \lim_{n \to \infty} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \varphi_n(t, x)\,dt = S \qquad (\text{pour } 0 \leqq x \leqq 1)$$

(¹) Le résultat s'étend facilement aux noyaux de signe variable pour lesquels on a

$$\int_0 |\varphi_n(t, x)|\,dt < K; \qquad \lim_{n \to \infty} \int_0^{x-\delta} |\varphi_n|\,dt = 0; \qquad \lim_{n \to \infty} \int_{x+\delta}^1 |\varphi_n|\,dt = 0.$$

on sait que, pour toute fonction continue dans $(0 \leqq x \leqq 1) f(x)$, on a

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{I}_n(x) \doteq \mathrm{S} f(x) \qquad (\text{pour } \alpha < n < \beta).$$

Prenons alors

$$\mathrm{A}_n^k(x) = \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \varphi_n(t, x)\, dt$$

et posons

$$\mathrm{J}_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \mathrm{A}_n^k(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \varphi_n(t, x)\, dt,$$

on voit immédiatement que

$$\mathrm{I}_n(x) - \mathrm{J}_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left[f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] \varphi_n(t, x)\, dt$$

tend vers zéro lorsque n augmente indéfiniment, en vertu de l'uniformité de la continuité; autrement dit, on a

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{J}_n(x) = \mathrm{S} f(x).$$

7. Intégrales a noyau de signe quelconque. — Lorsque $\varphi_n(t, x)$ change de signe, si l'on suppose que, pour $0 \leqq x \leqq 1$,

$$1^\circ \quad \lim_{n \to \infty} \int_0^1 \varphi_n(t, x)\, dt = \mathrm{S}, \qquad \lim_{n \to \infty} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \varphi_n(t, x)\, dt = \mathrm{S},$$

$$2^\circ \quad \left| \int_u^v \varphi_n(t, x)\, dt \right| < \Phi(x)$$

quels que soient u et v $(0 \leqq u < v \leqq 1)$, $\Phi(x)$ désignant une fonction finie; 3° que posant

$$\left| \int_u^v \varphi_n(t, x)\, dt \right| < \Phi_n(x, \delta)$$

pour

$$x + \delta \leqq u < v \leqq 1 \qquad \text{et} \qquad 0 \leqq u < v \leqq x - \delta,$$

$\Phi_n(x, \delta)$ désignant aussi une fonction finie, on ait

$$\lim_{n \to \infty} \Phi_n(x) = 0;$$

on sait alors que

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{I}_n(x) = \mathrm{S} f(x)$$

pour toute fonction $f(x)$ continue à variation bornée.

On voit immédiatement que si l'on pose

$$A_n^k(x) = \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \varphi_n(t, x)\, dt,$$

les fonctions $A_n^k(x)$ *satisfont aux conditions du numéro* **3** *et l'on a, par suite,*

$$\lim_{n \to \infty} J_n(x) = \lim_{n \to \infty} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \varphi_n(t, x)\, dt \right\} = S f(x)$$

pour toute fonction $f(x)$ *continue et à variation bornée.*

On appelle *module de continuité ou oscillation dans un intervalle d'amplitude* δ, d'une fonction continue pour $0 \leqq x \leqq 1$, et nous désignerons par $\omega(\delta)$ la borne supérieure de

$$|f(x') - f(x)| \quad \text{pour} \quad |x' - x| \leqq \delta.$$

La fonction $\varphi_n(t, x)$ étant supposée sommable, posons

$$\int_0^1 |\varphi_n(t, x)|\, dt = M_n;$$

en se reportant à l'expression de $I_n - J_n$, on voit immédiatement que, pour une fonction continue,

$$|I_n(x) - J_n(x)| \leqq \omega\left(\frac{1}{n}\right) M_n,$$

donc, si la convergence de $I_n(x)$ vers $S f(x)$ est assurée, par les propriétés spéciales du noyau $\varphi_n(t, x)$, pour les fonctions ayant $\omega(\delta)$ pour module de continuité, alors $J_n(x)$ convergera vers $S f(x)$ lorsque, de plus, le produit $\omega\left(\frac{1}{n}\right) \cdot M_n$ tend vers zéro.

De même, pour toute fonction continue pour laquelle $I_n(x)$ converge vers $S f(x)$, on voit que, quel que soit m entier,

$$\left| I_n(x) - \sum_0^{m-1} f\left(\frac{k}{m}\right) \int_{\frac{k}{m}}^{\frac{k+1}{m}} \varphi_n(t, x)\, dt \right| \leqq \omega\left(\frac{1}{m}\right) M_n$$

et, par suite, en choisissant m (fonction de n) de façon que

$$\lim_{n \to \infty} \omega\left(\frac{1}{m}\right) M_n = 0,$$

il vient

$$\lim_{n \to \infty} \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} f\left(\frac{k}{m}\right) \int_{\frac{k}{m}}^{\frac{k+1}{m}} \varphi_n(t, x)\, dt \right\} = S f(x)$$

et on a là un procédé régulier d'approximation des fonctions continues dans la classe du module de continuité $\omega(\delta)$.

8. *a.* Supposons à présent que $\frac{\partial\varphi_n}{\partial t}$ existe pour toute valeur de x, qu'elle soit bornée et désignons alors par $M_n^k(x)$ une borne supérieure de son module pour $\frac{k}{n} \leqq t \leqq \frac{k+1}{n}$; admettons que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} M_n^k(x) = 0, \tag{6}$$

et posons

$$K_n(x) = \frac{1}{n} \sum_0^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \varphi_n\left(\frac{k}{n}, x\right).$$

On a

$$J_n(x) - K_n(x) = \sum_0^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left[\varphi_n(t, x) - \varphi_n\left(\frac{k}{n}, x\right)\right] dt$$

$$= \sum_0^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(t - \frac{k}{n}\right) \frac{\partial\varphi_n}{\partial t}(t', x)\, dt \qquad \left(\frac{k}{n} \leqq t' \leqq t\right),$$

donc

$$|J_n(x) - K_n(x)| \leqq M \sum_0^{n-1} M_n^k(x) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(t - \frac{k}{n}\right) dt = \frac{M}{2n^2} \sum_0^{n-1} M_n^k(x),$$

ce qui, moyennant (6), montre que

$$\lim_{n\to\infty} K_n(x) = S f(x).$$

b. Au lieu de considérer la division de l'intervalle $(0, 1)$ en parties égales, prenons une division au moyen d'une suite de nombres

$$s_n^k \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1, n;\ n = 1, 2, \ldots),$$
$$s_n^k < s_n^{k+1}; \qquad s_n^0 = 0, \qquad s_n^1 = 1,$$

dense dans tout l'intervalle, c'est-à-dire telle que, en posant

$$\max_{0 \leqq k \leqq n-1} (s_n^{k+1} - s_n^k) = \delta_n,$$

on ait

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0.$$

Considérons alors la somme

$$J_n^s(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f(s_n^k) \int_{s_n^k}^{s_n^{k+1}} \varphi_n(t, x)\, dt,$$

il vient

$$I_n(x) - J_n^s(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{s_n^k}^{s_n^{k+1}} [f(t) - f(s_n^k)] \varphi_n(t, x)\, dt.$$

Dans le cas où la fonction $f(x)$ est continue et où φ_n est non négatif, on a donc

$$|I_n(x) - J_n^s(x)| \leqq \omega(\delta_n) \int_0^1 \varphi_n(t, x)\, dt.$$

$J_n^s(x)$ a donc la même limite que $I_n(x)$, c'est-à-dire que l'on a

$$\lim J_n^s(x) = Sf(x).$$

On voit aussi que, lorsque $\varphi_n(t, x)$ change de signe, mais satisfait aux conditions du numéro **7**, l'égalité ci-dessus a également lieu pour toute fonction continue à variation bornée.

