JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

OLIVIER COSTA DE BEAUREGARD

Sur les équations fondamentales, classiques, puis relativistes, de la dynamique des milieux continus

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 23 (1944), p. 211-217.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1944_9_23__211_0>

Sur les équations fondamentales, classiques, puis relativistes, de la dynamique des milieux continus ;

PAR OLIVIER COSTA DE BEAUREGARD.

L'établissement de la dynamique relativiste semble généralement moins aisé et plus arbitraire que celui de l'électromagnétisme relativiste. Selon nous, cette circonstance tient à ce qu'on prend les équations fondamentales de la dynamique sous la forme *finie* qui convient au cas du point matériel, tandis qu'on fait dériver l'électromagnétisme des équations *densitaires* de Maxwell ou de Lorentz; nous avons montré que la dynamique relativiste peut être établie d'une manière remarquablement simple et naturelle à partir des équations fondamentales écrites pour le cas des milieux continus ([1]).

Il se trouve que les équations fondamentales ainsi écrites ne sont généralement pas données dans les traités classiques de dynamique des fluides; elles constituent cependant la transcription directe des équations bien connues du point, dont elles peuvent être déduites par des raisonnements très simples, et avec une très grande généralité. Nous avons cru intéressant, dans la première Partie de notre étude, de présenter ces raisonnements et leurs résultats d'une manière cohérente et systématique ([2]).

Dans une seconde Partie, nous rappelons notre manière de fonder la dynamique relativiste, en insistant, davantage que dans notre travail antérieur, sur certaines questions de détail. Pour clore notre travail, nous rappelons succinctement comment on peut déduire la dynamique relativiste du point de celle des milieux continus, ce qui, aux acquisitions relativistes près, nous ramène à notre point de départ. Il nous paraît que ces quelques réflexions très simples peuvent mettre en lumière certains aspects des rapports de la dynamique relativiste avec la dynamique newtonienne.

Je prie M. H. Villat de trouver ici mes bien vifs remerciements pour avoir accepté cette brève étude au *Journal de Mathématiques*.

([1]) *La relativité restreinte et la première mécanique broglienne*, p. 49. Paris, Gauthier-Villars, 1944.

([2]) Nous ne faisons qu'expliciter et systématiser des raisonnements de G. Kirchhoff, *Mécanique*, 15e Leçon; Leipzig, 1897, repris par M. von Laue, *Relativité*, trad. G. Létang, t. I, p. 243 et p. 319; Paris, Gauthier Villars, 1922.

1. Mécanique newtonienne : sur une forme des équations fondamentales de la dynamique des milieux continus. — Commençons par établir une formule générale qui nous servira à plusieurs reprises. Soient $\vec{v}$ ou $v^u (u, v, w = 1, 2, 3)$ le champ de vitesses d'un fluide à l'instant t, Φ une fonction quelconque attachée à une *molécule* du fluide (point géométrique suivi dans son mouvement), δu un volume matériel infinitésimal suivi dans son mouvement; en fait, Φ désignera l'une des diverses densités à prendre en considération; quant au volume δu, on supposera essentiellement que toutes ses dimensions restent infinitésimales au cours du mouvement. Les accroissements de la fonction Φ et du volume matériel δu pendant le temps infinitésimal dt ont respectivement pour expressions

$$d\Phi = (\partial^u \Phi . v_u + \partial^t \Phi)\, dt,$$

$$d(\delta u) = \operatorname{div}.\vec{v}.\delta u\, dt \equiv \partial^u v_u.\delta u\, dt;$$

nous écrivons, pour alléger, ∂^u pour $\frac{\partial}{\partial x_u}$, ∂^t ou ∂_t pour $\frac{\partial}{\partial t}$, et nous utilisons la convention de sommation sur indices muets. Combinées entre elles, ces deux relations donnent la formule générale utile

$$\boxed{d(\Phi\, \delta u) = \{ \partial^u(\Phi v_u) + \partial^t \Phi \}\, \delta u\, dt.} \tag{1}$$

