

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. OUDART

Sur le schéma de Helmholtz-Kirchhoff (suite et fin)

Journal de mathématiques pures et appliquées 9^e série, tome 23 (1944), p. 1-36.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1944_9_23__1_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

Sur le schéma de Helmholtz-Kirchhoff;

PAR A. OUDART.

(Suite et fin.)



CHAPITRE V.

THÉORÈMES D'EXISTENCE. — PROBLÈME DU SILLAGE.

50. GÉNÉRALITÉS.

500. MM. Jean Leray et Jules Schauder, dans un Mémoire paru aux *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure* intitulé « Topologie et Equations fonctionnelles » ⁽¹⁾, ont généralisé la notion d'indice des solutions d'une équation.

M. Julien Kravtchenko, dans le paragraphe 28 de sa Thèse, rappelle les principaux résultats et donne en note les définitions nécessaires.

Je crois utile de rappeler ici très brièvement le critère qui en découle ⁽²⁾.

501. *Critère d'existence.*

5010. Considérons un espace abstrait E linéaire, normé et complet, un élément x appartenant à un domaine borné D de cet espace et les transformations fonctionnelles suivantes :

$$\begin{array}{l} (1) \quad y = F(x, k) \\ (2) \quad y = x - F(x, k) \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}} \right\} \quad (k \text{ étant compris dans l'intervalle fermé } K : 0, 1).$$

5011. Supposons que ces transformations jouissent des propriétés suivantes :

1° la transformation (1) est complètement continue par rapport à x et uniformément continue par rapport à k ; il en est donc de même de (2), et ceci permet de définir l'indice total $i(k)$ des solutions de l'équation fonction-

⁽¹⁾ *A. S. E. N. S.*, t. LI, 1934, p. 45 et

⁽²⁾ *J. K.*, *Thèse*, p. 201 à 206.



nelle $x = F(x, k)$ pour toute valeur k de l'intervalle K , cet indice étant donné par l'égalité

$$(3) \quad i(k) = d[x - F(x, k), D, 0]; (*)$$

2° pour toute valeur k de l'intervalle K , les solutions éventuelles de l'équation $x = F(x, k)$ sont bornées *a priori*, aucune d'elles ne franchissant la frontière D' du domaine D , ce qui montre que $i(k)$ est indépendant de k ;

3° on sait déterminer le nombre $i(0)$, indice total de l'équation $x = F(x, 0)$.

5012. Dans ces conditions si $i(0) \neq 0$, $i(1)$ sera également différent de 0, et l'équation $x = F(x, 1)$ possédera au moins une solution dans D .

51. PROBLÈME DE REPRÉSENTATION CONFORME DE HELMHOLTZ.

510. Notre but est de ramener le problème à l'équation fonctionnelle

$$x = F(x).$$

Tout d'abord nous devons bien préciser ce dont il s'agit :

« Déterminer un mouvement à la Helmholtz qui corresponde à une configuration donnée des éléments rigides, la vitesse à l'infini aval étant égale à l'unité, hors du sillage et parallèle à chaque paroi, la vitesse à l'infini amont ayant une valeur constante et étant parallèle à Ox et le canal ayant une largeur bornée. »

La configuration qui fera l'objet de notre recherche se précisera au fur et à mesure que nous apparaîtront les difficultés de la solution du problème posé.

Nous nous cantonnerons au cas du sillage : B confondu avec P_2 , C confondu avec P_1 (cf. figure 1).

511. D'une manière précise, soit un arc \widehat{BC} et deux parois indéfinies μ_1 et μ_2 .

Nous supposerons que cet arc et ces parois ont une tangente continue en chacun de leurs points.

512. En ce qui concerne l'obstacle, nous aurons alors

$$(1) \quad \bar{\Phi} = \bar{\Phi}(l),$$

les points B et C correspondant à α et β avec $0 < \alpha \leq l \leq \beta$

Nous supposerons que

$$(2) \quad \varepsilon \leq \bar{\Phi}(l) \leq \pi - \varepsilon,$$

et que $\bar{\Phi}(l)$ possède un module de continuité hölderien

$$(3) \quad |\bar{\Phi}(l') - \bar{\Phi}(l)| \leq \Lambda |l' - l|^\alpha \quad (0 < \alpha \leq 1).$$

5131. De même le long de μ_1 et de μ_2 , nous aurons

$$(1) \quad \Psi = \Psi_1(l_1), \quad \text{fonction continue hölderienne de } l_1 \quad (-\infty < l_1 < +\infty),$$

$$(2) \quad \Psi = \Psi_2(l_2), \quad \text{»} \quad l_2 \quad (-\infty < l_2 < +\infty),$$

la valeur $-\infty$ correspondant à l'infini amont, $+\infty$ à l'infini aval.

(*) $d[x - F(x, k), D, 0]$ = degré topologique au point O de la transformation $y = x - F(x, k)$ opérant sur D .

5132. Nous supposons de plus que le canal est monotone convergent (ou divergent), ce qui signifie que :

- Ψ_1 est une fonction négative (positive) de l_1 ,
- Ψ_2 est une fonction positive (négative) de l_2 ;

ces fonctions prenant des valeurs comprises entre 0 et π .

5133. Nous supposons encore qu'il existe une direction asymptotique unique en aval et en amont aussi bien pour le canal convergent que pour le canal divergent; donc que

$$\Psi_1(+\infty) = \Psi_2(+\infty) = \Psi_1(-\infty) = \Psi_2(-\infty) = 0.$$

5134. Nous prendrons pour paramètres fixant la position du canal par rapport à l'obstacle les distances (1) d_1 et d_2 des points C et B aux asymptotes en aval à μ_1 et μ_2 .

Nous appellerons Δ_1 et Δ_2 les distances des points C et B aux asymptotes les plus voisines de ces points, ce qui, dans le cas du canal convergent, donne $d_1 = \Delta_1$, $d_2 = \Delta_2$.

Nous supposons Δ_1 et Δ_2 positifs de façon que les asymptotes encadrent l'obstacle.

5140. La donnée de $\bar{\Phi}(l)$, $\Psi_1(l_1)$, $\Psi_2(l_2)$, α , β , d_1 , d_2 définit complètement la configuration des éléments rigides, ce que nous pouvons appeler le squelette du schéma.

5141. *Remarque.* — Si l'on se donne de tels éléments, on peut construire dans le plan z ce squelette. Pour être assuré que ce squelette a un sens vis-à-vis de notre problème, il faut que la courbe $\bar{\Phi}(l)$ ($\alpha \leq l \leq \beta$) ne soit pas recoupée par les courbes Ψ_1 et Ψ_2 , ce qui, dans le cas du canal divergent, peut n'être pas réalisé par des fonctions données *a priori*. Par contre, si l'on se donne un squelette convenable, les fonctions et données mathématiques du n° 5140 sont déterminées, ce qui est l'essentiel.

515. *Conditions à l'infini pour les fonctions $\Psi_1(l_1)$ et $\Psi_2(l_2)$.*

5151. Je dis que $\Psi_1(l_1)$ ne peut avoir une valeur asymptotique égale à $\frac{B}{l_1}$, car la distance d'un point l_1^0 à l'asymptote est donnée par

$$\int_{l_1^0}^{\pm\infty} \sin \Psi \, dl_1 = \int \frac{\sin \Psi}{\Psi} \Psi \, dl_1 \cong \int \Psi \, dl_1 \cong B \log l_1 + C \quad (l_1 \rightarrow \infty),$$

qui augmenterait indéfiniment.

5152. Mais il suffit que l'on ait une valeur asymptotique de la forme

$$(1) \quad \Psi_1(l_1) = \frac{B}{l_1 (\log |l_1|)^n} \quad (n > 1);$$

(1) Comptées positivement vers le haut pour d_1 et Δ_1 , vers le bas pour d_2 et Δ_2 .

car on a alors

$$\int \Psi dt_1 \cong B \int \frac{dt_1}{t_1 (\log t_1)^n} \cong \frac{B}{1-n} \frac{1}{(\log t_1)^{n-1}} + C.$$

5153. Nous supposons que $\Psi_1(l_1)$ et $\Psi_2(l_2)$ possèdent de telles valeurs asymptotiques (5152. 1) à l'infini amont comme à l'infini aval.

52. DEUXIÈME CONDITION DE M. M. BRILLOUIN. — Afin d'obtenir à coup sûr un domaine simplement connexe, nous devons supposer que le schéma satisfait à la condition de non-recouvrement des lignes de jet. Nous supposons que le squelette choisi permet de dire *a priori* que les lignes de jet sont divergentes.

Dans cet ordre d'idées, nous connaissons le cas du théorème 2 du n° 412 de l'obstacle tranchant et du canal monotone divergent.

53. PROBLÈME DU SILLAGE.

531. Ce problème reste posé dans les termes mêmes des pages 170-171 de la Thèse de M. Kravtchenko. Nous n'y reviendrons pas.

532. Notons que nous devons introduire ici, en plus de l'espace $E(\alpha, \beta, s)$ auquel appartient la fonction $\bar{\Phi}(l)$, un espace $F(-\infty, +\infty, x)$ auquel appartiennent les fonctions $\Psi_1(l_1), \Psi_2(l_2)$.

533. L'espace $E(\alpha, \beta, s)$, comprend toutes les fonctions réelles également continues de la variable (s) pour l'intervalle α, β fermé. La norme d'une fonction $f(s)$ de cet espace est

$$\|f(s)\| = \max |f(s)|.$$

On sait qu'un tel espace est linéaire, normé et complet.

534. L'espace $F(-\infty, +\infty, x)$, comprend les fonctions réelles également continues de la variable (x) pour toute valeur de la variable et dont les valeurs asymptotiques sont nulles et de la forme (5152. 1). Cet espace est linéaire, normé par $\|f(s)\| = \text{Max} |f(s)|$, et complet comme le montre le théorème d'Arzela (1).

535. Nous aurons aussi à introduire les espaces $E_1(\alpha, \beta, s), E_2(\alpha, \beta, s)$, auxquels appartiennent les fonctions $l_1(s)$ et $l_2(s)$.

536. Les modules de continuité ont été précisés ou seront précisés aux paragraphes 512-5131 et 557.

Noter que l'espace $F(-\infty, +\infty, x)$ est complet parce que compact d'une part et fermé de l'autre.

(1) Sur l'égalité de continuité et le théorème d'Arzela, on consultera avec fruit l'ouvrage de M. Paul MONTÉL : *Leçons sur les familles normales des fonctions analytiques* (Gauthier-Villars, 1927).

54. MISE EN EQUATION DU PROBLEME DU SILLAGE.

541. Donnons-nous une valeur de chacun des deux paramètres a, b telles que $a < -1$ et $b > 1$.

Dans ces conditions les équations (15.4), (15.5), (16.3), (15.3) et (17.4) définissent $\omega_1, \omega_3, q, \gamma$ et s_1 .

5420. Donnons-nous les éléments $l(s)$ de l'espace $E(0, \pi, s)$, $l_1(s)$ de l'espace $E_1(s_1, \pi, s)$, $l_2(s)$ de l'espace $E_2(s_1, 0, s)$; la condition d'uniformité (211.2), compte tenu du changement de fonctions (3615.3) et des définitions des fonctions ci-dessus (512-513), s'écrira

$$(1) \quad \pi s_0 = \int_0^\pi \bar{\Phi}[l(s)] ds - \int_0^{s_1} \Psi_2[l_2(s)] ds - \int_{s_1}^\pi \Psi_1[l_1(s)] ds,$$

ce qui définira le domaine d du plan Z .

5421. Une difficulté se présente ici selon le choix de $l(s), l_1(s), l_2(s)$, car $\bar{\Phi}$ peut être très petit et Ψ_1 et Ψ_2 importants, de sorte que s_0 peut alors être $> \pi$ ou < 0 .

Cette difficulté ne se présentera pas si l'on a par exemple

$$(2) \quad |\Psi| < \bar{\Phi} \leq \frac{\pi}{2},$$

condition remplie pour un canal divergent dont la pente est inférieure à celle de l'obstacle, celui-ci étant tranchant également par rapport à Oy , par exemple.

On n'aura aucune difficulté dans le cas du *squelette symétrique* en choisissant $l_1(s) = l_2(\pi - s)$ [ce qui est tout à fait indiqué], car alors les deux intégrales en Ψ_1 et Ψ_2 seront égales et de signes contraires.

Il en est de même si l'on a

$$(3) \quad \varepsilon \leq \bar{\Phi} \leq \pi - \varepsilon \quad \text{et} \quad |\Psi| \leq \varepsilon < \frac{\pi}{2}.$$

Dans tous les cas énumérés ci-dessus, on aura donc $0 < s_0 < \pi$.