9. Terminons enfin par une remarque simple sur l'approximation des fonctions à dérivée $m^{\text{ième}}$ bornée et sommable par des sommes $J_n(x)$ où les $A_n^k(x)$ sont des polynomes de degré n positifs.

Supposons que l'on ait une inégalité de la forme

$$(7) \qquad |Sf(x) - J_n(x)| \leqq M_m K_m(n) \qquad \left(\lim_{n \to \infty} K_m(n) = 0\right);$$

pour tout polynome $f(x)$, M_m désignant une borne supérieure de $|f^{(m)}(x)|$ et $K_m(n)$ une fonction de n (dépendant de m). Je dis qu'une inégalité analogue aura lieu pour toute fonction $f(x)$ à dérivée $m^{\text{ième}}$ bornée et sommable.

Dans cette classe de fonctions la meilleure approximation est de la forme $M_m \frac{K_m}{n^m}$, où K_m désigne une constante; la fonction $K_m(n)$ sera donc telle que

$$(8) \qquad K_m(n) > \frac{K'}{n^m},$$

où K' désigne une autre constante. D'autre part on sait que pour toute fonction de la classe il existe un polynome $P_n(x)$ de degré n tel qu'en posant

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

on ait

$$|R_n(x)| < M_m \frac{K_m}{n^m} \qquad \text{et} \qquad |P_n^{(m)}(x)| < K'' M_m,$$

K'' désignant encore une constante (1). Or, écrivons

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} P_n\left(\frac{k}{n}\right) A_n^k(x) + \sum_{k=0}^{n-1} R_n\left(\frac{k}{n}\right) A_n^k(x),$$

(1) Pour ces résultats, voir, par exemple, mon travail *Sur les meilleurs procédés d'approximation* (*Bulletin des Sciences mathématiques*).

par hypothèse on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{P}_n\left(\frac{k}{n}\right)\mathrm{A}_n^k(x) = \delta \mathrm{P}_n(x) + \theta \mathrm{K}'' \mathrm{M}_m \mathrm{K}_m(n) \qquad (|\theta| \leqq 1).$$

Comme $\sum_0^{n-1} \mathrm{A}_n^k(x)$ tend vers S, donc il existe une constante H telle que, pour n suffisamment grand, on ait

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{A}_n^k(x) < \mathrm{H}$$

donc

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{R}_n\left(\frac{k}{n}\right)\mathrm{A}_n^k(x)\right| \leqq \mathrm{H}\mathrm{M}_m \frac{\mathrm{K}_m}{n^m}.$$

De là, en vertu de (8),

$$|\mathrm{S}f(x) - \mathrm{J}_n(x)| \leqq \mathrm{K}''\mathrm{M}_m\mathrm{K}_m(n) + (\mathrm{H}+\mathrm{S})\mathrm{M}_m\frac{\mathrm{K}_m}{n^m} < \mathrm{M}_m \mathrm{L}\mathrm{K}_m(n),$$

où L désigne une nouvelle constante et cette inégalité exprime notre résultat.

Celui-ci est également vrai pour les fonctions périodiques et se démontre de la même façon lorsqu'on prend pour $\mathrm{A}_n^k(x)$ des polynomes trigonométriques et lorsqu'on suppose vraie l'inégalité (7), $f(x)$ désignant cette fois un polynome trigonométrique.

On remarquera que l'hypothèse essentielle dans cette démonstration est le fait que les opérations effectuées sont linéaires; il s'étend donc facilement à d'autres formes de polynomes d'approximation.

10. Fonctions à plusieurs variables. — Nous nous en tiendrons aux fonctions à deux variables $f(x, y)$ définies et continues pour $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$, et satisfaisant à des conditions qui seront précisées, mais ce que nous dirons s'étend, dans certains cas, aux fonctions bornées, définies et continues dans un ensemble ouvert contenu dans le carré précédent (il suffit de poser $f = 0$ en dehors de l'ensemble). On pourrait aussi étendre ces résultats aux fonctions continues sur des courbes, ou d'autres ensembles; mais l'exposé de telles généralisations ne semble pas nécessaire; on pourra former des exemples en se reportant au calcul des probabilités.

Premier énoncé. — *Soient*

$$\mathrm{A}_{m,n}^{k,l}(x, y) \qquad (k = 0, 1, \ldots, m-1;\ l = 0, 1, \ldots, n-1;\ m = 1, 2, \ldots;\ n = 1, 2, \ldots),$$

une suite de fonctions définies et continues pour : $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$, *et non* *négatives, posons*

$$S_{m,n}(x, y) = \sum_{\substack{k=0,\dots,m-1 \\ l=0,\dots,n-1}} A_{m,n}^{k,l}(x, y),$$

et supposons que

$$(9) \qquad \lim_{m,n \to \infty} S_{m,n}(x, y) = S \qquad (0 < S < \infty)$$

et que, quel que soit δ *positif, pour* x *et* y *quelconques, mais tels que* $0 < x < 1$, $0 < y < 1$

$$(10) \qquad \lim_{m,n \to \infty} \sum_{\substack{|k-mx| \leq m\delta \\ |l-nx| \leq n\delta}} A_{m,n}^{k,l}(x, y) = S,$$

alors on a

$$\lim_{m,n \to \infty} \left\{ \sum_{\substack{0 \leq k \leq m-1 \\ 0 \leq l \leq n-1}} f\left(\frac{k}{m}, \frac{l}{n}\right) A_{m,n}^{k,l}(x, y) \right\} = S f(x, y) \qquad (0 \leq x < 1,\ 0 < y < 1).$$

La démonstration est immédiate.

