JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

JULIEN KRAVTCHENKO

Sur la continuité des dérivées du potentiel (suite et fin)

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 23 (1944), p. 163-210.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1944_9_23__163_0>

Sur la continuité des dérivées du potentiel;

PAR JULIEN **KRAVTCHENKO**.

(*Suite et fin.*)

CHAPITRE VI.

De la continuité des dérivées premières du potentiel de simple couche.

42. Après ces préliminaires, nous sommes en mesure d'aborder l'étude des généralisations des théorèmes proprement dits de Liapounoff. Nous commencerons par la discussion de l'existence et de la continuité des dérivées du potentiel de simple couche $U(M')$ défini par (44) sur une surface de Liapounoff S. Voici le plan de notre exposé. Nous établirons tout d'abord l'existence des limites pour chacune des expressions $\frac{\partial U}{\partial x'}, \frac{\partial U}{\partial y'}, \frac{\partial U}{\partial z'}$ lorsque le point $M'(x', y', z')$ tend vers un point ordinaire $M(x, y, z)$ de S en restant soit dans D soit à l'extérieur de D; nous construirons ensuite pour chacune de ces limites un module de continuité valable sur toute portion régulière S_i de la surface S; nous achèverons en précisant les discontinuités que subissent les dérivées premières de U en traversant la multiplicité-support S des masses attirantes. Toutes nos conclusions reposent sur l'hypothèse que la densité $\mu(P)$ vérifie une condition (f).

C'est ici le lieu de rappeler une fois encore les réserves faites au cours du paragraphe **9** *bis*; contrairement à ce qui s'est passé jusqu'ici, nous n'expliciterons pas, au cours de ce chapitre, les constantes multiplicatives qui figureront dans l'expression du module de continuité φ et nous écrirons $\varphi(MM')$ pour constante $\times\,\varphi(MM')$. Mais les démonstrations sont conduites de manière à permettre au lecteur de retrouver facilement, dans les applications, les valeurs des paramètres en cause. Et nous n'avons fait cette omission que pour simplifier les résultats auxquels nous allons aboutir.

42 *bis*. — Soit M un point ordinaire d'une surface de Liapounoff généralisée S. Rapportons S au système d'axes $Mxyz$ déjà considéré au paragraphe **22** (l'axe Mz sera orienté suivant la normale extérieure $\vec{N}$ à S en M). Au paragraphe **36** nous avons montré que l'expression $\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_{M'}$, calculée à partir de (44), tendait vers une limite bien déterminée, notée $\left(\frac{d\,\mathrm{U(M)}}{dn}\right)_i$ $\left[\text{ou}\left(\frac{d\,\mathrm{U(M)}}{dn}\right)_e\right]$, lorsque le point M′ tend vers M en suivant la normale intérieure (ou extérieure) en M à S; nous avons appris à calculer ces expressions à l'aide de $\left(\frac{d\mathrm{U}}{dn}\right)_{\mathrm{M}}$. Il nous reste donc à établir l'existence des dérivées $\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}$ ou $\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}$ qui, étant donné le choix particulier du système de référence, ne sont autres que les dérivées tangentielles du potentiel de simple couche U(M) au point M de S.

Soient alors M′ le point de coordonnées $x'=r$ ($r>0$, pour fixer les idées), $y'=0$, $z'=0$, voisin de l'origine des coordonnées M; d(M) la portion de Σ(M) correspondant à M, définie aux paragraphes **18** et **26** [*cf.* (13)]. La dérivée $\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}\right)_{\mathrm{M}}$ existera si nous prouvons l'existence de [*cf.* (44)]

$$(77)\quad \begin{aligned}\lim_{r=0}\left\{\frac{1}{r}[\mathrm{U(M')}-\mathrm{U(M)}]\right\} &= \lim_{r=0}\iint_{\mathrm{S}}\mu(\mathrm{P})\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\mathrm{M'P}}-\frac{1}{\mathrm{MP}}\right)d\sigma\\ &= \lim_{r=0}\left\{\iint_{\mathrm{S}-d(\mathrm{M})}\mu(\mathrm{P})\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\mathrm{M'P}}-\frac{1}{\mathrm{MP}}\right)d\sigma\right.\\ &\quad+\iint_{d(\mathrm{M})}[\mu(\mathrm{P})-\mu(\mathrm{M})]\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\mathrm{M'P}}-\frac{1}{\mathrm{MP}}\right)d\sigma\\ &\quad\left.+\mu(\mathrm{M})\iint_{d(\mathrm{M})}\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\mathrm{M'P}}-\frac{1}{\mathrm{MP}}\right)d\sigma\right\}.\end{aligned}$$

Lorsque M′ est suffisamment rapproché de M, par exemple, si $\mathrm{MM'}=r<\frac{\mathrm{R}}{4}$, le premier terme du second membre possède certainement une limite; en effet, d'après (13), le domaine S — d(M) est extérieur à la sphère $\mathrm{L}\left(\mathrm{M}, \frac{5}{13}\mathrm{R}\right)$ alors que $\frac{5}{13}\mathrm{R}>\frac{\mathrm{R}}{4}>r$, en sorte que les dérivées de la fonction $\frac{1}{\mathrm{M'P}}$ sont bornées dans $\mathrm{L}\left(\mathrm{M}, \frac{\mathrm{R}}{4}\right)$, et nous avons

$$(78)\qquad \lim_{r=0}\iint_{\mathrm{S}-d(\mathrm{M})}\mu(\mathrm{P})\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\mathrm{M'P}}-\frac{1}{\mathrm{MP}}\right)d\sigma=\iint_{\mathrm{S}-d(\mathrm{M})}\mu(\mathrm{P})\frac{\partial\left(\frac{1}{\mathrm{MP}}\right)}{\partial x}d\sigma,$$

puisque

$$\lim_{r=0}\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\mathrm{M'P}}-\frac{1}{\mathrm{MP}}\right)=\left[\frac{\partial\left(\frac{1}{\mathrm{MP}}\right)}{\partial x}\right]_{\mathrm{M}}=\frac{\partial\left(\frac{1}{\mathrm{MP}}\right)}{\partial x}.$$

Le résultat ci-dessus nous incite à penser que les limites des intégrales restantes du second membre de (77) seront données par les expressions suivantes

$$\iint_{d(\mathrm{M})}[\mu(\mathrm{P})-\mu(\mathrm{M})]\frac{\partial\left(\frac{1}{\mathrm{MP}}\right)}{\partial x}d\sigma \quad\text{et}\quad \mu(\mathrm{M})\iint_{d(\mathrm{M})}\frac{\partial\left(\frac{1}{\mathrm{MP}}\right)}{\partial x}d\sigma.$$

Tout revient, dès lors, à légitimer l'existence des expressions ci-dessus et à justifier les relations limites

$$(79)\quad \lim_{r=0}\iint_{d(\mathrm{M})}[\mu(\mathrm{P})-\mu(\mathrm{M})]\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\mathrm{M'P}}-\frac{1}{\mathrm{MP}}\right)d\sigma=\iint_{d(\mathrm{M})}\left[\frac{\partial\left(\frac{1}{\mathrm{MP}}\right)}{\partial x}\right][\mu(\mathrm{P})-\mu(\mathrm{M})]\,d\sigma,$$

$$(80)\quad \lim_{r=0}\iint_{d(\mathrm{M})}\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\mathrm{M'P}}-\frac{1}{\mathrm{MP}}\right)d\sigma=\iint_{d(\mathrm{M})}\frac{\partial\left(\frac{1}{\mathrm{MP}}\right)}{\partial x}\,d\sigma.$$

En vue de cette discussion, le passage en coordonnées cylindriques est tout indiqué; les coordonnées nouvelles du point courant $\mathrm{P}(\xi, \eta, \zeta)$ étant ζ, ρ, ψ, nous avons, en observant que $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mathrm{MP}}\right)=\frac{\xi}{\mathrm{MP}^3}=\frac{\rho\cos\psi}{\mathrm{MP}^3}$, $\left|\frac{\xi}{\mathrm{MP}}\right|\leqq 1$, $\frac{1}{\mathrm{MP}}\leqq\frac{1}{\rho}$ et eu égard à (13), (19) et (41)

$$(80_1)\quad \left|\iint_{d(\mathrm{M})}[\mu(\mathrm{P})-\mu(\mathrm{M})]\frac{\partial\left(\frac{1}{\mathrm{MP}}\right)}{\partial x}\,d\sigma\right|\leqq 2\int_0^{2\pi}d\psi\int_0^{\frac{5}{13}\mathrm{R}}\frac{f(\mathrm{MP})}{\rho}\,d\rho$$

$$\leqq 4\pi\int_0^{\frac{5}{13}\mathrm{R}}\frac{f\left(\frac{\rho}{\sin\omega}\right)}{\rho}\,d\rho\leqq 4\pi\varphi\left(\frac{5\mathrm{R}}{13\sin\omega}\right).$$

Cela établit la convergence de l'intégrale du premier membre. L'étude de l'intégrale

$$(80')\quad \mathrm{I}=\iint_{d(\mathrm{M})}\frac{\partial\left(\frac{1}{\mathrm{MP}}\right)}{\partial x}\,d\sigma=\iint_{d(\mathrm{M})}\frac{\xi}{\mathrm{MP}^3}\,d\sigma$$

est un peu plus délicate. Comme

$$d\sigma=\frac{d\sigma'}{\cos(\mathrm{N},\mathrm{N'})}=\frac{\rho\,d\rho\,d\psi}{\cos(\mathrm{N'},\mathrm{M}z)},$$

elle s'écrit

$$\mathrm{I}=\int_0^{2\pi}\cos\psi\,d\psi\int_0^{\frac{5}{13}\mathrm{R}}\frac{\rho^2\,d\rho}{\cos(\mathrm{N'},\mathrm{M}z)\mathrm{MP}^3}.$$

Comme $\cos(\mathrm{N'}, \mathrm{M}z)\neq 1$ dans le voisinage de M, on ne peut prouver la convergence du second membre, en remplaçant, comme ci-dessus, chaque terme de l'élément différentiel par son module; car alors, nous aboutirons à une majorante de la forme $\int_0^{\frac{5}{13}\mathrm{R}}\frac{d\rho}{\rho}$, non bornée. L'intégrale (80′) n'est donc pas absolument convergente. Pour tourner cette difficulté nous utiliserons la présence du facteur $\cos\psi$ et nous écrirons I

$$(81)\qquad I=\int_0^{2\pi}\cos\psi\,d\psi\int_0^{\frac{5}{13}R}\left[\frac{\rho^3}{(\rho^2+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}}\,\frac{1}{\cos(N',Mz)}-1\right]\frac{d\rho}{\rho}$$

puisque

$$\frac{1}{\rho}\int_0^{2\pi}\cos\psi\,d\psi=0.$$

Nous obtenons ainsi une intégrale dont l'élément différentiel comporte un facteur (le crochet) tendant vers zéro avec ρ. Précisons ce point. Soit p la projection de P sur Mxy; nous avons

$$\left|\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+\zeta^2}}-1\right|=\left|\frac{Mp}{MP}-1\right|\leqq\left|\frac{Pp}{MP}\right|=\left|\frac{\zeta}{MP}\right|.$$

Or, l'inégalité (16) est valable dans le domaine $d(M)$ (*cf.* § **22**); il vient donc, en remplaçant $|\zeta|$ par sa majorante,

$$\left|\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+\zeta^2}}-1\right|=\left|\frac{Mp}{MP}-1\right|\leqq\frac{13}{6}f\left(\frac{MP}{\sin\omega}\right)\leqq\frac{13}{6}f\left(\frac{\rho}{\sin^2\omega}\right),$$

puisque $MP\leqq\frac{\rho}{\sin\omega}$. Comme sur $d(M)$, $\frac{\rho}{\sin^2\omega}\leqq\frac{5R}{13\sin^2\omega}\leqq\frac{20}{39}R\leqq R$ $\left(\text{car}\sin^2\omega\geqq\frac{3}{4}\right)$, il en résulte [*cf.* (8)]

$$\left|\frac{Mp}{MP}-1\right|\leqq\frac{5}{6}\leqq 1,$$

d'où

$$\frac{Mp}{MP}\leqq 2.$$

En combinant les dernières inégalités, on trouve

$$(82)\qquad \left|\frac{\rho^3}{(\rho^2+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}}-1\right|=\left|\frac{Mp^2}{MP^2}+\frac{Mp}{MP}+1\right|\times\left|\frac{Mp}{MP}-1\right|\leqq 15f\left(\frac{\rho}{\sin^2\omega}\right).$$

D'un autre côté, les points M et P appartenant à $d(M)$, les calculs du paragraphe **24** s'appliquent; S étant une surface de Liapounoff, nous avons [*cf.* (8) et (18)]

$$(83)\qquad \left|\frac{1}{\cos(N',Mz)}-1\right|=2\left|\frac{\sin^2\frac{(N',Mz)}{2}}{\cos(N',Mz)}\right|$$

$$\leqq\frac{1}{2}\,\frac{(N',N)^2}{|\cos(N',N)|}\leqq\frac{169}{288}[f(MP)]^2\leqq f(MP)\leqq f\left(\frac{\rho}{\sin^2\omega}\right).$$

Utilisons alors l'identité

$$(\alpha\beta-1)=(\alpha-1)(\beta-1)+(\alpha-1)+(\beta-1).$$

On en déduit

$$|\alpha\beta - 1| \leqq |\alpha - 1| \times |\beta - 1| + |\alpha - 1| + |\beta - 1|.$$

Si l'on pose donc

$$\alpha = \frac{\rho^3}{(\rho^2+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \beta = \frac{1}{\cos(N', N)},$$

cela donne [*cf.* (82) et (83), ainsi que (8)]

$$(83_1) \quad \left| \frac{\rho^3}{(\rho^2+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\cos(N', N)} - 1 \right|$$

$$\leqq \left| \left(\frac{Mp}{MP}\right)^3 - 1 \right| \times \left| \frac{1}{\cos(N', N)} - 1 \right| + \left| \left(\frac{Mp}{MP}\right)^3 - 1 \right| + \left| \frac{1}{\cos(N', N)} - 1 \right|$$

$$\leqq 15\left[f\left(\frac{\rho}{\sin^2\omega}\right)\right]^2 + 15 f\left(\frac{\rho}{\sin^2\omega}\right) + f\left(\frac{\rho}{\sin^2\omega}\right)$$

$$\leqq 40 f\left(\frac{\rho}{\sin^2\omega}\right).$$

L'inégalité précédente montre que [*cf.* (81)]

$$(83') \quad |I| \leqq 80\pi \int_0^{\frac{5}{13}R} \frac{f\left(\frac{\rho}{\sin^2\omega}\right)}{\rho}\, d\rho \leqq 80\pi \int_0^{\frac{5}{13}R} \frac{f(2\rho)}{\rho}\, d\rho = 80\pi\varphi\left(\frac{10}{13}R\right),$$

puisque $\sin^2\omega \geqq \frac{3}{4}$. Cela prouve que l'intégrale (80′) est bien convergente, en sorte que, pour $r=0$, les seconds membres de (79) et de (80) ont bien un sens. La vérification des relations (79) et (80) devient dès lors immédiate. Partageons le domaine $d(M)$ en deux domaines partiels $d(M) - d(M, 2r)$ et $d(M, 2r)$, $d(M, 2r)$ désignant la portion de $d(M)$ dont les points se projettent sur le plan Mxy à l'intérieur du cylindre

$$x^2 + y^2 \leqq 4r^2, \qquad 2r \leqq \frac{5}{13}R.$$

Or, les contributions à toutes les intégrales (qui figurent dans les formules en cause) du domaine d'intégration $d(M, 2r)$ tendent vers zéro avec r, puisque ces intégrales sont convergentes, d'après ce qui précède. D'un autre côté, on peut écrire pour chaque point P situé dans $d(M) - d(M, 2r)$

$$\frac{1}{r}\left(\frac{1}{M'P} - \frac{1}{MP}\right) = \left[\frac{\partial\left(\frac{1}{MP}\right)}{\partial x'}\right]_{M_1} = \frac{\xi - x_1}{M_1P^3},$$

M_1 étant un point du segment MM′; un raisonnement aussi élémentaire que classique permet alors d'achever la démonstration.

Nous pouvons dès lors affirmer que le premier membre de (77) a un sens et que la valeur du second membre est donnée par (78), (79) et (80). Aussi :

Lorsque la densité $\mu(\mathrm{M})$ *des masses attirantes, répandues sur une surface* S *de Liapounoff vérifie une condition* (f) [*cf.* (41)], *le potentiel de simple couche correspondant* (44) *possède des dérivées tangentielles en chaque point ordinaire* M *de* S, *données par la formule*

$$(84) \qquad \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial t} = \int_{\mathrm{S}-d(\mathrm{M})} \mu(\mathrm{P}) \frac{\partial\left(\frac{1}{\mathrm{MP}}\right)}{\partial t} d\sigma + \int_{d(\mathrm{M})} [\mu(\mathrm{P}) - \mu(\mathrm{M})] \frac{\partial\left(\frac{1}{\mathrm{MP}}\right)}{\partial t} d\sigma + \mu(\mathrm{M}) \int_{d(\mathrm{M})} \frac{\partial\left(\frac{1}{\mathrm{MP}}\right)}{\partial t} d\sigma,$$

où $d(\mathrm{M})$ *désigne le voisinage de* M *sur* S *défini au paragraphe* **18** *et où* Mt *est une direction quelconque, issue de* M *et située dans le plan tangent en* M *à* S.

D'après les calculs précédents, la dérivée tangentielle ne subit aucune discontinuité au point M; cela veut dire que le quotient $\frac{1}{t}[\mathrm{U}(t) - \mathrm{U}(0)]$ a une limite indépendante du signe de t, pour $t = 0$. On se rappellera que les dérivées normales ne possèdent pas cette propriété; nous préciserons un peu plus loin.

Remarque. — De ce que l'intégrale (80')

$$\mathrm{I} = \int_{d(\mathrm{M})} \frac{\xi}{\mathrm{MP}^3} d\sigma$$

a un sens, on conclut que l'intégrale

$$\int_{\gamma(\mathrm{M})} \frac{\xi}{\mathrm{MP}^3} d\sigma$$

[où $\gamma(\mathrm{M})$ désigne un voisinage quelconque de M sur S, mais dont la frontière ne contienne pas M] est également convergente. En effet, soit $\gamma_1(\mathrm{M})$ la portion de $\gamma(\mathrm{M})$ intérieure à $d(\mathrm{M})$, $\gamma_2(\mathrm{M})$ la portion restante de $\gamma(\mathrm{M})$, celle-ci pouvant, éventuellement, être vide. Nous avons

$$\int_{\gamma(\mathrm{M})} \frac{\xi}{\mathrm{MP}^3} d\sigma = \int_{d(\mathrm{M})} - \int_{d(\mathrm{M})-\gamma_1(\mathrm{M})} + \int_{\gamma_2(\mathrm{M})}.$$

L'intégrale du premier membre aura un sens si les deuxième et troisième intégrales du second membre ont un sens. Or, $\frac{1}{\mathrm{MP}}$ est borné dans le domaine $d(\mathrm{M}) - \gamma(\mathrm{M})$, puisque par hypothèse M est étranger à ce domaine, et il en est de même *a fortiori* de $\gamma_2(\mathrm{M})$; il suit de là que l'élément différentiel des intégrales considérées est borné sur leur domaine d'intégration respectif, ce qui justifie notre assertion.

Il faut insister sur l'utilité de la remarque qui précède; celle-ci serait banale et, partant, sans intérêt si l'intégrale [*cf.* (80′)]

$$\int_{d(M)} \frac{|\xi|}{MP^3} d\sigma$$

avait été convergente; or, nous avons constaté qu'il n'en était pas ainsi et que la convergence de (80′) était due à une sorte de symétrie axiale.