543. L'égalité (14.3) définit alors un rapport

$$(1) \quad \frac{\psi_2}{\psi_1} = \frac{t_0 - a}{b_2 - t_0}.$$

Les équations

$$(2) \quad \begin{cases} \Phi(s) = \bar{\Phi}[l(s)] - \pi & \text{pour } 0 \leq s \leq s_0, \\ \Phi(s) = \bar{\Phi}[l(s)] & \text{pour } s_0 \leq s \leq \pi; \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} \Psi(s) = \Psi_1[l_1(s)] & \text{pour } s_1 \leq s \leq \pi, \\ \Psi(s) = \Psi_2[l_2(s)] & \text{pour } 0 \leq s \leq s_1. \end{cases}$$

et l'équation (211.1) permettent alors de construire $\Omega(Z)$, donc $\Theta(X, Y)$ et $T(X, Y)$.

Les équations (2213.1) et (2213.2) nous donnent les expressions valables sur les circonférences $|Z|=1$ et $|Z|=q$, c'est-à-dire par (2711.2) et (2712.2) les valeurs de $T_1(s)$ et $T_q(s)$.

544. La différentielle $df(Z)$ est connue d'après (14.8), (17.5) et (17.6) au facteur $(\psi_1 + \psi_2)$ près.

Le deuxième membre de (331.2) que nous désignerons par $\frac{dL}{ds}$ est connu à ce coefficient près, et de même pour chaque paroi, le deuxième membre de (3410.1) que nous désignerons par $\frac{dL_1}{ds}$ et $\frac{dL_2}{ds}$. Naturellement, on trouve, en général,

$$\frac{dL}{ds} \neq \frac{dl}{ds}, \quad \frac{dL_i}{ds} \neq \frac{dl_i}{ds} \quad (i=1, 2).$$

La connaissance de $\frac{dL}{ds}$ nous donne $L(s)$ à une constante additive près, et toujours, au facteur $(\psi_1 + \psi_2)$ près; les équations $L(0) = \alpha$ et $L(\pi) = \beta$ donneront la relation

$$(1) \quad \beta - \alpha = \int_0^\pi j e^{-T(e^{it})} df$$

qui définit $\psi_1 + \psi_2$.

On a alors

$$(2) \quad L(s) = V[l(s), l_1(s), l_2(s), a, b; \Phi(l), \Psi_1(l_1), \Psi_2(l_2), \alpha, \beta],$$

$$(3) \quad L_1(s) = V_1[.....],$$

$$(4) \quad L_2(s) = V_2[.....].$$

Les constantes d'intégration disparaîtront dans L_1 et L_2 si nous convenons de choisir $l_1 = l_2 = L_1 = L_2 = 0$ pour une certaine valeur ($x = 0$ pour fixer les idées) de l'abscisse x .

545. Les équations (543.1) et (544.1) définissent ψ_1 et ψ_2 par leur somme et leur quotient.

Les équations (14.6₁) et (14.6₂) définissent φ_1 et φ_2 .

L'équation (544.1) nous montre que $\psi_1 + \psi_2$ est positif : $\beta - \alpha$ est en effet positif par définition, et l'on a

$$j df = \frac{\psi_1 + \psi_2}{\pi} \frac{-j(t-t_0)}{(t-a)(t-b)} dt:$$

l'inégalité $0 \leq s \leq \pi$ entraîne $-1 \leq t \leq 1$ pour la circonférence de rayon 1, de sorte que $(t-a)(t-b)$ est négatif. Mais $j(t-t_0)$ est positif, donc l'élément est positif et il s'ensuit que $\psi_1 + \psi_2$ est bien positif.

Sur l'équation (543. 1) nous voyons immédiatement que $\frac{\psi_2}{\psi_1}$ est positif ni nul, ni infini. De sorte que ψ_1 et ψ_2 sont positifs.

Concernant φ_1 et φ_2 , considérons

$$f = -\frac{\psi_1}{\pi} \log \frac{t-b}{t_0-b} - \frac{\psi_2}{\pi} \log \frac{t-a}{t_0-a}.$$

Si t est réel et compris entre a et b , tout est réel et $\psi = 0$: on a alors $f = \varphi$ et $\varphi = 0$ pour $t = t_0$.

Mais $\frac{df}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}$ s'annule pour $t = t_0$, est $+$ pour $t > t_0$, est $-$ pour $t < t_0$, de sorte que φ est bien minimum pour $t = t_0$. On est donc assuré que φ_1 et φ_2 sont positifs.

Le domaine f est donc défini et le potentiel complexe également.

546. La fonction z est donnée par

$$z(Z) = \int_{\rho^{i\alpha_0}}^Z e^{i\Omega} df.$$

Les distances des points C et B à l'asymptote aval correspondante sont

$$(1) \quad D_1 = \int_{-1}^{-\eta} e^{-\tau} \sin \Theta d\varphi + \psi_1,$$

$$(2) \quad D_2 = \int_{\eta}^1 e^{-\tau} \sin \Theta d\varphi + \psi_2.$$

547. En résumé, aux cinq éléments donnés $\bar{\Phi}(l)$, $\Psi_1(l_1)$, $\Psi_2(l_2)$, α , β , et aux cinq éléments arbitraires $l(s)$, $l_1(s)$, $l_2(s)$, a , b nous avons fait correspondre des fonctions $\Phi(s)$ et $\Psi(s)$ qui par les formules du schéma de Helmholtz conduisent à des éléments $L(s)$, $L_1(s)$, $L_2(s)$, D_1 et D_2 , d'où au système des cinq équations fonctionnelles

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} l(s) = V[l(s), l_1(s), l_2(s), a, b; \bar{\Phi}(l), \Psi_1(l_1), \Psi_2(l_2), \alpha, \beta], \\ l_1(s) = V_1[\dots], \\ l_2(s) = V_2[\dots], \\ d_1 = D_1[\dots], \\ d_2 = D_2[\dots]. \end{array} \right.$$

Les deux dernières équations fonctionnelles représentent des conditions aux limites.

55. ÉTUDES PRÉLIMINAIRES.

550. Pour poursuivre cette étude, il est nécessaire de montrer que la solution éventuelle appartient à un certain domaine borné, d'où la nécessité de limiter certains paramètres.

Nous supposons donc que la solution du problème posé (510) existe et satisfait au squelette initial.

551. *Limitation du paramètre q .*

5510. Le paragraphe 24 de la Thèse de M. J. Kravtchenko, comme il le remarque lui-même, est valable sous condition que le domaine fluide soit d'un seul tenant et sous réserve de modifier l'inégalité (*J. K.*, 3.28).

Reprenons les notations du paragraphe 20 de ladite Thèse⁽¹⁾ et plaçons-nous dans le cas de nos figures 22 et 23; ceci suppose que Δ_1 et Δ_2 sont positifs comme nous l'avons posé en hypothèse (*cf.* 5134).

5511. Nous prendrons la sphère tangente au plan horizontal en un point H , de H, H' . Nous supposons $\Delta_1 \leq \Delta_2$ [*cf.* *J. K.*, Thèse, p. 180, $d_1 \leq d_2$]. Nous prendrons pour diamètre D de cette sphère de Riemann la distance de H , aux sommets D_1 et C_1 les plus éloignés du rectangle qui circonscrit l'obstacle parallèlement aux axes, ce qui implique le choix de H_1 sur l'axe de ce rectangle parallèle à Oy [*cf.* *J. K.*, Thèse, p. 181, *fig.* 9).

Ici on ne peut plus majorer σ par $\frac{\pi D^2}{2}$; de sorte que la deuxième partie de la formule (*J. K.*, 3.27) devient

$$(1) \quad \sigma \leq \pi D^2.$$

Il n'y a pas lieu de changer un mot à la minoration de Λ , de sorte que l'on a

$$(2) \quad \Lambda > \frac{\Delta_1}{2\sqrt{5}}.$$

5512. L'inégalité (*J. K.*, 3.2)

$$\frac{\Lambda^2}{\sigma} \leq \frac{\omega_3}{i\omega_1},$$

compte tenu des deux inégalités ci-dessus, conduit alors à l'inégalité

$$(1) \quad \frac{\Delta_1^2}{20\pi D^2} \leq \frac{\omega_3}{i\omega_1},$$

d'où

$$(2) \quad q \leq e^{-\frac{1}{20\pi}} \left(\frac{\Delta_1}{D} \right)^2,$$

qui remplace l'inégalité (*J. K.*, 3.28) de la page 183.

(1) Signalons que le lemme fondamental de M. J. Kravtchenko (*J. K.*, 20) a été obtenu grâce à l'emploi de l'inégalité de Schwarz et qu'il se rattache par là — et par ses ramifications — aux récents travaux de MM. Arnaud Denjoy, J. Wolff et M^{lle} Jacqueline Ferrand. Bibliographie dans le *Bulletin de la Société Mathématique de France* (1942).

5513. On en conclut encore que Δ_1 (et Δ_2) étant minorées positivement et D étant fini par construction, on a alors q majoré par un nombre < 1 , de sorte que le domaine (d) du plan (Z) ne dégénère pas en une couronne infiniment mince.

Il est donc nécessaire que $\Delta_1 \rightarrow 0$ pour que $q \rightarrow 1$, c'est-à-dire pour que $a \rightarrow -1$ ou $b \rightarrow +1$ ou les deux (Annexe 5, n° 59).

5514. *Remarque.* — Soient C_1 et C_2 deux arcs de courbes dépourvus de points communs. Traçons un chemin joignant un point M_1 de C_1 à un point M_2 de C_2 , dépourvu d'autres points communs avec C_1 et C_2 , et soit l la longueur de ce chemin.

On appelle distance au sens de Fréchet la borne inférieure δ' de l . Il est clair que dans le cas de figure considéré, δ' est plus grand que Δ_1 , qui peut jouer le rôle de δ' .

Il n'est nullement évident *a priori* que la plus courte distance au sens de Fréchet sur la sphère de Riemann soit la transformée de δ' de la figure initiale, mais il existe un arc de grand cercle sur cette sphère qui en joue le rôle. Et c'est la seule existence de celui-ci qui entraîne la validité du raisonnement.

L'interprétation est beaucoup plus simple dans le premier cas, mais nous avons là une extension de la démonstration.

5515. D'autre part le raisonnement de la page (*J. K.*, 185) concernant le théorème de la page (*J. K.*, 184) qui repose sur l'hypothèse de non-recoupement des lignes libres (52) est encore valable, les parois des images μ_1 et μ_2 étant intérieures aux petits cercles images de la droite $H_1 H'_1$ qui remplace μ_1 et de la droite $H_2 H'_2$ qui remplace μ_2 . Le théorème précité devient alors :

THÉOREME. — *Soit un régime à la Helmholtz correspondant aux éléments intrinsèques $\bar{\Phi}(l)$, $\Psi_1(l_1)$, $\Psi_2(l_2)$, α , β , d_1 , d_2 ; si l'on fait varier les données de manière à faire tendre $q \rightarrow 0$, la configuration des éléments rigides se déformera de manière que les parois μ_1 et μ_2 s'éloignent à l'infini.*

Il est donc nécessaire que $\Delta_1 \rightarrow 0$ pour que $q \rightarrow 0$, c'est-à-dire que a et $b \rightarrow \infty$ [Annexe 5, n° 55].

5516. *Conclusion.* — Le squelette du schéma de Helmholtz choisi assure l'existence des inégalités

$$\begin{aligned} 1 &< |a| < \infty, \\ 1 &< b < \infty. \end{aligned}$$

552. *Limitation de $\psi_1 + \psi_2$.*

5521. *Étude de $\bar{\Phi}[l(t)]$.*

55210. Nous nous plaçons dans le cas du n° 52, de sorte que le domaine \mathcal{A} (407) est limité par une courbe de Jordan sans points doubles, qui, sur la

sphère de Riemann du paragraphe (*J. K.*, 26), donne un domaine fermé simplement connexe à contour rectifiable, et nous supposons que $\varepsilon \leq \bar{\Phi} \leq \pi - \varepsilon$ (5421.3).

55211. Le raisonnement du paragraphe (*J. K.*, 26) est identiquement valable sous condition que les asymptotes aux courbes μ_1 et μ_2 soient à des distances Δ_1, Δ_2 positives des points de détachement respectifs.

On a donc encore les résultats suivants :

$$|y(t) - y(t')| \leq \frac{4\pi(\beta - \alpha)}{\left| \log \frac{1}{t - t'} \right|^{\frac{1}{2}}} \quad \text{pour } -1 \leq t \leq t' \leq 1.$$

Le coefficient $2\sqrt{2}$ est ici remplacé par 4, car σ est majorée par $\pi(\beta - \alpha)^{\frac{1}{2}}$ au lieu de $\frac{\pi(\beta - \alpha)^2}{2}$.

Cette inégalité peut être améliorée par la méthode du paragraphe (*J. K.*, 22), c'est-à-dire par l'emploi de la transformation (*J. K.*, 3.8) $z_1 = z^{\frac{1}{2}}$, et l'on en conclut que $y(t)$ appartient à l'espace $\mathcal{L}_n(t)$, c'est-à-dire $\mathcal{L}_n(t)$ quel que soit n .

