JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

B. DE KERÉKJÁRTÓ

Sur le caractère topologique du groupe homographique de la sphère

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 21 (1942), p. 67-100.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1942_9_21__67_0>

Sur le caractère topologique du groupe homographique de la sphère ;

PAR B. DE KERÉKJÁRTÓ.

A M. ÉLIE CARTAN,
en témoignage de haute estime.

Introduction.

Dans le présent mémoire, je donne la solution du problème qui consiste à caractériser topologiquement le groupe des similitudes du plan euclidien et le groupe homographique d'une variable complexe.

Dans le premier chapitre, je reproduis ma démonstration du théorème suivant, concernant la détermination des types topologiques de groupes continus connexes d'ordre 2, sur lequel reposent les considérations ultérieures (1) :

THÉORÈME I. — *Tout groupe continu connexe d'ordre 2 est homéomorphe à l'un des quatre groupes suivants :*

1° *le groupe des similitudes de la droite conservant le sens;*
2° *le groupe des translations du plan euclidien;*
3° *le groupe des mouvements d'un cylindre de révolution;*
4° *le groupe des translations d'un tore en lui-même.*

(1) La méthode développée dans le Chapitre I est, à quelques modifications près, la même que celle publiée dans le mémoire : B. v. KERÉKJÁRTÓ, *Geometrische Theorie der zweigliedrigen kontinuierlichen Gruppen* (*Abhandl. Mathem. Seminar Hamburg*, t. 8, 1930, p. 107-114).

Dans le deuxième chapitre, je démontre les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME II. — *Tout groupe continu doublement transitif de transformations topologiques du plan en lui-même est homéomorphe au groupe des similitudes du plan euclidien.*

THÉORÈME III. — *Tout groupe continu triplement transitif de transformations topologiques de la surface d'une sphère en elle-même est homéomorphe au groupe homographique d'une variable complexe.*

Le théorème II comprend aussi une nouvelle solution du problème déjà résolu dans un mémoire célèbre de M. Hilbert (1) en ce qui concerne la caractérisation topologique du *groupe des mouvements euclidiens plans*. Par le moyen du théorème II, le groupe des mouvements du plan euclidien peut être caractérisé comme le sous-groupe invariant, formé par les *transformations régulières* dans tout le plan, d'un groupe continu doublement transitif de transformations topologiques du plan en lui-même (2).

Le théorème III fournit la base topologique de la géométrie des cercles et celle de la géométrie projective de la droite complexe. Par son intermédiaire, on peut rattacher les recherches profondes de M. Élie Cartan (3) sur la géométrie projective de la droite complexe directement aux propriétés topologiques du groupe homographique sans faire intervenir une représentation analytique. Je reviendrai sur cette question dans un autre Recueil.

---

(1) D. HILBERT, *Ueber die Grundlagen der Geometrie* (*Math. Annalen*, t. 56, 1902, p. 381-422); paru aussi dans le volume : D. HILBERT, *Grundlagen der Geometrie*. Leipzig et Berlin, 1930, 7e édit., Anhang IV.

(2) Concernant la notion de *transformation régulière*, voir B. DE KERÉKJÁRTÓ, *Sur le caractère topologique des représentations conformes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 198, 1934, p. 317-320), et plusieurs mémoires du même auteur dans les *Acta Scientiarum Mathematicarum* (Szeged, t. 6 et 7, 1934).

(3) É. CARTAN, *Leçons sur la géométrie projective complexe*. Paris, 1931.

I. — Détermination des groupes continus connexe d'ordre 2.

1. Généralités et théorèmes auxiliaires. — Nous entendons par *groupe continu connexe d'ordre* 2, un groupe G' dont les éléments sont en correspondance biunivoque et bicontinue avec les points d'une surface F' appelée *surface des paramètres*. Les voisinages dans le groupe G' sont définis de telle façon que l'inverse A^{-1} de l'élément A et le produit AB de deux éléments A, B quelconques varient continûment avec A et B. A tout élément S de G' correspond une transformation topologique (c'est-à-dire biunivoque et bicontinue) de la surface des paramètres en elle-même, sans point invariant, qui change le point A de F' en le point AS. L'ensemble de ces transformations est un *groupe simplement transitif* sur la surface F' : à deux points quelconques A et B correspond une transformation du groupe et une seule qui change A en B. Ce groupe de transformations est appelé le *groupe des paramètres* du groupe G'.

Soit F la surface superposée à connexion simple de la surface F' et soit Γ le groupe de connexion de F'. Le produit $G = \Gamma . G'$ est un groupe continu simplement transitif sur la surface F. Concernant son type topologique, la surface F est homéomorphe soit au plan euclidien soit à la surface d'une sphère. Mais, d'une part, les transformations du groupe G conservent le sens d'orientation de la surface F et aucune d'elles, excepté l'identité, n'admet de point invariant; d'autre part, toute transformation topologique de la surface d'une sphère en elle-même conservant le sens admet au moins un point invariant, d'après un théorème connu de M. Brouwer (1). Il résulte de là que la surface superposée F à connexion simple de la surface des paramètres est homéomorphe au plan. Le groupe Γ est un sous-groupe invariant de G, proprement discontinu dans G.