43. Il nous est facile maintenant de prouver l'existence de la dérivée du potentiel de simple couche U(M) dans une direction quelconque. Pour éviter toute confusion, appelons $MtsN$ le trièdre trirectangle, désigné par $Mxyz$ au cours du précédent paragraphe; Mt et Ms sont donc deux axes orthogonaux situés dans le plan tangent en M à S, alors que l'axe MN sera orienté suivant la normale extérieure à S. Comme les dérivées de U(M) existent en un point ordinaire M de S suivant les trois directions, Mt, Ms et MN, non situées dans un même plan, la fonction U(M) est dérivable, d'après un résultat classique, dans toutes les directions. Si, d'ailleurs, $Oxyz$ est le système de référence fixe, nous avons

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial t}\cos(t, x) + \frac{\partial U}{\partial s}\cos(s, x) + \frac{\partial U}{\partial n}\cos(N, x) \tag{85}$$

et deux expressions analogues pour $\frac{\partial U}{\partial y}$ et $\frac{\partial U}{\partial z}$. Il y a lieu de noter que $\frac{\partial U}{\partial n}$ n'a pas la même valeur de deux côtés de la surface S; par suite, la même circonstance se présente pour les dérivées $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$ et $\frac{\partial U}{\partial z}$, dites *dérivées obliques* du potentiel U. Si M′ est un point *intérieur* à D, voisin de M et situé sur la parallèle Mx à Ox, nous poserons

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = \lim_{M' \to M} \frac{[U(M') - U(M)]}{MM'},$$

et nous noterons $\frac{\partial U}{\partial x_e}$ la limite du second membre si M′ atteint M par l'extérieur de D. Comme les dérivées tangentielles $\frac{\partial U}{\partial t}$ et $\frac{\partial U}{\partial s}$ ne subissent aucune discontinuité en traversant M, les formules (63′) et (85) donnent

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x_i} &= \frac{\partial U}{\partial t}\cos(t, x) + \frac{\partial U}{\partial s}\cos(s, x) + \left[\left(\frac{dU}{dn}\right)_M + 2\pi\,\mu(M)\right]\cos(N, x), \\ \frac{\partial U}{\partial x_e} &= \frac{\partial U}{\partial t}\cos(t, x) + \frac{\partial U}{\partial s}\cos(s, x) + \left[\left(\frac{dU}{dn}\right)_M - 2\pi\,\mu(M)\right]\cos(N, x), \end{aligned}\right. \tag{85′}$$

formules où $\frac{\partial U}{\partial n}$ désigne la dérivée normale du potentiel de simple couche, donnée par (46). Il en résulte, en particulier,

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{\partial U}{\partial x_e} = 4\pi\,\mu(M)\cos(N, x),$$

relation qui met en évidence la discontinuité de la dérivée oblique de $U(M)$ au point M de S.

44. Nous nous proposons maintenant de construire un module de continuité pour chacune des dérivées obliques, donnée par la formule (85′) sur une portion régulière S_i d'une surface de Liapounoff.

Remarquons à cet effet que les seconds membres de (85′) se présentent sous forme de sommes des produits de deux fonctions. Si donc chaque terme de la somme est une fonction continue, il en sera de même de ces sommes; par ailleurs, on sait que le produit des deux fonctions, vérifiant une condition (f), vérifie encore la même condition (*voir* l'énoncé plus précis au paragraphe suivant). Tout revient donc à construire un module de continuité commun à des fonctions de M telles que $\cos(t, x)$, $\cos(s, x)$, $\cos(N, x)$ et aux fonctions $\frac{\partial U}{\partial t}$, $\frac{\partial U}{\partial s}$, $\left(\frac{dU}{dn}\right)_M$, lorsque le point M décrit une portion régulière S_i de S. En ce qui concerne la continuité des cosinus directeurs, il suffira, pour l'établir, de faire appel aux propriétés de définition des surfaces de Liapounoff. Considérons un point ordinaire M_1 de S_i (donc intérieur à cette portion de S_i), voisin de M, $\overrightarrow{N_1}$ la normale extérieure en M_1 à S_i qui se réduit par continuité à $\overrightarrow{N}$ lorsque M_1 vient en M. Nous avons

$$|\cos(N, x) - \cos(N_1, x)| \leqq |(N, N_1)| \leqq f(MM_1).$$

Cela étant, si M_1 est un point de S_i suffisamment rapproché de M pour appartenir à $d(M)$ [*cf.* le paragraphe **18**], ce voisinage de M peut être (d'après les résultats du Chapitre I), représenté par une équation de la forme (nous utiliserons pendant un instant le trièdre $Mxyz$ au lieu $MtsN$)

$$z = \Phi(x, y),$$

par rapport à tout système d'axes $MtsN$. On peut joindre M et M_1 par une infinité d'arcs de courbes, intérieures à $d(M)$ et d'équations

$$y = y(x), \qquad z = \Phi[x, y(x)], \qquad -\frac{5}{13}R \leqq x \leqq \frac{5}{13}R,$$

où $y(x)$ désigne, pour fixer les idées, une fonction analytique et régulière de son argument, et qui soient tangentes à l'axe Mt (ou Mx) au point M. Comme Φ est dérivable en x et en y, les paramètres directeurs de la tangente de l'arc en cause s'écriront

$$1; \quad \frac{dy}{dx}; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{dy}{dx};$$

les deux derniers se réduisant à zéro pour $x = 0$. Comme $y(x)$ est analytique, $y'(x)$ vérifie, sur tout l'arc $\overset{\frown}{MM_1}$, une condition de Lipschitz (dont la constante multiplicative peut être supposée uniformément bornée), donc une condition (f); il en est de même, d'après les inégalités (12), de $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ et de $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$. Cela montre que les demi-tangentes Mt et M_1t_1 à $\widehat{MM_1}$ vérifient l'inégalité

$$(Mt, M_1t_1) \leqq f(MM_1),$$

en sorte qu'en revenant au trièdre fixe $Oxyz$

$$|\cos(Mt, Ox) - \cos(M_1t_1, Ox)| \leqq |(Mt, Mt_1)| \leqq f(MM_1).$$

Le résultat précédent montre que sur une surface de Liapounoff on peut toujours joindre deux points suffisamment voisins par un arc de courbe le long duquel la tangente se déplace en satisfaisant toujours à une condition (f). Bien entendu, le point M_1 pourra atteindre M en suivant un chemin quelconque, voire non régulier au sens qui vient d'être défini; l'important pour la démonstration est que chaque point M_1 de ce chemin puisse être relié à M par un arc de courbe régulier. Nous prendrons une demi-tangente au point M pour axe Mt du trièdre $MtsN$ correspondant qui sera alors complètement déterminé. Et puisque deux des cosinus directeurs (par rapport à un système fixe $Oxyz$) vérifient une condition (f), il en sera de même du troisième. Sur une portion S_i de S, on peut donc toujours attacher à chaque point un trièdre $MtsN$ dont les arêtes varient de manière à vérifier une condition (f).

45. Ainsi, pour construire un module de continuité pour les seconds membres de (85′), il suffira de le construire pour les dérivées tangentielles $\frac{\partial U}{\partial t}$ et $\frac{\partial U}{\partial s}$; au paragraphe **35** nous avons vu, en effet, que la dérivée normale $\frac{dU}{dn}$ du potentiel de simple couche vérifie une condition (φ) sur S_i, plus exactement que $\frac{dU}{dn}$ possède le module de continuité (56), compliqué par la présence d'un terme logarithmique.

Signalons, toutefois, que $\frac{\partial U}{\partial x_e}$ et $\frac{\partial U}{\partial x_i}$ se permutent entre elles lorsque le point M traverse la courbe de contact de S_i avec le cylindre circonscrit à S_i et dont les génératrices sont parallèles à Ox (à l'exception des points de contact inflexionnels). Dans ce cas, en effet, la direction Mx, équipollente à Ox, cesse de pénétrer dans D pour pénétrer dans le domaine extérieur à D ou *vice versa*, en sorte qu'il y a lieu de permuter $\frac{dU}{dn_i}$ et $\frac{dU}{dn_e}$ dans les seconds membres de (85′). Il n'en reste pas moins exact que $\frac{\partial U}{\partial x}$ varie continûment en traversant la courbe de l'espèce indiquée; seulement, la continuité est assurée ici par le fait que $\cos(N, x)$ reste continu et s'annule sur la ligne en cause, en sorte que $\left|\frac{\partial U}{\partial n}\cos(N, x)\right|$ est très petit dans le voisinage de celle-ci. Dans la suite, nous ne nous placerons pas dans ce cas singulier. Ces remarques faites, revenons à la question.

Soient M et M_1 deux points voisins ordinaires de S_i. Nous rapporterons l'espace au trièdre trirectangle $MtsN$, qu'ici on peut, sans inconvénient, désigner par $Mxyz$. Joignons M et M_1 par un arc satisfaisant aux conditions de régularité imposées au précédent paragraphe; d'après cela $\widehat{MM_1}$ possèdera en chacun de ses points une tangente, confondue en M avec Mx, et qui vérifie la condition (f) tout le long de $\widehat{MM_1}$. Soient $M_1 t_1 s_1 N_1$ le trièdre attaché à M_1 (*cf.* le paragraphe **44**); x_1, y_1, z_1 les coordonnées de M_1, ξ, η, ζ celles du point courant P sur S, par rapport à $Mxyz$, $d(M_1)$ la portion de $\Sigma(M_1)$ définie au paragraphe **18**. Nous avons, d'après (84),

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_M = \iint_{S-d(M)} \mu(P)\frac{\xi}{\mathrm{MP}^3}\,d\sigma + \iint_{d(M)} [\mu(P)-\mu(M)]\frac{\xi}{\mathrm{MP}^3}\,d\sigma + \mu(M)\iint_{d(M)} \frac{\xi}{\mathrm{MP}^3}\,d\sigma,$$

et

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{M_1} = \frac{\partial U}{\partial t_1}\cos(t_1, x) + \frac{\partial U}{\partial s_1}\cos(s_1, x) + \frac{\partial U}{\partial n_1}\cos(N_1, x).$$

Les calculs des paragraphes **34** et **42** prouvent d'abord que les quantités $\left|\frac{\partial U}{\partial s_1}\right|$ et $\left|\frac{\partial U}{\partial n_1}\right|$ sont bornées à l'intérieur de S_i; il serait facile d'expliciter leur borne commune A; mais, pour abréger l'exposition, nous ne le ferons pas et nous nous contenterons d'affirmer l'existence de A. D'un autre côté, envisageons le trièdre d'arêtes parallèles à $\vec{N}$ (ou Mz), $\vec{N_1}$ et Mx; nous avons

$$|(N_1, Mx)| \leqq |(Mx, Mz)| + |(Mz, N_1)| = \frac{\pi}{2} + |(N, N_1)| \leqq \frac{\pi}{2} + f(MM_1).$$

Si donc nous posons

$$(N_1, x) = \frac{\pi}{2} + \alpha,$$

il vient

$$|\alpha| \leqq f(MM_1)$$

et

$$|\cos(N_1, x)| = |\sin\alpha| \leqq |\alpha| \leqq f(MM_1).$$

D'une manière toute semblable, la considération du trièdre d'arêtes parallèles aux directions Mx, t_1 et s_1, permettrait [eu égard au fait que $|(t_i, x)| \leqq f(MM_1)$] d'écrire

$$|\cos(s_1, x)| \leqq f(MM_1),$$

en sorte qu'en réunissant tous les résultats acquis, on aurait

$$\left|\frac{\partial U}{\partial s_1}\cos(s_1, x) + \frac{\partial U}{\partial n_1}\cos(N_1, x)\right| \leqq 2A f(MM_1).$$

Il suit de là que pour justifier la continuité de $\frac{\partial U}{\partial x}$ sur S_i, il suffit d'établir une inégalité de la forme

$$(86) \qquad \left|\frac{\partial U}{\partial t_1}\cos(t_1, x) - \frac{\partial U}{\partial t}\right| \leqq \varphi(8\,MM_1),$$

$\varphi(MM_1)$ étant le module de continuité associé à f. Mais $\cos(t_1, x)$ est une fonction continue de M_1 sur l'arc $\widehat{MM_1}$, se réduisant à l'unité pour $M_1 \to M$, de telle sorte que [*cf.* (8) lorsque $MM_1 < R$]

$$|1 - \cos(t_1, x)| = 2\sin^2\frac{(t_1, x)}{2} \leqq \frac{1}{2}|(t_1, x)|^2 \leqq \frac{1}{2}[f(MM_1)]^2 \leqq \frac{1}{5}f(MM_1).$$

D'après le lemme sur le mode de continuité du produit de deux fonctions continues ([1]), l'inégalité (86) revient dès lors à l'inégalité

$$(87) \qquad \left|\left(\frac{\partial U}{\partial t_1}\right)_{M_1} - \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_M\right| \leqq \varphi(8\,MM_1).$$

46. Reprenons la formule (84) en explicitant les éléments différentiels de son second membre. Il vient, en dérivant $U(M)$ dans la direction Mx,

$$(88) \quad \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_M = \iint_{S-d(M)} \mu(P)\frac{\xi}{\overline{MP}^3}\,d\sigma + \iint_{d(M)} [\mu(P) - \mu(M)]\frac{\xi}{\overline{MP}^3}\,d\sigma + \mu(M)\iint_{d(M)} \frac{\xi}{\overline{MP}^3}\,d\sigma.$$

L'expression de $\left(\frac{\partial U}{\partial t_1}\right)_{M_1}$ est tout analogue; mais dans la formule précédente, il y aurait lieu de remplacer $d(M)$ par $d(M_1)$ et la composante ξ de $\overrightarrow{MP}$ suivant Mx par la composante de $\overrightarrow{M_1P}$ suivant M_1t_1. Comme d'après le théorème des projections cette composante vaut

$$\overline{M_1P}\cos(\overrightarrow{M_1P}, M_1t_1) = (\xi - x_1)\cos(t_1, x) + (\eta - y_1)\cos(t_1, y) + (\zeta - z_1)\cos(t_1, z),$$

en sorte que

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial U}{\partial t_1}\right)_{M_1} = {} & \cos(t_1, x)\left\{\iint_{S-d(M_1)} \mu(P)\frac{\xi - x_1}{\overline{M_1P}^3}\,d\sigma\right. \\ & \left. + \iint_{d(M_1)} [\mu(P) - \mu(M_1)]\frac{\xi - x_1}{\overline{M_1P}^3}\,d\sigma + \mu(M_1)\iint_{d(M_1)} \frac{\xi - x_1}{\overline{M_1P}^3}\,d\sigma\right\} \\ & + \cos(t_1, y)\{\ldots\ldots\} \\ & + \cos(t_1, z)\{\ldots\ldots\}.\end{aligned}$$

où les accolades non explicitées s'obtiennent en remplaçant dans la première

---

([1]) Ce résultat s'énonce comme il suit. Si $a(x)$ et $b(x)$ possèdent dans un certain intervalle des modules de continuité respectifs $f(\varepsilon)$ et $\varphi(\varepsilon)$ [tels que $f(\varepsilon) \leqq \varphi(\varepsilon)$], le produit $a(x)\,b(x)$ possédera sur le même intervalle le module de continuité $\varphi(\varepsilon)$ (*cf.* [5], p. 69).

accolade $(\xi - x_1)$ par $(\eta - y_1)$ et $(\zeta - z_1)$ respectivement. Des raisonnements analogues à ceux du précédent paragraphe montrent que

$$|\cos(t_1, y)| \leqq f(\mathrm{MM}_1); \qquad |\cos(t_1, z)| \leqq f(\mathrm{MM}_1).$$

Comme, par ailleurs, chacune des accolades du second membre est bornée en module, par une constante convenable A, en vertu des calculs du paragraphe **42** (¹), il en résulte

$$|\cos(t_1, y)\{\ldots\} + \cos(t_1, z)\{\ldots\}| \leqq 2\mathrm{A}f(\mathrm{MM}_1).$$

Si l'on tient alors compte de l'inégalité $|1 - \cos(t_1, x)| \leqq \frac{1}{5}f(\mathrm{MM}_1)$, établie au cours du précédent paragraphe, on aura

$$\begin{aligned}\left|\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial t_1}\right)_{\mathrm{M}_1}\right| \leqq \Bigg| & \iint_{\mathrm{S}-d(\mathrm{M}_1)} \mu(\mathrm{P})\frac{\xi - x_1}{\mathrm{M}_1\mathrm{P}^3}\,d\sigma \\ & + \iint_{d(\mathrm{M}_1)} [\mu(\mathrm{P}) - \mu(\mathrm{M}_1)]\frac{\xi - x_1}{\mathrm{M}_1\mathrm{P}^3} + \mu(\mathrm{M}_1)\iint_{d(\mathrm{M}_1)} \frac{\xi - x_1}{\mathrm{M}_1\mathrm{P}^3}\,d\sigma\Bigg| + 3\mathrm{A}f(\mathrm{MM}_1).\end{aligned}$$

De l'ensemble des résultats qui précèdent, il résulte que si l'on néglige des termes additionnels de la forme const. $f(\mathrm{MM}_1) \leqq$ const. $\varphi(8\mathrm{MM}_1)$, l'inégalité (87) revient à [*cf.* (88)]

$$\begin{aligned}(89)\quad \Bigg|\left\{\iint_{\mathrm{S}-d(\mathrm{M}_1)} \mu(\mathrm{P})\frac{\xi - x_1}{\mathrm{M}_1\mathrm{P}^3}\,d\sigma - \iint_{\mathrm{S}-d(\mathrm{M})} \mu(\mathrm{P})\frac{\xi}{\mathrm{MP}^3}\,d\sigma\right\} & \\ + \left\{\iint_{d(\mathrm{M}_1)} [\mu(\mathrm{P}) - \mu(\mathrm{M}_1)]\frac{\xi - x_1}{\mathrm{M}_1\mathrm{P}^3}\,d\sigma - \iint_{d(\mathrm{M})} [\mu(\mathrm{P}) - \mu(\mathrm{M})]\frac{\xi}{\mathrm{MP}^3}\,d\sigma\right\} & \\ + \left\{\mu(\mathrm{M}_1)\iint_{d(\mathrm{M}_1)} \frac{\xi - x_1}{\mathrm{M}_1\mathrm{P}^3}\,d\sigma - \mu(\mathrm{M})\iint_{d(\mathrm{M})} \frac{\xi}{\mathrm{MP}^3}\,d\sigma\right\}\Bigg| & \leqq \varphi(8\mathrm{MM}_1),\end{aligned}$$

en négligeant éventuellement une constante multiplicative au second membre.

(¹) Voici comment on peut établir ce point en toute rigueur. Soient ξ_1, η_1, ζ_1 les coordonnées de P par rapport au trièdre $\mathrm{M}_1 t_1 s_1 \mathrm{N}_1$, que pour plus de commodité nous désignerons par $\mathrm{M}_1 x_1 y_1 z_1$; α, β, γ les cosinus directeurs de l'axe Mx par rapport à ce système de référence. Comme la quantité $(\xi - x_1)$, considérée dans le texte, n'étant autre que la composante de $\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{P}}$ suivant l'axe Mx, elle sera égale à $\alpha\xi_1 + \beta\eta_1 + \gamma\zeta_1$. Il suit de là que les intégrales telles que

$$\iint_{d(\mathrm{M}_1)} \frac{(\xi - x_1)}{\mathrm{M}_1\mathrm{P}_1^3}\,d\sigma$$

se présenteront sous forme de sommes d'intégrales telles que

$$\iint_{d(\mathrm{M}_1)} \frac{\xi_1}{\mathrm{M}_1\mathrm{P}^3}\,d\sigma,$$

qui, d'après les résultats du paragraphe **42** *bis*, ont toutes un sens.