Deuxième énoncé. — *Les fonctions* $A_{m,n}^{k,l}(x, y)$ *peuvent changer de signe et, avec les hypothèses* (9) *et* (10), *nous admettons de plus :*

1° *l'existence d'une fonction finie* $\Phi(x, y)$ *telle que*

$$(11) \qquad \left| \sum_{\substack{k_1 \leq k \leq k_2 \\ l_1 \leq l \leq l_2}} A_{m,n}^{k,l}(x, y) \right| \leq \Phi(x, y) \qquad (0 \leq k_1 < k_2 \leq m-1;\ 0 \leq l_1 < l_2 \leq n-1);$$

2° *que, pour* δ *positif et* x, y *quelconques donnés, on a*

$$\lim_{m,n \to \infty} \left\{ \sum_{\substack{k_1 \leq k \leq k_2 \\ l_1 \leq l \leq l_2}} A_{m,n}^{k,l}(x, y) \right\} = 0,$$

pourvu que, pour tout système de valeurs k, l *figurant dans la somme ci-dessus, les deux inégalités*

$$|k - mx| \leq m\delta, \qquad |l - nx| \leq n\delta$$

ne soient pas vérifiées toutes les deux. Nous désignerons alors par $L_{m,n}(x, y; \delta)$ *la borne supérieure du module de ces sommes.*

Considérons alors une fonction $f(x, y)$ *définie et continue pour* $(0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1)$, *soit* M *une borne supérieure de son module, telle que la fonction* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$

existe pour presque tous les couples (x, y), *que cette dérivée soit sommable et qu'on ait de plus*

$$f(x, y) = \int_0^x \int_0^y \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} \, dx \, dy + \varphi(x) + \psi(y),$$

les fonctions $\varphi(x)$ *et* $\psi(y)$ *étant à variation bornée.*

Nous posons

$$\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} \right| dx \, dy \leqq \mathrm{K},$$

et nous désignons par L une borne supérieure de la variation de $\varphi(x)$ dans $(0 \leqq x \leqq 1)$ et de $\psi(y)$ dans $(0 \leqq y \leqq 1)$. Les inégalités

$$|f(x, y) - f(x', y)| \leqq \int_{x'}^{x} \int_0^y \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} \right| dx \, dy + |\varphi(x) - \varphi(x')| \qquad (x' < x),$$

$$|f(x, y) - f(x, y')| \leqq \int_0^{x} \int_{y'}^y \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} \right| dx \, dy + |\psi(y) - \psi(y')| \qquad (y' < y)$$

ont pour conséquence immédiate que, pour y donné, la fonction $f(x, y)$ est à variation bornée [nous en désignerons la variation par $\mathrm{V}_x(y)$] et que, pour x donné, la fonction de y : $f(x, y)$ est elle aussi à variation bornée, nous désignerons par $\mathrm{V}_y(x)$ sa variation; on a, de plus,

$$\mathrm{V}_x(y) \leqq \mathrm{K} + \mathrm{L}; \qquad \mathrm{V}_y(x) \leqq \mathrm{K} + \mathrm{L}.$$

Dans ce qui suit nous désignerons par V_α^β la variation d'une fonction d'une variable, x ou y, à variation bornée dans l'intervalle (α, β).

Écrivons

$$\sum_{\substack{0 \leqq k \leqq m-1 \\ 0 \leqq l \leqq n-1}} f\left(\frac{k}{m}, \frac{l}{n}\right) \mathrm{A}_{m,n}^{k,l}(x, y) = \mathrm{J}_{m,n}(x, y),$$

je dis que l'on a

$$\lim_{m, n \to \infty} \mathrm{J}_{m,n}(x, y) = f(x, y) \qquad (\text{pour } 0 < x < 1,\ 0 < y < 1).$$

Retranchant de f une constante convenable, nous voyons d'abord que l'on peut supposer $f(x, y) = 0$; en vertu de (10), il suffit alors de prouver que

$$\lim_{m, n \to \infty} \mathrm{J}_{m,n}(x, y) = 0.$$

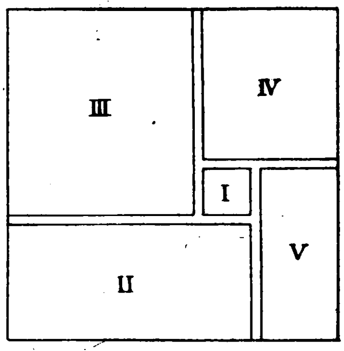
Nous décomposerons cette somme en cinq parties

$$\mathrm{J}_{m,n}(x, y) = \mathrm{J}_{m,n}^{\mathrm{I}} + \mathrm{J}_{m,n}^{\mathrm{II}} + \mathrm{J}_{m,n}^{\mathrm{III}} + \mathrm{J}_{m,n}^{\mathrm{IV}} + \mathrm{J}_{m,n}^{\mathrm{V}}$$

avec (*voir* figure)

$$J^{\mathrm{I}}_{m,n}=\sum_{\substack{|k-mx|\leqq m\delta\\ |l-ny|\leqq n\delta}},\qquad J^{\mathrm{II}}_{m,n}=\sum_{\substack{0\leqq k\leqq mx+m\delta\\ 0\leqq l< ny-n\delta}},\qquad J^{\mathrm{III}}_{m,n}=\sum_{\substack{0\leqq k< mx-m\delta\\ ny-n\delta\leqq l\leqq n-1}},$$

$$J^{\mathrm{IV}}_{m,n}=\sum_{\substack{mx-m\delta\leqq k\leqq m-1\\ ny+n\delta< l\leqq m-1}},\qquad J^{\mathrm{V}}_{m,n}=\sum_{\substack{mx+m\delta< k\leqq m-1\\ 0\leqq l\leqq ny+n\delta}},$$



et il nous suffira de démontrer que chacune de ces sommes tend vers zéro.

Considérons en général la somme

$$\sum_{\substack{0\leqq\varkappa\leqq\mu\\ 0\leqq\lambda\leqq\nu}} z_{\varkappa,\lambda}A_{\varkappa,\lambda}(x, y) \tag{12}$$

en posant

$$\sigma_{\varkappa,\lambda}=\sum_{\substack{0\leqq\varkappa'\leqq\varkappa\\ 0\leqq\lambda'\leqq\lambda}} A_{\varkappa',\lambda'}(x, y) \qquad (\sigma_{-1,\lambda'}=0,\ \sigma_{\varkappa',-1}=0 \text{ pour } -1\leqq\varkappa'\leqq\varkappa \text{ et } -1\leqq\lambda'\leqq\lambda),$$

on l'écrit

$$\sum_{\substack{0\leqq\varkappa\leqq\mu\\ 0\leqq\lambda\leqq\nu}} z_{\varkappa,\lambda}(\sigma_{\varkappa,\lambda}-\sigma_{\varkappa-1,\lambda}-\sigma_{\varkappa,\lambda-1}+\sigma_{\varkappa-1,\lambda-1}),$$

puis, en rassemblant les termes en $\sigma_{\varkappa,\lambda}$, elle devient

$$\sum_{\substack{0\leqq\varkappa\leqq\mu\\ 0\leqq\lambda\leqq\nu}} \sigma_{\varkappa,\lambda}(z_{\varkappa,\lambda}-z_{\varkappa+1,\lambda}-z_{\varkappa,\lambda+1}+z_{\varkappa+1,\lambda+1})$$