---

(1) Voir par exemple, B. v. Kerékjártò, *Vorlesungen ueber Topologie*. Berlin, 1923, p. 193.

Pour déterminer tous les types topologiques de groupes continus connexes d'ordre 2, il faut donc déterminer d'abord les groupes continus simplement transitifs G du plan, ensuite leurs sous-groupes invariants proprement discontinus Γ, *et former les groupes facteurs* $\frac{G}{\Gamma}$. *Ces derniers fournissent les groupes des paramètres de tous les groupes continus connexes d'ordre 2.*

Soit G un groupe continu simplement transitif de transformations topologiques du plan en lui-même. Toute transformation T de G conserve le sens et n'admet pas de point invariant (sauf l'identité I). En vertu du *théorème de translation* dû à M. Brouwer, on peut construire un *domaine de la transformation T* contenant un point donné quelconque; ce domaine est limité par deux lignes simples et ouvertes a et b telles que b est l'image de a obtenue par la transformation T; l'image du domaine est un autre domaine de la transformation situé de l'autre côté de la ligne b. Nous entendons par *ligne simple et ouverte* une image topologique d'une droite telle qu'à toute suite divergente de points de la droite correspond une suite divergente de points de la ligne simple et ouverte.

Nous tirons du théorème de translation les corollaires suivants qui nous serviront de *théorèmes auxiliaires.*

Soit T une transformation topologique du plan en lui-même conservant le sens, n'admettant aucun point invariant.

1.1. *Aucune puissance* T^n *de la transformation T n'admet de point invariant* (n désigne un entier positif quelconque).

1.2. *Les images* $T(A)$, $T^2(A)$, $T^3(A)$, ... *d'un point quelconque A obtenues par les puissances de la transformation T forment une suite divergente.*

1.3. *Chaque arc continu* λ *dont les extrémités A et* $T^n(A)$ *se correspondent par une puissance* $T^n (n > 1)$ *de T rencontre son image* $\lambda' = T(\lambda)$ *obtenue par la transformation T.*

Soit c_0 un *arc de translation,* c'est-à-dire un arc simple dont les extrémités se correspondent par T, qui n'a aucun autre point en commun avec son image obtenue par T. Nous appelons *trajectoire de T* engendrée par c_0 la ligne simple et continue $\varkappa$ formée des images c_n de c_0 obtenues par les transformations $T^n (n = 0, +1, +2, \ldots)$. La ligne $\varkappa$ est une image topologique d'une droite, mais elle n'est pas nécessairement une ligne simple et ouverte car, en général, elle n'est pas un ensemble fermé de points.

1.4. *Si $(P_1, P_2, \ldots)$ est un ensemble infini de points de la trajectoire $\varkappa = \Sigma c_n$ tel que tout arc de translation c_n de $\varkappa$ ne contient qu'un nombre fini de points de cet ensemble, aucun point d'accumulation de l'ensemble $(P_1, P_2, \ldots)$ n'appartient à la trajectoire $\varkappa$.*

1.5. *Si λ_1 est un arc qui forme avec un arc $\varkappa_1$ de la trajectoire $\varkappa$ une courbe simple et fermée et si l'arc $\varkappa_1$ contient deux points qui se correspondent par la transformation T, l'arc λ_1 a au moins un point en commun avec son image $\lambda'_1 = T(\lambda_1)$; il y a donc sur l'arc λ_1 deux points qui se correspondent par T.*

Les propositions ci-dessus sont des conséquences immédiates du théorème de translation; d'ailleurs elles peuvent servir de préliminaires à une démonstration du théorème de translation (¹).

Dans le paragraphe **2**, nous allons démontrer que *chaque groupe continu connexe d'ordre 2 est engendré par des transformations infinitésimales*. C'est essentiellement le résultat obtenu par M. Brouwer dans sa deuxième communication sur les groupes continus (²). Dans le paragraphe **3** je détermine les types topologiques de groupes continus connexes d'ordre 2.

(¹) L. E. J. Brouwer, *Beweis des ebenen Translationssatzes* (*Mathem. Annalen*, t. **72**, 1912, p. 37-54); B. de Kerékjártó, *The plane translation theorem of Brouwer and the last geometric theorem of Poincaré* (*Acta Scientiarum Mathematicarum*, Szeged, t. **4**, 1928, p. 86-102), et deux Notes du même auteur dans les *C. R. Acad. Sc.*, t. **186**, 1928, p. 1699 et t. **187**, 1928, p. 20.

(²) L. E. J. Brouwer, *Die Theorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen unabhängig von den Axiomen von Lie* (*Mathem. Annalen*, t. **67**, 1909, p. 246-267 et t. **69**, 1910, p. 181-203).

2. L'EXISTENCE DE SOUS-GROUPES CONTINUS D'ORDRE 1. — Soit G un groupe continu simplement transitif de transformations topologiques du plan en lui-même. Nous choisissons un point arbitraire du plan comme origine et lui faisons correspondre la transformation identique I. A chaque point S du plan correspond une transformation du groupe G et une seule qui change l'origine en S; nous désignons cette transformation par la même lettre S.