Ceci dit, l'inégalité (5521.3)

$$\varepsilon \leq \bar{\Phi}[l(t)] \leq \pi - \varepsilon,$$

$0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ montre que

$$\frac{dy}{dl} = \sin \bar{\Phi} > \sin \varepsilon,$$

de sorte que l'on a

$$dl < \frac{dy}{\sin \varepsilon} \quad \text{et} \quad |l(t) - l(t')| < \frac{|y(t) - y(t')|}{\sin \varepsilon},$$

ce qui entraîne que $l(t)$ appartient à l'espace $\mathcal{L}_n(t)$.

De plus

$$\left| \frac{dx}{dl} \right| = |\cos \bar{\Phi}| < \cos \varepsilon < 1$$

entraîne

$$|dx| < |dl| \quad \text{et} \quad |x(t) - x(t')| < |l(t) - l(t')|,$$

ce qui entraîne que $x(t)$ appartient à l'espace $\mathcal{L}_n(t)$.

55212. Supposons maintenant, comme déjà dit, que $\bar{\Phi}(l)$ soit höldérien, donc

$$|\bar{\Phi}(l) - \bar{\Phi}(l')| < A |l - l'|^\alpha.$$

Il vient

$$|\bar{\Phi}[l(t)] - \bar{\Phi}[l(t')]| < \frac{k}{(\sin \varepsilon)^\alpha} \frac{1}{|\log |t' - t||^{n\alpha}},$$

ce qui entraîne encore que $\bar{\Phi}[l(t)]$ appartient à l'espace $\mathcal{L}_n(t)$, quel que soit n .

La fonction $\Phi(t)$, qui est égale à

$$\begin{aligned} &< \bar{\Phi}[l(t)] - \pi && \text{pour } -1 \leq t \leq t_0, \\ &< \Phi[l(t)] && \text{pour } t_0 \leq t \leq 1, \end{aligned}$$

appartient donc à l'espace $\mathcal{L}_n(t)$, sauf en $t = t_0$ où elle est discontinue.

5522. *Étude de $\Omega(t)$ et $T(t)$ sur l'obstacle.*

Le théorème du n° 2821 joint à la remarque n° 2827 permet alors d'énoncer qu'au voisinage du segment $-1, +1$, la fonction $\Omega(t)$ appartient à l'espace $\mathcal{L}_n(t)$ sauf au point t_0 , puisque $\Phi(t)$ appartient à l'espace $\mathcal{L}_n(t)$ et que $\Psi(t)$ est bornée.

Il en sera de même de la partie imaginaire $T(t)$.

5523. *Étude du point t_0 .*

Tant que $-1 \leq t \neq t_0 \leq 1$, $T(t)$ appartient à l'espace $\mathcal{L}_n(t)$. Il en est donc de même de e^{-t} et de $e^{-t}(t-t_0)$ qui reste borné.

Si $t-t_0 \rightarrow 0$, les numéros A 312, A 314 et A 321 montrent que $h(t) = \bar{\Phi}[l(t)]$ appartenant à l'espace $\mathcal{L}_n(t)$ quel que soit n (donc $n > 1$) $T(t)$, est infinie en $t = t_0$, comme $\log r$, soit $\log|t-t_0|$; e^{-t} est alors infinie comme $\frac{1}{|t-t_0|}$ et $e^{-t}(t-t_0)$ est supérieurement bornée en module $e^{-t}|t-t_0|$ ayant pour limite 1.

5524. *Limitation de $\psi_1 + \psi_2$.*

55241. — Rappelons que $|a|$ et b sont > 1 et bornés.

Reprenons l'égalité

$$\beta - \alpha = \frac{\psi_1 + \psi_2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{e^{-t}|t-t_0|}{(b-t)(t-a)} dt.$$

L'on a évidemment

$$\frac{\psi_1 + \psi_2}{4\pi|a|b} \int_{-1}^{+1} e^{-t}|t-t_0| dt \leq \beta - \alpha \leq \frac{\psi_1 + \psi_2}{\pi(b-1)(1+a)} \int_{-1}^{+1} e^{-t}|t-t_0| dt.$$

55242. $e^{-t}|t-t_0|$ est toujours positif, T est borné sauf pour $t = t_0$, donc $e^{-t}|t-t_0|$ n'est pas nul; pour $t = t_0$, $e^{-t}|t-t_0| = 1$, de sorte que $\int_{-1}^{+1} e^{-t}|t-t_0| dt$ n'est pas nul et $\psi_1 + \psi_2$ est supérieurement borné, d'après la première inégalité et est positif d'après la seconde.

55243. $e^{-t}|t-t_0|$ est supérieurement borné, donc $\int_{-1}^{+1} e^{-t}|t-t_0| dt$ est supérieurement bornée, de sorte que $\psi_1 + \psi_2$ est inférieurement borné d'après la seconde inégalité.

553. Étude de $\Psi_1[l_1(t)]$ et de $\Omega(t)$ dans tout le fluide vif.

5531. Étude de $\Psi_1[l_1(t)]$.

55310. Nous avons supposé que $|\Psi'| \leq \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ (5421.3).

Posons

$$\varepsilon = \frac{\pi}{2} - \varepsilon'.$$

Cette inégalité

$$|\Psi'| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon'$$

montre qu'une parallèle à Oy ne rencontre la paroi μ_1 qu'en un point, de même que la paroi μ_2 d'ailleurs.

55311. Dès lors prenons M et M' sur μ_1 et la sphère de Riemann de diamètre Δ égal à deux fois la largeur totale du canal, tangent en M' et de pôle P diamétralement opposé.

La droite parallèle à Oy passant par M' donne un cercle méridien, la partie $(t', t_1 = \infty)$ de μ_1 est d'un côté de ce plan, la partie (t', t, b) de μ_1 est de l'autre côté de ce même plan diamétral.

On ne peut donc aller de l'arc correspondant à $(t', t_1 = \infty)$ à l'arc correspondant à (t, b) sans traverser le cercle méridien. Mais le cercle image de l'asymptote la plus éloignée de μ_2 descend bien en dessous de l'équateur de la sphère, de sorte que l'on ne peut, dans le domaine simplement connexe, image du fluide vif, aller de l'un à l'autre de ces arcs sans rester un certain temps sous ce plan équatorial.

Cela suffit pour assurer que tout chemin allant de $(t', t_1 = \infty)$ à (t, b) , traversant le fuseau (PM, PM') , est minoré par $\left| \frac{x' - x}{2} \right|$, et il en est de même du plus court chemin Λ .

Soit donc

$$t_1 = -\infty, \quad t_2 = b, \quad t_3 = t \quad \text{et} \quad t_4 = t',$$

il vient alors (*J. K.*, 3.1, p. 140 et dernier alinéa p. 144.)

$$\left| \frac{x' - x}{2} \right| < \Lambda < \frac{\sqrt{4\pi\sigma}}{\left| \log \frac{1}{r} \right|^{\frac{1}{2}}} \quad \text{avec } \sigma \leq \pi\Delta^2$$

et

$$-\infty < t' < t < b \quad \text{avec } t' - t < \frac{1}{2}.$$

Mais (*J. K.*, 3.1')

$$r = \frac{t' - t}{t' - b} \frac{t_1 - b}{t_1 - t}.$$

Tant que t reste fini, t_1 étant infini,

$$\frac{t_1 - b}{t_1 - t} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{r} = \frac{t' - b}{t' - t},$$

d'où

$$\log \frac{1}{r} = \log \frac{t' - b}{t' - t} = \frac{1}{2} \left[\log \frac{1}{t' - t} + \log \frac{(t' - b)^2}{t' - t} \right].$$

Or quel que soit t' , b on peut choisir t compris par hypothèse entre t' et b , de telle façon que $\frac{(t' - b)^2}{t' - t} > 1$, comme $t' - t$ est positif, il suffit que $t' - t < (t' - b)^2$; on aura alors

$$\log \frac{1}{t' - t} \text{ étant } > 0 \text{ ainsi que } \log \frac{(t' - b)^2}{t' - t},$$

$$\log \frac{1}{t' - t} + \log \frac{(t' - b)^2}{t' - t} > \log \frac{1}{t' - t} \quad \text{et} \quad \log \frac{1}{r} > \frac{1}{2} \log \frac{1}{t' - t},$$

d'où

$$(1) \quad |x' - x| < \frac{4\pi\Delta\sqrt{2}}{\left| \log \frac{1}{t' - t} \right|^{\frac{1}{2}}}.$$

$x(t)$ appartient donc à l'espace $\mathcal{L}_1^2(t)$, sauf pour $t = \infty$ et $t = b$.

On démontre ici encore par la méthode du paragraphe (*J. K.*, 22) que cette inégalité peut être améliorée et que $x(t)$ appartient à $\mathcal{L}_n(t)$ quel que soit n .

Ceci dit, l'inégalité $|\Psi| \leq \varepsilon$ montre que

$$\frac{dx}{dl_1} = \cos \Psi_1 > \cos \varepsilon,$$

de sorte que l'on a

$$dl_1 < \frac{dx}{\cos \varepsilon} \quad \text{et} \quad |l_1(t) - l_1(t')| < \frac{|x(t) - x(t')|}{\cos \varepsilon},$$

et $l_1(t)$ appartient à l'espace $\mathcal{L}_n(t)$.

De plus

$$\left| \frac{dy}{dl_1} \right| = |\sin \Psi_1| < \sin \varepsilon < 1$$

entraîne

$$|dy| < |dl_1| \quad \text{et} \quad |y(t) - y(t')| < |l_1(t) - l_1(t')|,$$

ce qui entraîne que $y(t)$ appartient à l'espace $\mathcal{L}_n(t)$.

55312. Supposons maintenant, comme déjà dit, que $\Psi_1(l_1)$ soit hölderien, donc

$$|\Psi_1(l_1) - \Psi_1(l'_1)| < B |l_1 - l'_1|^2, \quad \text{pour } l_1 \text{ fini.}$$

Comme $l_1(t)$ appartient à l'espace $\mathcal{L}_n(t)$, tant que t est fini, l_1 est également fini, et dès lors $\Psi_1[l_1(t)]$ appartiendra à l'espace $\mathcal{L}_n(t)$, sauf pour $t = b$, et $t = \infty$.

5532. Étude de $\Psi_2[l_2(t)]$.

Pour les mêmes raisons $\Psi_2[l_2(t)]$ appartient à l'espace $\mathcal{L}_n(t)$, sauf pour $t = a$ et $t = \infty$.

5533. Étude de $\Omega(t)$ et $T(t)$ sur les parois et dans le fluide vif. — Le théorème du n° 2821 permet alors d'énoncer que $\Omega(t)$ et $T(t)$ appartiennent à l'espace $\mathcal{L}_{n-1}(t)$ quel que soit n , sauf aux points $t_0, t_1 = \infty, a, b$ [puisque $\Phi(t)$ et $\Psi(t)$ appartiennent à l'espace $\mathcal{L}_n(t)$ dans les mêmes conditions], et ceci tant sur les parois et dans le fluide vif que sur l'obstacle.

554. Étude de $l(t)$ et $l(s)$.

5540. Considérons la formule

$$dl = \frac{\psi_1 + \psi_2}{\pi} \frac{e^{-T} |t - t_0|}{(b-t)(t-a)} dt.$$

5541. $\psi_1 + \psi_2$ est borné supérieurement (5524); e^{-T} appartient à l'espace $\mathcal{L}_{n-1}(t)$, puisqu'il en est ainsi de T , sauf pour $t = t_0$; $\frac{t - t_0}{(b-t)(t-a)}$ est une fonction analytique; donc $\frac{dl}{dt}$ existe et vérifie une condition $\mathcal{L}_{n-1}(t)$ dans l'intervalle $-1 \leq t \neq t_0 \leq 1$.

5542. Pour $t = t_0$, $e^{-T}(t - t_0)$ a pour limite 1 (5523) et est continue; les deux nombres dérivés $\frac{dl}{dt}$ à droite et $\frac{dl}{dt}$ à gauche existent donc et sont égaux: $\frac{dl}{dt}$ existe et est continue dans tout l'intervalle.

5543. Il en résulte que $\frac{dl}{ds}$ existe et est continue dans l'intervalle $0 \leq s \leq \pi$, même pour $s = s_0$ et vérifie une condition $\mathcal{L}_{n-1}(s)$, sauf peut-être pour $s = s_0$.

5544. Ceci fixe l'espace auquel appartiendront les fonctions approchées $l(s)$. Naturellement les fonctions $L(s)$ qui en résultent appartiendront au même espace.

555. Étude de $l_2(t)$ et $l_2(s)$.

5551. Ici encore $\frac{dl_2}{dt}$ existe et vérifie une condition $\mathcal{L}_{n-1}(t)$, sauf aux extrémités de l'intervalle.