Une application immédiate de cette formule fournit la classique *équation de continuité*. Soit δm la masse de la gouttelette δu; elle est, d'après le *principe de conservation de la masse* admis en mécanique newtonienne, rigoureusement invariante. Par définition de la densité massique ρ, l'on a

$$\rho\, \delta u = \delta m; \tag{2}$$

en tenant compte de ce qui vient d'être dit et de la formule (1), on écrit immédiatement

$$\boxed{\partial^u(\rho v_u) + \partial^t(\rho) = 0.} \tag{3}$$

Prenons maintenant les équations fondamentales, bien connues, de la dynamique du point ([3])

$$\boxed{\vec{F}\, dt = d\left(m\vec{v}\right), \qquad \vec{F}.d\mathrm{M} = d\mathrm{W};} \tag{4}$$

les équations que nous voulons établir sont la stricte transposition de ces équations en langage de milieux continus. Appelons $\delta\vec{F}$ la force pondéromotrice totale appliquée à la gouttelette δu, δW le travail qu'elle lui a fourni depuis

---

([3]) Nous prenons la forme (4_1), mieux adaptée à nos desseins que la forme, équivalente en mécanique newtonienne,

$$\vec{F}\, dt = m\, d\vec{v}.$$

un temps origine arbitraire, et définissons les densités correspondantes $\vec{f}$ et w par les relations

$$\delta\vec{F} = \vec{f}\,\delta u, \qquad \delta W = w\,\delta u; \tag{5}$$

les équations fondamentales (4) se transcrivent suivant [1]

$$\boxed{\vec{f}\,\delta u\, dt = d(\rho\vec{v}\,\delta u), \qquad (\vec{f}.\vec{v})\,\delta u\, dt = d(w\,\delta u).} \tag{6}$$

Ces équations (6), remarquons-le, sont établies à l'aide des seules définitions de la force, du travail et des densités correspondantes; elles ne préjugent rien, par exemple, sur le fait que les forces pondéromotrices soient d'origine volumique ou superficielle, ou qu'elles dérivent ou non d'un potentiel scalaire ou vecteur. Elles conviennent au milieu continu le plus général, visqueux ou non, compressible ou non, en régime variable ou non; dans le cas général du régime variable, la *densité de puissance* $\vec{f}.\vec{v}$ se calcule le long de la trajectoire d'une *molécule*, qui est l'enveloppe d'une famille à 1 paramètre de lignes de courant $\vec{v}(t)$.

Multiplions scalairement l'équation (6_1) par $\vec{v}$, et faisons sortir de la ( ) des seconds membres des (6) la quantité constante $\rho\,\delta u$; il vient ainsi, suivant une remarque que nous devons à M. E. Durand, la relation

$$\vec{v}\, d\vec{v} = d\left(\frac{w}{\rho}\right)$$

valable dans le cas le plus général, et qui donne par intégration [2],

$$\boxed{\frac{w}{\rho} = \frac{1}{2}v^2 + \text{const.}} \tag{7}$$

Enfin, appliquant la formule générale (1) aux seconds membres des (6), et divisant leurs deux membres par $\delta u\, dt$, il vient les équations générales annoncées

$$\vec{f} = \partial''(\rho\vec{v}v_u) + \partial'(\rho\vec{v}),$$
$$\vec{f}.\vec{v} = \partial''(wv_u) + \partial'(w),$$

---

[1] En mécanique newtonienne, d'après le principe de conservation de la masse, l'équation (6_1) s'écrit d'une façon équivalente

$$\vec{f}.\delta u\, dt = \rho\,\delta u . d\vec{v}.$$

[2] Dans le cas particulier d'un fluide incompressible, cette relation s'écrit d'une façon équivalente

$$w = \frac{1}{2}\rho v^2 + \text{const.}$$

qui s'écrivent de manière équivalente

$$\boxed{\begin{aligned} f_u &= \partial^v(\rho v_u v_v) + \partial^t(\rho v_u), \\ \vec{f}.\vec{v} &= \partial^u.(\varpi v_u) + \partial^t(\varpi); \end{aligned}} \tag{8}$$

on y voit figurer un *tenseur d'inertie*, du second rang et symétrique, $\rho v_u v_v$, qui fournit à la densité de force d'inertie une contribution du type « élastique »; ce tenseur a d'ailleurs une forme dégénérée, étant le produit général d'un vecteur par lui-même.