47. La majoration de chacune des accolades qui figurent au premier membre de (89) présente une difficulté : les intégrales qui y figurent sont étendues à des domaines différents. Nous allons montrer tout d'abord qu'en négligeant, au besoin, un terme additif majoré en valeur absolue par une expression de la forme cons. $f(MM_1) \leqq \varphi(MM_1)$, on peut assigner aux intégrales en cause un même domaine, soit $d(M)$. Reprenons, à cet effet, les domaines $d(M)$ et $d(M_1)$; nous appellerons H la portion du domaine $d(M)$ qui n'appartient pas à $d(M_1)$ et H_1 la portion du domaine $d(M_1)$ qui n'appartient pas à $d(M)$. Pour toute intégrale double nous avons

$$\iint_{d(M_1)} = \iint_{d(M)} + \iint_{H_1} - \iint_{H}.$$

Si donc l'élément différentiel de l'intégrale considérée est majoré en valeur absolue, par une constante A sur chacun des domaines H et H_1, on aura

$$\left| \iint_{d(M_1)} - \iint_{d(M)} \right| \leqq A[\sigma(H_1) + \sigma(H)],$$

en appelant $\sigma(H_1)$ et $\sigma(H)$ les surfaces des portions H_1 et H de S. Tout revient dès lors à établir l'existence de la borne A et à justifier les inégalités telles que,

$$(90) \qquad \sigma(H_1) \leqq f(MM_1), \qquad \sigma(H) \leqq f(MM_1).$$

Or, soient P un point de S, p sa projection orthogonale sur le plan Mxy tangent en M à S, p_1 sa projection sur le plan $M_1 t_1 s_1$, tangent en M_1 à S, p' la projection de p_1 sur Mxy, Q la projection de P sur la droite d'intersection des plans Mxy et $Mt_1 s_1$. Il est évident que les points P, Q, p et p_1 sont situés dans un même plan et que le cercle de diamètre PQ passe par p et p_1. Il suit de là

$$pp_1 = PQ \sin \widehat{pPp_1} \leqq PQ \left|\widehat{pPp_1}\right|.$$

Mais l'angle aigu $\left|\widehat{pPp_1}\right|$ n'est autre que l'angle $|(N, N_1)|$ formé par les normales en M et M_1 à S_i, donc

$$pp' \leqq pp_1 \leqq PQ\, f(MM_1),$$

ce qui suffit pour montrer que l'ordre infinitésimal de pp' est celui de $f(MM_1)$ au plus, toutes les fois, du moins, que la distance PQ est bornée [1]. S'il n'en est pas ainsi, l'angle aigu

$$\alpha = \widehat{QPp}$$

du triangle rectangle QPp est voisin de $\frac{\pi}{2}$, puisque les longueurs Pp sont bornées supérieurement par le diamètre L de la surface S, et que, par suite, $PQ \leqq \frac{L}{\cos\alpha}$.

---

(1) La surface S étant l'enveloppe de ses plans tangents, on peut toujours supposer assez petite la distance MM_1 de manière que l'hypothèse du texte soit remplie.

Pour fixer les idées, admettons que $PQ > 3L$; il vient, en supposant que $\frac{\pi}{3} \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}$,

$$Qp = PQ \sin\alpha \geqq 3L \sin\frac{\pi}{3} = \frac{3L\sqrt{3}}{2} > 2L.$$

Ceci posé, soit I la projection orthogonale de M sur la droite d'intersection des plans tangents en M et en M_1 à S; d'après ce qui précède, Q sera aussi la projection de p sur cette droite. Comme Mp, projection de la distance de deux points M et P de S sur Mxy, est inférieure à L, l'inégalité précédente montre que

$$\frac{Qp}{2} \leqq MI.$$

Appelons alors I_1 la projection de M sur le plan tangent $M_1 t_1 s_1$ en M_1 à S; on a

$$\widehat{pQp_1} = \widehat{MII_1} = \beta,$$

les deux premiers angles — s'ils sont aigus — étant égaux comme rectilignes d'un même dièdre; sinon, $\widehat{pQp_1}$ et $\widehat{MII_1}$ sont supplémentaires.

Il en résulte, compte tenu de l'inégalité ci-dessus et du fait que $MM_1 \geqq MI_1$, les inégalités ci-dessous, valables dans tous les cas,

$$(91) \qquad \sin\beta = \frac{MI_1}{MI} \leqq 2\frac{MM_1}{Qp} = \frac{2}{\sin\alpha}\frac{MM_1}{PQ} \leqq \frac{4}{\sqrt{3}}\frac{MM_1}{PQ} \leqq 3\frac{MM_1}{PQ}.$$

Ces résultats acquis, une simple inspection du quadrilatère $PQpp_1$, inscrit dans le cercle de diamètre PQ, montre que, α et β étant aigus,

$$Qp = PQ\sin\alpha; \qquad Qp_1 = PQ\sin(\alpha \pm \beta).$$

Il suit de là, en supposant MM_1 assez petit pour que $\beta < \alpha$,

$$pp' = PQ\,|\sin\alpha - \sin(\alpha-\beta)\cos\beta| = PQ\sin\beta\,|\sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta| \leqq PQ\sin\beta,$$

donc [*cf.* (91)]

$$pp' \leqq 3MM_1 \leqq 3f(MM_1).$$

L'extension au cas où β serait obtus est immédiate.

Nous pouvons donc conclure : si p est la projection d'un point P de S sur le plan Mxy, p' la projection sur Mxy de la projection p_1 de P sur le plan $M_1 t_1 s_1$, on a, dans tous les cas,

$$(92) \qquad pp' \leqq 3f(MM_1).$$

Considérons alors le cercle $C(M_1, R_1)$ centré sur M_1, situé dans le plan $M_1 t_1 s_1$ et de rayon R_1 égal à $\frac{5}{13}R$; d'après ce que nous avons vu au paragraphe **18**, le voisinage $d(M_1)$ de M_1 sur S se projette sur $M_1 t_1 s_1$ à l'intérieur de ce cercle. $C(M_1, R_1)$ se projette, à son tour, de Mxy suivant une ellipse E. Décrivons autour de chaque point de cette ellipse un cercle de rayon $3f(MM_1)$ et appelons Γ le domaine formé de points intérieurs à l'ensemble de ces cercles et à la projection de $C(M_1, R_1)$ sur Mxy. L'inégalité (92) montre alors que $d(M_1)$ se projette sur Mxy à l'intérieur de Γ; par suite, le domaine H_1 de S, introduit au début de ce paragraphe, se projette tout entier sur Mxy à l'intérieur du domaine de ce plan, limité par la frontière de Γ et le cercle d'équation

$$x^2+y^2 \leqq \frac{25}{169}R^2, \quad z=0,$$

projection de $d(M)$ sur Mxy. Or, d'après sa construction même, Γ est intérieur au cercle du plan Mxy centré sur la projection m_1 de M_1 sur Mxy et dont le rayon serait égal au grand axe $\frac{5}{13}R$ de l'ellipse E, augmenté de $f(MM_1)$; et comme $Mm_1 \leqq MM_1$, ce cercle est, à son tour, contenu dans un cercle de centre M et de rayon

$$MM_1+\frac{5}{13}R+3f(MM_1) \leqq \frac{5}{13}R+4f(MM_1).$$

D'après cela, le domaine H_1 se projette sur Mxy à l'intérieur de la couronne circulaire de ce plan d'équation

$$\frac{25}{169}R^2 \leqq x^2+y^2 \leqq \left[\frac{5}{13}R+4f(MM_1)\right]^2.$$

Il en résulte, eu égard à (19), que l'aire $\sigma(H_1)$ de H_1 est inférieure au double de la surface de la couronne ci-dessus

$$\sigma(M_1) \leqq 8\pi\left[\frac{5}{13}R+2f(MM_1)\right]f(MM_1),$$

inégalité qui est bien équivalente à (90) si l'on remarque que $f(MM_1) \leqq f(L)$ et si l'on néglige le facteur borné $8\pi\left[\frac{5}{13}R+f(L)\right]$. Il est clair que l'on justifierait la deuxième inégalité (90) en intervertissant, dans les raisonnements qui précèdent, le rôle des plans Mts et $M_1t_1s_1$.

Pour achever de légitimer le lemme énoncé au début de ce paragraphe, il nous reste à établir l'existence d'une majorante A pour la valeur absolue de l'élément différentiel de chaque intégrale de (89), la majoration en cause étant valable sur les domaines H et H_1. Admettons, à cet effet, que MM_1 vérifie l'inégalité (27)

$$MM_1 \leqq \frac{R}{8}.$$

Alors les domaines H et H_1 seront situés à l'extérieur de la portion commune aux sphères $L\left(M, \frac{5}{13}R\right)$ et $L\left(M_1, \frac{5}{13}R\right)$; il en résulte que les distances PM et PM_1 sont au moins égales à $\left(\frac{5}{13} - \frac{1}{8}\right)R = \frac{27}{104}R$ lorsque P balaie **H** ou $\mathbf{H}_1$, en sorte que

$$(93) \qquad \frac{1}{PM} \leqq \frac{104}{27}\frac{1}{R} < \frac{4}{R}; \qquad \frac{1}{PM_1} \leqq \frac{104}{27}\frac{1}{R} < \frac{4}{R}.$$

Ces inégalités suffisent pour majorer en fonction de $\frac{1}{R}$ les éléments différentiels que nous considérons, car la quantité $|\mu(P)|$ est, par hypothèse, bornée; et cela achève de justifier le lemme qui faisait l'objet du présent paragraphe.

48. Posons alors ([1])

$$(94) \qquad I = \iint_{S-d(M)} \mu(P)\left[\frac{\xi - x_1}{M_1P^3} - \frac{\xi}{MP^3}\right]d\sigma,$$

$$(95) \qquad I_1 = \iint_{d(M)} [\mu(P) - \mu(M_1)]\frac{(\xi - x_1)}{M_1P^3}\,d\sigma - \iint_{d(M)} [\mu(P) - \mu(M)]\frac{\xi}{MP^3}\,d\sigma$$

$$= \iint_{d(M)} [\mu(P) - \mu(M_1)]\left(\frac{1}{M_1P^3} - \frac{1}{MP^3}\right)\xi\,d\sigma$$

$$+ [\mu(M) - \mu(M_1)]\iint_{d(M)} \frac{\xi}{MP^3}\,d\sigma - x_1\iint_{d(M)} [\mu(P) - \mu(M_1)]\frac{d\sigma}{M_1P^3},$$

$$(96) \qquad I_2 = \mu(M_1)\iint_{d(M)} \frac{\xi - x_1}{M_1P^3}\,d\sigma - \mu(M)\iint_{d(M)} \frac{\xi}{MP^3}\,d\sigma.$$

D'après le lemme du précédent paragraphe, I, I_1 et I_2 ne diffèrent respectivement des première, seconde et troisième accolades de (89) que par un terme additif moindre en valeur absolue que $f(MM_1)$. D'après cela, il suffit, pour justifier (89), de montrer que

$$(97) \qquad |I| \leqq \varphi(8MM_1), \qquad |I_1| \leqq \varphi(8MM_1), \qquad |I_2| \leqq \varphi(8MM_1).$$

49. L'étude de l'intégrale I, définie par (94), a été faite, en principe, dans plusieurs paragraphes du présent travail. Servons-nous, par exemple, des inégalités (93), visiblement valables pour chaque point P du domaine $S - d(M)$ pourvu que

$$MM_1 \leqq \frac{R}{8}.$$

On vérifie aisément que pour de tels points on peut écrire

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\xi - x_1}{M_1P^3}\right)\right| = \left|\frac{3(\xi - x_1)^2}{M_1P^5} - \frac{1}{M_1P^3}\right| \leqq \frac{4}{M_1P^3} \leqq \frac{4^4}{R^3},$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\xi - x_1}{M_1P^3}\right)\right| = \left|\frac{3(\xi - x_1)(\eta - y_1)}{M_1P^5}\right| \leqq \frac{3}{M_1P^3} \leqq \frac{3.4^3}{R^3}.$$

---

[1] Notons que la transformation de l'intégrale I_1 [*cf.* (95)] n'est légitime qu'une fois établie la convergence des intégrales du second membre. Cette vérification sera faite au cours des calculs du paragraphe **50**.

On déduit de là, en désignant par A le maximum de $|\mu(P)|$,

$$\left|\mu(P)\left[\frac{(\xi - x_1)}{M_1P^3} - \frac{\xi}{M_1P^3}\right]\right| \leqq \frac{4^3}{R^3}A[4|x_1| + 3|y_1| + 3|z_1|] \leqq \frac{4^3.10}{R^3}A.MM_1.$$

Si donc on appelle σ la surface totale de S, il viendra [*cf.* (94)]

$$|I| \leqq \frac{4^3.10 A\sigma}{R^3} MM_1 \leqq \varphi(MM_1); \qquad MM_1 \leqq \frac{R}{8};$$

ce qui justifie la première des inégalités (97).

50. Occupons-nous maintenant de la quantité I_2, définie par (96). On a, identiquement,

$$I_2 = [\mu(M_1) - \mu(M)]\iint_{d(M)} \frac{(\xi - x_1)}{M_1P^3}d\sigma + \mu(M)\iint_{d(M)}\left[\frac{(\xi - x_1)}{M_1P^3} - \frac{\xi}{MP^3}\right]d\sigma,$$

puisque les intégrales du second membre sont toutes convergentes. Or, d'après la remarque finale du paragraphe **42** *bis*, l'intégrale du premier terme du second membre en cause est bornée par une constante positive convenable K; on a donc

$$\left|[\mu(M_1) - \mu(M)]\iint_{d(M)} \frac{(\xi - x_1)}{M_1P^3}d\sigma\right| \leqq K f(MM_1) \leqq \varphi(MM_1).$$

Comme $|\mu(P)|$ est borné, la dernière des inégalités (97) revient à

$$(98) \qquad \left|\iint_{d(M)}\left[\frac{(\xi - x_1)}{M_1P^3} - \frac{\xi}{MP^3}\right]d\sigma\right| \leqq \varphi(8MM_1).$$

51. La difficulté primordiale que soulève la discussion de l'inégalité (98) réside dans le fait que l'intégrale du premier membre n'est pas absolument convergente. Nous sommes donc amenés à faire de nouveau usage des artifices exposés au paragraphe **42** *bis*. Rappelons qu'en passant aux coordonnées cylindriques ζ, ρ, ψ du point P, attachées au trièdre Mxyz (ou MtsN), nous avons obtenu la relation

$$(99) \qquad \iint_{d(M)} \frac{\xi}{MP^3}d\sigma = \int_0^{2\pi}\cos\psi\, d\psi \int_0^{\frac{5}{13}R}\left[\frac{\rho^3}{(\rho^2+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}}\,\frac{1}{\cos(N', z)} - 1\right]\frac{d\rho}{\rho}$$
$$= \iint_{d(M)}\left[\frac{\rho^3}{(\rho^2+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}} - \cos(N', z)\right]\frac{\xi}{\rho^3}d\sigma,$$

dont le dernier membre est constitué par une intégrale absolument convergente. Il y a un intérêt évident à effectuer une transformation toute semblable sur l'expression

$$\iint_{d(M)} \frac{(\xi - x_1)}{M_1P^3}d\sigma,$$

ou, ce qui revient au même, sur une expression qui diffère de la précédente par un terme additif, moindre en valeur absolue que $f(MM_1)$. D'après le théorème du paragraphe **47**, on peut prendre à cet effet l'intégrale

$$\iint_{d(M_1)} \frac{(\xi - x_1)}{M_1 P^3} d\sigma,$$

ou encore en se rappelant que ξ_1, η_1, et ζ_1 sont les coordonnées du point P par rapport au trièdre $M_1\, t_1\, s_1\, N_1$,

$$\iint_{d(M_1)} \frac{\xi_1}{M_1 P^3} d\sigma.$$

En effet, d'une part,

$$\iint_{d(M_1)} \frac{(\xi - x_1)}{M_1 P^3} d\sigma = \cos(t_1, x) \iint_{d(M_1)} \frac{\xi_1}{M_1 P^3} d\sigma + \cos(s_1, x) \iint_{d(M_1)} \frac{\eta_1}{M_1 P^3} d\sigma + \cos(N_1, x) \iint_{d(M_1)} \frac{\zeta_1}{M_1 P^3} d\sigma$$

et que, d'autre part, les intégrales du second membre étant bornées, on a, comme on l'a fait remarquer plusieurs fois,

$$|\cos(t_1, x) - 1| \leq f(MM_1), \qquad |\cos(s_1, x)| \leq f(MM_1), \qquad |\cos(N_1, x)| \leq f(MM_1).$$

Introduisons alors relativement au trièdre $M_1\, t_1\, s_1\, N_1$ le système de coordonnées cylindriques ζ_1, ρ_1, ψ_1 ; d'après (99), nous aurons

$$\iint_{d(M_1)} \frac{\xi_1}{M_1 P^3} d\sigma = \iint_{d(M_1)} \left[\frac{\rho_1^3}{(\rho_1^2 + \zeta_1^2)^{\frac{3}{2}}} - \cos(N', N_1) \right] \frac{\xi_1}{\rho_1^3} d\sigma.$$

Enfin, en utilisant de nouveau le résultat du paragraphe **47**, nous pouvons affirmer que le premier membre diffère de $f(MM_1)$ au plus de

$$\iint_{d(M)} \left[\frac{\rho_1^3}{(\rho_1^2 + \zeta_1^2)^{\frac{3}{2}}} - \cos(N', N_1) \right] \frac{\xi_1}{\rho_1^3} d\sigma.$$

Ainsi, chacune des intégrales par lesquelles on a remplacé les intégrales de (98) est absolument convergente [1]. Les calculs du paragraphe **42 *bis*** prouvent d'ailleurs [*cf.* (80') et (83')] que l'on a [*cf.* (99)]

$$(100) \qquad \left| \iint_{d(M, 2MM_1)} \left[\frac{\rho^3}{(\rho^2 + \zeta^2)^{\frac{3}{2}}} - \cos(N', z) \right] \frac{\xi}{\rho^3} d\sigma \right| \leq 80\pi\varphi(2MM_1),$$

où $d(M, 2MM_1)$ désigne la portion du voisinage de $\Sigma(M)$ de S qui se projette sur le plan Mxy à l'intérieur du cercle $C(M, 2MM_1)$ (*cf.* § **47**)

$$z = 0; \qquad x^2 + y^2 = 4MM_1^2.$$

---

[1] On remarquera l'analogie de ce raisonnement qui suit avec celui du paragraphe **29**, par exemple, ou, pour majorer une intégrale telle que $\iint_{\Sigma(M)}$ on décomposait le domaine d'intégration en $\Sigma(M) - \Sigma(M, 2MM_1)$ et $\Sigma(M, 2MM_1)$. Ici, nous opérons avec les domaines $d(M)$ et $d(M, 2MM_1)$.

Je dis que le domaine $C(M, 2MM_1)$ est intérieur à la sphère de Liapounoff $L(M, 2\sqrt{2}MM_1)$ si MM_1 est assez petit, — pour fixer les idées, si $MM_1 \leqq \frac{R}{16}$. En effet, dans ce dernier cas, le domaine $d(M, 2MM_1)$ est sûrement intérieur à $\Sigma(M)$; d'après cela si P est un point de $d(M, 2MM_1)$, la droite MP est extérieure au cône de Günther $G(M)$ (*cf.* § **20**), en sorte que la cote ζ de P est telle que

$$|\zeta| \leqq \rho \operatorname{tang} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\rho < \rho \leqq 2MM_1.$$

Il suit de là que pour tout point P de $d(M, 2MM_1)$ nous avons

$$MP^2 \leqq 8MM_1^2,$$

ce qui démontre notre proposition.