55521. Considérons la valeur $t = a$. Nous supposons le problème résolu: nous supposons donc qu'il existe pour la configuration donnée, un schéma de Helmholtz pour lequel « la vitesse à l'infini aval est égale à 1 et parallèle à la paroi », c'est-à-dire ici à Ox (510), de sorte que par hypothèse $T = 0$ pour $t = a$.

55522. De même, puisque nous supposons le problème résolu, nous supposons que pour le schéma obtenu « la vitesse à l'infini amont a une valeur constante et est parallèle à Ox ». Il est presque évident que cette

valeur à l'infini amont est bornée non nulle si le canal a une largeur bornée non nulle.

Le calcul ci-dessous va nous le montrer.

L'égalité différentielle $dz = e^{i\Omega} df$ donne, puisque $\Omega = \Theta + iT$,

$$dz = e^{-T} e^{i\Theta} df = e^{-T} [\cos \Theta + i \sin \Theta] [d\varphi + i d\psi],$$

d'où

$$dx = e^{-T} (\cos \Theta d\varphi - \sin \Theta d\psi) \quad \text{et} \quad dy = e^{-T} (\sin \Theta d\varphi + \cos \Theta d\psi).$$

La largeur du canal $y_2 - y_1$ à l'infini est égale à la limite de $\int_{-\psi_1}^{\psi_2} dy$ pour $x = \text{const.}$ quand $x \rightarrow \infty$.

Pour $x = \text{const.}$, e^{-T} est bornée tant que nous sommes à distance finie. L'égalité $dx = 0$ entraîne alors

$$\cos \Theta d\varphi = \sin \Theta d\psi,$$

d'où

$$y_2 - y_1 = \lim \int_{-\psi_1}^{\psi_2} \frac{e^{-T}}{\cos \Theta} d\psi.$$

La continuité de Θ dans le plan Z au point s_1 et l'application de la formule de Poisson à la représentation de la demi-couronne sur un cercle, montre que Θ est voisin de 0 et est continu au voisinage de s_1 , donc $|\Theta| < \alpha$, α étant aussi petit qu'on veut, de sorte que e^{-T} étant essentiellement positif

$$\int_{-\psi_1}^{\psi_2} \frac{e^{-T}}{\cos \Theta} d\psi \quad \text{est égal à} \quad \frac{1}{\cos \lambda \alpha} \int_{-\psi_1}^{\psi_2} e^{-T} d\psi,$$

où λ est un nombre < 1 .

Quand $x \rightarrow -\infty$, le point M, intérieur à ou frontière de la demi-couronne $\rightarrow r_1 = q e^{i\theta_1}$, T fonction continue à l'intérieur, tendra vers une limite finie ou non, mais unique par hypothèse.

Mais si T devenait infinie, positive ou négative, e^{-T} devenant nulle ou infinie, $\int_{-\psi_1}^{\psi_2} e^{-T} d\psi$ deviendrait nul ou infini, de sorte que $y_2 - y_1$ serait nul ou infini contrairement à l'hypothèse. Ainsi donc T reste borné dans les deux sens. On a alors

$$T(-\infty) = \log \frac{\psi_2 + \psi_1}{y_2 - y_1}, \quad e^{-T} = \frac{y_2 - y_1}{\psi_2 + \psi_1}.$$

5553. Nous venons de voir que pour $t = a$, $T = 0$; il vient donc

$$\frac{dl_2}{dt} = e^{-T} \frac{df}{dt} = - \frac{\psi_1 + \psi_2}{\pi} \frac{t - t_0}{(t - a)(t - b)},$$

et $l_2(t)$ est de la forme $A \log(t - a)$

$$\frac{dl_2}{ds} = - \frac{\psi_1 + \psi_2}{\pi} \omega_1 \sqrt{(a^2 - 1)(b - a)} \frac{a - t_0}{a - b} \left[\frac{1}{\sqrt{a - t}} + o(t) \right] \quad \text{avec } o(a) = 0,$$

d'où l'on tire par un calcul déjà fait au n° 371

$$\frac{dl_2}{ds} = -\frac{K_0}{s} + \dots \quad (K_0 > 0) \quad \text{et } l_2(s) \text{ est de la forme } -K_0 \log s.$$

5554. Nous venons de voir que pour $t = -\infty$, on a

$$e^{-\tau} = \frac{y_2 - y_1}{\psi_2 - \psi_1},$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \frac{dl_2}{dt} &= -e^{-\tau} \frac{\psi_1 + \psi_2}{\pi} \frac{t - t_0}{(t-a)(t-b)} \cong -\frac{y_2 - y_1}{\pi} \frac{t - t_0}{(t-a)(t-b)} \rightarrow 0, \\ \frac{dl_2}{ds} &\cong \omega_1 \frac{y_2 - y_1}{\pi} (t - t_0) \sqrt{\frac{t^2}{(t-a)(t-b)}} = Bt[1 + o(t)] \end{aligned}$$

devient infini comme t .

On en tire, comme au n° 381,

$$\frac{dl_2}{ds} = \frac{K_1}{s - s_1} + \dots \quad (K_1 > 0) \quad \text{et} \quad l_2(s) = K_1 \log(s - s_1) + \dots$$

5555. *Remarque.* — Nous avons vu que si $\Psi_i(l_i)$ ont des valeurs asymptotiques de la forme $\frac{A}{l_i(\log|l_i|)^n}$ au moins, les parois ont des asymptotes.

Nous venons de voir que le canal conservant une largeur bornée non nulle par hypothèse, l_i est infini comme $B \log|\varepsilon - s_1|$ (en s_1 , par exemple), de sorte que $\Psi_i[l_i(s)]$ satisfera à une condition $\frac{C}{\log|\varepsilon - s_1| [\log|\log(\varepsilon - s_1)|]^n}$.

Mais si $A > 0$, $\log A$ est $< A$, et cette condition est moins restrictive qu'une condition $L_n(s)$.

Ceci prouve que le théorème 3413 s'étendra à une telle condition; cela ne peut nous étonner puisque nous n'avions qu'une condition suffisante.

5556. Ce que nous venons de voir sur la solution éventuelle du problème, en ce qui concerne $l_2(s)$ et $l_1(s)$ fixe l'espace auquel doivent satisfaire les fonctions approchées $l_1(s)$ et $l_2(s)$. Naturellement les fonctions $L_1(s)$ et $L_2(s)$ qui en résultent appartiendront au même espace.

5557. Le signe de $\frac{dL_2}{ds} = e^{-\tau} \frac{df}{dt} \frac{dt}{ds}$ est celui de $-\frac{df}{dt}$, car $\frac{dt}{ds}$ est < 0 , $\frac{df}{dt} = -\frac{\psi_1 + \psi_2}{\pi} \frac{t - t_0}{(t-a)(t-b)}$ est positif sur μ_2 , donc $\frac{dL_2}{ds}$ est < 0 comme $\frac{dl_2}{ds}$. De même $\frac{dL_1}{ds}$ est > 0 comme $\frac{dl_1}{ds}$.

556. *Substitutions de fonctions bornées à $l_1(s)$ et $l_2(s)$.*

5561. L'espace E_1 des fonctions $l_1(s)$ comprend les fonctions réelles et dérivables de s dont l'argument est compris entre s , et π et qui sont infinies

comme $\log|s - s_1|$ au point s_1 , comme $\log(\pi - s)$ au point π et dont la dérivée est d'ailleurs positive.

L'espace E_2 de $l_2(s)$ comprend les fonctions réelles et dérivables de s dont l'argument est compris entre 0 et s_1 et qui sont infinies comme $\log|s - s_1|$ au point s_1 , comme $\log s$ au point 0 et dont la dérivée est d'ailleurs négative.

5562. Au lieu des fonctions l_1 et l_2 qui ont le tort de devenir infinies, nous allons introduire les fonctions

$$(1) \quad h_1 = \arctang l_1, \quad h_2 = \arctang l_2.$$

A l'infini, on a

$$h \cong \arctang A \log(s - s_1), \quad \text{d'où} \quad h = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{A \log(s - s_1)},$$

de sorte que h a un module de continuité $\gamma_1(s - s_1)$ à l'infini et est dérivable partout ailleurs.

Il en sera de même de $H_i(s)$ qui est également continu avec $h_i(s)$.

5563. Nous introduirons donc l'espace abstrait $E'_1(s_1, \pi, s)$ [$E'_2(0, s_1, s)$] qui comprend les fonctions $h(s)$ réelles croissantes (décroissantes) et également continues de s dans l'intervalle (s_1, π) ($0, s_1$), et dont le module de continuité est γ_n aux deux extrémités de l'intervalle et qui est dérivable dans le reste de l'intervalle.

Cet espace est linéaire, normé par $|h(s)|$ et complet en vertu de l'égalité de continuité et du théorème d'Arzela.

5564. Nous sommes alors conduits à remplacer dans le système (5471) les fonctions $l_1(s)$ et $l_2(s)$ par $h_1(s)h_2(s)$. Les fonctions $\Psi_1(l_1)$ et $\Psi_2(l_2)$ deviennent alors des fonctions $\Psi_1(h_1)$ et $\Psi_2(h_2)$.

L'espace $F(-\infty, +\infty, x)$ devient l'espace $F'(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, h)$ qui comprend les fonctions réelles également continues de la variable réelle h pour toute valeur comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ et qui pour les valeurs $\pm \frac{\pi}{2}$ s'annulent comme

$$B. \quad \frac{1}{\tan x |\log |\tan x||^n} \quad (n > 1).$$

557. Espace des fonctions $l(s)$.

L'espace E' des fonctions $l(s)$ est le sous-espace de $E(\alpha, \beta, s)$ des fonctions réelles également continues de la variable réelle s dans l'intervalle α, β fermé, qui admettent une dérivée vérifiant une condition $\mathcal{L}_{n-1}(s)$ pour $s \neq s_0$, et continue même en $s = s_0$, fonctions d'ailleurs croissantes.



558. *Remarque.*

5581. Nous avons donc défini les espaces linéaires, normés et complets auxquels appartiennent les fonctions $\bar{\Phi}(l)$, $\Psi_1(h_1)$, $\Psi_2(h_2)$ d'une part, d'autre part ceux auxquels appartiennent les fonctions $l(s)$, $h_1(s)$ et $h_2(s)$, les paramètres a et b appartenant à l'espace euclidien.

5582. Nous avons montré que la solution éventuelle appartient à ces espaces et est normée *a priori*.

56. THÉORÈME D'EXISTENCE.

5611. Reprenant la méthode de M. Kravtchenko, nous considérerons une grandeur ν constante, ayant les dimensions d'une longueur et nous écrirons le système (546. 1) modifié par (556) sous la forme

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} l(s) = V[l(s), h_1(s), h_2(s), a', b', \bar{\Phi}(l), \Psi_1(h_1), \Psi_2(h_2), \alpha, \beta], \\ h_1(s) = V_1[\dots], \\ h_2(s) = V_2[\dots], \\ b' = b' + \arctang \left\{ \frac{\nu}{a_1} - \frac{\nu}{D_1[\dots]} \right\}, \\ a' = a' + \arctang \left\{ \frac{\nu}{a_2} - \frac{\nu}{D_2[\dots]} \right\}. \end{array} \right.$$

Où nous substituons aux paramètres a et b , les paramètres

$$a' = \arctang \frac{1}{a+1}, \quad b' = \arctang \frac{1}{b-1};$$

les arc tang étant les déterminations comprises entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.

Ce système remplace le système (*J. K.*, 3. 37, p. 208).

5612. Grâce à ce système, les fonctionnelles du second membre font correspondre à un ensemble $l(s)$, $h_1(s)$, $h_2(s)$, a' , b' un ensemble d'éléments de même nature $L(s)$, $H_1(s)$, $H_2(s)$, A' , B' .

Nous introduirons donc un espace abstrait $E^*(s, a', b')$ d'éléments

$$x = [l(s), h_1(s), h_2(s), a', b']$$

sur lequel opère la transformation

$$\mathcal{F} \{ x; \bar{\Phi}(l), \Psi_1(h_1), \Psi_2(h_2), d_1, d_2, \alpha, \beta \},$$

définie par ce second membre, de sorte que le système (1) se réduit à l'équation fonctionnelle unique

$$(1) \quad x = \mathcal{F} \{ x; \bar{\Phi}(l), \Psi_1(h_1), \Psi_2(h_2), d_1, d_2, \alpha, \beta \}$$

du type même envisagé par MM. Leray et Schauder.