2.1. *Chaque transformation S du groupe G a une racine carrée.*

Considérons l'*inversion* $X \to X^{-1}$, c'est-à-dire la transformation du plan en lui-même qui change tout point X en le point X^{-1} correspondant à l'inverse de X. L'inversion est une transformation topologique et involutive du plan en lui-même qui laisse le point I invariant. Aucun autre point n'est invariant par l'inversion; autrement, pour un point $X \neq I$, on aurait $X^2 = I$ ce qui est exclu par le théorème **1.1**.

Il résulte de là que l'inversion conserve le sens ([1]). La transformation $X \to X^{-1}S$, produit de l'inversion et de la tranformation $S(\neq I)$ du groupe, conserve le sens; elle échange entre eux les points I et S; d'après **1.1** elle admet donc au moins un point invariant T. De la relation $T = T^{-1}S$, on déduit $T^2 = S$, c'est-à-dire $T = S^{\frac{1}{2}}$.

2.2. *Si S est une transformation du groupe G, l'ensemble des racines successives $S^{\frac{1}{2}}$, $S^{\frac{1}{4}}$, $S^{\frac{1}{8}}$, ... est borné.* $\Big(S^{\frac{1}{2^{n+1}}}$ désigne une racine carrée de $S^{\frac{1}{2^n}}$ choisie arbitrairement et fixée ensuite$\Big)$.

Soit U un voisinage du point I borné et *symétrique* (c'est-à-dire invariant par l'inversion) contenant le point S. Soit V un autre voisinage borné de I tel que le produit de deux transformations quelconques contenues dans U appartiennent à V. Soit λ un arc joignant les points I et S dans U. D'après le théorème **1.3**, λ rencontre son image obtenue

---

([1]) *Toute transformation topologique, périodique du plan en lui-même est homéomorphe à une rotation ou à une symétrie par rapport à une ligne, suivant qu'elle conserve le sens ou non.* Voir B. v. KERÉKJÁRTÓ, *Vorlesungen über Topologie*, p. 224.

par la transformation $S^{\frac{1}{2^k}}$ parce que les extrémités de λ : I et S, se correspondent par la $2^{k-\text{ième}}$ puissance de $S^{\frac{1}{2^k}}$. Il y a donc deux points T_1 et T_2 de λ tels que $T_2 = T_1 S^{\frac{1}{2^k}}$. La transformation $S^{\frac{1}{2^k}} = T_1^{-1} T_2$ est le produit des transformations T_1^{-1} et T_2 contenues dans U, par suite $S^{\frac{1}{2^k}}$ appartient au voisinage V.

2.3. *La suite $S^{\frac{1}{2}}$, $S^{\frac{1}{4}}$, $S^{\frac{1}{8}}$, ... converge vers l'identité.*

Soit V un domaine borné contenant tous les points $S^{\frac{1}{2^n}}$ ($n = 1, 2, \ldots$). Soit T un point d'accumulation de cette suite et soit S^{α_1}, S^{α_2}, ... $\left(\alpha_\nu = \frac{1}{2^{k_\nu}}\right)$ une suite partielle convergente vers T. Pour tout entier positif r, la suite $S^{\alpha_1 2^r}$, $S^{\alpha_2 2^r}$, ... converge vers T^{2^r}. Si ν_0 est assez grand tel que $\alpha_\nu < \frac{1}{2^r}$ pour $\nu > \nu_0$, les points $S^{\alpha_\nu 2^r}$ ($\nu > \nu_0$) appartiennent au domaine V, de même leur limite T^{2^r}. La suite T^{2^r} ($r = 1, 2, \ldots$) est donc bornée; il résulte de la proposition **1.2** que, dans ce cas, $T = I$.

2.4. *A chaque voisinage V de I, on peut faire correspondre un nombre positif δ tel que pour tout nombre dyadique $\frac{n}{2^k}$ inférieur en valeur absolue à δ, la transformation $S^{\frac{n}{2^k}}$ appartienne à V* $\Big($$n$ désigne un entier positif ou négatif; $S^{\frac{n}{2^k}}$ désigne la $n^{\text{ième}}$ puissance de $S^{\frac{1}{2^k}}$$\Big)$.

Soit V un voisinage arbitraire de I et soit U un voisinage symétrique de I tel que le produit de cinq transformations quelconques contenues dans U appartienne à V. Nous désignons par U^r l'ensemble des transformations qui peuvent être représentées comme produit de r transformations contenues dans U. En vertu de la proposition **2.3**, il y a un indice l tel que, pour chaque entier $k \geq l$, la transformation $S^{\frac{1}{2^k}}$ appartienne à U; posons $\delta = \frac{1}{2^l}$. Nous allons démontrer que $S^{\frac{n}{2^k}}$ appartient à V si $\frac{n}{2^k}$ est positif et inférieur à $\frac{1}{2^l}$.