à condition de poser

$$z_{\mu+1,\lambda}=0, \qquad z_{\varkappa,\nu+1}=0.$$

Si l'on désigne par σ une constante telle que $|\sigma_{\varkappa,\lambda}|\leqq\sigma$, on voit immédiatement que cette somme est bornée en module par

$$\sigma\sum_{\substack{0\leqq\varkappa\leqq\mu\\ 0\leqq\lambda\leqq\nu}}|z_{\varkappa,\lambda}-z_{\varkappa+1,\lambda}-z_{\varkappa,\lambda+1}+z_{\varkappa+1,\lambda+1}|. \tag{13}$$

Pour notre objet, posons

$$z_{\varkappa+i,\lambda+i}=f\left(\frac{k+i}{m},\frac{l+i}{n}\right),$$

on aura, en général,

$$|z_{\varkappa,\lambda}-z_{\varkappa+1,\lambda}-z_{\varkappa,\lambda+1}+z_{\varkappa+1,\lambda+1}|=\left|\int_{\frac{k}{m}}^{\frac{k+1}{m}}\int_{\frac{l}{n}}^{\frac{l+1}{n}}\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}dx\,dy\right|\leqq\int_{\frac{k}{m}}^{\frac{k+1}{m}}\int_{\frac{l}{n}}^{\frac{l+1}{n}}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right|dx\,dy.$$

Le point (x, y) étant donné, choisissons δ suffisamment petit pour que le carré centré en ce point et de côtés 2δ parallèles aux axes, soit intérieur au carré $(0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1)$ et considérons la somme $J^1_{m,n}$; on peut l'écrire sous la forme (12) en prenant

$$\varkappa=k-[mx-m\delta];\qquad \lambda=l-[ny-n\delta],$$

on trouve, en effectuant la transformation précédente, et en vertu de (11) et de (13),

$$\begin{aligned}|J^1_{m,n}|\leqq\Phi(x,y)\Bigg\{&\int_{x-\delta}^{x+\delta}\int_{y-\delta}^{y+\delta}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\,\partial\eta}\right|d\xi\,d\eta+\sum_{\substack{|k-mx|\leqq m\delta\\ l=[ny+n\delta]}}\left|f\left(\frac{k}{m},\frac{l}{n}\right)-f\left(\frac{k+1}{m},\frac{l}{n}\right)\right|\\ &+\sum_{\substack{k=[nx+n\delta]\\ |l-ny|\leqq\delta n}}\left|f\left(\frac{k}{m},\frac{l}{n}\right)-f\left(\frac{k}{m},\frac{l+1}{n}\right)\right|+\left|f\left(\frac{[mx+m\delta]}{m},\frac{[ny+n\delta]}{n}\right)\right|\Bigg\};\end{aligned}$$

de là

$$\begin{aligned}J^1_{m,n}\leqq\Phi(x,y)\Bigg\{&\int_{x-\delta}^{x+\delta}\int_{y-\delta}^{y+\delta}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\,\partial\eta}\right|d\xi\,d\eta+V_{x-\delta}^{x+\delta}\left[f\left(\xi,\frac{[ny+n\delta]}{n}\right)\right]\\ &+V_{y-\delta}^{y+\delta}\left[f\left(\frac{[mx+m\delta]}{m},\eta\right)\right]+\left|f\left(\frac{[mx+m\delta]}{m},\frac{[ny+n\delta]}{n}\right)\right|\Bigg\}.\end{aligned}$$

Comme $\dfrac{\partial^2 f}{\partial\xi\,\partial\eta}$ est sommable, que $f(\xi,\eta)$ est continue et à variation bornée pour ξ donné et pour η donné, et que $f(x,y)=0$, on peut choisir δ suffisamment petit pour que chacun des termes de la somme du second membre soit aussi petit que l'on veut et, par suite, pour que $J^1_{m,n}$ soit également aussi petit que l'on veut.

La démonstration étant la même pour les quatres autres sommes, faisons-la pour $J^{\text{IV}}_{m,n}$; on la ramène à la forme (12) en posant

$$\varkappa = k - [mx - m\delta]; \qquad \lambda = l - [ny + n\delta] - 1,$$

puis, en opérant comme ci-dessus, on obtient

$$|J^{\text{IV}}_{m,n}| \leqq L_{m,n}(x, y; \delta)\left\{\int_{x-\delta}^{1}\int_{y+\delta}^{1}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\,\partial\eta}\right| d\xi\, d\eta + V^{1}_{x-\delta}\left[f\left(\xi, \frac{n-1}{n}\right)\right]\right.$$
$$\left. + V^{1}_{y+\delta}\left[f\left(\frac{m-1}{m}, \eta\right)\right] + \left|f\left(\frac{m-1}{m}, \frac{n-1}{n}\right)\right|\right\}.$$

Pour les autres sommes on doit intervertir le sens de variation de l'un des couples d'indices $\varkappa$ et k, λ et l, ou des deux; finalement on trouve

$$|J^{\text{II}}_{m,n} + J^{\text{III}}_{m,n} + J^{\text{IV}}_{m,n} + J^{\text{V}}_{m,n}| \leqq L_{m,n}(x, y; \delta)\{3K + 4L + 4M\}.$$

Or, δ étant donné, $L_{m,n}(x, y; \delta)$ tend vers zéro lorsque m et n augmentent indéfiniment, la somme précédente peut donc être rendue aussi petite que l'on veut, ce qui achève la démonstration.

On voit que l'hypothèse essentielle de la démonstration est que la quantité

$$\sum_{\substack{0 \leqq k \leqq m-1 \\ 0 \leqq l \leqq n-1}} |z_{k,l} - z_{k+1,l} - z_{k,l+1} + z_{k+1,l+1}| \qquad \left[z_{k,l} = f\left(\frac{k}{m}, \frac{l}{n}\right), \text{ ou zéro pour } k \geqq m \text{ ou } l \geqq n\right]$$

reste bornée; mais sous cette seule hypothèse la condition relative à $f(x, y)$ au voisinage de tout point du carré est un peu longue à énoncer.

L'hypothèse de la division du carré en rectangles égaux peut être facilement abandonnée pour un résultat plus général.