5613. Nous allons introduire le coefficient k de l'intervalle $K : 0, 1$.
En posant

$$(1) \quad \begin{cases} \Psi_1^*(l_1) = k\Psi_1(l_1), \\ \Psi_2^*(l_2) = k\Psi_2(l_2), \\ \bar{\Phi}^*(l) = k\bar{\Phi}(l) + (1-k)\frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta_1^* = \Delta_1, \\ \Delta_2^* = k\Delta_2 + (1-k)\Delta_1. \end{cases}$$

Ce faisant, pour $k = 1$ nous avons affaire au problème posé et pour $k = 0$, nous avons affaire à un canal rectiligne perpendiculaire à un obstacle de longueur $\beta - \alpha$, lequel est placé symétriquement dans ce canal, cas pour lequel on sait qu'il existe une solution (résolution directe ou application du théorème d'existence établi par M. Kravtchenko, § 28, p. 207 à 211).

5621. Les paramètres Δ_1^* et Δ_2^* ne sont jamais nuls et la couronne $(d)^*$ ne dégénère pas, $q^* < 1, |a^* + 1| > 0$ ainsi que $b^* - 1$.

5622. Les grandeurs d_1^* (et d_2^*) se calculent à partir des nombres Δ_1^* (Δ_2^*) et de $\Psi_1^*(l_1)$ [$\Psi_2^*(l_2)$] dans le cas du canal divergent monotone et sont par conséquent minorés par Δ_1^* (Δ_2^*).

Elles sont égales à Δ_1^* (et Δ_2^*) dans le cas du canal convergent monotone.

Ce sont des fonctions de k virtuellement connues *a priori*, mais qu'il n'est pas nécessaire d'explicitier et qui restent bornées.

5623. Les fonctions $\bar{\Phi}^*(l)$, $\Psi_1^*(h_1)$, $\Psi_2^*(h_2)$ vérifient les mêmes conditions que $\bar{\Phi}(l)$, $\Psi_1(h_1)$, $\Psi_2(h_2)$. (Cf. 511, 512, 5131, 5132, 5133, 515).

5624. Nous supposons que (52) est satisfait, ce qui est *essentiel*, pour toute valeur k de l'intervalle K .

Ceci sera le cas pour l'obstacle tranchant et le canal monotone divergent en vertu toujours du théorème 2 du n° 412, quelle que soit la valeur de k dans l'intervalle.

563. Dans ces conditions, l'équation du problème (5612. 1) s'écrit encore

$$(1) \quad x^* = \mathcal{F} [x^*; \bar{\Phi}^*(l), \Psi_1^*(h_1), \Psi_2^*(h_2), d_1^*, d_2^*, \alpha, \beta].$$

ou tout simplement sous la forme

$$(2) \quad x = \mathcal{F} [x; k; \bar{\Phi}(l), \Psi_1(h_1), \Psi_2(h_2), d_1, d_2, \alpha, \beta].$$

5640. Il s'agit d'établir que cette transformation jouit des propriétés énoncées au numéro 501.

5641. Les espaces abstraits en cause, y compris l'espace des nombres a' et b' , sont linéaires, normés et complets; il en est donc de même de l'espace

$E^*[s, a', b']$ auquel appartient l'élément x , la norme en étant

$$\|x\| = \|l(s)\| + \|h_1(s)\| + \|h_2(s)\| + \left| \arctang \frac{1}{b-1} \right| + \left| \arctang \frac{1}{a+1} \right|.$$

5642. La transformation

$$(1) \quad y = \mathcal{F}\{x; k; \bar{\Phi}(l), \Psi_1(h_1), \Psi_2(h_2), d_1, d_2, \alpha, \beta\}$$

est continue par rapport à x , car $|a|$ et b étant distincts de 1 l'élément $L(s)$, $H_1(s)$, $H_2(s)$, A' , B' dépend continument de $l(s)$, $h_1(s)$, $h_2(s)$, a' , b' , $\bar{\Phi}(l)$, $\Psi_1(h_1)$, $\Psi_2(h_2)$, α , β .

On voit d'après (5524) que $|a|$ et b étant bornés et distincts de 1, $\frac{\Psi_1 + \Psi_2}{|a|b}$ est majorée au moyen des normes $\|l(s)\|$, $\|h_1(s)\|$, $\|h_2(s)\|$, $\|\bar{\Phi}(l)\|$, $\|\Psi_1(l_1)\|$, $\|\Psi_2(l_2)\|$, $|\alpha|$, $|\beta|$, $|a'|$ et $|b'|$. Il en résulte que $\|L(s)\|$, $\|H_1(s)\|$ et $\|H_2(s)\|$ seront majorés par les mêmes quantités, de sorte que, à tout ensemble borné de l'espace $E^*(s, a', b')$, correspond un ensemble borné du même espace.

Le principe de Weierstrass-Bolzano s'appliquant à $E^*(s, a', b')$, ce dernier ensemble est compact, ce qui montre que la transformation \mathcal{F} est complètement continue relativement à x .

D'autre part cette transformation est uniformément continue relativement à k en vertu des égalités (1) et du numéro 5622. pour $0 \leq k \leq 1$, les arcs tangentes restant continus pour D_1 et D_2 nuls.

5643. Enfin les éléments $l_1(s)$, $h_1(s)$, $h_2(s)$, a' et b' , qui définissent la solution éventuelle de l'équation $x = \mathcal{F}(x, k)$, vérifient les inégalités

$$\|l(s)\| < \text{const.}, \quad \|h_1(s)\| < \text{const.}, \quad \|h_2(s)\| < \text{const.}, \quad |a'| < \frac{\pi}{2}, \quad |b'| < \frac{\pi}{2},$$

de sorte que la solution x est supérieurement normée quel que soit k et reste intérieure à un domaine borné D de l'espace $E^*(s, a', b')$.

565. Le critère d'existence est alors applicable. Et comme le problème a une solution pour $k=0$, $i(0) \neq 0$. Il s'ensuit que $i(1) \neq 0$, et l'équation $x = \mathcal{F}(x, 1)$ a une solution au moins.

Ainsi se trouve démontrée l'existence d'une solution au moins au problème posé au n° 540.

57. RÉSUMÉ.

571. Nous avons ainsi établi l'existence d'une solution au problème du sillage dans le cas ci-dessous :

1°. L'obstacle et les parois ont une tangente continue hölderienne en chacun de leurs points.

2°. Ces parois sont monotones, le canal convergent ou divergent, et admettent une direction asymptotique unique.

3°. L'obstacle est tranchant et coupé en un seul point par une parallèle à la direction asymptotique ci-dessus.

4°. Les 4 asymptotes parallèles sont à distance finie et ne recoupent pas l'obstacle, la valeur Ψ de l'angle de la tangente avec la direction donnée est de la forme

$$\Psi \cong \frac{B}{l(\log |l|)^n} \quad (n \geq 1 \text{ pour } l = \pm \infty)$$

sur chaque paroi.

5°. La pente Ψ des parois et la pente $\bar{\Phi}$ de l'obstacle satisfont à une condition

$$|\Psi| \leq \varepsilon \leq \bar{\Phi} \leq \pi - \varepsilon.$$

6°. Enfin la deuxième condition de Brillouin (52) est satisfaite pour le schéma initial et ceux que l'on obtient par la transformation (5613. 1).

572. *Application.* — Le théorème 2 du numéro 412 nous apprend que pour un canal divergent monotone et un obstacle tranchant la condition 6°, ci-dessus est satisfaite. Pour les squelettes qui satisfont aux conditions 1°, 4° et 5° ci-dessus, nous sommes assurés par conséquent de l'existence d'une solution (au moins) dans ce cas.

ANNEXES.

Annexe 1. — SUR LE PROBLÈME DE DIRICHLET GÉNÉRALISÉ.

A 10. « Le problème de la représentation conforme offre des liens étroits avec le problème de Dirichlet ». « En particulier, étant donné un domaine D limité par une seule courbe fermée C, on saura résoudre le problème de Dirichlet pour ce domaine, si l'on sait effectuer la représentation conforme de D sur la surface d'un cercle » (1).

A 11. Soit

$$(1) \quad z(\zeta)$$

la fonction analytique qui transforme D en Δ de frontière Γ , et

$$(2) \quad f(z) = \int_C \varphi(z') k(z, z') dz'$$

la formule qui résout le problème de Dirichlet pour D, $\varphi(z)$ étant la fonction donnée égale à la partie réelle de $f(z)$ sur C.

(1) GOURSAT, *Cours d'Analyse mathématique*, t. 3, 2^e édition, 1915, § 517, p. 212.

Appelons $\bar{f}(\zeta)$, etc, le résultat de la substitution $z(\zeta)$ dans f , etc. nous aurons

$$(3) \quad \bar{f}(\zeta) = \int_{\Gamma} \bar{\varphi}(\zeta') \bar{k}(\zeta, \zeta') \frac{dz'}{d\zeta'}.$$

On remplace donc $k(z, z')$ par

$$(4) \quad k[z(\zeta), z'(\zeta')] \frac{dz'}{d\zeta'}.$$

A 12. *Cas du cercle D de circonférence C.* Méthode imitée de M. B. Demtchenko (1).

A 121. Le théorème de Cauchy appliqué à z intérieur donne

$$(1) \quad f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_C f(z') \frac{1}{z' - z} dz'.$$

$\frac{1}{\bar{z}}$ est extérieur à D et le premier théorème de Cauchy appliqué à

$$f(z') \frac{1}{z' - \frac{1}{\bar{z}}} \quad (\bar{z} = \text{imaginaire conjuguée de } z)$$

donne

$$(2) \quad 0 = \int_C f(z') \frac{1}{z' - \frac{1}{\bar{z}}} dz',$$

d'où pour la valeur imaginaire conjuguée

$$(3) \quad 0 = \int_C \overline{f(z')} \frac{1}{z' - \frac{1}{\bar{z}}} d\bar{z}'.$$

Si C est le cercle de rayon 1, posons $z' = e^{i\alpha}$, $f(z') = \varphi(\alpha) + i\psi(\alpha)$, (1) et (3) deviennent

$$(4) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} \varphi(\alpha) \frac{e^{i\alpha} d\alpha}{e^{i\alpha} - z} + i \int_0^{2\pi} \psi(\alpha) \frac{e^{i\alpha} d\alpha}{e^{i\alpha} - z} \right],$$

$$(5) \quad 0 = \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(\alpha) - i\psi(\alpha)}{z e^{-i\alpha} - 1} z e^{-i\alpha} d\alpha \quad \text{donc} \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(\alpha) - i\psi(\alpha)}{e^{i\alpha} - z} z d\alpha = 0.$$

Ajoutant (4) et (5), il vient

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} \varphi(\alpha) \frac{e^{i\alpha} + z}{e^{i\alpha} - z} d\alpha + i \int_0^{2\pi} \psi(\alpha) \frac{e^{i\alpha} - z}{e^{i\alpha} - z} dz \right].$$

La deuxième partie du crochet est une constante imaginaire pure.

Mais, d'après (4),

$$f(0) = \varphi(0) + i\psi(0) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} \varphi(\alpha) d\alpha + i \int_0^{2\pi} \psi(\alpha) d\alpha \right],$$

d'où la formule bien connue

$$(6) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\alpha) \frac{e^{i\alpha} + z}{e^{i\alpha} - z} d\alpha + i\psi(0).$$

(1) *Problèmes mixtes harmoniques*, p. 2 et 3.

Retenons

$$\varphi_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\alpha) d\alpha.$$

A 122. La justification que $f(z)$ jouit des propriétés de limites désirées a été traitée par M. H. Villat (1). Nous n'y reviendrons pas.

A 13. Cas du demi-plan T.

A 131. M. B. Demtchenko résout la question directement. On peut aussi passer du cercle au demi-plan t par la transformation homographique

$$z = \frac{at + b}{ct + d} \left[\begin{array}{c|ccc} t & \infty & 0 & i \\ \hline z & -1 & +1 & 0 \end{array} \right],$$

qui donne $z = \frac{1+it}{1-it}$ ou $t = i \frac{1-z}{1+z}$; d'où, à partir de (A. 121.6)

$$(1) \quad f(t) = \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t') dt'}{t' - t} + ik_0 \quad \text{avec} \quad k_0 = \psi_0 + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t') t' dt'}{1+t'^2},$$

intégrales où il s'agit des valeurs principales de Cauchy.