2. Établissement, par transcription directe des équations précédentes, de la dynamique relativiste. — Faisons abstraction des raisonnements et des formules qui nous ont permis d'établir les équations (8), et considérons *a priori* ces équations comme les équations fondamentales générales de la dynamique des milieux continus; nous allons voir qu'elles se laissent, au même titre que les équations densitaires de l'électromagnétisme de Maxwell ou de Lorentz, transcrire directement en langage d'Univers de Minkowski.

Nous savons, d'après la cinématique relativiste, que l'opérateur

$$\partial^4 = \frac{1}{ic}\partial^t$$

doit être associé aux trois ∂^u pour constituer le quadri-opérateur différentiel $\partial^i (i, j, k, l = 1, 2, 3, 4)$; et, d'après l'électromagnétisme relativiste, que la *densité de puissance*

$$f^4 = \frac{i}{c}\vec{f}.\vec{v}$$

doit être associée aux trois f^u pour constituer un quadrivecteur f^i. Il suit nécessairement de là que les seize (   ) des seconds membres des (8) constituent un tenseur T^{ij}, dont les composantes ont pour expressions respectives

$$\boxed{\begin{gathered} T^{uv} = T^{vu} = \rho v^u v^v; \\ T^{u4} = ic\rho v^u, \qquad T^{4u} = \frac{i}{c}\varpi v^u; \\ T^{44} = -\varpi; \end{gathered}} \tag{9}$$

grâce à la définition de ce tenseur, les (8) se condensent sous la forme

$$\boxed{f^i = \partial_j T^{ij},} \tag{10}$$

qui est l'équation fondamentale de la dynamique relativiste.

Ses 9 composantes T^{uv} étant essentiellement symétriques, le tenseur T^{ij} est nécessairement symétrique; on doit donc avoir l'égalité

$$T^{u4} = T^{4u},$$

d'où l'on conclut la loi relativiste de *proportionnalité universelle entre la masse et l'énergie* :

$$\boxed{w = c^2 \rho.} \tag{11}$$

En relativité, les densités de masse ρ et d'énergie w ne sont plus invariantes avec la vitesse; d'après la cinématique de Minkowski, leur double variance entraîne, entre leurs valeurs générales et leurs *valeurs de repos* ou *valeurs propres* ρ_0 et w_0, les relations

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 - \beta^2}, \qquad w = \frac{w_0}{1 - \beta^2};$$

$\left(\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c},\ \beta^2 \leq 1\right)$. La *trace*, essentiellement négative, du tenseur T^{ij} s'exprime simplement en fonction, par exemple de ρ ou de ρ_0, suivant

$$\boxed{T_i^i = \rho(v^2 - c^2) = -\rho_0 c^2.} \tag{12}$$

Il est intéressant de récapituler les formules de mécanique newtonienne des milieux continus antérieures aux (8), et de voir ce qu'elles deviennent en relativité. L'ancienne équation de conservation de la masse (3) est maintenant pourvue d'un second membre, non nul mais très petit, comme on le voit en portant la loi relativiste (11) dans la quatrième des (8) :

$$\boxed{\partial^u(\rho v_u) + \partial^t(\rho) = \frac{1}{c^2}\vec{f}.\vec{v}.} \tag{13}$$

Cette nouvelle loi exprime que le travail des forces pondéromotrices contribue à la masse du fluide; la valeur locale de cette contribution est d'ailleurs *relative* au système galiléen de référence; en particulier, elle s'annule dans le repère galiléen localement et instantanément entraîné $\left(\vec{v} = 0\right)$.