Cela étant, $L(M, 2\sqrt{2}MM_1)$ est intérieur à la sphère $L(M_1, 4MM_1)$ $\left(\text{qui est une sphère de Liapounoff puisque } 4MM_1 \leqq \frac{R}{4} < R\right)$; par suite le domaine $d(M, 2MM_1)$ est intérieur à ce domaine $\Sigma(M_1, 4MM_1)$, que $L(M_1, 4MM_1)$ découpe sur S. Et ce dernier domaine est à son tour intérieur au voisinage $d(M_1, 4MM_1)$ de M_1, qui se projette sur le plan $M_1 t_1 s_1$ à l'intérieur du cercle $C(M_1, 4MM_1)$, $4MM_1 \leqq \frac{R}{4} < \frac{5}{13}R$. En définitive, le domaine $d(M, 2MM_1)$ est intérieur à $d(M_1, 4MM_1)$. Il suit de là [*cf.* (80) et (83')]

$$(100')\quad \left|\iint_{d(M,2MM_1)} \left[\frac{\rho_1^3}{(\rho_1^2+\zeta_1^2)^{\frac{3}{2}}} - \cos(N', N_1)\right] \frac{\zeta_1}{\rho_1^3}\, d\sigma\right|$$
$$\leqq \iint_{d(M,2MM_1)} \left|\left[\frac{\rho_1^3}{(\rho_1^2+\zeta_1^2)^{\frac{3}{2}}} - \cos(N', N_1)\right] \frac{\zeta_1}{\rho_1^3}\, d\sigma\right|$$
$$\leqq \iint_{d(M_1,4MM_1)} \left|\left[\frac{\rho_1^3}{(\rho_1^2+\zeta_1^2)^{\frac{3}{2}}} - \cos(N', N_1)\right] \frac{\zeta_1}{\rho_1^3}\, d\sigma\right| \leqq 80\pi\varphi(8MM_1).$$

Par suite, en négligeant un terme additif dont la valeur absolue est majorée par $\varphi(8MM_1)$ [1] et sous réserve $MM_1 \leqq \frac{R}{16}$, l'inégalité (98), c'est-à-dire, la

---

[1] Le terme additif à écrire est égal à

$$\iint_{d(M)-d(M,2MM_1)} \left[\frac{\rho_1^3}{(\rho_1^2+\zeta_1^2)^{\frac{3}{2}}} - \cos(N', N_1)\right] \frac{\zeta_1 - \zeta}{\rho_1^3}\, d\sigma.$$

On vérifie aisément que l'expression précédente diffère de $\varphi(2MM_1)$ au plus de

$$I = \iint_{d(M)-d(M,2MM_1)} \left[\frac{\rho^3}{(\rho^2+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}} - \cos(N', N)\right] \frac{\zeta_1 - \zeta}{\rho^3}\, d\sigma.$$

dernière des inégalités (97) revient à [*cf.* (99) et (100′)]

$$
(101)\quad \left| \iint_{d(\mathrm{M})-d(\mathrm{M},2\mathrm{MM}_1)} \left[\frac{\rho_1^3}{(\rho_1^2+\zeta_1^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\rho^3}{(\rho^2+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}}\right]\frac{\xi}{\rho^3}\,d\sigma \right.
$$
$$
+\iint_{d(\mathrm{M})-d(\mathrm{M},2\mathrm{MM}_1)} [\cos(\mathrm{N}',\mathrm{N}) - \cos(\mathrm{N}',\mathrm{N}_1)]\frac{\xi}{\rho^3}\,d\sigma
$$
$$
+\iint_{d(\mathrm{M})-d(\mathrm{M},2\mathrm{MM}_1)} \left[\frac{1}{\cos(\mathrm{N}',\mathrm{N}_1)}\,\frac{\rho_1^3}{(\rho_1^2+\zeta_1^2)^{\frac{3}{2}}} - 1\right]\xi
$$
$$
\left. \times\left(\frac{1}{\rho_1^3} - \frac{1}{\rho^3}\right)\cos(\mathrm{N}',\mathrm{N}_1)\,d\sigma \right| \leqq \varphi(8\mathrm{MM}_1).
$$

Nous allons montrer que chaque terme du premier membre de (101) est majoré, en valeur absolue par un nombre de la forme $\varphi(8\mathrm{MM}_1)$.

52. Observons d'abord que $\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+\zeta^2}}$ n'est autre que le cosinus de l'angle γ que le segment MP fait avec le plan $\mathrm{M}xy$; de même $\frac{\rho_1}{\sqrt{\rho_1^2+\zeta_1^2}}$ est le cosinus de l'angle γ_1 de $\mathrm{M}_1\mathrm{P}$ avec le plan $\mathrm{M}_1 t_1 s_1$. Nous pouvons donc écrire

$$
(102)\quad \frac{\rho_1^2}{\rho_1^2+\zeta_1^2} - \frac{\rho^2}{\rho^2+\zeta^2} = \cos^2\gamma_1 - \cos^2\gamma
$$
$$
= 1 - \cos^2(\mathrm{M}_1\mathrm{P},\mathrm{N}_1) - \frac{\rho^2}{\rho^2+\zeta^2} = \frac{\zeta^2}{\mathrm{MP}^2} - \cos^2(\mathrm{M}_1\mathrm{P},\mathrm{N}_1).
$$

D'un autre côté, il vient identiquement

$$
\cos\left(\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{P}},\overrightarrow{\mathrm{N}_1}\right) = \cos(\mathrm{M}_1\mathrm{P},x)\cos(\mathrm{N}_1,x) + \cos(\mathrm{M}_1\mathrm{P},y)\cos(\mathrm{N}_1,y)
$$
$$
+\cos(\mathrm{M}_1\mathrm{P},z) - 2\cos(\mathrm{M}_1\mathrm{P},z)\sin^2\frac{(\mathrm{N},\mathrm{N}_1)}{2}
$$

en remarquant que

$$
\cos(\mathrm{N}_1,z) = \cos(\mathrm{N},\mathrm{N}_1) = 1 - 2\sin^2\frac{(\mathrm{N},\mathrm{N}_1)}{2}.
$$

Comme

$$
\cos(\mathrm{M}_1\mathrm{P},z) = \frac{\zeta - z_1}{\mathrm{M}_1\mathrm{P}}
$$

Comme $\overrightarrow{\mathrm{MP}}$ est extérieur au cône de Günther, on a

$$
|\xi_1 - \xi| = \left|(\mathrm{M}_1\mathrm{P}-\mathrm{MP})\cos\left(\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{P}},x_1\right) + \mathrm{MP}\left[\cos\left(\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{P}},x_1\right) - \cos\left(\overrightarrow{\mathrm{MP}},x\right)\right]\right|
$$
$$
\leqq \mathrm{MM}_1 + \mathrm{MP}\left|\left(\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{P}},x_1\right) - \left(\overrightarrow{\mathrm{MP}},x\right)\right|
$$
$$
\leqq \mathrm{MM}_1 + 2\rho\left|\left(\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{P}},x_1\right) - \left(\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{P}},x\right)\right| + 2\rho\left|\left(\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{P}},x\right) - \left(\overrightarrow{\mathrm{MP}},x\right)\right|
$$
$$
\leqq \mathrm{MM}_1 + 2\rho f(\mathrm{MM}_1) + 2\rho\left|\left(\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{P}},\overrightarrow{\mathrm{MP}}\right)\right|.
$$

Eu égard à (83_1) et au fait que $\frac{1}{|\cos(\mathrm{N}',\mathrm{N})|}$ est une quantité bornée sur le domaine d'intégration, on déduit aisément de là que les contributions des termes du dernier membre à la majuscule de I sont inférieures à $\varphi(8\mathrm{MM}_1)$.

(102) pourra s'écrire

$$\cos^2\gamma_1 - \cos^2\gamma = \zeta^2\left(\frac{1}{MP^2} - \frac{1}{M_1P^2}\right) - 2\frac{(\zeta - z_1)}{M_1P}\alpha - \alpha^2 + 2\frac{\zeta z_1}{M_1P^2} - \frac{z_1^2}{M_1P^2},$$

en posant

$$\alpha = \cos(M_1P, x)\cos(N_1, x) + \cos(M_1P, y)\cos(N_1, y) - 2\cos(M_1P, z)\sin^2\frac{(N, N_1)}{2}.$$

On déduit de là

$$(103)\qquad |\cos^2\gamma_1 - \cos^2\gamma| \leqq \zeta^2\left|\frac{1}{MP^2} - \frac{1}{M_1P^2}\right| + 2\frac{|\zeta|}{M_1P}\cdot\frac{|z_1|}{M_1P} + \frac{z_1^2}{M_1P^2} + \alpha^2 + 2|\alpha|\left|\frac{\zeta}{M_1P}\right| + 2|\alpha|\left|\frac{z_1}{M_1P}\right|.$$

Or, comme nous l'avons déjà fait remarquer plusieurs fois,

$$|\cos(N_1\, x)| \leqq f(MM_1);\qquad |\cos(N_1, y)| \leqq f(MM_1);$$

$$\left|\sin\left(\frac{N, N_1}{2}\right)\right| \leqq \frac{1}{2}|(N, N_1)| \leqq \frac{1}{2}f(M\,M_1)$$

en sorte que

$$(104)\qquad |\alpha| \leqq 3f(MM_1).$$

D'un autre côté, (16) est valable pour chaque point de $d(M)$; et comme la droite MP est extérieure au cône $G(M)$ (*cf.* § **20**)

$$\frac{MP}{\sin\omega} = \frac{\rho}{\sin(MP, N)\sin\omega} \leqq \frac{\rho}{\sin^2\frac{\pi}{3}} \leqq 2\rho,$$

nous avons

$$(105)\qquad \left|\frac{\zeta}{MP}\right| \leqq \frac{13}{6}f\left(\frac{MP}{\sin\omega}\right) \leqq \frac{13}{6}f(2\rho),$$

$$\left|\frac{z_1}{MM_1}\right| \leqq \frac{13}{6}f\left(\frac{MM_1}{\sin\omega}\right) \leqq \frac{13}{6}f(2MM_1).$$

Observons alors que le domaine $d(M) - d(M, 2MM_1)$ est extérieur à la sphère $L(M, 2MM_1)$; l'inégalité $\frac{1}{M_1P} \leqq \frac{2}{MP}$ [*cf.* (32)] est donc valable sur ce domaine et les inégalités précédentes donnent

$$(106)\qquad \begin{cases} \left|\dfrac{\zeta}{M_1P}\right| \leqq 5f(2\rho), \\ \left|\dfrac{z_1}{M_1P}\right| \leqq 5\dfrac{MM_1}{MP}f(2MM_1) \leqq 5\dfrac{MM_1}{\rho}f(2MM_1) \leqq 5\dfrac{MM_1}{\rho}f(2\rho). \end{cases}$$

Enfin, on peut écrire [*cf.* (32) et (105)]

$$\zeta^2\left|\frac{1}{MP^2} - \frac{1}{M_1P^2}\right| \leqq \zeta^2\frac{|M_1P - MP|(M_1P + MP)}{M_1P^2.MP^2} \leqq 6\frac{MM_1}{MP}\,\frac{\zeta^2}{MP^2} \leqq 100\frac{MM_1}{\rho}[f(2\rho)]^2$$

Cette inégalité, jointe à (104), (105) et (106), permet de déduire de (103)

$$(107)\quad |\cos^2\gamma_1-\cos^2\gamma|\leqq 100\frac{\mathrm{MM}_1}{\rho}[f(2\rho)]^2+25\frac{\mathrm{MM}_1^2}{\rho^2}[f(2\rho)]^2+10[f(\mathrm{MM}_1)]^2$$
$$+50\frac{\mathrm{MM}_1}{\rho}f(2\rho)f(2\mathrm{MM}_1)$$
$$+30f(\mathrm{MM}_1)f(2\rho)+30\frac{\mathrm{MM}_1}{\rho}[f(2\mathrm{MM}_1)]^2.$$

Or, $\cos\gamma_1$ et $\cos\gamma$ étant positifs, nous avons

$$|\cos^3\gamma_1-\cos^3\gamma|=|\cos\gamma_1-\cos\gamma|\,|\cos^2\gamma_1+\cos^2\gamma$$
$$+\cos\gamma\cos\gamma_1|\leqq|\cos\gamma_1-\cos\gamma|(\cos\gamma_1+\cos\gamma)^2\leqq 2\,|\cos^2\gamma_1-\cos^2\gamma|.$$

On déduit de là, eu égard à (107) et en remplaçant $\cos\gamma$ et $\cos\gamma_1$ par leurs valeurs (102),

$$\left|\frac{\rho_1^3}{(\rho_1^2+\zeta_1^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{\rho^3}{(\rho^2+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}}\right|\leqq 10\left\{20\frac{\mathrm{MM}_1}{\rho}[f(2\rho)]^2+5\frac{\mathrm{MM}_1^2}{\rho^2}[f(2\rho)]^2+2[f(\mathrm{MM}_1)]^2\right.$$
$$\left.+10\frac{\mathrm{MM}_1}{\rho}f(2\rho)f(2\mathrm{MM}_1)+6f(\mathrm{MM}_1)f(2\rho)+6\frac{\mathrm{MM}_1}{\rho}[f(2\mathrm{MM}_1)]^2\right\}.$$

Il suit de là, en utilisant les coordonnées polaires ρ et ψ dans le plan $\mathrm{M}xy$, en tenant compte de (19) et en remarquant que $\left|\frac{\xi}{\rho}\right|\leqq 1$

$$(108)\quad \left|\iint_{d(\mathrm{M})-d(\mathrm{M},2\mathrm{MM}_1)}\left[\frac{\rho_1^3}{(\rho_1^2+\zeta_1^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{\rho^3}{(\rho^2+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}}\right]\frac{\xi}{\rho^3}\,d\sigma\right|\leqq 800\pi\,\mathrm{MM}_1\int_{2\mathrm{MM}_1}^{\frac{5}{13}\mathrm{R}}\frac{[f(2\rho)]^2}{\rho^2}\,d\rho$$
$$+200\pi\,\mathrm{MM}_1^2\int_{2\mathrm{MM}_1}^{\frac{5}{13}\mathrm{R}}\frac{[f(2\rho)]^2}{\rho^3}\,d\rho$$
$$+80\pi[f(\mathrm{MM}_1)]^2\int_{2\mathrm{MM}_1}^{\frac{5}{13}\mathrm{R}}\frac{d\rho}{\rho}$$
$$+800\pi\,\mathrm{MM}_1f(2\mathrm{MM}_1)\int_{2\mathrm{MM}_1}^{\frac{5}{13}\mathrm{R}}\frac{f(2\rho)}{\rho^2}\,d\rho$$
$$+240f(\mathrm{MM}_1)\int_{2\mathrm{MM}_1}^{\frac{5}{13}\mathrm{R}}\frac{f(2\rho)}{\rho}\,d\rho$$
$$+240\pi\,\mathrm{MM}_1[f(2\mathrm{MM}_1)]^2\int_{2\mathrm{MM}_1}^{\frac{5}{13}\mathrm{R}}\frac{d\rho}{\rho^2}.$$

D'après (4′) et (8), nous avons en remarquant que sur $d(\mathrm{M})$: $2\rho\leqq\mathrm{R}$

$$(108')\quad \mathrm{MM}_1\int_{2\mathrm{MM}_1}^{\frac{5}{13}\mathrm{R}}\frac{[f(2\rho)]^2}{\rho^2}\,d\rho\leqq\mathrm{MM}_1\int_{2\mathrm{MM}_1}^{\frac{5}{13}\mathrm{R}}\frac{[f(2\rho)]}{\rho^2}\,d\rho\leqq \mathrm{K}(f,\mathrm{R})\,\varphi(4\mathrm{MM}_1).$$

Par ailleurs, dans l'intervalle d'intégration $\mathrm{MM}_1\leqq\rho$; il en résulte, eu égard à l'inégalité précédente,

$$\mathrm{MM}_1^2\int_{2\mathrm{MM}_1}^{\frac{5}{13}\mathrm{R}}\frac{[f(2\rho)]^2}{\rho^3}\,d\rho \leqq \mathrm{MM}_1\int_{2\mathrm{MM}_1}^{\frac{5}{13}\mathrm{R}}\frac{[f(2\rho)]}{\rho^2}\,d\rho \leqq \mathrm{K}(f,\mathrm{R})\varphi(4\mathrm{MM}_1).$$

Par suite, le quatrième terme du second membre de (108) vérifie *a fortiori* une inégalité analogue. D'un autre côté l'intégrale de l'avant dernier terme de (108) est visiblement bornée par $\varphi\left(\frac{10}{13}\mathrm{R}\right)$, en sorte que le terme en cause est majoré par

$$240\,\varphi\left(\frac{10}{13}\,\mathrm{R}\right)f(\mathrm{MM}_1) \leqq \varphi(\mathrm{MM}_1) \leqq \varphi(4\mathrm{MM}_1).$$

Le dernier terme de (102) donne :

$$\mathrm{MM}_1\,[f(2\mathrm{MM}_1)]^2\int_{2\mathrm{MM}_1}^{\frac{5}{13}\mathrm{R}}\frac{d\rho}{\rho^2} \leqq \frac{1}{2}\,f(2\mathrm{MM}_1) \leqq \varphi(8\mathrm{MM}_1).$$

Enfin, il vient

$$[f(\mathrm{MM}_1)]^2\int_{2\mathrm{MM}_1}^{\frac{5}{13}\mathrm{R}}\frac{d\rho}{\rho} \leqq [f(\mathrm{MM}_1)]^2\log\left(\frac{5}{26}\,\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{MM}_1}\right).$$

Mais on a vu (*cf.* § 35) que

$$f(\mathrm{MM}_1)\log\left(\frac{5}{26}\,\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{MM}_1}\right) \leqq \text{const.}$$

quel que soit MM_1. Il en résulte que la troisième intégrale (108) possède une borne du type

$$\text{const.}\, f(\mathrm{MM}_1) \leqq \varphi(4\mathrm{MM}_1).$$

De l'ensemble des résultats qui précèdent il résulte *a fortiori*

$$(109)\qquad \left|\iint_{d(\mathrm{M})-d(\mathrm{M},2\mathrm{MM}_1)}\left[\frac{\rho_1^3}{(\rho_1^2+\zeta_1^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{\rho^3}{(\rho^2+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}}\right]\frac{\xi}{\rho^3}\,d\sigma\right| \leqq \varphi(8\mathrm{MM}_1).$$

53. Occupons-nous à présent du second terme de (101). Nous avons identiquement

$$|\cos(\mathrm{N}',\mathrm{N})-\cos(\mathrm{N}',\mathrm{N}_1)| = 2\left|\sin\frac{(\mathrm{N}',\mathrm{N})-(\mathrm{N}',\mathrm{N}_1)}{2}\right|\left|\sin\frac{(\mathrm{N}',\mathrm{N})+(\mathrm{N}',\mathrm{N}_1)}{2}\right|.$$

Comme les faces d'un trièdre à arêtes parallèles aux vecteurs $\vec{\mathrm{N}}$, $\vec{\mathrm{N}'}$ et $\vec{\mathrm{N}_1}$ vérifient l'inégalité

$$|(\mathrm{N}',\mathrm{N})-(\mathrm{N}',\mathrm{N}_1)| \leqq |(\mathrm{N},\mathrm{N}_1)| \leqq f(\mathrm{MM}_1),$$

cela donne

$$|\cos(\mathrm{N}',\mathrm{N})-\cos(\mathrm{N}',\mathrm{N}_1)| \leqq \frac{1}{2}\,|(\mathrm{N},\mathrm{N}_1)|\;|(\mathrm{N}',\mathrm{N})+(\mathrm{N}',\mathrm{N}_1)| \leqq \frac{1}{2}f(\mathrm{MM}_1)[f(\mathrm{MP})+f(\mathrm{M}_1\mathrm{P})].$$

Mais pour tout point du domaine $d(\mathrm{M})-d(\mathrm{M},2\mathrm{MM}_1)$, nous avons, évidemment,

$$\mathrm{M}_1\mathrm{P} \leqq 2\,\mathrm{MP},$$

de sorte que

$$|\cos(N', N) - \cos(N', N_1)| \leqq f(MM_1) f(2MP) \leqq f(MM_1) f(4\rho).$$

Il en résulte [*cf.* (101)]

$$(110)\qquad \left| \iint_{d(M)-d(M,2MM_1)} [\cos(N', N) - \cos(N', N_1)] \frac{\xi}{\rho^3} d\sigma \right|$$

$$\leqq 2\pi f(MM_1) \int_0^{\frac{5}{13}} \frac{f(4\rho)}{\rho} d\rho = 2\pi\varphi\left(\frac{20}{13} R\right) f(MM_1) \leqq \varphi(8MM_1).$$