A 132. Pour interpréter k_0 , nous reviendrons à (A 121.6) que nous mettrons sous la forme

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\varphi(\alpha) - \varphi(\beta)] \frac{e^{i\alpha} + \rho e^{i\beta}}{e^{i\alpha} - \rho e^{i\beta}} d\alpha + \varphi(\beta) + i\psi_0,$$

d'où

$$f(-1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\varphi(\alpha) - \varphi_{-1}] \frac{e^{i\alpha} - 1}{e^{i\alpha} + 1} d\alpha + \varphi_{-1} + i\psi_0 = \varphi_{-1} + i\psi_{-1},$$

d'où

$$\begin{aligned} k_0 &= \psi(\infty) - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi(t') - \varphi(\infty)] \frac{t' dt'}{1+t'^2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t') t' dt'}{1+t'^2} \\ &= \psi(\infty) + \frac{\varphi(\infty)}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t' dt'}{1+t'^2}. \end{aligned}$$

Il s'agit encore de la valeur principale de Cauchy, laquelle est nulle; d'où

(2)

$$k_0 = \psi(\infty)$$

A 14. De là on passe au Cas du rectangle (R) (fig. 5) en posant

$$u = \int_{-\infty}^t \frac{dt}{\sqrt{R(t)}} \quad \text{avec} \quad R(t) = (t-a)(t^2-1)(t-b).$$

De

$$dt = p' \frac{\frac{\gamma}{2}}{2} \frac{1}{\left[p \frac{\gamma}{2} - p \left(u + \frac{\gamma}{2} \right) \right]^2} p' \left(u + \frac{\gamma}{2} \right) du$$

(1) Bulletin de la Société Mathématique de France (1911).

on tire

$$t = C + \frac{p' \frac{\gamma}{2}}{p \frac{\gamma}{2} - p\left(u + \frac{\gamma}{2}\right)},$$

d'où

$$t' - t = p' \frac{\gamma}{2} \frac{p\left(u' + \frac{\gamma}{2}\right) - p\left(u + \frac{\gamma}{2}\right)}{\left[p \frac{\gamma}{2} - p\left(u' + \frac{\gamma}{2}\right)\right] \left[p \frac{\gamma}{2} - p\left(u + \frac{\gamma}{2}\right)\right]}.$$

Portant dt' et $(t' - t)$ dans A (131.1), il vient

$$\frac{f(u) - i\psi(\infty)}{p \frac{\gamma}{2} - p\left(u + \frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{1}{i\pi} \oint_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(u')}{p \frac{\gamma}{2} - p\left(u' + \frac{\gamma}{2}\right)} \frac{p'\left(u' + \frac{\gamma}{2}\right)}{p\left(u' + \frac{\gamma}{2}\right) - p\left(u + \frac{\gamma}{2}\right)} du',$$

d'où, par un changement de fonction et de variable immédiat ($v = u + \frac{\gamma}{2}$),

$$(1) \quad F(v) = \frac{1}{i\pi} \oint_{\mathbb{R}} \Phi(v') \frac{p'v'}{p v' - p v} dv' + iK_0,$$

qui résout le problème de Dirichlet généralisé dans un rectangle construit sur

$$OA = \omega_1, \quad OB = \frac{\omega_3}{i}.$$

A 15. De là, on passe dans la demi-couronne (d) (fig. 6).

En posant : $v = \omega_1 + \omega_3 - \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z$, on obtient

$$F(Z) = \frac{\omega_1}{\pi^2} \oint_{(d)} \frac{\Phi(Z') p'\left(\omega_1 + \omega_3 - \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z'\right) dZ'}{\left[p\left(\omega_1 + \omega_3 - \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z'\right) - p\left(\omega_1 + \omega_3 - \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z\right)\right] Z'} + iK_0.$$

Dans le cas particulier du schéma de Helmholtz-Kirchhoff, $\Phi(Z)$ est nul le long de OX .

Dans le cas général, si l'on connaît la partie réelle de $f(Z)$ sur les arcs de circonférences et la partie imaginaire sur l'axe OX (Problème mixte) en considérant

$$F(Z) = \frac{f(Z) - iK_0}{p'\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z\right)}$$

réel sur les arcs de circonférences et sur l'axe réel, nous pourrions résoudre le problème mixte ainsi posé.

Pour le cas du schéma de Helmholtz-Kirchhoff, l'introduction de cette fonction $F(Z)$ conduit alors à

$$(1) \quad f(Z) = \frac{i\omega_1}{\pi^2} (I_1 - I_2) + iK_0$$

avec

$$I_1 = \int_0^\pi p' \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \right) \frac{\Phi(\varepsilon)}{p' \left(\frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon \right) p \left(\omega_1 + \omega_3 - \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon \right) - p \left(\omega_1 + \omega_3 - \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \right)} d\varepsilon,$$

$$I_2 = \int_0^\pi p' \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \right) \frac{\Psi(\varepsilon)}{p' \left(\frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon + \omega_3 \right) p \left(\omega_1 - \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon \right) - p \left(\omega_1 + \omega_3 - \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \right)} d\varepsilon.$$

On voit facilement que la formule ci-dessus peut se mettre sous la forme donnée par M. H. Villat d'après les pôles et résidus des fonctions sous les signes \int et compte tenu de la condition de régularité.

Annexe 2. — SUR LA CONSTRUCTION DU MODULE DE CONTINUITÉ (1).

A 21. Nous ne donnerons ici qu'un exposé très succinct. Nous avons repris la démonstration de M. J. Kravtchenko, en précisant l'inégalité ligne 20 de la page 67, ce qui nous a conduit à scinder l'intervalle d'intégration en intervalles d'amplitude plus petite que l'unité.

Soit donc un intervalle $E = b - a \leq \frac{1}{2}$.

Considérons

$$\Delta U = U(\varepsilon_1) - U(\varepsilon) = \int_0^b \left[\frac{\Psi(\varepsilon_1) - \Psi(s)}{\varepsilon_1 - s} - \frac{\Psi(\varepsilon) - \Psi(s)}{\varepsilon - s} \right] ds.$$

Nous voulons montrer que :

Si $\Psi(\varepsilon)$ appartient à l'espace $L_n(\varepsilon)$, $U(\varepsilon)$ appartient à l'espace $L_{n-1}(\varepsilon)$ (J. K., p. 66).

A 22. Nous supposons $\varepsilon_1 > \varepsilon$ et divisons E en trois intervalles : E_1, E_2, E_3 par les nombres $\varepsilon - \eta, \varepsilon_1 + \eta$ où $\eta = \varepsilon_1 - \varepsilon$; chacun de ces intervalles est traité par un procédé différent (E_1 comme E_3) dont nous ne pouvons donner le développement ici, faute de place. Le principe pour $E_1 (E_3)$ consiste à mettre le [] sous la forme

$$[] = \frac{\Psi(s) - \Psi(\varepsilon)}{(\varepsilon - s)(\varepsilon_1 - s)} (\varepsilon_1 - \varepsilon) + \frac{\Psi(\varepsilon_1) - \Psi(\varepsilon)}{\varepsilon_1 - s},$$

et à chercher la contribution de chaque terme de cette somme à ΔU .

Pour E_2 , on cherche la contribution directe de

$$\frac{\Psi(\varepsilon_i) - \Psi(s)}{\varepsilon_i - s} \quad (i = 0, 1).$$

A 23. Si l'intervalle excède $\frac{1}{2}$ (ou pour toute autre raison), on est amené à scinder l'intervalle (A, B pour fixer les idées) en trois intervalles E', E, E'' par les nombres a, b satis-

(1) Notons que l'on doit à M. J. Kravtchenko l'introduction systématique du critère $L_n(s)$ ainsi que de nombreuses applications.

faisant à $A < a < \varepsilon < \varepsilon_1 < b < B$ avec $b - a < \frac{1}{2}$. En ce qui concerne E' et E'' , nous traitons le crochet comme pour $E_1(E_3)$, mais par un raisonnement beaucoup plus simple.

On constate que la continuité de Ψ dans ces intervalles E' , E'' n'intervient pas, mais seulement son bornage.

A 24. On établit aisément que les discontinuités de première espèce de $\Psi(\varepsilon)$, et même de deuxième espèce d'un ordre $\alpha < 1$, n'interviennent pas lorsque ε , ε_1 appartiennent à un intervalle de continuité, de sorte que le théorème de M. J. Kravtchenko s'applique.

A 25. L'extension à la valeur principale de Cauchy n'offre pas de difficultés et s'établit en scindant le crochet comme pour $E_1(E_3)E'(E'')$.

Annexe 3. — SUR LE COMPORTEMENT D'UNE FONCTION ANALYTIQUE A LA FRONTIÈRE (1).

A 31. Cas du cercle de rayon 1.

A 311. Reprenons la formule fondamentale A 121.6 et supposons que $\Phi(s)$ possède une discontinuité de première espèce au point $s = s_0$. Nous mettons la formule A 121.6 sous la forme

$$(1) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{s_0-\pi}^{s_0+\pi} \frac{e^{is} + z}{e^{is} - z} \Phi(s) ds + i\psi_0.$$

Soit

$$(2) \quad \begin{aligned} \Phi(s) &= \Phi(s_0+0) + h(s) & \text{pour } s_0 < s \leq s_0 + \pi \\ \Phi(s) &= \Phi(s_0-0) + h(s) & \text{pour } s_0 - \pi \leq s < s_0 \end{aligned} \quad \text{avec } h(s_0) = 0.$$

L'intégrale (1) est alors la somme des trois intégrales

$$(3) \quad \begin{aligned} f_1(z) + f_2(z) + f_3(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{s_0-\pi}^{s_0+\pi} \frac{e^{is} + z}{e^{is} - z} h(s) ds \\ &+ \frac{\Phi(s_0+0)}{2\pi} \int_{s_0}^{s_0+\pi} \frac{e^{is} + z}{e^{is} - z} ds + \frac{\Phi(s_0-0)}{2\pi} \int_{s_0-\pi}^{s_0} \frac{e^{is} + z}{e^{is} - z} ds. \end{aligned}$$

A 312. La première intégrale a un sens quand $z \rightarrow e^{is_0}$ si $h(s)$ converge assez rapidement vers zéro. On montre qu'une condition $L_n(s) n > 1$ en $s = s_0$ suffit. Cette intégrale a alors une limite égale à

$$\frac{i}{2\pi} \int_{s_0-\pi}^{s_0+\pi} \frac{h(s)}{\operatorname{tang} \frac{s-s_0}{2}} ds = iB \quad (B \text{ réel et borné}).$$

A 3130. Le calcul de $\int \frac{e^{is} + z}{e^{is} - z} ds$ se fait en posant $e^{is} = t$, ce qui donne

$$I_2 = \frac{2}{i} \log \frac{z + e^{is_0}}{z - e^{is_0}} - \pi \quad \text{et} \quad I_3 = \frac{2}{i} \log \frac{z - e^{is_0}}{z + e^{is_0}} - \pi.$$

(1) Consulter sur ce sujet les travaux et ouvrages classiques de M. Gaston Julia sur la *Représentation conforme* et en particulier ses *Exercices d'analyse*.

Posant $z = e^{i s_0} + r e^{i s_0 + i \frac{\pi}{2} + i \omega}$, ω étant l'angle du vecteur $\overrightarrow{e^{i s_0} z}$ avec la tangente à la circonférence de rayon 1 au point s_0 , il vient

$$\log \frac{z + e^{i s_0}}{z - e^{i s_0}} = \log(2 + i r e^{i \omega}) - \log r - i \left(\frac{\pi}{2} + \omega + 2 K \pi \right).$$

A 3131. Et $I_2 = \frac{2}{i} [\log(2 + i r e^{i \omega}) - \log r] - 2 [\omega + (2 K + 1) \pi]$.

Pour $z = 0$ ($r = 1, \omega = \frac{\pi}{2}$), on a directement

$$I_2 = \int_{s_0}^{s_0 + \pi} ds = \pi, \quad \text{d'où} \quad K = -1.$$

A 3132. Et $I_3 = -\frac{2}{i} [\log(2 + i r e^{i \omega}) - \log r] + 2(\omega - 2 K' \pi)$.

Pour $z = 0$, on a directement

$$I_3 = \pi \quad \text{d'où} \quad K' = 0.$$

A 314. Il vient alors

$$(i) \quad f(z) = \Phi(s_0 + 0) \frac{\pi - \omega}{\pi} + \Phi(s_0 - 0) \frac{\omega}{\pi} + \frac{i}{\pi} \log r [\Phi(s_0 + 0) - \Phi(s_0 - 0)] \\ - \frac{i}{\pi} \log(2 + i r e^{i \omega}) [\Phi(s_0 + 0) - \Phi(s_0 - 0)] + i(B + \psi_0) + \varepsilon_1 + i \varepsilon_2,$$

où

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0 \text{ avec } r.$$

Sous-cette forme, nous voyons que

A 315. Si $\Phi(s)$ est continue et converge assez rapidement (A 312), la partie réelle de $f(z)$ prend bien sur le contour la valeur $\Phi(s_0)$ et la partie imaginaire reste bornée. La première partie de ce résultat est bien connue (*Scientia*, n° 38, p. 9).

A 316. Si $\Phi(s)$ possède une discontinuité de première espèce pour $s = s_0$ et ce dans les conditions de (A 312), la fonction harmonique, partie réelle $[f(z)]$, prend toutes valeurs comprises entre $\Phi(s_0 + 0)$ et $\Phi(s_0 - 0)$, et ceci en éventail. [Résultat bien connu, établi dans Picard (t. 1, 3^e édition, p. 315 à 319) à propos de l'intégrale de Poisson]. Quant à la partie imaginaire, elle devient infinie et sa valeur asymptotique est égale à

$$\frac{\Phi(s_0 + 0) - \Phi(s_0 - 0)}{\pi} \log r.$$

A 317. J'ai établi, par application de ce qui précède, en Annexe du Cours de Mécanique des Fluides de l'École Nationale Supérieure de l'Aéronautique (1) que l'on pouvait calculer la résistance complexe \vec{R} sans se soucier des points singuliers de l'obstacle (2), sauf peut-être si le point de bifurcation est un rebroussement vers le fluide mort

$$[\Phi(s_0 + 0) - \Phi(s_0 - 0) < 2\pi],$$

ceci d'ailleurs en fluide indéfini.