Pour que les (6) aient une validité tensorielle quadridimensionnelle, l'expression $\delta u\, dt$ doit être assimilée à l'élément invariant de volume d'Univers quadridimensionnel. Or, en vertu de la loi relativiste de *contraction des longueurs*, la valeur générale du volume matériel infinitésimal δu est reliée à sa valeur de repos δu_0 suivant

$$\delta u = \delta u_0 \sqrt{1 - \beta^2};$$

par ailleurs, l'intervalle de temps élémentaire dt peut être supposé représenter une *durée propre* des *molécules* de δu; on a alors, en vertu de la loi relativiste de *retard des horloges*

$$dt = \frac{dt_0}{\sqrt{1-\beta^2}};$$

dans ces conditions, le produit $\delta u\, dt$ apparaît bien invariant.

La relation (7) de M. E. Durand cesse évidemment d'être valable; pour que, dans le cas limite $v^2 = 0$, elle vienne en coïncidence avec la formule relativiste (11), il faut prendre la constante égale à c^2. La relation en question change d'ailleurs de signification en même temps que de forme : la valeur de la densité d'énergie w acquise par la gouttelette devient *relative* au repère galiléen utilisé, mais indépendante de tout choix d'un instant initial; en relativité, la valeur de w est entièrement caractérisée dans le présent. Ce sont là des aspects de la transformation, par la relativité, du théorème des forces vives en un théorème purement cinématique.

Pour terminer, nous allons rappeler rapidement comment les lois relativistes de la dynamique du point peuvent être déduites des lois des milieux continus ([6]); nous serons ainsi ramenés formellement aux équations (4) dont nous sommes partis, mais ces équations auront subi une modification interne qui traduira, en langage ponctuel, les deux lois relativistes de *variation de la masse avec la vitesse* et de *proportionnalité universelle entre la masse et l'énergie*.

Prenons, dans un repère galiléen déterminé, une goutte fluide finie dont toutes les *molécules* sont au même instant t, et considérons deux *états* successifs de cette goutte, séparés par un intervalle de temps infinitésimal dt; ils seront représentés, dans l'Univers de Minkowski, par deux hypercloisons planes parallèles, infiniment voisines, d'un tube de courant d'univers. Multiplions alors les deux membres de (10) par l'élément quadridimensionnel $\delta u\, dt$, intégrons dans le volume précédent, et transformons l'intégrale quadruple du second membre en intégrale triple; on voit aisément que la contribution de l'hyperparoi du tube à l'intégrale triple est nulle; enfin, passons au cas limite d'un tube infiniment délié, en supposant essentiellement que les intégrales considérées restent finies. En distinguant les valeurs $i = u = 1, 2, 3$, et $i = 4$ de l'indice significatif, et tenant compte de la définition (5_1) toujours valable, il vient, au premier membre, les expressions

$$\vec{F}\, dt \quad \text{et} \quad \frac{i}{c}\vec{F}.\vec{dM} \equiv \frac{i}{c}\, dW.$$

Au second membre, en raison de la nullité de l'intégrale d'hyperparoi, on voit apparaître la différence des valeurs des intégrales triples relatives aux deux

---

([6]) *Voir* notre *Relativité restreinte*, p. 52-53.

états successifs de la goutte; il vient ainsi, en séparant toujours le cas $i = 4$,

$$d(m\vec{v}) \quad \text{et} \quad icd(m).$$

Les équations obtenues sont donc, conformément à ce que nous annoncions,

$$\boxed{\vec{F}\,dt = d(m\vec{v}), \qquad \vec{F}.\vec{dM} = c^2\,dm;} \tag{14}$$

la masse m du point matériel apparaît, au facteur ic près, comme la 4^e composante d'un quadrivecteur dont les mv^u sont les trois premières composantes; elle n'est donc plus invariante avec la vitesse, sa valeur générale se trouvant reliée à sa valeur de repos m_0 suivant

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$