On a montré que $J_{m,n}(x, y)$ tend vers $f(x, y)$ lorsque m et n augmentent indéfiniment indépendamment l'un de l'autre, c'est pour cette raison que $f(x,y)$ doit jouir de propriétés différentielles assez restrictives. Des exemples de multiplicateurs possédant la propriété précédente sont donnés par

$$A^{k,l}_{m,n}(x, y) = B^{k}_{m}(x).C^{l}_{n}(y),$$

où les B^k_m et les C^l_n jouissent des propriétés indiquées au numéro 3 (2ᵉ énoncé). Dans ce qui suit nous ne traiterons donc pas en particulier d'exemples de multiplicateurs pour les fonctions de plusieurs variables.

II.

Applications.

11. Les applications que nous allons faire, relativement à des multiplicateurs positifs, proviennent en grande partie du deuxième théorème asymptotique du calcul des probabilités, dans le cas d'expériences dépendant toutes d'une même loi de probabilité.

Le schéma de Bernoulli donne le résultat de S. Bernstein : *pour toute fonction $f(x)$ définie et continue pour $0 \leqq x \leqq 1$, la suite de polynomes*

$$\sum_{k=0}^{k} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

tend uniformément vers $f(x)$ (¹).

Le deuxième théorème asymptotique du calcul des probabilités apprend que *la loi normale des écarts est un phénomène assez général*, nous sommes donc conduits d'abord à l'étude des multiplicateurs provenant de cette loi.

12. Soit $f(x)$ une fonction continue définie dans $-\infty < x < +\infty$, et telle que

$$|f(x)| < A e^{Bx^2}, \tag{14}$$

où A et B désignent deux constantes positives.

On démontre immédiatement qu'en posant

$$I_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-n(t-x)^2} dt,$$

n désignant un entier positif suffisamment grand pour que $I_n(x)$ ait un sens, on a

$$\lim_{n \to \infty} I_n(x) = f(x),$$

la convergence étant uniforme dans tout intervalle fini.

(¹) En remplaçant $f\left(\frac{k}{n}\right)$ par sa valeur approchée rationnelle à $\frac{1}{n}$ près, on a une suite de polynomes à coefficients rationnels tendant vers $f(x)$. L'hypothèse de la continuité n'est pas nécessaire, mais nous l'admettrons dans tout ce qui va suivre pour ne pas surcharger les énoncés.

Considérons alors la somme

$$\mathrm{J}_n(x)=\sqrt{\frac{n}{\pi}}\sum_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} e^{-n(t-x)^2}\,dt\,;$$

s'il n'y avait qu'un nombre fini de termes, notre théorème général (n° 3) trouverait son application, car les égalités

$$\sqrt{\frac{n}{\pi}}\sum_{|k-nx|\leqq n\delta}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} e^{-n(t-x)^2}\,dt=\sqrt{\frac{n}{\pi}}\int_{-[n\delta]}^{[n\delta]} e^{-nu^2}\,du=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\sqrt{n}[n\delta]}^{\sqrt{n}[n\delta]} e^{-v^2}\,dv$$

montrent que la somme du premier nombre tend uniformément vers 1, si petit que soit δ positif.

Dans le cas général, en écrivant

$$\mathrm{J}_n(x)-f(x)=\sqrt{\frac{n}{\pi}}\sum_{-\infty}^{+\infty}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right]\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} e^{-n(t-x)^2}\,dt,$$

pour démontrer que $\mathrm{J}_n(x)$ tend vers $f(x)$, on voit qu'il suffira de prouver que chacune des deux sommes

$$\sum_{k<n(x+\delta)} \quad \text{et} \quad \sum_{k>n(x+\delta)}$$

tend vers zéro. Or, pour la deuxième, par exemple, on a

$$\left|\sqrt{\frac{n}{\pi}}\sum_{k>n(x+\delta)}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right]\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} e^{-n(t-x)^2}\,dt\right|$$
$$\leqq\sqrt{\frac{n}{\pi}}\,|f(x)|\sum_{k>n(x+\delta)}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} e^{-n(t-x)^2}\,dt+\sqrt{\frac{n}{\pi}}\sum_{k>n(x+\delta)}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} e^{-n(t-x)^2}\,dt.$$

On voit d'abord, en se rapportant à (14), que

$$\sqrt{\frac{n}{k}}\,|f(x)|\sum_{k>n(x+\delta)}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} e^{-n(t-x)^2}\,dt<\frac{\mathrm{A}e^{\mathrm{B}x^2}}{\sqrt{\pi}}\int_{\delta n^{\frac{3}{2}}}^{+\infty} e^{-u^2}\,du<\frac{\mathrm{A}e^{\mathrm{B}x^2}}{2\sqrt{\pi}}\cdot\frac{e^{-n^3\delta^2}}{n^{\frac{3}{2}}\delta};$$

la première somme du second membre tend donc vers zéro lorsque n augmente indéfiniment; quant à la seconde, nous écrivons d'abord, en vertu de (14),

$$\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right|<\mathrm{A}e^{\mathrm{B}x^2} \quad \text{pour } k<0 \quad \text{et} \quad f\left(\frac{k}{n}\right)<\mathrm{A}e^{\mathrm{B}\left(\frac{k}{n}\right)^2} \quad \text{pour } k\geqq 0,$$

il vient alors

$$\sqrt{\frac{n}{\pi}} \sum_{k>n(x+\delta)} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} e^{-n(t-x)^2}\,dt$$

$$< \sqrt{\frac{n}{\pi}} \mathrm{A} e^{\mathrm{B}x^2} \sum_{\substack{k>n(x+\delta)\\ k<0}} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} + \sqrt{\frac{n}{\pi}} \sum_{\substack{k>n(x+\delta)\\ k\geqq 0}} \mathrm{A} e^{\mathrm{B}\left(\frac{k}{n}\right)^2} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}$$

d'où

$$\sqrt{\frac{n}{\pi}} \sum_{k>n(x+\delta)} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} < \frac{\mathrm{A}e^{\mathrm{B}x^2}}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{e^{-n^3\delta^2}}{n^{\frac{3}{2}}\delta} + \frac{\mathrm{A}}{\sqrt{\pi}} \int_{\max(\sqrt{n}\,\delta,\, -\sqrt{n}\,x)}^{+\infty} e^{-u^2+\mathrm{B}\left(\frac{u}{\sqrt{n}}+x\right)^2} du,$$

et sous cette forme le résultat apparait. La démonstration est analogue pour l'autre somme et finalement *nous obtenons*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{J}_n(x) = f(x),$$

la convergence étant uniforme dans tout intervalle fini.