(1) 1942-1943. M. l'Ingénieur en Chef Giqueaux du corps de l'Aéronautique. Professeur à l'E. N. S. Aé.

(2) Ce résultat a été établi dans la Thèse de M. H. Villat pour un cas particulier.

A 32. *Cas d'un domaine simplement connexe borné ou non.*

A 320. On représentera le domaine (z) sur le cercle (Z).

A 321. Si le point de la frontière est ordinaire, on a $\frac{dz}{dZ}$ ni nul ni infini, la formule (A 314. 1) reste valable, s_0 représentant alors l'arc de la frontière.

A 322. Si le point de la frontière est anguleux, on a $\frac{dz}{dZ} = A dZ^{\nu}$, car la dérivée est 0 ou ∞ avec $\nu > 0$, si $\frac{dz}{dZ} = 0$ et $\nu < 0$, si $\frac{dz}{dZ} = \infty$.

Posons $dz = \rho e^{i\lambda}$, $dZ = R e^{i\Lambda}$, $A = K e^{i\alpha}$, il viendra

$$(1) \quad \frac{\rho}{R} = KR^{\frac{\nu}{\pi}},$$

ρ sera infiniment petit d'ordre supérieur ou inférieur à R selon que ν est ≥ 0 .

Il vient également

$$\lambda = \alpha + \Lambda + \frac{\nu}{\pi} \Lambda.$$

Par deux rotations, on peut faire que la tangente positive aux contours corresponde à $\lambda = \Lambda = 0$, d'où

$$(2) \quad \alpha = 0 \quad \text{et} \quad \lambda = \Lambda \frac{\pi + \nu}{\pi}.$$

Λ variant de 0 à π , λ variera en éventail de 0 à $\varphi = \pi + \nu$; $\nu > 0$ angle obtus, $\nu < 0$ angle aigu; φ angle intérieur des tangentes.

Remplaçant dans A 314. 1 valable dans le cercle Z (notations $r = R$, $\omega = \Lambda$) : $\frac{\log R}{\pi}$ par sa valeur $\frac{\log \rho}{\varphi}$ et $\frac{\Lambda}{\pi}$ par $\frac{\lambda}{\varphi}$, il vient

$$(3) \quad f(z) = \Phi(s_0 + 0) \frac{\varphi - \lambda}{\varphi} + \Phi(s_0 - 0) \frac{\lambda}{\varphi} + \frac{i}{\varphi} \log \rho [\Phi(s_0 + 0) - \Phi(s_0 - 0)] + \dots$$

A 323. Dans cette formule s_0 n'est plus qu'un repère, et non l'arc du contour.

A 33. *Cas du demi-plan T pour t infini.*

La fonction de transformation $t = i \frac{1+z}{1-z}$ ramène le point à ∞ au point $z = 1$ et le demi-plan T au cercle de rayon 1.

Dans A 314. 1, $s_0 = 0$, nous remplacerons ρ et ω par des quantités équivalentes.

Soit

$$(1) \quad t = R e^{i\varphi}, \quad z = 1 + \rho e^{i(\omega + \frac{\pi}{2})}, \quad \text{d'où} \quad R = \frac{2}{\rho} + \varepsilon, \quad \varphi = \pi - \omega.$$

et

$$(2) \quad f(t) = \Phi(+\infty) \frac{\pi - \varphi}{\pi} + \Phi(-\infty) \frac{\varphi}{\pi} + \frac{i}{\pi} [\Phi(+\infty) - \Phi(-\infty)] \log R + \dots$$

A 34. *Allure du schéma au point de bifurcation.*

A 341. Appliquant (A 322. 3) à la fonction Ω de Levita-Civita (11. 2), il vient

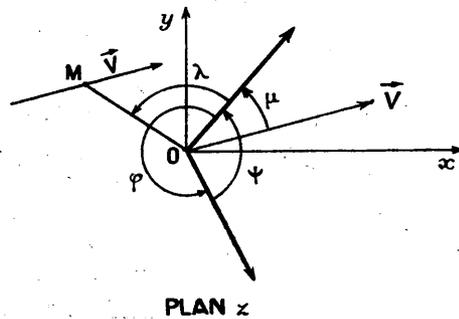
$$(1) \quad \Theta(\rho, \lambda) = \Theta(0, 0) \frac{\varphi - \lambda}{\varphi} + \Theta(0, \varphi) \frac{\lambda}{\varphi} + \dots$$

et en posant (fig. 20)

$$\Theta(0, 0) - \Theta(\rho, \lambda) = \mu \quad \text{et} \quad \Theta(0, 0) - \Theta(0, \varphi) = \psi,$$

$$(2) \quad \frac{\mu}{\psi} = \frac{\lambda}{\varphi},$$

Fig. 20.

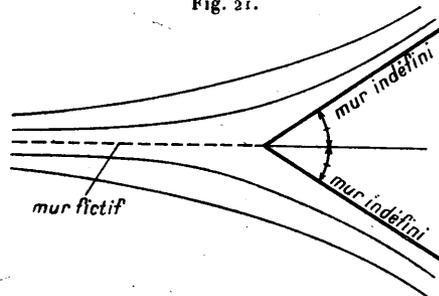


THEOREME. — La direction de la vitesse en un point voisin des points de bifurcation divise l'angle des tangentes à l'obstacle sis dans le fluide mort, dans le même rapport que le rayon polaire divise l'angle de ces mêmes tangentes sis dans le fluide vif.

En particulier, la bissectrice de l'angle des tangentes est tangente à la ligne de courant qui bifurque sur l'obstacle.

La formule (1) est d'ailleurs applicable au cas d'un obstacle formé de deux murs indéfinis, la vitesse à l'infini amont étant parallèle à la bissectrice des deux murs. A l'échelle infinitésimale, le champ local des vitesses, et les lignes de courant sont dessinées par l'écoulement dans un angle égal à l'angle moitié des tangentes sis dans le fluide vif (fig. 21) (1).

Fig. 21.



A 342. D'autre part on a

$$T = \log V = \frac{\Theta(0, 0) - \Theta(0, \varphi)}{\varphi} \log \rho + C = \frac{2\pi - \varphi}{\varphi} \log \rho + C,$$

d'où $V = A\rho^{\frac{2\pi - \varphi}{\varphi}}$ s'annule comme $\rho^{\frac{2\pi - \varphi}{\varphi}}$.

(1) PÉREZ, Cours de Mécanique des Fluides, 1936, p. 75.

A 35. *Allure du schéma à l'infini amont.*

A 351. La formule (A 33.2) montre que les filets fluides s'épanouissent en éventail.

A 352. D'autre part

$$T = \log V = \frac{\Theta'_1 - \Theta'_2}{\pi} \log R + C \quad \text{avec } \Theta'_2 > 0 > \Theta'_1;$$

$\log V$ est alors négatif et $V = A \left(\frac{1}{R} \right)^{\frac{\Theta'_2 - \Theta'_1}{\pi}}$ s'annule comme $\left(\frac{1}{R} \right)^{\frac{\Theta'_2 - \Theta'_1}{\pi}}$.

Si $\Theta'_1 = \Theta'_2$, on ne peut rien dire : V peut être nul ou non.

A 36. *Remarque.* — La méthode du n° (A 321) permet de démontrer, comme en A 34, que le filet fluide qui se détache de la *pointe* d'un profil est bissecteur de l'angle du bord de fuite et que la vitesse y est nulle. Dans le cas d'un profil Joukowski, elle est finie et dans le prolongement de la tangente commune.

Annexe 4. — MAJORATION DU PARAMÈTRE q (1).

A 40. La méthode indiquée par M. J. Kravtchenko dans sa Note des *Comptes rendus* (202, 1936, p. 276) peut être améliorée par l'emploi d'une sphère de Riemann convenable. L'objet de cette annexe est d'explicitier sommairement les précisions quantitatives annoncées dans la remarque de la page 213 de la Thèse de cet auteur.

A 41. La figure 22 donne le schéma auquel sera appliquée la méthode : nous supposons un obstacle tranchant et nous supposons que les lignes de jet ne recourent pas $e_1 g_1$ et $e_2 g_2$ prolongés et que $H_1 H_2$ ne coupent pas l'obstacle.

A 42. *Notations.* — δ_1 , largeur de l'obstacle : $e_1 e_2 = g_1 g_2 = \delta_1$;
 δ_2 , profondeur « $e_1 g_1 = e_2 g_2 = \delta_2$;
 δ_3 , diagonale « $\delta_3^2 = \delta_1^2 + \delta_2^2$;
 Δ_1 , distance de l'obstacle à la bande ($h_1 H_1$);
 Δ_2 , « « ($h_2 H_2$).

Nous supposons $\Delta_2 > \Delta_1$.

Nous poserons

$$\frac{\delta_2}{\delta_1} = k_2, \quad \frac{\Delta_1}{\delta_1} = k_1, \quad \frac{\Delta_2}{\delta_3} = k_3.$$

Soient σ l'aire de la projection du fluide vif sur la sphère Σ , Λ la plus courte distance sphérique sur Σ de la projection de l'obstacle à celle des parois, M. J. Kravtchenko, se basant sur un lemme de M. J. Leray, a démontré que

$$(1) \quad \log \frac{1}{q} \geq \pi \frac{\Lambda^2}{\sigma},$$

de sorte que la condition $q \leq q_1$ sera satisfaite si $\pi \frac{\Lambda^2}{\sigma} \geq \log \frac{1}{q_1}$.

Le problème revient à majorer σ et minorer Λ .

(1) *C. R. Acad. Sc.*, 208, 1939, p. 721.

A.43. La sphère Σ est une sphère tangente au plan du fluide au milieu ω de $e_1 e_2$. Soit D son diamètre. On établit facilement que

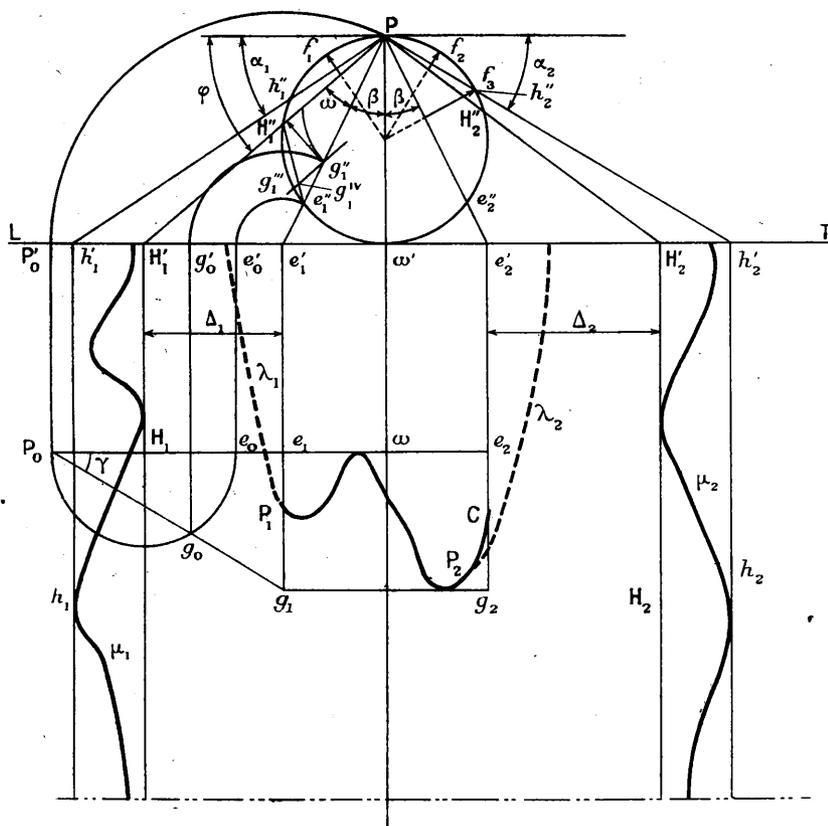
$$\sigma < \frac{\pi D^2}{2} \left[1 + \frac{2f_3}{D} - \frac{2f_1}{D} - \frac{2f_2}{D} \right],$$

donc encore

$$\sigma < \frac{\pi D^2}{2} \left[1 + \frac{2f_3}{D} - \frac{2f_1}{D} \right] < \frac{\pi D^2}{2} \left[1 + \frac{2f_3}{D} \right].$$

Rabottons le plan $Pe_1 g_1$ autour de $e_1 g_1$ sur le plan horizontal; A est minorée par $g_1'' H_1'$.