Nous construisons un arc de translation de la transformation $S_1 = S^{\frac{1}{2^k}}$ joignant les points I et S_1 dans U^2 (1); soit $\varkappa$ la trajectoire de S_1 engendrée par cet arc de translation. Soit λ un arc dans U joignant les points I et $S^{\frac{1}{2^l}} = S_1^m (m = 2^{k-l} > n)$. Nous parcourons la trajectoire $\varkappa$ à partir du point S_1^n dans le sens positif et dans le sens négatif jusqu'aux premiers points T_2 et T_1 qui appartiennent à l'arc λ. Soit (S_1^{p-1}, S_1^p) l'arc de translation sur $\varkappa$ (p entier, $p \leqq n$) qui contient le point T_1 La transformation S_1^{-p} change le point T_1 en un point T appartenant à l'arc de translation (S_1^{-1}, I) de la trajectoire $\varkappa$. De la relation $T_1 S_1^{-p} = T$ découle $S_1^p = T^{-1} T_1$; comme T^{-1} appartient à U^2 et T appartient à U, il résulte que le point S_1^p *appartient à* U^3

Désignons par $\varkappa_1$ et par λ_1 les arcs de $\varkappa$ et de λ déterminés par les points T_1 et T_2. Les arcs $\varkappa_1$ et λ_1 forment une courbe simple et fermée. Le point S_1^p et son image S_1^n obtenue par la transformation S_1^{n-p} se trouvent sur l'arc $\varkappa_1$; d'après la proposition **1**.5, il y a deux points T_3 et T_4 de λ_1 qui se correspondent par la transformation S_1^{n-p}, c'est-à-dire $T_3 S_1^{n-p} = T_4$, d'où $S_1^{n-p} = T_3^{-1} T_4$. Il résulte de là que S_1^{n-p} *appartient à* U^2. La transformation $S_1^n = S_1^{n-p} S_1^p$ est le produit de deux transformations contenues respectivement en U^2 et en U^3; par conséquent S_1^n appartient à U^5 et aussi à V.

2.5. *A chaque nombre réel α correspond une transformation S^α du groupe telle que, pour toute suite de nombres dyadiques rationnels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ convergente vers α, la suite $S^{\alpha_1}, S^{\alpha_2}, \ldots$ converge vers S^α.*

Soit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ une suite de nombres dyadiques rationnels convergente vers α. Si k est assez grand, la suite $S^{\frac{\alpha_1}{2^k}}, S^{\frac{\alpha_2}{2^k}}, \ldots$ est bornée,

(1) La construction d'un arc de translation, due à M. Terasaka, est la suivante. Soit Δ un domaine variable dans U, contenant le point I, limité par une courbe simple et fermée, et soit $S_1(\Delta)$ son image obtenue par S_1; $S_1(\Delta)$ appartient à U^2. Si Δ est assez petit, Δ et $S_1(\Delta)$ n'ont aucun point commun; nous étendons Δ dans U jusqu'à ce que les frontières de Δ et de $S_1(\Delta)$ se touchent en un point P. Un arc passant par le point I, joignant, dans Δ, P et $S_1^{-1}(P)$, et son image obtenue par S_1 forment ensemble un arc simple situé dans U^2; la partie de cet arc entre les points I et S_1 est un arc de translation de la sorte demandée.

d'après la proposition **2**.4; la suite S^{α_1}, S^{α_2}, ... est donc aussi bornée et elle admet au moins un point d'accumulation S^{α}. Soit α'_1, α'_2, ... une suite extraite de la suite α_ν telle que $S^{\alpha'_1}$, $S^{\alpha'_2}$, ... converge vers S^{α}. Comme $\alpha_\nu - \alpha'_\nu$ converge vers o si $\nu \to \infty$, la suite $S^{\alpha_1-\alpha'_1}$, $S^{\alpha_2-\alpha'_2}$, ... converge vers I, en vertu de la proposition **2**.4. En multipliant les deux dernières suites, on conclut que la suite S^{α_1}, S^{α_2}, ... converge vers S^{α}. Il résulte de là immédiatement que, pour une suite quelconque de nombres réels α_1, α_2, ... convergente vers α, la suite S^{α_1}, S^{α_2}, ... converge vers S^{α}.

Les points $S^{\alpha}(-\infty < \alpha < +\infty)$ forment par conséquent une *ligne continue* (image univoque et continue d'une droite).

En conséquence de la proposition **2**.5, la relation $S^{\alpha}.S^{\beta} = S^{\alpha+\beta}$ est valable pour des nombres réels α, β quelconques. Soient en effet α_1, α_2, ..., et β_1, β_2, ... deux suites de nombres dyadiques rationnels qui convergent vers α et vers β; la suite $\alpha_\nu + \beta_\nu$ converge vers $\alpha + \beta$, et de la relation $S^{\alpha_\nu}.S^{\beta_\nu} = S^{\alpha_\nu+\beta_\nu}$ on déduit : $S^{\alpha}.S^{\beta} = S^{\alpha+\beta}$.

2.6. *Si les nombres réels α et β sont différents, S^{α} et S^{β} sont aussi différents.*

Autrement, on aurait $S^{\alpha-\beta} = I$, pour $\alpha - \beta \neq$ o; posons $\gamma = \alpha - \beta$. De la relation $S^{\gamma} =$ 1, on conclut, d'après **1**.1, que $S^{\frac{\gamma}{2}} = I$, $S^{\frac{\gamma}{2^k}} = I$, et $S^{\frac{n\gamma}{2^k}} = I$ (n et $k >$ o sont des entiers quelconques). Comme S^x dépend continûment de x, on aurait donc, pour toute valeur de x, $S^x = I$; c'est une contradiction avec l'hypothèse $S \neq I$.

Les points S^{α} $(-\infty < \alpha < +\infty)$ forment donc une ligne *simple*.