Examinons le cas où $f(x)$ est uniformément continue dans $(-\infty < x < +\infty)$ [ce qui entraîne $f(x) = \mathrm{O}(x)$]; en introduisant le module de continuité $\omega(\theta)$ de cette fonction, on voit immédiatement que, quels que soient x et x',

$$|f(x) - f(x')| \leqq \omega(\theta)\left(1 + \frac{|x - x'|}{\theta}\right),$$

de là

$$|\mathrm{J}_n(x) - f(x)| \leqq \omega(\theta) \sqrt{\frac{n}{\pi}} \sum_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{\left|\frac{k}{n} - x\right|}{\theta} + 1 \right\} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} e^{-n(t-x)^2}\,dt$$

$$\leqq \omega(\theta) \left\{ 1 + \frac{2}{\theta} \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_0^{\infty} u e^{-nu^2}\,du \right\} = \omega(\theta)\left(1 + \frac{1}{\theta\sqrt{n\pi}}\right)$$

et enfin, en prenant $\theta = \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$|\mathrm{J}_n(x) - f(x)| < 2\,\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

la convergence de $\mathrm{J}_n(x)$ vers $f(x)$ est donc uniforme dans $(-\infty < x < +\infty)$.

13. Considérons à présent la somme

$$\mathrm{K}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \sum_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) e^{-n\left(\frac{k}{n}-x\right)^2}.$$

On a, ξ_k désignant un nombre convenable,

$$|J_n(x) - K_n(x)| \leqq \frac{2}{\sqrt{n\pi}} \sum_{-\infty}^{+\infty} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) \right| |\xi_k - x| e^{-n(\xi_k - x)^2} \qquad \left(\frac{k}{n} \leqq \xi_k \leqq \frac{k+1}{n}\right).$$

Décomposons, comme précédemment, la somme ci-dessus en trois parties

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} = \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| \leqq \delta} + \sum_{\frac{k}{n} - x > \delta} + \sum_{\frac{k}{n} - x < -\delta}.$$

Remarquons que, pour δ suffisamment petit, on a, quel que soit x,

$$A e^{Bx'^2} < 2 A e^{2Bx^2} \qquad \text{pour } |x - x'| < \delta$$

et que la fonction ue^{-u^2} croît, pour u positif jusqu'à son maximum $\frac{1}{\sqrt{2e}}$, atteint pour $u = \frac{1}{\sqrt{2}}$, pour décroître ensuite jusqu'à zéro; il vient alors, pour la première somme,

$$\frac{2}{\sqrt{n\pi}} \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| \leqq \delta} \leqq \frac{4A}{\sqrt{n\pi}} e^{2Bx^2} \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| \leqq \delta} \frac{1}{\sqrt{2en}} \leqq \frac{8 A e^{2Bx^2}}{\sqrt{2e\pi}} \cdot \delta.$$

Quant à la deuxième somme, lorsque $n > \frac{1}{\delta}$ et $n > 2B$, on trouve

$$\frac{2}{\sqrt{n\pi}} \sum_{\frac{k}{n} - x > 0} \leqq \frac{2A}{\sqrt{n\pi}} \sum_{\frac{k}{n} - x > \delta} e^{B\left(\frac{k}{n}\right)^2} \left(\frac{k}{n} - x\right) e^{-n\left(\frac{k}{n} - x\right)^2} \leqq 2A \sqrt{\frac{n}{\pi}} \sum_{\frac{k}{n} - x > \delta} e^{B\left(\frac{k}{n}\right)^2} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} (t - x) e^{-n(t-x)^2} dt$$

$$\leqq 2A \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{Bx^2} \int_0^{+\infty} t e^{-nt^2} dt + \frac{2A}{\sqrt{n\pi}} \int_{\max\left(x + \delta - \frac{1}{n}, 0\right)}^{\infty} (t - x) e^{B\left(t + \frac{1}{n}\right)^2 - n(t - x)^2} dt$$

$$\leqq \frac{A e^{Bx^2}}{\sqrt{n\pi}} + \frac{4A}{\sqrt{n\pi}} \int_0^{+\infty} u e^{-nu^2 + 2B(u+x)^2} du \leqq \frac{A e^{Bx^2}}{\sqrt{n\pi}} + \frac{4A}{\sqrt{n\pi}} \int_0^{+\infty} e^u e^{-nu^2 + 2B(u+x)^2} du$$

$$\leqq \frac{A e^{Bx^2}}{\sqrt{n\pi}} + \frac{4A}{\sqrt{n\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nu^2 + 2B(u+x)^2 + u} du = \frac{A e^{Bx^2}}{\sqrt{n\pi}} + \frac{4A}{\sqrt{n(n - 2B)}} e^{2Bx^2 + \frac{(2Bx+1)^2}{n - 2B}}.$$

On trouve une borne analogue pour la troisième somme et ainsi, nous voyons que $J_n - K_n$ tend vers zéro uniformément dans tout intervalle fini; *c'est dire que l'on a*

$$\lim_{n \to \infty} K_n(x) = f(x)$$

uniformément dans tout intervalle fini.

14. Si, d'autre part, on considère la somme

$$\mathrm{L}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \sum_{-n^2}^{+n^2} f\left(\frac{k}{n}\right) e^{-n\left(\frac{k}{n}-x\right)^2},$$

on voit que, pour $|x| < \frac{n}{2}$, on a, pour $|k| > n^2$,

$$\left|\frac{k}{n} - x\right| > \left|\frac{k}{2n}\right|,$$

d'où

$$|\mathrm{K}_n(x) - \mathrm{L}_n(x)| \leqq 2 \sum_{n^2+1}^{\infty} \mathrm{A}\, e^{\mathrm{B}\left(\frac{k}{n}\right)^2 - n\left(\frac{k}{2n}\right)^2}$$

et le second membre tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$, donc

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{L}_n(x) = f(x)$$

uniformément dans tout intervalle fini.

Il suffit enfin de remplacer dans chaque terme l'exponentielle par le début de son développement en série entière jusqu'à un terme d'ordre suffisamment grand (par exemple jusqu'à n^4) pour avoir une suite de polynomes $\mathrm{P}_n(x)$ telle que

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=-n^2}^{n^2} f\left(\frac{k}{n}\right) \mathrm{P}_n\left(\frac{k}{n} - x\right) = f(x), \qquad \mathrm{P}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \sum_{h=0}^{n^4} \frac{(-nx^2)^h}{h!}$$

uniformément dans tout intervalle fini.

15. J'ai tenu à traiter directement cet exemple d'une façon détaillée, car les exemples qui proviennent de lois de probabilités tendant vers la loi normale donnent lieu à des considérations à peu près identiques, quoique notablement plus simples lorsqu'il s'agit de fonctions continues dans un intervalle fini.

Parmi eux citons d'abord le noyau

$$\sqrt{\frac{n}{\pi}}(1 - t^2)^n,$$

pour lequel on a, d'après la formule de Wallis,

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_0^l (1 - t^2)^n \, dt = \frac{1}{2} \qquad (0 < l \leqq 1).$$

Pour une fonction $f(x)$ continue pour $0 \leqq x \leqq 1$, si l'on pose

$$\mathrm{P}_{2n}(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \sum_{0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} [1 - (t - x)^2]^n \, dt,$$

on aura en conséquence (¹)

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}_{2n}(x) = f(x) \qquad (0 < x < 1).$$

Posant aussi

$$\mathrm{Q}_{2n}(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \sum_{0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\left[1 - \left(\frac{k}{n} - x\right)^2\right]^n,$$

on aura également

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Q}_{2n}(x) = f(x) \qquad (0 < x < 1);$$

ceci se démontre en appliquant le résultat du numéro **8** (moyennant la remarque $1 - t < e^{-t}$ pour $0 \leq t \leq 1$) et en faisant des évaluations analogues aux précédentes.