54. Occupons-nous de la dernière intégrale (101). Rappelons la signification des lettres ρ_1 et ρ qui y figurent : ρ est la longueur de la projection sur le plan Mxy du segment MP, alors que ρ_1 est la longueur de la projection sur le plan $M_1 t_1 s_1$ du segment $M_1 P$. Il en résulte (*cf.* le début du paragraphe **52** pour la signification de $\cos\gamma_1$ et de $\cos\gamma$)

$$(111)\qquad |\rho_1 - \rho| = |M_1 P \cos\gamma_1 - MP\cos\gamma|$$
$$= |(M_1 P - MP)\cos\gamma_1 + MP(\cos\gamma_1 - \cos\gamma)| \leqq MM_1 + MP|\cos\gamma_1 - \cos\gamma|.$$

Or la droite MP rencontre $d(M)$, donc $\Sigma(M)$ en deux points : elle est par suite extérieure au cône de Günther $G(M)$ (*cf.* §§ **19** et **20**); elle fait donc avec Mz ou N, un angle supérieur à $\omega = \frac{\pi}{3}$. Par suite, sur $d(M)$, on a

$$1 \geqq \cos\gamma = \sin(MP, z) \geqq \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

les mêmes inégalités valant évidemment pour $\cos\gamma_1$. On déduit de là

$$(111')\qquad |\cos^2\gamma_1 - \cos^2\gamma| = |\cos\gamma_1 + \cos\gamma|\,|\cos\gamma_1 - \cos\gamma| \geqq |\cos\gamma_1 - \cos\gamma|.$$

Par conséquent, $|\cos\gamma_1 - \cos\gamma|$ satisfera *a fortiori* à l'inégalité (107). Une autre conséquence des inégalités précédentes est celle-ci [*cf.* aussi (32)] :

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{M_1 P\cos\gamma_1} \leqq \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{M_1 P} \leqq \frac{4}{MP} \leqq \frac{4}{\rho}, \qquad \frac{\rho_1}{\rho} = \frac{M_1 P}{MP}\frac{\cos\gamma_1}{\cos\gamma} \leqq \frac{2}{\cos\gamma} \leqq 3, \qquad MP = \frac{\rho}{\cos\gamma} \leqq 2\rho.$$

Il suit de là [*cf.* (111)]

$$(112)\qquad \left|\frac{1}{\rho_1^3} - \frac{1}{\rho^3}\right| = |\rho_1 - \rho| \frac{\rho_1^2 + \rho\rho_1 + \rho^2}{\rho_1^3\rho^3}$$
$$\leqq |\rho_1 - \rho| \frac{1 + \frac{\rho^2}{\rho_1^2} + \frac{\rho}{\rho_1}}{\rho^3\rho_1} \leqq \frac{84}{\rho^4}|\rho_1 - \rho| \leqq \frac{84}{\rho^4}[MM_1 + 2\rho|\cos\gamma_1 - \cos\gamma|].$$

Enfin, l'inégalité (83_1) s'applique à condition d'y remplacer M par M_1 et P par M; nous avons donc

$$(113)\qquad \left|\frac{1}{\cos(N', N_1)} \frac{\rho_1^3}{(\rho_1^2 + \zeta_1^2)^{\frac{3}{2}}} - 1\right| \leqq 40 f\left(\frac{\rho_1}{\sin^2\omega}\right) \leqq 40 f(4\rho).$$

Nous pouvons dès lors écrire [*cf.* (111), (111') et (113)]

$$(114)\quad \left|\iint_{d(\mathrm{M})-d(\mathrm{M},2\mathrm{MM}_1)}\left[\frac{1}{\cos(\mathrm{N}',\mathrm{N}_1)}\frac{\rho_1^3}{(\rho_1^2+\zeta_1^2)^{\frac{3}{2}}}-1\right]\xi\left(\frac{1}{\rho_1^3}-\frac{1}{\rho^3}\right)\cos(\mathrm{N}',\mathrm{N}_1)\,d\sigma\right|$$
$$\leqq 6720\pi\left[\mathrm{MM}_1\int_{2\mathrm{MM}_1}^{\frac{5}{13}\mathrm{R}}\frac{f(4\rho)}{\rho^2}d\rho+2\int_{2\mathrm{MM}_1}^{\frac{5}{13}\mathrm{R}}|\cos\gamma_1-\cos\gamma|\frac{f(4\rho)}{\rho}d\rho\right].$$

L'inégalité (108') montre que le premier terme du second membre est majoré par $\varphi(8\mathrm{MM}_1)$. D'un autre côté, comme $f(2\rho)\leqq f\left(\frac{10}{13}\mathrm{R}\right)\leqq f(\mathrm{R})$, on a

$$\int_{2\mathrm{MM}_1}^{\frac{5}{13}\mathrm{R}}|\cos\gamma_1-\cos\gamma|\frac{f(4\rho)}{\rho}d\rho\leqq f(\mathrm{R})\int_{2\mathrm{MM}_1}^{\frac{5}{13}\mathrm{R}}\frac{|\cos\gamma_1-\cos\gamma|}{\rho}d\rho.$$

Par suite, le second terme du crochet de (114) sera majoré par le second membre de (108) [*cf.* (107) et (111')], lui-même majoré par $\varphi(4\mathrm{MM}_1)$ (*cf.* § **52**). Il en résulte que le dernier terme de (101) est borné, en valeur absolue par un nombre de la forme $\varphi(8\mathrm{MM}_1)$, ce qui, joint à (109) et à (110), achève de justifier l'inégalité (101), donc l'inégalité (98) et, enfin la dernière des inégalités (97).

55. Il ne nous reste plus qu'à légitimer la seconde des inégalités (97); nous y parviendrons en majorant chacun des termes du second membre de (95). Remarquons d'abord que la valeur absolue de chacune des intégrales qui figurent au second membre de (95), mais étendues au domaine $d(\mathrm{M}, 2\mathrm{MM}_1)$, est inférieure à $\varphi(8\mathrm{MM}_1)$ $\Big[$*cf.* (80_1) et le raisonnement du paragraphe **51** pour la comparaison des quantités $\left|\iint_{d(\mathrm{M},2\mathrm{MM}_1)}\right|$ et $\left|\iint_{d(\mathrm{M}_1,2\mathrm{MM}_1)}\right|\Big]$. Dès lors, on aura atteint notre but si l'on justifie les trois inégalités

$$(115)\quad |\mathrm{I}|=\left|\iint_{d(\mathrm{M})-d(\mathrm{M},2\mathrm{MM}_1)}[\mu(\mathrm{P})-\mu(\mathrm{M}_1)]\left(\frac{1}{\mathrm{M}_1\mathrm{P}^3}-\frac{1}{\mathrm{MP}^3}\right)\xi\,d\sigma\right|\leqq\varphi(8\mathrm{MM}_1),$$

$$(116)\quad |\mathrm{I}_1|=|\mu(\mathrm{M})-\mu(\mathrm{M}_1)|\left|\iint_{d(\mathrm{M})-d(\mathrm{M},2\mathrm{MM}_1)}\frac{\xi}{\mathrm{MP}^3}d\sigma\right|\leqq\varphi(8\mathrm{MM}_1),$$

$$(117)\quad |\mathrm{I}_2|\leqq\left|x_1\iint_{d(\mathrm{M})-d(\mathrm{M},2\mathrm{MM}_1)}[\mu(\mathrm{P})-\mu(\mathrm{M}_1)]\frac{d\sigma}{\mathrm{M}_1\mathrm{P}^3}\right|\leqq\varphi(8\mathrm{MM}_1).$$

La seconde inégalité se démontre immédiatement en remarquant que $|\mu(\mathrm{M})-\mu(\mathrm{M}_1)|\leqq\varphi(\mathrm{MM}_1)$, alors qu'en utilisant les raisonnements du paragraphe **42** [*cf.* notamment (80') et (83')] on voit que

$$\left|\iint_{d(\mathrm{M})-d(\mathrm{M},2\mathrm{MM}_1)}\frac{\xi}{\mathrm{MP}^3}d\sigma\right|\leqq\left|\iint_{d(\mathrm{M})}\frac{\xi}{\mathrm{MP}^3}d\sigma\right|+\left|\iint_{d(\mathrm{M},2\mathrm{MM}_1)}\frac{\xi}{\mathrm{MP}^3}d\sigma\right|\leqq 160\pi\varphi\left(\frac{10}{13}\mathrm{R}\right).$$

D'après (117), il vient [*cf.* (32)]

$$|I_2| \leqq MM_1 \iint_{d(M)-d(M,2MM_1)} \frac{f(M_1P)}{M_1P^3}\,d\sigma$$

$$\leqq 8MM_1 \iint_{d(M)-d(M,2MM_1)} \frac{f(2MP)}{MP^3}\,d\sigma \leqq 16\pi MM_1 \int_{2MM_1}^{\frac{5}{13}R} \frac{f(4\rho)}{\rho^2}\,d\rho,$$

donc [*cf.* (4′)]

$$|I_2| \leqq 16\pi K(f,\ 2R)\varphi(8MM_1).$$

Enfin [*cf.* (32)]

$$\left|\frac{1}{M_1P^3} - \frac{1}{MP^3}\right| \leqq MM_1\,\frac{M_1P^2 + MP^2 + M_1P.MP}{M_1P^3.MP^3} \leqq \frac{14MM_1}{MP^4},$$

car $MM_1 \leqq \frac{R}{8}$; par suite [*cf.* (115)] et la majoration ci-dessus de $|I_2|$

$$|I| \leqq 14MM_1 \iint_{d(M)-d(M,2MM_1)} \frac{f(2MP)}{MP^3}\,d\sigma \leqq 28\pi K(f,\ 2R)\varphi(8MM_1|,$$

ce qui achève de justifier les inégalités (97).

56. On peut maintenant résumer comme il suit la discussion des paragraphes **44** à **55**; en désignant par $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_M$ la dérivée oblique du potentiel de simple couche (44), dérivée donnée par les formules (85′) et prise suivant la parallèle Mx à la direction fixe Ox en un point ordinaire M de la surface de Liapounoff S, nous pouvons affirmer que [*cf.* le paragraphe **45** ainsi que l'inégalité (56)] :

La dérivée oblique $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_M$ *est une fonction continue à l'intérieur de chaque portion régulière* S_i *d'une surface de Liapounoff* S_i *toutes les fois que la densité* $\mu(P)$ *vérifie sur* S *une condition* (f). *D'une façon précise, si* M *et* M_1 *sont deux points de* S_i, *étrangers à sa frontière, on a* [1]

$$(118) \qquad \left|\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_M - \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{M_1}\right| \leqq \varphi(8MM_1)\left|\log\frac{1}{MM_1}\right|, \qquad MM_1 \leqq \frac{R}{16}.$$

Il faut remarquer une fois de plus que $\varphi(8MM_1)$ contient en facteur des constantes qui dépendent de $\frac{1}{R}$, R étant le rayon de la sphère de Liapounoff relative à M; de par la définition même de R, cette longueur est inférieure à la distance de M à la frontière de S_i.

---

[1] Au paragraphe **35** nous avons prouvé que le second membre de (118) possède toutes les propriétés d'un module de continuité.

57. Considérons maintenant un point M_1 situé sur la normale MN à S au point ordinaire M de S; admettons que $MM_1 \leqq \frac{R}{8}$. Rapportons l'espace aux axes MtsN ou $Mxyz$, utilisés au cours du paragraphe **23** et formons au point M_1 la dérivée $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{M_1}$ prise dans la direction M_1x, parallèle à Mx. Nous avons [*cf.* (44)], si $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = z_1$ sont les coordonnées de M_1

$$(119) \qquad \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{M_1} = \iint_S \mu(P) \frac{(\xi - x_1)}{M_1P^3} d\sigma = \iint_S \mu(P) \frac{\xi}{M_1P^3} d\sigma.$$

Il s'agit de montrer que cette expression tend continûment vers la dérivée tangentielle $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_M$ définie par (84) lorsque M tend vers M_1.

Les calculs du paragraphe **42** *bis* nous incitent à transformer l'expression (119) de $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_M$ et à l'écrire comme suit :

$$(119') \qquad \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{M_1} = \iint_{S-d(M)} \mu(P) \frac{\xi}{M_1P^3} d\sigma + \iint_{d(M)} [\mu(P) - \mu(M)] \frac{\xi}{M_1P^3} d\sigma + \mu(M) \iint_{d(M)} \frac{\xi}{M_1P^3} d\sigma.$$

Nous ne vérifierons pas que chacune des intégrales (119') garde un sens lorsque $MM_1 \to 0$; les raisonnements du paragraphe **42** *bis* se transposent ici mot à mot. Nous passons directement à la justification de notre assertion et nous avons [*cf.* (84)] :

$$(120) \qquad \left|\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{M_1} - \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_M\right| \leqq \left|\iint_{S-d(M)} \mu(P)\xi\left(\frac{1}{M_1P^3} - \frac{1}{MP^3}\right) d\sigma\right| + \left|\iint_{d(M)} [\mu(P) - \mu(M)]\xi\left(\frac{1}{M_1P^3} - \frac{1}{MP^3}\right) d\sigma\right| + |\mu(M)| \left|\iint_{d(M)} \xi\left(\frac{1}{M_1P^3} - \frac{1}{MP^3}\right) d\sigma\right|.$$

Les calculs du paragraphe **42** *bis* s'appliquent mot à mot au premier terme du second membre de (120) : ce terme est donc inférieur à une expression de la forme $\varphi(MM_1)$. L'étude du second terme de (120) se fait en décomposant ce terme en $\left|\iint_{d(M)-d(M,2MM_1)}\right|$ et $\left|\iint_{d(M,2MM_1)}\right|$. Les calculs du paragraphe **55**, appliqués à (115), se transposent sans changement à notre cas et permettent de majorer la première des quantités envisagées par une expression de la forme $\varphi(8MM_1)$. Quant au terme restant, nous avons [*cf.* (19) et (32)]

$$\left|\iint_{d(M,2MM_1)}\right| \leqq \left|\iint_{d(M,2MM_1)} [\mu(P) - \mu(M)] \frac{\xi}{M_1P^3} d\sigma\right| + \left|\iint_{d(M,2MM_1)} [\mu(P) - \mu(M)] \frac{\xi}{MP^3} d\sigma\right|$$
$$\leqq 9 \iint_{d(M,2MM_1)} |\mu(P) - \mu(M)| \frac{d\sigma}{MP^2} \leqq 36\pi \int_0^{2MM_1} \frac{f(2\rho)}{\rho} d\rho \leqq 36\pi\varphi(4MM_1).$$

Tout revient à étudier le dernier terme de (120) que nous décomposerons, en négligeant le facteur $|\mu(M)| \leqq A$, borné, en $\left|\iint_{d(M)-d(M,2MM_1)}\right|$ et $\left|\iint_{d(M,2MM_1)}\right|$. Les formules (80′) et (83′) montrent que la contribution à cette dernière quantité de $\left|\iint_{d(M,2MM_1)} \frac{\xi}{MP^3}\,d\sigma\right|$ est égale au plus à $\varphi(2MM_1)$. Des calculs tout analogues à ceux du paragraphe **42** *bis* que nous venons de rappeler, montrent que $\left|\iint_{d(M,2MM_1)} \frac{\xi}{M_1P^3}\,d\sigma\right|$ est aussi majoré par $\varphi(2MM_1)$; il suffit pour cela de remplacer dans les inégalités mentionnées $MP = \sqrt{\rho^2+\zeta^2}$ par $\sqrt{\rho^2+(\zeta-z_1)^2} = M_1P$. Il reste donc à étudier la différence

$$|I| = \left|\iint_{d(M)-d(M,2MM_1)} \frac{\xi}{M_1P^3}\,d\sigma - \iint_{d(M)-d(M,2MM_1)} \frac{\xi}{MP^3}\,d\sigma\right| = |I_1 - I_2|.$$

Or, aucune des intégrales I_1 et I_2 n'est convergente; nous aurons donc une fois de plus recours aux artifices du paragraphe **42** *bis* et nous écrirons, en passant aux coordonnées cylindriques,

$$\begin{aligned}
I_1 = \iint_{d(M)-d(M,2MM_1)} \frac{\xi}{M_1P^3}\,d\sigma &= \int_0^{2\pi} \cos\psi\,d\psi \int_{2MM_1}^{\frac{5}{13}R} \frac{1}{[\rho^2+(\zeta-z_1)^2]^{\frac{3}{2}}} \frac{\rho^2\,d\rho}{\cos(N', z)} \\
&= \int_0^{2\pi} \cos\psi\,d\psi \int_{2MM_1}^{\frac{5}{13}R} \left\{ \left[\frac{\rho^2+z_1^2}{\rho^2+(\zeta-z_1)^2}\right]^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\cos(N', z)} - 1 \right\} \frac{\rho^2\,d\rho}{(\rho^2+z_1^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

et

$$I_2 = \iint_{d(M)-d(M,2MM_1)} \frac{\xi}{MP^3}\,d\sigma = \int_0^{2\pi} \cos\psi\,d\psi \int_{2MM_1}^{\frac{5}{13}R} \left[\left(\frac{\rho^2}{\rho^2+\zeta^2}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\cos(N', z)} - 1\right] \frac{d\rho}{\rho}.$$

Il vient alors

$$\begin{aligned}
(121)\qquad I = {} & \int_0^{2\pi} \cos\psi\,d\psi \int_{2MM_1}^{\frac{5}{13}R} \frac{1}{\cos(N', N)} \left\{ \left[\frac{\rho^2+z_1^2}{\rho^3+(\zeta-z_1)^2}\right]^{\frac{3}{2}} - \frac{\rho^3}{(\rho^2+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}} \right\} \frac{\rho^2\,d\rho}{(\rho^2+z_1^2)^{\frac{3}{2}}} \\
& + \int_0^{2\pi} \cos\psi\,d\psi \int_{2MM_1}^{\frac{5}{13}R} \left[\frac{1}{\cos(N', N)} \frac{\rho^3}{(\rho^2+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}} - 1\right] \left[\frac{\rho^2}{(\rho^2+z_1^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\rho}\right] d\rho
\end{aligned}$$

en remarquant que

$$\int_0^{2\pi} \cos\psi\,d\psi \int_{2MM_1}^{\frac{5}{13}R} \frac{\rho^2\,d\rho}{(\rho^2+z_1^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Reprenons alors les calculs exposés au paragraphe **42** *bis* et appelons de nouveau p la projection de P sur le plan Mxy :

$$M_1P = \sqrt{\rho^2+(\zeta-z_1)^2}, \qquad M_1p = \sqrt{\rho^2+z_1^2};$$
$$MP = \sqrt{\rho^2+\zeta^2}, \qquad Mp = \rho.$$

Dans le triangle M_1Pp, nous avons

$$|M_1P - M_1p| \leqq Pp = |\zeta|,$$

d'où [*cf.* (16) et (32)]

$$\left|1 - \frac{M_1p}{M_1P}\right| \leqq \frac{|\zeta|}{M_1P} \leqq \frac{2|\zeta|}{MP} \leqq \frac{13}{3} f\left(\frac{MP}{\sin\omega}\right); \quad MM_1 \leqq \frac{R}{8}.$$