2.7. *Si α_1, α_2, ... est une suite divergente de nombres réels la suite S^{α_1}, S^{α_2}, ... n'admet aucun point d'accumulation.*

Supposons, au contraire, que la suite $S^{\alpha'_1}$, $S^{\alpha'_2}$, ..., extraite de la suite S^{α_1}, S^{α_2}, ... converge vers un point T; on peut supposer que, pour chaque indice k, $a'_k - \alpha'_{k-1} > k$. La suite $S^{\alpha'_2-\alpha'_1}$, $S^{\alpha'_3-\alpha'_2}$, ... convergerait alors vers I. Considérons l'arc simple S^{α} (o $\leqq \alpha <$ 1) qui est un arc de translation c_0 de la transformation S; la trajectoire $\varkappa$ de S

engendrée par c_0 est la ligne S^α $(-\infty < \alpha < +\infty)$. Aucun arc $c_n = S^n(c_0)$ ne contient qu'un point, au plus, de la suite $S^{\alpha'_k - \alpha'_{k-1}}$. Il résulte donc de la proposition **1**.4 que la suite $S^{\alpha'_k - \alpha'_{k-1}}$ ne peut pas tendre vers le point I de la caractéristique $\varkappa$.

Des propositions **2**.5, **2**.6, **2**.7 découle la proposition suivante :

2.8. *Les points* S^α $(-\infty < \alpha < +\infty)$ *forment une ligne simple et ouverte.*

2.9. *La transformation S n'a qu'une seule racine carrée.*

En effet la ligne simple et ouverte S^α $(-\infty < \alpha < +\infty)$ est transformée en elle-même par l'inversion et de même par la transformation S du groupe. Les deux demi-plans déterminés par cette ligne sont échangés entre eux par la transformation $X \to X^{-1}S$; aucun d'eux ne peut donc contenir un point de cette transformation, c'est-à-dire une racine carrée de S. Ainsi le point $S^{\frac{1}{2}}$, appartenant à la ligne (S^α) correspond à la seule racine carrée de S.

Le résultat obtenu est énoncé dans le théorème suivant :

Théorème. — *Chaque transformation $S (\neq I)$ du groupe G appartient à un sous-groupe continu connexe d'ordre 1 de G. Ce sous-groupe est formé par toutes les puissances S^α de la transformation S* (α réel, $-\infty < \alpha < +\infty$) ; *il est représenté dans le plan par une ligne simple et ouverte.*

3. Détermination des groupes continus connexes d'ordre 2. — Nous désignons par (S) le sous-groupe continu connexe d'ordre 1 du groupe G qui contient l'élément S; soit l_0 la ligne simple et ouverte dans le plan qui représente le groupe (S). Les images de l_0 obtenues par les transformations du groupe G forment un faisceau de lignes $\{l\}$ tel que par tout point du plan passe une ligne du faisceau et une seule.

En conséquence de la continuité du groupe G, le faisceau $\{l\}$ satisfait à la condition de *régularité* suivante : si la distance des points P et P' est suffisamment petite, l'écart des lignes l et l' passant par P et par P', relatif à une métrique bornée du plan, est arbitrairement petit. Il résulte de là que le faisceau $\{l\}$ est homéomorphe à un faisceau de droites parallèles du plan euclidien (¹).

Soit T un élément de G n'appartenant pas à (S); désignons par k_0 la ligne représentant le groupe (T), et par $\{k\}$ le faisceau des lignes en lesquelles le groupe G change la ligne k_0.

Chaque ligne du faisceau $\{k\}$ n'a qu'un point en commun avec une ligne quelconque du faisceau $\{l\}$. Il y a un voisinage U de l'identité I, dans lequel le système des lignes $\{k\}$ et $\{l\}$ est homéomorphe à un système de droites parallèles et orthogonales. Chaque ligne l qui traverse U a un point commun avec k_0, et chaque ligne k traversant U a un point commun avec l_0. Il résulte de là que toute transformation contenue dans le voisinage U peut être exprimée sous chacune des deux formes : $T^{\beta} S^{\alpha}$ et $S^{\alpha'} T^{\beta'}$. Par suite :

3.1. *Si S et T sont deux éléments quelconques du groupe G, qui n'appartiennent pas à un même sous-groupe d'ordre* 1, *il y a un voisinage U de l'identité tel que toute transformation contenue dans U peut être exprimée sous la forme $T^{\beta} S^{\alpha}$.*

Les sous-groupes d'ordre 1 de G forment un faisceau de lignes simples et ouvertes tel que, par tout point du plan excepté l'origine I, passe une ligne et une seule. La condition de régularité étant vérifiée pour ce faisceau de lignes, il résulte que ce faisceau est homéomorphe au faisceau des droites du plan passant par un point fixe. Nous pouvons donc introduire une *coordonnée angulaire* $\Theta \pmod{2\pi}$ dans l'ensemble des sous-groupes d'ordre 1.

A tout élément T du groupe G, nous faisons correspondre la transformation topologique A_T du plan en lui-même définie par la formule : $X \rightarrow T^{-1} X T$, où X désigne un point variable du plan. A_T est le carré de la transformation $X \rightarrow X^{-1} T$, elle conserve donc le sens. La transformation A_T change entre eux les sous-groupes d'ordre 1 de G, et, en particulier, elle transforme le sous-groupe (T) en lui-même. L'ensemble des transformations A_T correspondant aux éléments T de G

(¹) B. v. Kerékjártó, *Vorlesungen über Topologie*, p. 238 et seq.

constitue un groupe, isomorphe à G, appelé *groupe adjoint de* G (¹). L'inverse de la transformation A_T est la transformation $A_{T^{-1}}$ correspondant à l'inverse de T.