Le noyau

$$\sqrt{\frac{n}{\pi}} \frac{1}{(1+t^2)^n}$$

(qui correspond à une loi de Cauchy) traité par des méthodes analogues donne un procédé régulier d'approximation, au moyen de fonctions rationnelles, ou même de polynomes, des fonctions continues pour toutes les valeurs de x (ou dans un segment) et satisfaisant à certaines conditions de croissance.

La loi de Poisson, sans transformation préalable, donne le résultat simple ci-dessous :

Soit $f(x)$ une fonction définie et continue pour $0 \leq x < +\infty$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) e^{-nx} \frac{(nx)^k}{k!} \right\} = f(x) \qquad (0 \leq x < +\infty)$$

uniformément dans tout intervalle fini, pourvu que $f(x)$ satisfasse à une condition de croissance de la forme

$$|f(x)| < \mathrm{A}\, e^{\mathrm{B}x}.$$

Mais il convient de remarquer que ce résultat se ramène aux précédents, car la loi de Poisson n'est pas stable, mais se stabilise au voisinage de la loi normale.

(¹) Pour $x = 0$ et $x = 1$ la limite de $\mathrm{P}_{2n}(x)$ est seulement $\frac{1}{2} f(x)$. On obtient des polynomes $\mathrm{P}_{2n}(x)$ et $\mathrm{Q}_{2n}(x)$ qui ne renferment pas π en remplaçant $\sqrt{\frac{n}{\pi}}$ par l'inverse de $\int_{-1}^{+1} (1-t^2)^n\, dt$.

Signalons enfin le noyau bien connu

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{\pi}}\cos^{2n}\frac{\varphi-x}{2} \qquad (0 \leqq x \leqq 2\pi)$$

qui, par la considération de l'intégrale

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{\pi}}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos^{2n}\frac{\varphi-x}{2}\,d\varphi,$$

permet de démontrer que toute fonction périodique continue peut être approchée d'aussi près qu'on le veut par un polynome trigonométrique. Pour nous, il fournit les polynomes d'approximation (¹)

$$\frac{1}{n}\,\frac{2.4\ldots 2n}{1.3\ldots 2n-1}\sum_0^{n-1} f\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\left[\frac{1+\cos\left(\frac{2k\pi}{n}-x\right)}{2}\right]^n,$$

qui tendent uniformément vers $f(x)$.

16. Des exemples vraiment distincts des précédents ne peuvent provenir que de lois ne tendant pas vers la loi normale : c'est le cas des lois stables dont nous n'examinerons qu'un exemple, *la loi de Cauchy*, et nous ne citerons qu'un cas se rattachant à cette loi, celui du noyau

$$\frac{1}{\pi}\,\frac{y}{y^2+t^2},$$

où y désigne un paramètre.

On sait que, pour toute fonction $f(x)$ continue et bornée dans $(-\infty < x < +\infty)$, l'expression

$$U(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} y\,\frac{f(t)\,dt}{y^2+(x-t)^2}$$

représente la fonction harmonique définie dans le demi-plan $y > 0$ et telle que

$$U(x, 0) = f(x).$$

Marquons sur l'axe des x une suite de points $x_k(-\infty < k < +\infty;\ x_k < x_{k+1})$, n'ayant aucun point d'accumulation à distance finie et telle que l'oscillation de $f(x)$ soit, dans chacun des intervalles (x_k, x_{k+1}) inférieure à un nombre ε positif donné; soit θ_k l'angle sous lequel on voit le segment (x_k, x_{k+1}) du point

---

(¹) On a remplacé $\sqrt{\frac{n}{\pi}}$ par une constante plus favorable qui, pour $f(x) = 1$, donne le polynome d'approximation $1 + \frac{\cos nx}{C_{2n}^n}$.

(x, y) du demi-plan $y > 0$; alors la fonction harmonique

$$V(x, y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f(x_k)\theta_k$$

diffère de U de moins de ε dans tout le demi-plan.

Tel est le résultat d'interpolation, bien connu et à peu près évident, auquel nous conduit cette loi de probabilité; on peut s'appuyer sur lui pour obtenir des suites de fonctions rationnelles ou de polynomes tendant vers $f(x)$ dans tout intervalle fini.

17. Comme multiplicateurs à signe variable, nous ne signalerons que ceux provenant du *noyau de Fourier* et n'examinerons que les multiplicateurs provenant du noyau de Dirichlet pour les fonctions périodiques.

Pour simplifier, considérons une fonction continue à variation bornée dans un intervalle fini $(0, 2\pi)$ par exemple, on sait que

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\frac{\sin 2\pi n(t-x)}{t-x}\,dt$$

tend vers $f(x)$ lorsque n augmente indéfiniment $(0 < x < 2\pi)$: c'est le résultat classique pour le noyau de Fourier.

Posons maintenant

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\sum_0^{n-1} f\left(\frac{2\pi k}{n}\right)\int_{\frac{2\pi k}{n}}^{\frac{2\pi(k+1)}{n}} \frac{\sin n(t-x)}{t-x}\,dt,$$

on a aussi (¹)

$$\lim_{n\to\infty} J_n(x) = f(x) \qquad (\text{uniformément pour } 0 < x < 2\pi).$$

Les multiplicateurs satisfont en effet aux conditions du numéro **3** (2ᵉ énoncé) et à celle du numéro **4**, en vertu des propriétés bien connues du noyau de Fourier.

18. Le raisonnement classique permettant de passer du noyau de Fourier à celui de *Dirichlet* nous montre aussi que, pour une fonction périodique, de période 2π, continue et à variation bornée $f(x)$, *les sommes* (²)

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\sum_0^{n-1} f\left[\frac{(2k+1)\pi}{n}\right]\int_{\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{2(k+1)\pi}{n}} \frac{\sin\left[(2n+1)\frac{t-x}{2}\right]}{\sin\frac{t-x}{2}}\,dt$$

(¹) Pour $x = 0$ et $x = 2\pi$, $J_n(x)$ tend vers $\frac{1}{2}f(x)$.

(²) Nous avons mis $f\left[\frac{(2k+1)\pi}{n}\right]$ dans $S_n(x)$ pour des raisons de symétrie, mais ce nombre peut être remplacé par tout autre compris entre $f\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$ et $f\left[\frac{2(k+1)\pi}{n}\right]$.

tendent uniformément vers $f(x)$; d'ailleurs, sur ces multiplicateurs, les conditions du numéro **3** (2^e énoncé) et du numéro **4** peuvent se vérifier sans peine directement.