Il en résulte, comme au paragraphe **42** *bis* [*cf.* les inégalités qui conduisent à (82)]

$$\frac{M_1p}{M_1P} \leqq 3, \qquad \frac{Mp}{MP} \leqq 3.$$

D'après cela [*cf.* (16)]

$$\left|\frac{M_1p^2}{M_1P^2} - \frac{Mp^2}{MP^2}\right| = \frac{M_1p^2}{M_1P^2}\left|1 - \frac{\rho^2}{(\rho^2 + z_1^2)}\,\frac{[\rho^2 + (\zeta - z_1)^2]}{(\rho^2 + \zeta^2)}\right| = \frac{M_1p^2}{M_1P^2}\,\frac{|z_1^2\zeta^2 + 2\rho^2\zeta z_1|}{(\rho^2 + \zeta^2)(\rho^2 + z_1^2)}$$

$$\leqq 9\,\frac{\left\{\frac{169}{9}\left[f\left(\frac{MP}{\sin\omega}\right)\right]^2 \rho^2 z_1^2 + \frac{26}{3} f\left(\frac{MP}{\sin\omega}\right)\rho^3|z_1|\right\}}{(\rho^2 + \zeta^2)(\rho^2 + z_1^2)} \leqq 260\,\frac{MM_1}{\rho} f(2\rho),$$

car [*cf.* (8)]

$$f\left(\frac{MP}{\sin\omega}\right) \leqq f\left(\frac{5R}{13\sin\frac{\pi}{3}}\right) \leqq f(R) \leqq 1$$

et, d'après ce qu'on a vu [*cf.* (16)],

$$MP \leqq 2\rho, \qquad \zeta^2 \leqq \frac{169}{36}\left[f\left(\frac{MP}{\sin\omega}\right)\right]^2 MP^2 \leqq \frac{169}{9}\left[f\left(\frac{MP}{\sin\omega}\right)\right]^2 \rho^2$$

et, enfin

$$\frac{\rho^2}{\rho^2 + \zeta^2} \leqq 1; \qquad \frac{|z_1|}{\rho^2 + z_1^2} \leqq \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z_1^2}} \leqq \frac{1}{\rho}; \qquad MM_1 = |z_1|.$$

Cela permet d'écrire

$$\left|\left[\frac{\rho^2 + z_1^2}{\rho^2 + (\zeta - z_1)^2}\right]^{\frac{3}{2}} - \frac{\rho^3}{(\rho^2 + \zeta^2)^{\frac{3}{2}}}\right| = \left|\frac{M_1p^3}{M_1P^3} - \frac{Mp^3}{MP^3}\right| \leqq \left|\frac{M_1p}{M_1P} - \frac{Mp}{MP}\right|\left(\frac{M_1p}{M_1P} + \frac{Mp}{MP}\right)^2$$

$$= \left|\frac{M_1p^2}{M_1P^2} - \frac{Mp^2}{MP^2}\right|\left(\frac{M_1p}{M_1P} + \frac{Mp}{MP}\right) \leqq 1600\,MM_1\frac{f(2\rho)}{\rho}.$$

Il suit de là que la valeur absolue de la première intégrale de (121) est majorée par [*cf.* (4') et (18')]

$$6400\pi\,MM_1 \int_{2MM_1}^{\frac{5}{13}R} \frac{f(2\rho)}{\rho^2}\,d\rho \leqq 3200\pi\,K(f, R)\,\varphi(4MM_1).$$

Occupons-nous de la seconde des intégrales (121). Nous avons, en appliquant la formule du binome

$$\left|\frac{\rho^2}{(\rho^2 + z_1^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\rho}\right| = \frac{1}{\rho}\left|\frac{1}{\left(1 + \frac{z_1^2}{\rho^2}\right)^{\frac{3}{2}}} - 1\right| \leqq \frac{3}{2}\,\frac{z_1^2}{\rho^3} \leqq \frac{3}{2}\,\frac{z_1}{\rho^2},$$

puisque $MM_1 = |z_1| < 2MM_1 \leqq \rho$, en sorte que $\left|\frac{z_1}{\rho}\right| \leqq \frac{1}{2}$. On déduit de là que la valeur absolue de l'intégrale en cause est majorée par [*cf.* (83_1)]

$$120\pi MM_1 \int_{2MM_1}^{\frac{6}{13}R} \frac{f(2\rho)}{\rho^2} d\rho \leqq 60\pi\varphi(4MM_1).$$

L'ensemble de ces résultats permet de déduire de (120) l'inégalité

$$(122) \qquad \left|\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_{M_1} - \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_M\right| \leqq \varphi(4MM_1); \qquad MM_1 \leqq \frac{R}{8};$$

où nous avons remplacé Mx par Mt de manière à rappeler la propriété tangentielle de la droite Mt, en sorte que nous pouvons conclure :

Lorsque Mt *est une direction située dans le plan tangent* Mts *en un point ordinaire* M *de la surface de Liapounoff* S *et* M_1 *un point situé sur la normale* MN *en* M *à* S, *tel que* $MM_1 \leqq \frac{R}{8}$, *les dérivées du potentiel de simple couche* U(M), *défini par* (44), *prises en* M *et* M_1 *suivant la direction* Mt, *vérifient l'inégalité* (122) *toutes les fois que la densité* $\mu(P)$ *est assujettie à satisfaire sur* S *une condition* (f).

Il faut se rappeler que $\varphi(4MM_1)$ contient en facteur des constantes qui dépendent de l'inverse de la distance de M aux singularités de la portion régulière S_i de S sur laquelle se trouve M.

Soient alors Ox une direction quelconque, Mx la direction équipollente issue de M, $MtsN$ le trièdre relatif à M. Nous avons, M_1 étant un point tel que $MM_1 \leqq \frac{R}{8}$:

$$(123) \quad \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{M_1} = \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_{M_1} \cos(t, x) + \left(\frac{\partial U}{\partial s}\right)_{M_1} \cos(s, x) + \left(\frac{dU}{dn}\right)_{M_1} \cos(N, x),$$

les dérivées du second membre étant prises $\left[cf.\ (63) \text{ pour } \left(\frac{dU}{dn}\right)_{M_1}\right]$ dans les directions Mt, Ms et MN. Si M_1 se déplace sur MN de manière à venir se confondre avec M, chaque dérivée du second membre tend vers sa limite donnée par (63) et (122). On conclut de là que l'inégalité

$$(124) \qquad \left|\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{M_1} - \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_M\right| \leqq \varphi(4MM_1), \qquad MM_1 \leqq \frac{R}{8}$$

est valable toutes les fois que M_1 est sur la normale en M à S, la direction Mx étant absolument quelconque. Bien entendu, les valeurs limites $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_M$ sont différentes suivant que M_1 est extérieur ou intérieur à S.

38. Nous sommes maintenant en mesure d'établir, relativement aux dérivées obliques du potentiel de simple couche U(M), un résultat analogue à celui du paragraphe **31** et qui concerne le potentiel de double couche.

Reprenons toutes les hypothèses du paragraphe mentionné et soit C un chemin quelconque aboutissant au point ordinaire M de S et dépourvu de points communs avec S, son extrémité M exceptée. Soit M_1 un point de C; nous supposerons encore l'arc $\widehat{MM_1}$ de C intérieur à la sphère $L\left(M, \frac{R}{16}\right)$, de façon à pouvoir appliquer les inégalités (118) et (122). Il s'agit de montrer que $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{M_1}$, donnée au moyen de (123), converge vers sa limite $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_M$ lorsque M_1 tend vers M en suivant le chemin C.

Or, au paragraphe **31** nous avons montré qu'à chaque point M_1 de C on pouvait associer un point M_0 de la partie régulière S_i de S, dont M fait partie, point tel que la droite M_1M_0 soit normale à S en M_0. Dans ces conditions on peut encore répéter mot à mot les raisonnements du paragraphe précité, et remplacer le chemin $\widehat{MM_1}$ par le chemin rectiligne M_1M_0 normal à S, le long duquel, par suite. est valable la majoration (124), et pour un arc de courbe régulière (*cf.* § **44**) $\widehat{M_0M}$ tracé sur S_i, le long duquel est valable la majoration (118). On en déduira, comme au paragraphe **31**, l'inégalité

$$(125)\qquad \left|\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{M_1}-\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_M\right|\leqq\varphi(8\,MM_1)\left|\log\frac{1}{MM_1}\right|,\qquad MM_1\leqq\frac{R}{16},$$

valable dans le voisinage de tout point ordinaire M de S. On se rappellera que suivant la position de C par rapport à S (le chemin C peut être intérieur ou extérieur au domaine D limité par S), on prendra pour $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_M$ l'une ou l'autre des expressions définies par (85'). Enfin, on étend l'inégalité (125) à tout point M' de l'espace en reprenant les raisonnements du paragraphe **31** *bis*.

CHAPITRE VII.

De la continuité des dérivées secondes du potentiel newtonien.

59. Reprenons l'étude des dérivées secondes du potentiel newtonien ; nous ferons les mêmes hypothèses qu'au chapitre V. Transformons d'abord l'expression (73) de $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$. Soit d, un domaine intérieur à D mais contenant la sphère L(M, R) à son intérieur. Nous avons l'identité

$$\iiint_{D-L(M,R)}=\iiint_{D-d}+\iiint_{d-L(M)}$$

et puis

$$\iiint_{d-L(M,R)}\mu(P)\left[\frac{3(\xi-x)^2}{MP^5}-\frac{1}{MP^3}\right]d\tau=\iiint_{d-L(M,R)}[\mu(P)-\mu(M)]\left[\frac{3(\xi-x)^2}{MP^5}-\frac{1}{MP^3}\right]d\tau$$
$$+\mu(M)\iiint_{d-L(M,R)}\left[\frac{3(\xi-x)^2}{MP^5}-\frac{1}{MP^3}\right]d\tau.$$

Comme le point M est extérieur au domaine $d - L(M, R)$, nous pouvons écrire, la dérivation du dernier terme portant sur l'élément différentiel et non sur le domaine d'intégration,

$$\iiint_{d-L(M,R)} \left[\frac{3(\xi - x)^2}{MP^5} - \frac{1}{MP^3}\right] d\tau = \iiint_{d-L(M,R)} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{MP}\right) d\tau = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\iiint_{d-L(M,R)} \frac{d\tau}{MP}\right].$$

Introduisons alors de nouveau le potentiel auxiliaire $W_1(M') = \iiint_{L(M,R)} \frac{d\tau}{M'P}$ et rappelons-nous la relation

$$\left(\frac{\partial^2 W_1}{\partial x'^2}\right)_{M'=M} = \lim_{h=0} \frac{\left(\frac{\partial W_1}{\partial x'}\right)_{M'} - \left(\frac{\partial W_1}{\partial x'}\right)_{M'=M}}{h} = \left[\frac{\partial^2}{\partial x'^2} \iiint_{L(M,R)} \frac{d\tau}{M'P}\right]_M = -\frac{4}{3}\pi,$$

établie au paragraphe **39** [*cf.* le passage de (69) à (70)]. Les deux dernières relations permettent d'écrire

$$\iiint_{d-L(M,R)} \left[\frac{3(\xi - x)^2}{MP^5} - \frac{1}{MP^3}\right] d\tau - \frac{4}{3}\pi = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\iiint_d \frac{d\tau}{MP}\right],$$

l'expression du second membre ayant un sens d'après la façon même dont elle a été obtenue. L'ensemble des résultats qui précèdent permet de déduire de (73) la formule

$$(126) \qquad \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_M = \iiint_{D-d} \mu(P) \frac{\partial^2\left(\frac{1}{MP}\right)}{\partial x^2} d\tau + \iiint_d [\mu(P) - \mu(M)] \frac{\partial^2\left(\frac{1}{MP}\right)}{\partial x^2} d\tau + \mu(M) \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\iiint_d \frac{d\tau}{MP}\right]$$

plus compliquée que (73), mais qui permet de former les expressions des dérivées du potentiel W en deux points à l'aide des intégrales étendues à un même domaine. En particulier, prenons pour d la sphère $L(M', R)$, intérieure à D et centrée sur M'; comme

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^2}\left[\iiint_{L(M',R)} \frac{d\tau}{MP}\right]\right] = -\frac{4\pi}{3},$$

d'après les résultats du paragraphe **39**, (126) s'écrit

$$(126') \quad \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_M = \iiint_{D-L(M',R)} \mu(P) \frac{\partial^2 \frac{1}{MP}}{\partial x^2} d\tau + \iiint_{L(M',R)} [\mu(P) - \mu(M)] \frac{\partial^2 \frac{1}{MP}}{\partial x^2} d\tau - \frac{4}{3}\pi\mu(M).$$

Nous avons ainsi une extension de (73) au cas où la sphère L entourant M ne serait plus concentrique à M.

60. Soient alors M et M' deux points intérieurs à D; admettons d'abord que

$$(127) \qquad MM' \leq \frac{R}{8}.$$

Le point M′, dont les coordonnées sont notées x', y', z', est aussi intérieur à L(M, R), elle-même supposée avoir un rayon assez petit pour être intérieure à D; $\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_{M'}$ pourra alors être calculé au moyen de (126′), où l'on permuterait M et M′. Il vient

$$(128)\quad \left|\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_{M'} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_{M}\right| \leqq \frac{4}{3}|\mu(M') - \mu(M)| + \left|\iiint_{D-L(M,R)} \mu(P)\left[\left(\frac{\partial^2 \frac{1}{M'P}}{\partial x'^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{MP}}{\partial x^2}\right)\right] d\tau\right| + \left|\iiint_{L(M,R)} [\mu(P) - \mu(M')]\left(\frac{\partial^2 \frac{1}{M'P}}{\partial x'^2}\right) d\tau - \iiint_{L(M,R)} [\mu(P) - \mu(M)]\left(\frac{\partial^2 \frac{1}{MP}}{\partial x^2}\right) d\tau\right|.$$

Le premier terme du second membre est majoré par $\frac{4}{3}\, f(MM')$, donc par $\frac{4}{3}\,\varphi(MM')$. D'un autre côté, le crochet de l'élément différentiel de la seconde intégrale de (128) se comporte comme une fonction régulière de M′ et de M dans le domaine D — L(M, R), ceci en vertu de (127). Nous pouvons, dès lors, écrire le développement limité, où $M_1(x_1, y_1, z_1)$ désigne un point du segment MM′

$$(129)\quad \left|\left(\frac{\partial^2 \frac{1}{M'P}}{\partial x'^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{MP}}{\partial x^2}\right)\right| = \left|(x'-x)\left[\frac{15(\xi - x_1)^3}{M_1P^7} - \frac{9(\xi - x_1)}{M_1P^5}\right] + (y'-y)\left[\frac{15(\xi - x_1)^2(\eta - y_1)}{M_1P^7} - \frac{3(\eta - y_1)}{M_1P^5}\right] + (z'-z)\left[\frac{15(\xi - x_1)^2(\zeta - z_1)}{M_1P^7} - \frac{3(\zeta - z_1)}{M_1P^5}\right]\right| \leqq \frac{60}{M_1P^4}\, MM' \leqq \frac{60 \cdot 2^4}{R^4}\, MM',$$

puisque $\frac{1}{M_1P} < \frac{8}{7R}$, $\frac{|\xi - x_1|}{M_1P} \leqq 1$, etc. et $|x' - x| \leqq MM'$, etc. On déduit de là

$$(130)\quad \left|\iiint_{D-L(M,R)} \mu(P)\left[\frac{\partial^2\left(\frac{1}{M'P}\right)}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2 \frac{1}{MP}}{\partial x^2}\right] d\tau\right| \leqq \frac{2^6 \cdot 15 \cdot A \cdot v}{R^4}\, MM' \leqq \frac{2^6 \cdot 15 \cdot A \cdot v}{R^4}\, \varphi(MM'),$$

où A désigne, comme toujours, la borne de $|\mu(P)|$ dans D et v le volume du domaine D. Il nous reste à étudier le troisième terme de (128). Nous décomposerons, comme toujours, son domaine d'intégration L(M, R) en domaines partiels L(M, R) — L(M, 2MM′) et L(M, 2MM′). Or, en passant aux coordonnées polaires ρ, θ, ψ d'origine M, il vient

$$\left| \iiint_{L(M, 2MM')} [\mu(P) - \mu(M)] \left[\frac{3(\xi - x)^2}{MP^5} - \frac{1}{MP^3} \right] d\tau \right| \leq 4 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2MM'} \frac{f(\rho)}{\rho} d\rho = 16\pi\varphi(2MM').$$

De même, observant que $L(M', 3MM')$ est à la fois intérieure à $L(M, R)$ [*cf.* (127)] et contient $L(M, 2MM')$ et en utilisant les coordonnées polaires ρ', θ', ψ' d'origine M', on peut écrire

$$\left| \iint_{L(M, 2MM')} \left[\frac{3(\xi - x')}{M'P^5} - \frac{1}{M'P^3} \right] [\mu(P) - \mu(M')] \, d\tau \right| \leq \iint_{L(M, 3MM')} \left| \frac{3(\xi - x')}{M'P^5} - \frac{1}{M'P^3} \right| |\mu(P) - \mu(M')| \, d\tau \leq 16\pi\varphi(3MM').$$

La contribution de $L(M, R) - L(M, 2MM')$ au troisième terme de (128) s'écrit

$$(131) \qquad [\mu(M) - \mu(M')] \iiint_{L(M,R) - L(M, 2MM')} \left[\frac{3(\xi - x)^2}{MP^5} - \frac{1}{MP^3} \right] d\tau + \iiint_{L(M,R) - L(M, 2MM')} [\mu(P) - \mu(M')] \left[\left(\frac{\partial^2 \frac{1}{M'P}}{\partial x'^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{MP}}{\partial x^2} \right) \right] d\tau.$$

Or l'intégrale du premier terme s'écrit, en passant aux coordonnées polaires ρ, θ, ψ,

$$\int_{2MM'}^{R} \frac{d\rho}{\rho} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \sin\theta (3 \sin^2\theta \cos^2\psi - 1) \, d\theta = 0.$$

Pour majorer le terme restant, servons-nous du développement limité (129), qui s'applique au domaine $L(M, R) - L(M, 2MM')$ auquel le segment MM' est étranger. Il vient alors

$$\left| \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{M'P} \right)}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{MP} \right)}{\partial x^2} \right| \leq \frac{60}{M_1P^4} MM',$$

où M_1 désigne encore un point du segment MM'. Comme la distance de M_1 à tout point P de l'ensemble $L(M, R) - L(M, 2MM')$ est au moins égale à $\frac{1}{2}$ MP (¹),

(¹) Voici une rapide justification de ce fait. Posons

$$MM' = h, \qquad MP = \rho, \qquad (\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MP}) = \psi, \qquad MM_1 = \theta h, \qquad 0 \leq \theta \leq 1, \qquad u = \frac{h}{\rho}.$$

La variable u vérifie les inégalités

$$0 \leq u \leq \frac{1}{2},$$

l'inégalité précédente donne pour chaque point P de L(M, R) — L(M, 2 MM)

$$(131') \qquad \left| \frac{\partial^2 \frac{1}{M'P}}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2 \frac{1}{MP}}{\partial x^2} \right| \leqq \frac{2^6 . 15}{MP^4} MM'.$$

D'un autre côté, $PM' \leqq 2PM$ en tout point P de L(M, R) — L(M, 2MM'); en effet, la sphère, lieu géométrique des points Q tels que $\frac{QM'}{QM} = 2$ est tout entière à l'intérieur de L(M, 2MM'). On déduit de là

$$(131'') \qquad |\mu(P) - \mu(M')| \leqq f(PM') \leqq (2PM);$$

les deux dernières inégalités montrent que le second terme de (131) est majoré par [*cf.* (4')]

$$2^6 . 15 MM' \int_{2MM'}^{R} \frac{f(2\rho)}{\rho^2} d\rho \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\psi \leqq 2^9 . 15 \pi MM' \int_{4MM'}^{2R} \frac{f(u)}{u^2} du$$
$$\leqq 2^7 . 15 \pi K(f, 2R) \varphi(4MM').$$

C'est donc une quantité telle que $\varphi(4MM')$ qui majore l'expression (131). Eu égard à ce résultat et à (130), nous pouvons déduire de (128)

$$(132) \quad \begin{cases} \left| \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_{M'} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_{M} \right| \leqq \left[\frac{2^6 . 15 . A v}{R^4} + \frac{4}{3} + 32\pi + 2^7 . 15 . \pi K(f, 2R) \right] \varphi(4MM'), \\ \qquad MM' \leqq \frac{R}{8}, \end{cases}$$

inégalité qui justifie notre assertion dans le cas où la distance de M à S est bornée intérieurement par R. Observons alors que des raisonnements tout analogues à ceux du paragraphe **31** *bis* permettent de s'affranchir de la

---

car $\rho \geqq 2h$. Comme

$$M_1P^2 = \rho^2 + \theta^2 h^2 - 2\theta\rho h \cos\psi,$$

l'inégalité du texte revient à

$$3\rho^2 - 8\rho h \theta \cos\psi + 4h^2\theta^2 \geqq 0, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad 3 - 8\theta u \cos\psi + 4u^2\theta^2 \geqq 0.$$

Appelons $a(\theta)$ le premier membre et considérons-le comme un trinome du second degré en θ. Nous avons

$$a(0) = 3 > 0, \qquad a(1) = 3 - 8u\cos\psi + 4u^2;$$

$a(1) \geqq 0$, car $0 < u \leqq \frac{1}{2}$. Si donc l'abscisse $\theta = \frac{\cos\psi}{u}$ est étrangère à l'intervalle $0 \leqq \theta \leqq 1$, les inégalités précédentes établissent le théorème. Si $\left|\frac{\cos\psi}{u}\right| \leqq 1$, $|\cos\psi| \leqq u \leqq \frac{1}{2}$. Formons alors le minimum de $a(\theta)$: nous avons, en remplaçant $|\cos\psi|$ par sa majorante,

$$a\left(\frac{\cos\psi}{u}\right) = 3 - 4\cos^2\psi \geqq 2.$$

Cela justifie notre assertion.

restriction $MM' \leqq \frac{R}{8}$ toutes les fois que la distance de M et de M' à S sont minorées par une longueur positive fixe.