3.2. *Il y a au moins deux éléments* S *et* T *de* G, *n'appartenant pas à un même sous-groupe d'ordre* 1, *tels que la transformation* A_T *du groupe adjoint, correspondant à* T, *change le sous-groupe* (S) *en lui-même.*

Si le groupe G est commutatif, cette proposition est évidente; S et T sont alors arbitraires. Considérons un groupe G non commutatif; désignons par Θ la coordonnée angulaire d'un sous-groupe quelconque d'ordre 1, et par $\Theta' = f(\Theta, T)$ la coordonnée de son image obtenue par la transformation A_T du groupe adjoint; soit Θ' déterminé de telle façon que, pour le groupe (T), on ait $\Theta' = \Theta$. De larelation $A_T^{-1} = A_{T^{-1}}$ découle $\Theta = f(\Theta', T^{-1})$. Si la proposition ci-dessus était inexacte, la différence $f(\Theta, T) - \Theta$ garderait un signe invariant lorsque T est fixe et Θ variable. Comme cette différence dépend aussi continuement de T, il résulte que $f(\Theta, T) - \Theta$ aurait un même signe pour tout Θ et T tels que T n'appartient pas au sous-groupe de coordonnée Θ. Mais cela est impossible parce que

$$f(\Theta, T) - \Theta = \Theta' - f(\Theta', T^{-1}).$$

Soient donc S et T deux éléments de G, n'appartenant pas à un même sous-groupe d'ordre 1, tels que le sous-groupe (S) soit transformé en lui-même par la transformation A_T, c'est-à-dire que, pour tout α, $T^{-1}S^{\alpha}T$ appartienne au sous-groupe (S). Il résulte de là que, pour toute valeur de β,

$$T^{-\beta}S^{\alpha}T^{\beta} = S^{\alpha'},$$

où $\alpha' = F(\alpha, \beta)$ est une fonction continue de α et β.

Pour déterminer la fonction F, posons d'abord $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$; nous obtenons ainsi :

$$S^{F(\alpha_1+\alpha_2, \beta)} = T^{-\beta}S^{\alpha_1}T^{\beta}.T^{-\beta}S^{\alpha_2}T^{\beta} = S^{F(\alpha_1,\beta)+F(\alpha_2,\beta)};$$

(¹) Concernant cette notion, *voir*, par exemple, É. CARTAN, *La théorie des groupes finis et continus et l'Analysis Situs* (*Mémorial des Sciences Mathém.*, fasc. 42, 1930, p. 19).

de la relation obtenue

$$F(\alpha_1+\alpha_2, \beta)=F(\alpha_1, \beta)+F(\alpha_2, \beta),$$

on conclut que

$$F(\alpha, \beta)=\alpha F(1, \beta)=\alpha\varphi(\beta).$$

Posons ensuite $\beta=\beta_1+\beta_2$, nous obtenons la relation :

$$S^{\alpha.\varphi(\beta_1+\beta_2)}=T^{-\beta_2}(T^{-\beta_1}S^{\alpha}T^{\beta_1})T^{\beta_2}=T^{-\beta_2}S^{\alpha.\varphi(\beta_1)}T^{\beta_2}=S^{\alpha.\varphi(\beta_1).\varphi(\beta_2)}.$$

De la relation

$$\varphi(\beta_1+\beta_2)=\varphi(\beta_1).\varphi(\beta_2),$$

on conclut que

$$\varphi(\beta)=a^{\beta}.$$

En résumé

$$F(\alpha, \beta)=\alpha.a^{\beta}.$$

Le nombre réel a est défini par l'équation $S^{a}=T^{-1}ST$. Comme la transformation A_T du groupe adjoint laisse tous les points de la ligne (T) invariants et conserve le sens du plan, il résulte que S et son image S^a obtenue par A_T se trouvent d'un même côté de la ligne (T); par suite le nombre réel *a est positif*. Si le groupe G est commutatif, $a=1$. Si G n'est pas commutatif, $a\neq 1$; nous posons alors $a=e$; cela signifie un changement de paramètre du sous-groupe (T) obtenu en remplaçant T par $T^{\log a}$.

Nous avons obtenu ainsi le résultat suivant :

3.3. *Le groupe G contient deux sous-groupes d'ordre* 1 : (S) *et* (T), *tels que, pour toutes valeurs* α *et* β,

$$S^{\alpha}T^{\beta}=T^{\beta}S^{\alpha a^{\beta}}.$$

Le nombre a est égal à 1 *ou à e suivant que G est commutatif ou non.*

Nous allons démontrer la proposition suivante :

3.4. *Toutes les transformations du groupe G peuvent être exprimées sous la forme* $T^{y}S^{x}$.