Fig. 22.



Nous choisisons

$$\varphi = \beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\omega}{2}$$

dans un but de simplification.

Il vient

$$\sigma < \frac{\pi D^2}{2} [\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 - \sin \beta] < \frac{\pi D^2}{2} [1 + \cos \alpha_1 - \sin \beta] < \frac{\pi D^2}{2} [2 - \sin \beta].$$

On calcule aisément

$$H_1'' g_1'' = D \cos^2 \gamma \sin \omega \quad \text{avec} \quad \cos^2 \gamma = \frac{1}{1 + 4\lambda^2 \sin^2 \beta},$$

d'où

$$\Lambda > D \frac{\sin \omega}{1 + 4\lambda^2 \sin^2 \beta}.$$

D'où les inégalités

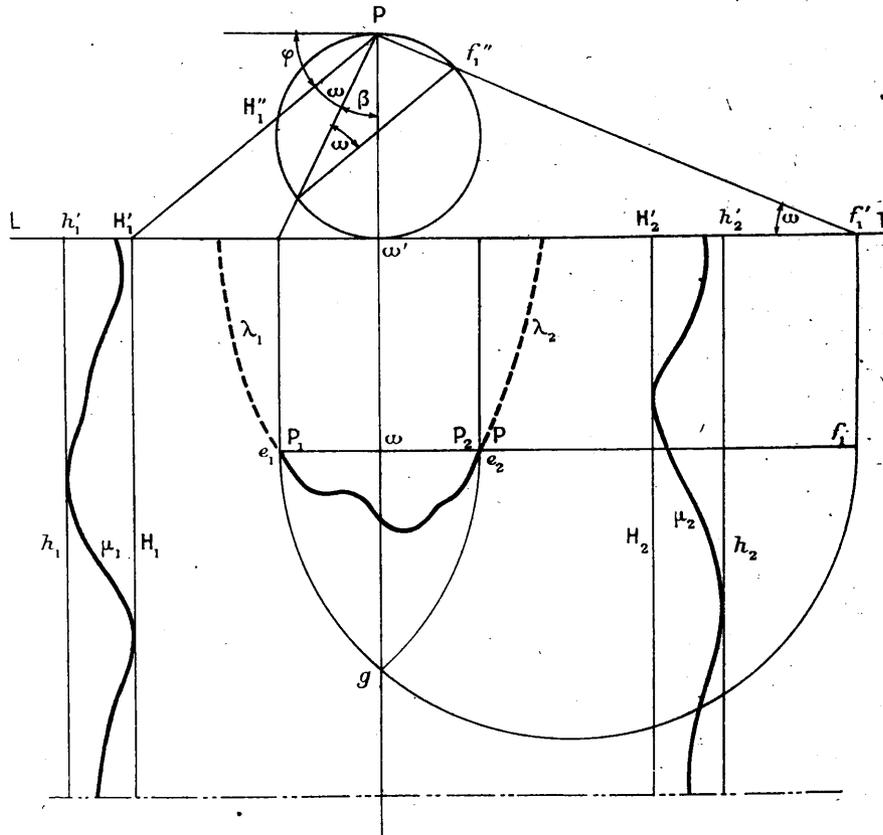
$$\pi \frac{\Lambda^2}{\sigma} > \frac{\sin^2 \omega}{[1 + 4\lambda^2 \sin^2 \beta]^2} \frac{2}{[N]} \geq \log \frac{1}{q_1}$$

avec

$$[N] = \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 - \sin \beta \quad \text{ou} \quad 1 + \cos \alpha_1 - \sin \beta \quad \text{ou} \quad 2 - \sin \beta.$$

A 44. Si l'obstacle se termine aux extrémités d'un segment δ_1 perpendiculaire à la direction générale du courant et reste inclus dans le triangle curviligne amont limité à δ_1 et à

Fig. 23.



deux arcs de cercles e_1g , e_2g tracés figure 23; on a alors

$$\Lambda \geq \omega D, \quad \text{d'où} \quad \frac{\pi \Lambda^2}{\sigma} > \frac{2\omega^2}{[N]} \geq \log \frac{1}{q_1}.$$

Le diamètre

$$e_1 f_1' = \frac{\delta_1}{2} + D \cot \beta = \frac{\delta_1}{2} (1 + \cot \beta \cot \omega).$$

A 45. Application au cas de $q_1 = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ avec parois rectilignes.

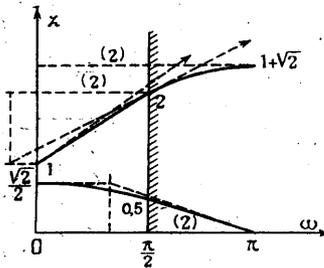
A 451. L'inégalité numérique à résoudre devient (par deuxième valeur de [N])

$$(A) \quad 12 \frac{\sin^2 \frac{\omega}{2} \cos^2 \frac{\omega}{2}}{\left[1 + 2\lambda^2 \left(\cos \frac{\omega}{2} - \sin \frac{\omega}{2} \right)^2 \right]^2} \geq 1 + \sqrt{2} \sin \frac{\omega}{2},$$

soit Y le premier membre et Z le deuxième membre.

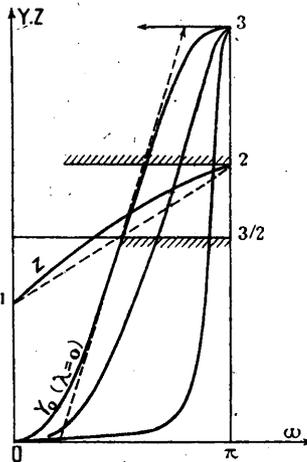
A 4521. La figure 24 donne l'allure du deuxième membre de (A) ($1 \leq Z \leq 2$).

Fig. 24.



A 4522. La figure 25 donne l'allure du premier membre de (A). Nous avons tracé en particulier la courbe Y pour $\lambda = 0$.

Fig. 25.



On montre aisément que les courbes Y ont une pente plus forte que la courbe Y_0 dans la région $\frac{3}{2} \leq Y \leq 2$.

A 4523. On voit alors que l'égalité (A) a une racine unique ω' .

A 453. Un calcul d'approximations successives non reproduit donne des valeurs approchées de ω' en fonction de λ , ce qui permet le calcul de k_1 et k_3 , d'où le tableau des valeurs minima de k_1 et k_3 :

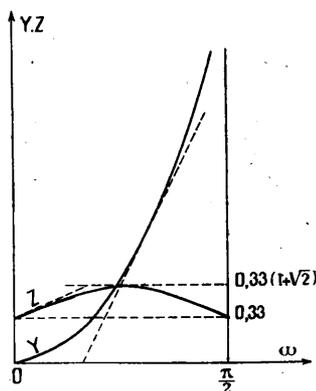
λ	0..	0,5.	1.	1,5.	2.	2,5.	∞ .
k_1	2,7	4,37	10	19,6	34,7	53,0	∞
k_3	2,7	3,9	7,1	10,9	15,6	19,7	∞

A 46. Dans le cas particulier du triangle curviligne, on aura la condition

$$(B) \quad \omega^2 \geq \frac{1}{2} \text{Log} \frac{1}{q_1} \left[1 + \sqrt{2} \sin \frac{\omega}{2} \right] = 0,33 \left(1 + \sqrt{2} \sin \frac{\omega}{2} \right).$$

Soient Y le premier membre, Z le deuxième membre. La figure 26 montre que l'égalité (B) a une seule racine.

Fig. 26.



Le calcul par approximations successives conduit à $\omega = 40^{\circ}20'$, d'où $k_1 = 1,83$.
La largeur minima relative du canal est alors de $(2k_1 + 1) = 4,66$.

A 47. La même méthode serait applicable au cas du canal curviligne, mais on prendrait la troisième valeur de [N].

A 48. La méthode ne peut être appliquée pour $q \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}$ qui intervient dans $\eta_1 > 0$.

**Annexe 5. — ÉQUIVALENCE DES CONDITIONS : $q \rightarrow 0$, $|a|$ ET $b \rightarrow \infty$
ET DES CONDITIONS $q \rightarrow 1$ ET $a \rightarrow -1$, $b \rightarrow 1$ OU LES DEUX.**

A 50. Il semble utile de montrer l'équivalence de ces conditions (cf. 4421).

On a

$$\omega_1 = \int_{-1}^{+1} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(t-a)(b-t)}};$$

$$\frac{\omega_2}{i} = \int_1^b \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(t-a)(b-t)}} = \int_a^{-1} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(t-a)(b-t)}}$$

radicaux pris avec leurs valeurs arithmétiques.

On a

$$q = e^{-\pi \frac{\omega_3}{i\omega_1}} = e^{-\pi\rho} \quad \text{avec } \rho = \frac{\omega_3}{\omega_1} > 0.$$

A 51. La condition $q \rightarrow 0$ est équivalente à $\rho \rightarrow +\infty$.

Si b et a sont bornés $\neq \pm 1$, ρ est borné.

A 52. Si b est borné et $a \rightarrow \infty$:

$$\frac{\omega_3}{i} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \int_1^b \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(b-t)\left(1-\frac{t}{a}\right)}};$$

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{-a}} \int_{-1}^{+1} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(b-t)\left(1-\frac{t}{a}\right)}}$$

et

$$\frac{\omega_3}{i\omega_1} \rightarrow \frac{\int_1^b \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(b-t)}}}{\int_{-1}^{+1} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(b-t)}}},$$

qui reste borné.

De même, si a est borné et si $b \rightarrow \infty$.

A 53. Il est donc nécessaire que a et $b \rightarrow \infty$ pour que $q \rightarrow 0$.

A 54. Réciproquement : si a et $b \rightarrow \infty$, alors $q \rightarrow 0$.

On a

$$\frac{\omega_3}{i} = \frac{1}{\sqrt{-ab}} \int_1^b \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)\left(1-\frac{t}{a}\right)\left(1-\frac{t}{b}\right)}};$$

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{-ab}} \int_{-1}^{+1} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\left(1-\frac{t}{a}\right)\left(1-\frac{t}{b}\right)}}$$

et

$$\frac{\omega_3}{i\omega_1} = \frac{\int_1^b \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)\left(1-\frac{t}{a}\right)\left(1-\frac{t}{b}\right)}}}{\int_{-1}^{+1} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\left(1-\frac{t}{a}\right)\left(1-\frac{t}{b}\right)}}}.$$

Le dénominateur $\rightarrow \int_{-1}^{+1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ qui est borné; mais le numérateur a son terme qui tend vers $\frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}$, de sorte que si $b \rightarrow \infty$, l'intégrale $\rightarrow \infty$ comme $\log t$.

A 55. Il y a donc bien équivalence entre la condition $q \rightarrow 0$ et la double condition $|a|$ et $b \rightarrow \infty$.

A 56. Si $a \rightarrow -1$ (ou $b \rightarrow +1$), on a

$$\omega_1 = \int_{-1}^{+1} \frac{dt}{[\sqrt{(1-t)(b-t)}](1+t)} \rightarrow \infty.$$

$$\frac{\omega_2}{i} = \int_1^b \frac{dt}{[\sqrt{(t-1)(b-t)}](1+t)} \text{ reste borné, donc } \rho \rightarrow 0 \text{ et } q \rightarrow 1.$$

A 57. Si $a \rightarrow -1$ et $b \rightarrow +1$, $\omega_1 \rightarrow \infty$.

$$\frac{\omega_3}{i} = \int_1^b \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(t-a)(b-t)}}$$

s'écrit en posant $t = 1 + \varepsilon$, $b = 1 + \beta$, $a = -1 + \alpha$

$$\frac{\omega_3}{i} = \int_0^\beta \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon(\beta-\varepsilon)\sqrt{(2+\varepsilon)(2+\varepsilon-\alpha)}}$$

et posant $\varepsilon = \beta\theta$

$$\frac{\omega_3}{i} = \int_0^1 \frac{d\theta}{\sqrt{\theta(1-\theta)\sqrt{(2+\beta\theta)(2+\beta\theta-\alpha)}}} \rightarrow \int_0^1 \frac{d\theta}{2\sqrt{\theta(1-\theta)}} = \frac{\pi}{2},$$

donc $\rho \rightarrow 0$ et $q \rightarrow 1$.

A 58. Réciproquement si $q \rightarrow 1$, $a \rightarrow -1$ ou $b \rightarrow +1$ ou les deux.

Sinon, ni a , ni b ne peuvent devenir infinis, car q tendrait $\rightarrow 0$; ni rester finis, car ω_1 et $\frac{\omega_3}{i}$ seraient finis et non nuls, donc ρ ne serait pas nul.

A 59. Il y a donc bien équivalence entre la condition $q \rightarrow 1$ et l'une des trois conditions $a \rightarrow -1$ ou $b \rightarrow +1$ ou les deux.

C. Q. F. D.