61. Il nous reste donc à examiner le cas où l'un, au moins, des points M' ou M est situé dans le voisinage de la frontière S de D. La démonstration que nous allons présenter s'appliquera, d'ailleurs, à deux points quelconques de l'ensemble $D+S$ et englobera, comme cas particulier, celle du précédent paragraphe. Il y a cependant intérêt à conserver le raisonnement du paragraphe **60**, qui offre un double avantage. En premier lieu, l'inégalité (132), à laquelle il conduit, est particulièrement explicite (*cf.* la remarque finale du paragraphe **62**). On observera ensuite, que le raisonnement que nous venons de suivre ne fait appel à aucune hypothèse de régularité relativement à S. Au contraire, nous serons désormais obligés de supposer que S est une surface de Liapounoff; pour unifier et simplifier l'exposition, nous admettons même que S est exempte de singularités, en sorte que la sphère de Liapounoff L(M, R) relative au point M de S possédera un même rayon en tous les points de la surface.

Ceci étant, nous commencerons par établir un lemme sur lequel reposent toutes les transformations ultérieures. Soient M un point de D; on a, en désignant par $\overrightarrow{N'}$ la normale extérieure en P à S [1],

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\iiint_D \frac{d\tau}{MP}\right] = -\iint_D \frac{\cos\left(\overrightarrow{N'}, Ox\right)}{MP} d\sigma. \tag{133}$$

En effet, d'après (64) et (65), nous avons

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\iiint_D \frac{d\tau}{MP}\right] = -\iiint_D \frac{\partial\left(\frac{1}{MP}\right)}{\partial \xi} d\tau.$$

Or, d'après les résultats rappelés au cours du paragraphe **21**, le théorème de flux-divergence s'applique aux surfaces généralisées de Liapounoff, même lorsque l'élément différentiel des intégrales transformées devient infini dans D comme $\frac{1}{MP^2}$. Nous pouvons donc écrire

$$\iiint_D \frac{\partial\left(\frac{1}{MP}\right)}{\partial \xi} d\tau = \iint_S \frac{\cos\left(\overrightarrow{N'}, Ox\right)}{MP} d\sigma,$$

ce qui démontre notre proposition.

Un important corollaire résulte de (133). Le second membre de cette relation se présente sous forme de potentiel de simple couche, créé au point M

[1] *Cf.* M. GUNTHER, *loc. cit.*, (4), p. 292. M. Villat a fait usage d'une transformation analogue; cf. *loc. cit.*, (8), p. 241-242.

par des masses de densité superficielle

$$\mu(P) = -\cos(N', Ox)$$

répandues sur la surface S. Or cette densité vérifie la condition (f), car si P et P_1 sont deux points de S et si N'_1 est la normale extérieure en P_1 à S, on a

$$\begin{aligned}|\mu(P) - \mu(P_1)| &= |\cos(N', Ox) - \cos(N'_1, Ox)| \\ &\leqq |(N', Ox) - (N'_1, Ox)| \leqq |(N'_1, N')| \leqq f(PP_1).\end{aligned}$$

Il suit de là que le potentiel de simple couche en cause admet des dérivées partielles de premier ordre en chaque point de l'espace; et ces dérivées sont continues [*cf.* l'inégalité (125)], dans le domaine D + S, et dans le domaine extérieur à D, frontière S comprise, tout en étant discontinues à travers S.

Si l'on suppose maintenant, pour fixer les idées, que M est un point de D + S, on peut affirmer, d'après (133) et les raisonnements qui précèdent, que l'expression

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\iiint_D \frac{d\tau}{MP}\right] = -\frac{\partial}{\partial x}\iint_S \frac{\cos(N', Ox)}{MP}\,d\sigma$$

existe en chaque point de D + S; de plus, si $M(x, y, z)$ et $M_1(x_1, y_1, z_1)$ sont deux points quelconques de l'ensemble D + S, on a [*cf.* (125)]

$$(133') \quad \left|\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left[\iiint_D \frac{d\tau}{M_1P}\right] - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\iiint_D \frac{d\tau}{MP}\right]\right| \leqq \varphi(8MM_1)\left|\log\frac{1}{MM_1}\right|, \qquad MM_1 \leqq \frac{R}{16}.$$

Il ne faut pas, toutefois, perdre de vue que le second membre de l'inégalité précédente contient en facteur des constantes dont la valeur n'a pas été explicitée (*cf.* le Chapitre VI).

62. Ceci étant, reprenons la formule (126) en prenant pour domaine auxiliaire d le domaine D lui-même. Il vient alors

$$(134) \quad \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right) = \mu(M)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\iiint_D \frac{d\tau}{MP}\right] + \iiint_D [\mu(P) - \mu(M)]\frac{\partial^2 \frac{1}{MP}}{\partial x^2}\,d\tau.$$

Nous avons déjà établi à plusieurs reprises l'absolue convergence de la seconde des intégrales qui figurent au second membre, et cela en chaque point M du domaine D + S; d'un autre côté, les conclusions du précédent paragraphe montrent qu'il en est de même de la première intégrale, que le point M appartienne ou non a la frontière S de D. On déduit de là que $\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_M$ existe en chaque point M de D + S et qu'elle y est donnée au moyen de (134). Cela posé, portons notre attention sur le premier terme de (134); il se présente sous forme de produit de deux fonctions de M. La première $\mu(M)$ vérifie, par hypothèse, une condition (f), donc (φ), sur tout l'ensemble D + S. La seconde fonction vérifie la condition (133'). Il en résulte, eu égard au lemme rappelé au Chapitre VI (*cf.* le renvoi de la page 173), que le premier terme de (134) vérifie ainsi une condition telle que (125) pour tout couple de points M et M′ appartenant à l'ensemble D + S et tel que $MM' \leqq \frac{R}{16}$.

Remarque. — Il faut observer de nouveau que le raisonnement précédent s'applique aux points intérieurs de D; on aurait donc pu en faire usage pour étudier la continuité de $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$ en les points de D distants de plus de $\frac{R}{8}$ de S. Mais nous avons préféré présenter pour de tels points une discussion directe (*cf.* § **60**) qui nous a permis d'expliciter les constantes qui figurent au second membre de (132). On se rappellera, par contre, que le symbole $\varphi(8MM')$, qui figure au second membre de (125), n'est pas identique au module défini par (4), mais diffère de celui-ci par une constante multiplicative dont nous n'avons pas explicité l'expression.

63. D'après ce que nous avons vu au précédent paragraphe, tout revient à présent à construire un module de continuité pour le second terme de (134). Soient deux points M et M′ *quelconques* de D + S. Traçons la sphère L(M, 2MM′) et appelons D(M, 2MM′) la portion commune à D et à L(M, 2MM′) [portion qui, éventuellement, peut être confondue avec L(M, 2MM′), ce qui se produit chaque fois que la distance de M à S est supérieure à 2MM′], s(M, 2MM′) la portion de S située à l'intérieur de L(M, 2MM′) — qui peut, actuellement, être vide ou n'être pas d'un seul tenant —, s_1(M, 2MM′) la portion de la surface L(M, 2MM′) intérieure à D. D'après cela, le segment MM′ peut n'être pas tout entier situé à l'intérieur de D, mais peut, éventuellement, avoir des points communs avec S. Posons

$$(134') \quad R(M) = \iiint_{D-D(M,2MM')} [\mu(P)-\mu(M)] \frac{\partial^2 \frac{1}{MP}}{\partial x^2}\, d\tau$$
$$+ \iiint_{D(M,2MM')} [\mu(P)-\mu(M)] \frac{\partial^2 \frac{1}{MP}}{\partial x^2}\, d\tau = R_1(M) + R_2(M).$$

Nous définirons tout pareillement $R_1(M')$ et $R_2(M')$ au moyen des intégrales étendues aux domaines D — D(M, 2MM′) et D(M, 2MM′) respectivement, mais dont les éléments différentiels dépendront de M′. Nous avons

$$|R_2(M)| \leqq \iiint_{D(M,2MM')} |\mu(P)-\mu(M)| \left| \frac{\partial^2 \frac{1}{MP}}{\partial x^2} \right| d\tau \leqq \iiint_{L(M,2MM')} f(MP) \left| \frac{3(\xi - x)^2}{MP^5} - \frac{1}{MP^3} \right| d\tau.$$

Les majorations construites au paragraphe **60** permettent alors d'en déduire

$$|R_2(M)| \leqq 16\pi\varphi(2MM').$$

De même, en reprenant les raisonnements du paragraphe **60**,

$$|R_2(M')| \leqq \iiint_{L(M,2MM')} f(M'P) \left| \frac{\partial^2 \frac{1}{M'P}}{\partial x'^2} \right| d\tau \leqq \iiint_{L(M',3MM')} = 16\pi\varphi(3MM').$$

On déduit de là

$$(135)\quad |R(M) - R(M')| \leqq 32\pi\varphi(3MM') + |R_1(M) - R_1(M')| = 32\pi\varphi(3MM') + |I|$$

avec [*cf.* (134')]

$$(135')\quad \begin{aligned} I = & \iiint_{D-D(M,2MM')} [\mu(P) - \mu(M')] \frac{\partial^2 \frac{1}{M'P}}{\partial x'^2} d\tau \\ & - \iiint_{D-D(M,2MM')} [\mu(P) - \mu(M)] \frac{\partial^2 \frac{1}{MP}}{\partial x'^2} d\tau \\ = & \iiint_{D-D(M,2MM')} [\mu(P) - \mu(M')] \left[\frac{\partial^2 \frac{1}{M'P}}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2 \frac{1}{MP}}{\partial x^2} \right] d\tau \\ & + [\mu(M) - \mu(M')] \iiint_{D-D(M,2MM')} \frac{\partial^2 \frac{1}{MP}}{\partial x^2} d\tau = J + J_1. \end{aligned}$$

Occupons-nous d'abord du terme J de (135'). D'après (131') qui s'applique, puisque D(M, 2MM') appartient à L(M, 2MM') et (131'') il vient

$$|J| \leqq 2^6 . 15 . MM' \iiint_{D-D(M,2MM')} \frac{f(2MP)}{MP^4} d\tau.$$

Mais le domaine D(M, 2MM') est entièrement contenu dans L(M, 2MM'). Si donc l est le diamètre du domaine D, de telle sorte que D soit contenu dans la sphère L(M, l), le domaine D — D(M, 2MM') sera à l'intérieur de [L(M, l) — L(M, 2MM')]; donc

$$(136)\quad |J| \leqq 2^6 . 15 . MM' \iiint_{L(M,l)-L(M,2MM')} \frac{f(2MP)}{MP^4} d\tau \leqq 2^7 . 15 \pi K(f, 2l)\varphi(4MM').$$

Passons maintenant à l'étude de l'expression J_1 définie par (135'). Elle se présente sous forme de produit de deux facteurs dont le premier est majoré, en valeur absolue par f(MM'), donc par φ(MM'). Pour conclure, il nous suffira de trouver une borne supérieure finie pour la valeur absolue du second facteur. Observons, à cet effet, que le domaine D — D(M, 2MM') est limité par la surface S — s(M, 2MM') + s_1(M, 2MM') qui est encore une surface de Liapounoff dont l'unique ligne singulière serait formée, éventuellement, de l'intersection de S avec L(M, 2MM'). On peut donc appliquer à cette surface fermée le théorème de flux-divergence; nous avons, d'après (133), en observant que la formule de Green-Ostrogradsky (flux-divergence) s'applique à l'intégrale $\iiint_{D-D(M,2MM')} \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{MP}\right)}{\partial x^2} d\tau$ dont le domaine d'intégration ne contient pas le point singulier M

$$\iiint_{D-D(M,2MM')} \frac{\partial^2\left(\frac{1}{MP}\right)}{\partial x^2}\,d\tau = -\left[\iint_{S-s(M,2MM')} \frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\cos(\overrightarrow{N'}, Ox)}{MP}\,d\sigma + \iint_{s_1(M,2MM')} \frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\cos(\overrightarrow{N'}, Ox)}{MP}\,d\sigma\right],$$

où N′ est le vecteur unitaire porté par la normale extérieure à la surface d'intégration au point P de cette surface. Le second membre se présente donc sous forme de somme des dérivées obliques du potentiel de simple couche dont la densité $\mu(P) = \cos(\overrightarrow{N'}, Ox)$ vérifie, comme on l'a vu, une condition (f); d'un autre côté les intégrales de surface qui définissent les potentiels intéressés sont étendues à des portions régulières des surfaces de Liapounoff dont l'ensemble forme une surface de Liapounoff. Les résultats du Chapitre VI, convenablement adaptés, montrent alors qu'il existe une constante positive B, ne dépendant que de la surface S qui majore la valeur absolue du second membre de l'identité précédente [1]. Il en résulte [*cf.* (351)]

$$|J_1| \leq B f(MM') \leq B\varphi(MM').$$

---

(1) Étant donné que le module de continuité, construit au Chapitre VI pour le premier terme de (134), contient en facteur une constante non explicitée, il n'y a pas lieu de préciser la valeur du nombre B introduit dans le texte; nous nous bornons à en affirmer l'existence. Faisons, cependant, quelques remarques qui en faciliteraient, éventuellement, le calcul. Nous avons d'abord, en utilisant les coordonnées polaires sur la surface de L(M, 2MM′), surface dont $s_1(M, 2MM')$ fait partie

$$\left|\iint_{s_1(M,2MM')} \frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\cos(\overrightarrow{N'}, Ox)}{MP}\,d\sigma\right| = \left|\iint_{s_1(M,2MM')} \frac{\cos(N', Ox)}{MP^3}(\xi - x)\,d\sigma\right| \leq \iint_{L(M,2MM')} \frac{d\sigma}{MP^2} = 4\pi.$$

Cela étant, posons

$$U(M) = \iint_{S-s(M,2MM')} \frac{\cos(\overrightarrow{N'}, Ox)}{MP}\,d\sigma$$

pour raccorder nos notations avec celles du chapitre VI.

D'après cela, U est définie sur un domaine d'intégration qui n'est pas fixe, puisque $s(M, 2MM')$ dépend à la fois de M et de M′. Or, les calculs du paragraphe 42 montrent que les intégrales qui définissent la dérivée oblique d'un potentiel de simple couche ne sont pas toutes absolument convergentes [*cf.* l'expression (80′)]. Il y a donc lieu de modifier les méthodes du chapitre VI pour les adapter au cas actuel. Nous avons d'abord

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \left[\iint_S \frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\cos(\overrightarrow{N'}, Ox)}{MP}\,d\sigma\right] - \left[\iint_{s(M,2MM')} \frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\cos(N', Ox)}{MP}\,d\sigma\right].$$

L'inégalité (125) permet de majorer le premier terme du second membre; cette formule s'applique, puisque la densité $\mu(P) = \cos(\overrightarrow{N'}, Ox)$ vérifie une condition (f) alors que la

On tire alors de (135′) et de (136)

$$|I| \leqq [2^7.15\pi K(f, 2l) + B]\varphi(4MM'),$$

inégalité qui, eu égard à (135), permet d'écrire

$$|R(M) - R(M')| \leqq \varphi(4MM'),$$

en omettant, comme nous l'avons déjà fait au Chapitre VI, une constante multiplicative convenable devant φ. On déduit de là, compte tenu de (134) (134′) et de l'inégalité (133′) que vérifie le premier terme de (134), l'inégalité finale

$$(137) \qquad \left|\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x'^2}\right)_{M'} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_M\right| \leqq \varphi(8MM')\left|\log\frac{1}{MM'}\right|, \qquad MM' \leqq \frac{R}{16},$$

valable pour tout couple de points M et M′ de l'ensemble (D + S) à condition de multiplier le second membre par une constante convenable. Nous pouvons donc conclure :

Lorsque la densité $\mu(P)$ *des masses attirantes emplissant le domaine borné* D, *limité par une surface* S, *vérifie une condition* (f), *les dérivées secondes carrées du potentiel newtonien* W(M), *créé par les masses, vérifient une condition* (132) *pour tout couple de points* M *et* M′ *intérieurs à* D (*distantes de plus de* R *de* S); *la surface* S *est supposée simplement fermée. Lorsque* S *est une surface de*

---

multiplicité support S est une surface régulière de Liapounoff. Prenons alors un point M_1 distant d'au moins de R de S, R étant le rayon commun des sphères de Liapounoff de S; nous avons

$$\left|\left[\frac{\partial}{\partial x}\iint_S \frac{\cos(N', Ox)}{MP}\,d\sigma\right]_{M_1}\right| \leqq \iint_S \frac{d\sigma}{M_1P^2} \leqq \frac{\sigma}{R^2},$$

en désignant par σ la surface totale de S. Comme les méthodes du paragraphe 31 *bis* permettent d'étendre (125) à deux points quelconques de (D + S), M et M_1, on peut obtenir ainsi en fonction du diamètre l de l'ensemble D + S la majorante

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\left[\iint_S \frac{\cos(N', Ox)}{MP}\,d\sigma\right]\right| \leqq \frac{\sigma}{R^2} + \varphi(al)\left|\log\frac{1}{al}\right|,$$

où a est un nombre convenable défini au paragraphe 31 *bis*. Mais, ici encore, le module $\varphi(al)$ contient en facteur une constante fonctionnelle de S, que nous n'avons pas explicitée.

Étudions maintenant la dérivée $\iint_{s(M, 2MM')} \frac{\partial}{\partial x}\frac{\cos(N', Ox)}{MP}\,d\sigma = U_1(M)$. Pour fixer les idées, supposons que $MM' \leqq \frac{R}{8}$ et admettons que M soit situé dans D à une distance de S moindre que $\frac{R}{8}$. Soit alors M_0 le point de S que nous avons associé à M, de telle sorte que MM_0 soit normal en M_0 à S avec $MM_0 \leqq \frac{R}{8}$ (*cf.* § 32). D'après les hypothèses faites, M_0 est un point ordinaire de S, celle-ci étant exempte de singularités.

Si : $MM_0 \geqq 2MM'$, l'ensemble $s(M, 2MM')$ est vide, $U_1(M) \equiv 0$, donc borné. Si $2MM' > MM_0$, le domaine $s(M, 2MM')$ existe mais est intérieur au voisinage $\Sigma(M_0)$, *Liapounoff dépourvue de singularité, les dérivées en cause vérifient l'inégalité* (137), *où* M *et* M′ *sont des points quelconques de l'ensemble* (D + S) *tels que* $MM' \leqq \frac{R}{16}$.