Les fonctions $S_n(x)$ sont des polynomes trigonométriques d'ordre $n-1$.

$$S_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left[\frac{(2k+1)\pi}{n}\right] + \frac{1}{\pi}\sum_{p=1}^{n-1}\frac{2}{p}\sin p\frac{\pi}{n}\left\{\sum_{k=0}^{n-1} f\left[\frac{(2k+1)\pi}{n}\right]\cos p\left[\frac{(2k+1)\pi}{n} - x\right]\right\}.$$

On pourrait faire sur ces multiplicateurs une *théorie de la convergence locale* calquée sur celle de la série de Fourier; mais profitant des résultats acquis pour cette série, nous nous contenterons de remarquer que la différence entre $S_n(x)$ et la somme des $(2n+1)$ premiers termes de la série de Fourier est inférieure en module à

$$\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right| dt = \omega\left(\frac{\pi}{n}\right)\Lambda_n,$$

où $\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)$ désigne le module de continuité dans un intervalle d'amplitude $\frac{\pi}{n}$.

On sait que les constantes Λ_n sont de l'ordre de $\log n$; si donc on a

$$\omega\left(\frac{\pi}{n}\right) = o\left(\frac{1}{\log n}\right),$$

la série de Fourier et les polynomes S_n convergeront en même temps vers $f(x)$; or on sait que si

$$\int_0 \frac{\omega(h)}{h}\,dh$$

converge, la série de Fourier converge vers $f(x)$, il en est donc de même des $S_n(x)$ pourvu que $\omega(h)$ satisfasse aux deux conditions ci-dessus.

En particulier les polynomes $S_n(x)$ tendent vers $f(x)$ lorsque cette fonction satisfait à *une condition de Lipschitz*.

Remarquons enfin que le polynome $S_n(x)$ est la somme des $(2n+1)$ premiers termes de la série de Fourier de la fonction égale à $f\left[\frac{(2k+1)\pi}{n}\right]$ dans l'intervalle $\left[\frac{2k\pi}{n}, \frac{2(k+1)\pi}{n}\right]$; mais, ni la division en parties égales, ni la division en n parties ne sont obligatoires. La division en plus de n parties donne au moins la convergence dans les mêmes conditions que ci-dessus, mais, pour une fonction satisfaisant à une condition de Lipschitz d'ordre α par exemple, il suffit de diviser le cercle en k_n parties, le quotient $\frac{k_n^\alpha}{\log n}$ augmentant indéfiniment avec n, pour obtenir la convergence.

Je n'examinerai pas si la réciproque de cette proposition est exacte, ni dans quelle mesure on peut l'étendre à d'autres familles de polynomes, ni s'il faut faire des hypothèses plus larges pour obtenir cette réciproque; si celle-ci était exacte il y aurait là un caractère intéressant des fonctions de cette classe.

19. Les divers noyaux employés dans la théorie des séries trigonométriques nous donneraient d'autres multiplicateurs; voici un dernier exemple, se rattachant au *noyau de Féjer*, la démonstration est semblable à celle du théorème de Féjer.

On sait que

$$\left[\frac{\sin n\frac{t-x}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}}\right]^2$$

est un polynome trigonométrique d'ordre $n-1$ et l'on a

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{\sin n\frac{\frac{2k\pi}{n}-x}{2}}{\sin\frac{\frac{2k\pi}{n}-x}{2}}\right]^2=n^2;$$

$f(x)$ désignant alors une fonction continue périodique, de période 2π, considérons la suite de polynomes trigonométriques

$$T_n(x)=\frac{1}{n^2}\sum_0^{n-1}f\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\left[\frac{\sin n\frac{\frac{2k\pi}{n}-x}{2}}{\sin\frac{\frac{2k\pi}{n}-x}{2}}\right]^2.$$

On a, en désignant par M une borne supérieure du module de $f(x)$,

$$|T_n(x)-f(x)|\leqq\frac{\omega(\delta)}{n^2}\sum_{\left|\frac{2k\pi}{n}-x\right|\leqq\delta}\left[\frac{\sin n\frac{\frac{2k\pi}{n}-x}{2}}{\sin\frac{\frac{2k\pi}{n}-x}{2}}\right]^2+\frac{2M}{n^2}\sum_{\left|\frac{2k\pi}{n}-x\right|>\delta},$$

d'où

$$|T_n(x)-f(x)|\leqq\omega(\delta)+\frac{2M}{n^2}\sum_{\left|\frac{2k\pi}{n}-x\right|>\delta}\frac{1}{\left[\sin\frac{\frac{2k\pi}{n}-x}{2}\right]^2}\leqq\omega(\delta)+\frac{2M}{n}\frac{1}{\sin^2\frac{\delta}{2}}.$$

Choisissant alors δ suffisamment petit pour que $\omega(\delta)$ soit inférieur à ε donné, et ensuite n suffisamment grand pour que

$$\frac{2M}{n}\frac{1}{\sin^2\frac{\delta}{2}} < \varepsilon,$$

on aura

$$|T_n(x) - f(x)| < 2\varepsilon,$$

la convergence de $T_n(x)$ vers $f(x)$ est donc uniforme.

Regardés comme positifs, ces multiplicateurs se rattachent à la *loi de probabilité de Cauchy*.

20. Si l'on forme la somme $S_n(x)$ du numéro **18** et la somme $T_n(x)$ ci-dessus pour $\cos px$ et $\sin px$ respectivement, on trouve que l'erreur est de l'ordre de $K\frac{p}{n}$, où K désigne une constante. En appliquant le résultat du numéro **9**, nous voyons donc que, pour une fonction ayant une dérivée m^e bornée, ou pour une fonction analytique, l'ordre de grandeur de l'erreur commise sera $\frac{1}{n}$ au moins, c'est-à-dire que des hypothèses plus restrictives que celle de l'existence d'une dérivée première bornée, n'amènent aucune amélioration dans l'ordre de grandeur de l'approximation.

Ce phénomène, qu'on peut appeler l'*égale convergence dans le champ des fonctions analytiques*, semble être à peu près général pour les expressions considérées ici; il serait intéressant d'en trouver la raison.

Je ne veux pas dire que l'approximation soit toujours de l'ordre de $\frac{1}{n}$ pour les fonctions analytiques; j'ai même démontré l'existence de multiplicateurs polynomiaux pour lesquels il est de l'ordre de $\frac{1}{n^m}$ pour les fonctions à dérivée $m^{\text{ième}}$ bornée, c'est-à-dire de l'ordre de la meilleure approximation dans la classe [*voir* mon travail : *Sur l'interpolation* (*Journ. de Math.*, 1940)], mais il semble que la valeur de ces procédés soit vite saturée.