Soit en effet R un élément quelconque du groupe G. D'après la proposition **2**.4, pour un entier n assez grand, l'élément $R^{\frac{1}{n}}$ appartient au voisinage U dont les éléments sont de la forme $T^\beta S^\alpha$ (**3**.1). De la relation $R = (T^\beta S^\alpha)^n$ on déduit, en tenant compte de la proposition **3**.3, l'expression $R = T^y S^x$.

Des propositions **3**.3 et **3**.4 découle immédiatement que (S) *est un sous-groupe invariant du groupe G*.

Nous attribuons au point $R = T^y S^x$ du plan les *coordonnées* (x, y). La correspondance obtenue ainsi entre les points du plan et les couples de nombres réels (x, y) est biunivoque et bicontinue.

La transformation $T^\beta S^\alpha$ change le point $T^y S^x$ de coordonnées (x, y) en le point $T^y S^x T^\beta S^\alpha$; comme $S^x T^\beta = T^\beta S^{xa^\beta}$ (**3**.3), il résulte que $T^y S^x T^\beta S^\alpha = T^{y+\beta} S^{xa^\beta+\alpha}$; les coordonnées de ce point sont : $(x a^\beta + \alpha, y + \beta)$. On obtient donc les expressions suivantes des transformations du groupe G :

(1) $\quad x' = x e^\beta + \alpha, \quad y' = y + \beta,\quad$ si G n'est pas commutatif;

(2) $\quad x' = x + a, \quad y' = y + \beta,\quad$ si G est commutatif.

Le groupe (1), qui est le groupe des paramètres du groupe des similitudes de la droite conservant le sens, n'admet aucun sous-groupe invariant proprement discontinu.

Le groupe (2) admet deux sortes de sous-groupes invariants proprement discontinus, à savoir :

$$x' = x + m, \quad y' = y \qquad \text{et} \qquad x' = x + m, \quad y' = y + n \qquad (m, n \text{ entiers}).$$

Les groupes facteurs leur correspondant sont les suivants :

(3) $\quad x' = x + \alpha \pmod 1, \quad y' = y + \beta \qquad (0 \leqq x < 1, -\infty < +y < \infty)$;

(4) $\quad x' = x + \alpha \pmod 1, \quad y' = y + \beta \pmod 1 \quad (0 \leqq x < 1, 0 \leqq y < 1)$.

Le groupe (3) est celui des mouvements d'un cylindre de révolution et (4) est le groupe des translations d'un tore en lui-même.

Nous avons donc démontré que *tout groupe continu connexe d'ordre 2 est homéomorphe à l'un des quatre groupes suivants* :

1° *groupe des similitudes de la droite conservant le sens;*

2° *groupe des translations du plan euclidien;*

3° *groupe des mouvements d'un cylindre de révolution;*
4° *groupe des translations d'un tore en lui-même.*

C'est le théorème I énoncé dans l'Introduction.

II. — Caractérisation topologique du groupe homographique.

4. Sur les rotations contenues dans un groupe doublement transitif. — Soit G un groupe de transformations topologiques du plan en lui-même. Nous introduisons dans le plan une *métrique bornée*, par exemple au moyen d'une projection stéréographique du plan sur la surface d'une sphère.

Supposons que le groupe G soit *doublement transitif* dans le plan; cela veut dire qu'à deux couples de points quelconques (A, B) et (A', B') correspond une transformation du groupe G et une seule, qui transforme A en A' et B en B'.

Le groupe doublement transitif est dit *continu* si à tout couple de points (A, B) et à chaque nombre positif ε correspond un nombre positif δ tel que toute transformation de G, qui déplace chacun des points A et B de distances inférieures à δ, diffère de l'identité de moins de ε, c'est-à-dire elle déplace tout point de moins de ε.

Si (A', B') est un couple de points tel que les distances (A, A') et (B, B') sont inférieures à δ, la transformation de G qui change A en A' et B en B' diffère de l'identité de moins ε. Soit (A^0, B^0) un autre couple de points; désignons par T et T' les transformations de G qui transforment le couple (A^0, B^0) en (A, B) et en (A', B'). La transformation $T^{-1}T'$ change A en A' et B en B'; elle diffère donc de l'identité de moins de ε. Il résulte de là que les transformations T et T' diffèrent de moins de ε, c'est-à-dire, pour tout point P, la distance des images $T(P)$ et $T'(P)$ de P obtenues par les transformations T et T' est inférieure à ε. Nous exprimons cette propriété du groupe G en disant que la transformation du groupe G qui change le couple (A^0, B^0) en (A, B) *varie continûment* avec le couple (A, B).

Une conséquence immédiate de la continuité du groupe G est que *toutes les transformations de G conservent le sens du plan.*

Soit O un point quelconque du plan. Les transformations de G qui admettent le point invariant O forment un *sous-groupe* G_O *continu et simplement transitif* dans le plan privé du point O. En effet, si P et P' sont deux points quelconques du plan différents de O, il y a, dans le groupe G, une transformation et une seule changeant le couple (O, P) en (O, P'), c'est-à-dire il y a, dans G_O, une transformation et une seule qui transforme P en P' et cette transformation varie continûment avec le point P'.

En vertu du théorème démontré dans le chapitre précédent, le groupe G_O est commutatif et homéomorphe au groupe des mouvements d'un cylindre de révolution, ou, autrement dit, G_O est homéomorphe au groupe des similitudes de centre O du plan euclidien.