Bien entendu, le résultat précédent vaut pour les dérivées rectangles telles que $\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}$. Signalons, enfin, que des raisonnements analogues à ceux du paragraphe 31 *bis* nous permettent de nous débarrasser de la restriction $MM' \leqq \frac{R}{16}$ moyennant laquelle l'inégalité (137) est valable. Nous n'insisterons pas sur ces extensions.

$MM' \leqq \frac{R}{8}$. Considérons alors le trièdre trirectangle $M_0 t_0 s_0 N_0$, attaché au point M_0 de façon que la direction $M_0 N_0$ coïncide avec $\overrightarrow{MM_0}$; nous avons

$$\left|\iint_{s(M, 2MM')} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\cos(N', Ox)}{MP} d\sigma\right| \leqq \left|\iint_s \cos(N', Ox) \frac{\partial}{\partial t_0}\left(\frac{1}{MP}\right) d\sigma\right| + \left|\iint_s \cos(N', Ox) \frac{\partial}{\partial s_0}\left(\frac{1}{MP}\right) d\sigma\right| + \left|\iint_s \cos(N', Ox) \frac{\partial}{\partial N_0}\left(\frac{1}{MP}\right) d\sigma\right|.$$

Or, on a vu au paragraphe 34 que l'intégrale $\frac{\partial}{\partial N_0}\iint_{\Sigma(M_0)} \frac{\cos(\vec{N'}, Ox)}{MP} d\sigma$ était *absolument* convergente sur une surface de Liapounoff; il en est donc, *a fortiori*, de même de $\frac{\partial}{\partial N_0}\iint_{s(M, 2MM')}$, car $s(M, 2MM')$ fait partie de $\Sigma(M)$. Par suite, les méthodes du paragraphe 34 et des suivants fournissent aussitôt une majorante pour $\left|\iint_s \frac{\partial}{\partial N_0}\right|$. L'étude des dérivées $\left|\iint_s \frac{\partial}{\partial t_0}\right|$ est plus délicate, puisque les intégrales qui les représentent ne sont pas absolument convergentes (*cf.* §§ 42 *bis* et 57); on se rappelle qu'on ne peut les rendre absolument convergentes que si $s(M, 2MM')$ — qui contient le point M_0 à son intérieur — contient également un voisinage de M_0 sur S qui se projette sur le plan $M_0 t_0 s_0$ suivant un cercle centré sur M_0. Dans ce cas les méthodes des paragraphes 42 *bis* et 57 permettent de former les majorantes cherchées. Or, si l'on pose $\delta = 2MM' - MM_0$, la sphère $L(M_0, \delta)$ est une sphère de Liapounoff, car $\delta \leqq R$. Par suite le voisinage $\Sigma(M_0, \delta)$ correspondant est d'un seul tenant. Soit P un point de la frontière de $\Sigma(M_0, \delta)$; la droite $M_0 P$ est extérieure au cône de Günther $G(M_0)$. La longueur de la projection de $M_0 P$ sur le plan $M_0 t_0 s_0$ est, d'après cela, égale au moins à $M_0 P \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \delta \sin\frac{\pi}{3} = \delta\frac{\sqrt{3}}{2}$. De plus, on a évidemment $MP \leqq MM_0 + M_0 P \leqq MM_0 + \delta = 2MM'$; le point P est donc intérieur à $s(M, 2MM')$. Il suit de là que le cylindre d'axe MM_0 et de rayon $\frac{\sqrt{3}}{2}\delta$ découpe sur $\Sigma(M)$ un domaine qui sera contenu à l'intérieur de $s(M, 2MM')$, et cela achève de justifier notre proposition. De là on passe aisément au cas général où $MM_0 \geqq \frac{R}{8}$.

CHAPITRE VIII.

Compléments.

1. — *De la réduction du nombre des hypothèses de Liapounoff.*

64. Tous les auteurs qui se sont occupés jusqu'ici des surfaces de Liapounoff ont considéré, à ma connaissance du moins, comme indépendantes les unes des autres les trois hypothèses de régularité que nous avons énoncées relativement à ces surfaces (*cf.* § 10). En fait, les deux premières entraînent la troisième : il ne m'a pas paru inutile de le faire voir ici. Mais il faut bien remarquer que cette réduction du nombre des hypothèses indépendantes n'intéresse que le logicien : elle ne paraît pas présenter d'importance en vue des applications, et c'est pour cela que nous avons renvoyé à la fin du mémoire l'exposé de la question. On remarquera que la démonstration est entièrement élémentaire; le fait lui-même paraît assez intuitif.

65. Rappelons les deux premières hypothèses de Liapounoff, ou, encore, hypothèses $L_{(f)}$ (*cf.* § 10). Nous dirons qu'une portion de surface S (non obligatoirement fermée) est régulière (¹) si elle est dépourvue de point multiple et si :

1° S *admet un plan tangent bien déterminé en chacun de ses points.*

2° *l'angle* $(\vec{N}, \vec{N'})$ *des vecteurs unitaires, portés par les normales à* S *en deux points* M *et* P *de* S — *nous avons en vue la détermination de* $(\vec{N}, \vec{N'})$ *qui se réduit à zéro lorsque* M *et* M' *se confondent* — *vérifie l'inégalité* [*cf.* (5)]

$$|(\vec{N}, \vec{N'})| \leqq f(\mathrm{MP}), \tag{138}$$

où $f(\mathrm{MP})$ *désigne un module de continuité* quelconque (²).

Nous admettrons, de plus, que la frontière de S est une courbe à tangente continue.

Nous nous proposons de faire voir que ces deux hypothèses de Liapounoff entraînent la troisième, à savoir :

Il existe un nombre R fixe, le même pour tous les points de la surface S et jouissant de la propriété suivante : la sphère L(M, R), c'est-à-dire la sphère

(¹) Dans tout le reste du Mémoire S désigne une surface fermée; ici S est l'analogue de ce que nous avons appelé portion régulière de surface de Liapounoff et désigné par S_l.

(²) D'après cela, $f(\mathrm{MP})$ n'est pas assujetti aux conditions de régularité imposées au paragraphe 9 *bis*; nous supposons simplement que $f(r)$ est une fonction positive, continue et croissante de r, $(r > 0)$, telle que $f(0) = 0$.

centrée sur un point M de S et de rayon R, découpe sur S une région $\Sigma(M, R)$ dont l'intersection avec toute parallèle à la normale en M à S se réduit à un point unique.

66. Commençons par établir une propriété analogue pour les courbes planes. Considérons donc une courbe Γ, fermée ou non, plane, dépourvue de point double, possédant en chacun de ses points une tangente; cette tangente varie le long de la courbe de manière que l'angle $(\vec{N}, \vec{N'})$ des normales $\vec{N'}$ et $\vec{N}$ aux points P et M de la courbe vérifie la condition

$$|(\vec{N}, \vec{N'})| \leq f(MP), \tag{138'}$$

$f(MP)$ étant un module de continuité. Étudions les conséquences de ces hypothèses.

67. En premier lieu, l'existence d'une tangente en chaque point de Γ entraîne la rectificabilité de cette courbe; nous appellerons d'une manière générale $l(MP)$ la longueur de l'arc MP de Γ; lorsque Γ sera fermée, $l(\widehat{MP})$ désignera la longueur du plus petit des deux arcs en lesquels les points M et P partagent Γ.

Cela étant, je dis qu'il existe une fonction positive $\lambda(r)$ de l'argument positif r, ne décroissant pas avec r, nulle avec $r = 0$, vérifiant l'inégalité $\lambda(r) \geq \alpha > 0$ dès que $r > 0$ et jouissant, enfin, de la propriété suivante : M et P étant deux points quelconques de Γ, on a

$$MP \geq \lambda[l(MP)]. \tag{139}$$

En effet, d'après la convention faite pour le choix de l'arc $\widehat{MP}$, $l(MP) > 0$ dès que $MP > 0$; $l(MP)$ est inférieure à la moitié de la longueur totale de Γ, si Γ est fermée. Cela étant, supposons que (139) ne soit pas vérifié sur Γ; on pourrait alors trouver sur Γ une suite infinie de couples de points

$$M_n,\ P_n (n = 1, 2, \ldots, \infty)$$

tels que

$$\lim_{n=\infty} l(M_n P_n) = d > 0,$$

alors que

$$\lim_{n=\infty} M_n P_n = 0.$$

Mais chacune des suites M_n, P_n possède, d'après le raisonnement classique de Bolzano-Weierstrass, au moins un point d'accumulation, M et P respectivement, sur Γ, tels que $l(MP) = d > 0$ et $MP = 0$.

D'après cela, les points M et P seront confondus; comme Γ est dépourvue de points doubles, ceci exige que $l(MP) = 0$ ou, lorsque Γ est fermée, $l(MP) =$ longueur totale de Γ. La seconde de ces éventualités est impossible, car $l(\mathrm{MP})$, de par sa définition même, est inférieure à la demi-longueur Γ; la première éventualité est en contradiction avec l'hypothèse $l(\mathrm{MP}) = d > 0$. Cela prouve que la distance de deux points quelconques de Γ peut être *uniformément* minorée en fonction de la longueur de l'arc de Γ qui les joint; il existe donc un nombre $\lambda[l(\mathrm{MP})]$ répondant à (139), tel que $\mathrm{MP} > 0$ résulte de $l(\mathrm{MP}) > 0$, le cas de l'égalité étant exclu. Quant à la non-croissance de la fonction $\lambda(r)$, elle résulte de sa définition même; cela achève de démontrer notre lemme.

68. Utilisons maintenant l'hypothèse de la continuité de la normale à Γ ou, ce qui revient au même, de la tangente à Γ. Si donc $\vec{t}$ et $\vec{t'}$ sont les tangentes à Γ en M et en P, orientées dans le même sens, (138') donne

(140) $$|(\vec{t}, \vec{t'})| \leqq f(\mathrm{MP}).$$

Choisissons alors un nombre h tel que

(140') $$f(h) \leqq \frac{\pi}{3};$$

$f(\mathrm{MP})$ étant une fonction non décroissante, toute longueur $\mathrm{MP} \leqq h$ vérifiera l'inégalité précédente. Par suite, l'arc $\widehat{\mathrm{QQ'}}$ de Γ, dont le point M de Γ fait partie et qui est intérieur au cercle de centre M et de rayon h, possède la propriété de n'avoir qu'un seul point d'intersection avec toute parallèle à la normale en M à Γ; sinon, en effet, il existerait sur l'arc considéré $\widehat{\mathrm{QQ'}}$ de Γ (d'après le théorème de Rolle) un point P où la tangente $\vec{t'}$ serait parallèle à la normale $\vec{\mathrm{N}}$ en M; il en résulterait

$$|(\vec{t}, \vec{t'})| = \frac{\pi}{2}.$$

Comme $\mathrm{MP} \leqq h$, cela serait en contradiction avec (140') [*cf.* (140)]. Il suit de là que $\widehat{\mathrm{QQ'}}$ vérifierait la troisième condition de Liapounoff si le cercle $\mathrm{C}(\mathrm{M}, h)$ de centre M et de rayon h ne contenait pas de points de Γ autres que ceux de l'arc QQ'; sinon, en effet, une droite parallèle au vecteur $\vec{\mathrm{N}}$ pourrait avoir plus d'un point d'intersection avec Γ à l'intérieur de $\mathrm{C}(\mathrm{M}, h)$. Or, soit P un point de Γ étranger à l'arc $\widehat{\mathrm{QMQ'}}$; d'après (139) on a

$$\mathrm{MP} \geqq \lambda[l(\mathrm{MP})] \geqq \lambda[l(\mathrm{MQ})] = \lambda(h) = h_1 > 0,$$

puisque $\lambda(r)$ est une fonction non décroissante. Cela montre que le cercle $\mathrm{C}(\mathrm{M}, h_1)$ n'a pas de point commun avec l'arc $\widehat{\mathrm{QQ'}}$ de Γ ne contenant pas M. Appelons alors R la plus petite de deux longueurs h et h_1; il résulte de ce qui précède que le cercle $l(\mathrm{M}, \mathrm{R})$ répond à la troisième condition de Liapounoff; d'après la définition même de R, cette longueur est indépendante du choix de M sur P.

69. Passons maintenant à l'examen du cas des surfaces. En premier lieu, on remarque que le raisonnement du paragraphe **67** s'applique mot à mot au cas d'une surface S pourvue d'un plan tangent en chacun de ses points. On pourra alors joindre deux points M et P de S par une infinité de courbes rectifiables : on appellera $l(\mathrm{MP})$ la plus petite de ces longueurs ou la limite inférieure de l'ensemble de ces longueurs. La surface S étant dépourvue de point double, $l(\mathrm{MP})$ est positif non nul chaque fois que M et P sont distincts. Partant de là, on étendra sans difficulté au cas des surfaces l'inégalité (139) (¹).

70. Cela étant, soient M un point de S, Γ la section de S par un plan passant par la normale à S en M, P un point quelconque de cette courbe. La tangente orientée $\vec{t'}$ en P à Γ est portée par la droite d'intersection du plan de Γ avec le plan tangent en P à S; de même, le support du vecteur unitaire $\vec{t}$ (porté par la tangente orientée en M à Γ) est confondu avec l'intersection du plan de Γ avec le plan tangent en M à S. Mais les normales aux deux plans tangents à S qu'on vient de considérer vérifient la condition (138); un raisonnement élémentaire prouve alors que

$$|(\vec{t}, \vec{t'})| \leq 2\sqrt{3} f(\mathrm{MP}).$$

Dès lors, les raisonnements du paragraphe **68** s'appliquent. On pourra donc déterminer une constante h telle que l'arc $\widehat{\mathrm{QMQ'}}$ de Γ, situé dans la sphère $\mathrm{L}(\mathrm{M}, h)$, de centre M et de rayon h, ne soit rencontré qu'en un seul point par toute parallèle au support du vecteur $\vec{\mathrm{N}}$, situé dans le point de Γ et cela quelle que soit la section Γ considérée. La propriété s'étend immédiatement à toutes les sections de S par des plans passant par $\vec{\mathrm{N}}$; cela montre que l'intersection de la portion $\Sigma(\mathrm{M}, h)$ de S [intérieure à $\mathrm{L}(\mathrm{M}, h)$] avec toute parallèle au support de $\vec{\mathrm{N}}$ se réduit à un point unique. Le raisonnement s'achève alors comme au paragraphe **68** et justifie le résultat annoncé au paragraphe **65**.

II. — *Indications sur les extensions dont les résultats de ce Mémoire sont susceptibles*

71. Les résultats de ce Mémoire peuvent être étendus, et cela de deux manières. En premier lieu, on peut rechercher les conditions d'existence et de

(¹) Il faut remarquer que la conclusion des paragraphes **67** et **69** s'applique à toute courbe simple de Jordan, à toute surface continue dépourvue de point double, à condition de remplacer la longueur $l(\mathrm{MP})$ par le module de la différence des paramètres qui définissent sur ces continus les coordonnées de M et de P. Les longueurs des arcs n'ont été utilisées ici que pour éviter l'emploi des représentations paramétriques non intrinsèques de Γ et de S.

continuité des dérivées du potentiel d'ordre supérieur à ceux que nous avons envisagés jusqu'ici. Du reste, ces extensions présentent un intérêt considérable au point de vue des applications à la Physique mathématique; nous citerons, à titre d'exemple, la théorie des ondes qui nécessite l'emploi des dérivées secondes du potentiel de double couche (¹). En second lieu, on peut se proposer l'étude des dérivées du potentiel, dans les espaces à m dimensions; ce genre de travaux trouve sa justification dans l'étude des problèmes de Dirichlet et de Neumann posés relativement aux équations à plusieurs variables indépendantes (²).

72. En ce qui concerne l'étude des dérivées d'ordre supérieur dans le cas tridimensionnel, il faut remarquer que les conditions de régularité imposées jusqu'ici à la multiplicité-support et à la densité des masses attirantes ne suffisent plus pour assurer leur existence; de nouvelles hypothèses sont nécessaires. Pour fixer les idées, envisageons le cas du potentiel de simple couche U(M) créé par les masses de densité $\mu(P)$ répandues sur une surface S; si l'on suppose simplement que $\mu(P)$ vérifie une condition (f) (³) et que S est une surface de Liapounoff, la fonction U(M) sera, en général, dépourvue de dérivées secondes. Mais on peut établir le résultat suivant, valable pour toute surface S dépourvue de singularité :

Si les éléments de courbure de la surface S *vérifient une condition* (f) *et si les dérivées partielles de premier ordre de* $\mu(P)$ *existent et vérifient une condition* (f), *les dérivées partielles de second ordre du potentiel* U(M) *existent et vérifient également une condition* (φ) *dans tout le domaine* D *limité par* S, *frontière* S *comprise* (⁴).

De même, l'existence et la continuité au sens (f) des dérivées premières de la courbure de S, comme des dérivées secondes de $\mu(P)$, assurent l'existence et la continuité des dérivées troisièmes de U(M), et ainsi de suite. Nous nous bornerons à énoncer ces résultats dont la démonstration serait longue et laborieuse.

73. Des intégrales singulières interviennent fréquemment dans la théorie des équations du type elliptique à plus de trois variables indépendantes. Voici un exemple choisi au hasard dans les travaux de G. Giraud [14], page 137, deuxième Mémoire.

(¹) *Cf.* la *Thèse* de Mme Dubreil [11].

(²) *Cf.* les travaux de Georges Giraud [14].

(³) *Cf.* le paragraphe 9 : nous admettrons que le module de continuité $f(MP)$ vérifie toutes les conditions de régularité qui lui ont été imposées au paragraphe 9 *bis*.

(⁴) Dans certains cas, le module de continuité $\varphi(r)$, associé à $f(r)$, doit être remplacé par le module de continuité $\varphi(r)\,|\log r|$.

Considérons une fonction $\Phi(M)$ du point $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ de l'espace à n dimensions. Nous dirons que $\Phi(M)$ est continu dans l'espace (f), ou qu'elle vérifie une condition (f), dans un certain domaine D limité par une hypersurface S lorsque, M et P étant deux points de l'ensemble $D + S$, on a

$$|\Phi(M) - \Phi(P)| \leqq f(MP),$$

où $f(r)$ est un module de continuité assujetti à vérifier toutes les conditions de régularité imposées au paragraphe **9** *bis*, et où

$$MP = \sqrt{\sum_1^m (x_i - y_i)^2},$$

$y_1, y_2, \ldots, y_n$ étant les coordonnées de P. Cela étant, considérons dans $D+S$ une multiplicité à $m - 1$ dimensions D_1 dont la frontière sera notée S_1; l'élément de cette multiplicité au point P sera noté $d\tau_{m-1}(P) = dy_1\, dy_2, \ldots, dy_{m-1}$. Soit, d'autre part, $\mu(P)$ une fonction continue sur $D_1 + S_1$; considérons alors le potentiel

$$U(M) = \int_{D_1} \frac{\mu(P)}{MP^{m-1}} f(MP) d\tau_{m-1}(P).$$

On peut alors affirmer que la fonction $U(M)$, qu'on vient de définir dans D, appartient dans ce domaine à l'espace (φ), $\varphi(MP)$ étant le module de continuité associé à $f(MP)$; c'est là une sorte d'extension au cas de l'hyperespace des théorèmes que nous avons obtenus au cours du Chapitre IV dans le cas du potentiel de simple couche dans l'espace tridimensionnel. G. Giraud n'avait donné ce résultat que dans le cas où $f(MP)$ est höldérien. Nous ne mentionnons pas d'autres généralisations immédiates des inégalités de Giraud.

74. Pour terminer, signalons les extensions possibles au cas de la continuité (f), et non plus seulement höldérienne, des résultats de L. Lichtenstein intéressant les domaines variables avec le temps, par exemple; nous nous bornerons à signaler la possibilité de ces développements et à affirmer que toutes les transformations utilisées par cet auteur pour se ramener au cas d'un domaine fixe [artifices dont on trouvera l'exposé en français dans le volume déjà cité de M. Villat [8], p. 254 et les suivantes] s'appliquent intégralement au mode de continuité que nous avons envisagé; et cela garantit la validité de nos extensions au cas des multiplicités-supports mobiles dans l'espace.