4.1. *Les transformations de G qui laissent le point O invariant forment un sous-groupe commutatif G_O de G, qui est homéomorphe au groupe des similitudes de centre O du plan euclidien.*

4.2. *Le groupe G_O contient un sous-groupe cyclique Γ_O d'ordre* 1 *qui correspond au groupe des rotations autour de O.*

Nous appellerons, les transformations contenues dans le groupe Γ_O, *rotations autour du point O.* Si A est un point différent de O, la *trajectoire du groupe Γ_O* passant par le point A, c'est-à-dire l'ensemble des images de A obtenues par les transformations de Γ_O, est une courbe simple et fermée; nous la désignons par k_O (ou par k_O^A) et nous l'appelons *cercle* de centre O passant par A.

4.3. *Toute transformation du groupe G_O transforme le faisceau des cercles k_O en lui-même.*

Soient en effet ρ un élément de Γ_O et T un élément quelconque de G^O. Désignons par $B = \rho(A)$ et par $A' = T(A)$ les images du point A obtenues par ces transformations. Comme T et ρ sont échangeables, on a $T(B) = \rho\, T(A) = T \rho(A) = \rho(A')$. Cela signifie que le point B du cercle k_O^A est transformé par T en le point $B' = (A')$ du cercle $k_O^{A'}$.

Dans le groupe cyclique Γ_O, il y a une transformation involutive et une seule; nous la désignons par σ_O et nous l'appelons *demi-rotation autour du point O.*

Si A et B sont deux points distincts, il y a, dans le groupe G, une transformation σ et une seule qui transforme le couple (A, B) en (B, A). La transformation σ^2 admet deux points invariants A et B; par conséquent $\sigma^2 = I$ (identité). σ est donc une transformation involutive du plan en lui-même; elle conserve le sens, elle admet donc un point invariant C et un seul ([1]). σ est la demi-rotation autour du point C contenu dans le groupe Γ_C. Nous appelons le point C *milieu du couple de points* A, B.

4.4. *Si la transformation T de G transforme les points A, B en A', B', elle transforme le milieu C de A, B en le milieu C' de A', B'.*

Désignons en effet par $C' = T(C)$ l'image de C obtenue par la transformation T. La transformée de σ_C par T, c'est-à-dire la transformation $T^{-1}\sigma_C T$, est une transformation involutive admettant le point invariant C'. De la relation $T^{-1}\sigma_C T = \sigma_{C'}$, il résulte que $\sigma_{C'}$ échange entre eux les points A' et B'; en effet la transformation T^{-1} change A' en A, σ_C change A en B, et T change B en B'.

4.5. *Le milieu du couple A, B varie continûment avec les points A, B.*

En conséquence de la continuité du groupe G, la transformation de G qui change A en A' et B en B' diffère de l'identité d'arbitrairement peu si les distances (A, A') et (B, B') sont suffisament petites. Comme $C' = T(C)$, il en résulte que la distance des milieux C et C' est aussi arbitrairement petite.

4.6. *La demi-rotation σ_C varie continûment avec le point C.*

Soit η un nombre positif quelconque. De la continuité uniforme de la demi-rotation σ_C, il résulte qu'il existe un nombre positif ε (dont nous pouvons supposer qu'il soit inférieur à η) tel que, pour deux points quelconques P et Q dont la distance est inférieure à ε, la distance des images obtenues par la transformation σ_C est inférieure à η, donc $[\sigma_C(P), \sigma_C(Q)] < \eta$, si $(P, Q) < \varepsilon$. Soit A un point différent de C.

([1]) *Voir* la note ([1]), p. 72.

De la continuité du groupe G, il résulte l'existence d'un nombre positif δ tel que, si $(C, C') < \delta$, la transformation T de G, qui transforme C en C' et le point A en lui-même, diffère de l'identité de moins de ε.

Cela posé, soit P un point arbitraire; on a $[P, T^{-1}(P)] < \varepsilon$, donc

$$[\sigma_C(P),\ T^{-1}\sigma_C(P)] < \eta;$$

ensuite

$$[T^{-1}\sigma_C(P),\ T^{-1}\sigma_C T(P)] < \varepsilon.$$

De ces deux inégalités, on déduit la suivante

$$[\sigma_C(P),\ T^{-1}\sigma_C T(P)] < \varepsilon + \eta < 2\eta.$$

Comme $T^{-1}\sigma_C T(P) = \sigma_{C'}(P)$, cela signifie que la distance des points $\sigma_C(P)$ et $\sigma_{C'}(P)$ est inférieure à la quantité arbitrairement petite 2η pourvu que la distance des points C et C' soit inférieure à δ.

4.7. *Si les points A et B sont distincts, le produit $\sigma_A\sigma_B$ des demi-rotations σ_A et σ_B n'admet aucun point invariant.*

Si C était un point invariant de $\sigma_A\sigma_B$, soit $C' = \sigma_A(C)$; alors $\sigma_B(C') = C$. Comme σ_A et σ_B sont involutives, on aurait à la fois : $\sigma_A(C') = C$ et $\sigma_B(C) = C'$; le point C' serait donc aussi invariant par la transformation $\sigma_A\sigma_B$ qui alors, admettant deux points invariants, serait l'identité; ce serait une contradiction.

4.8. *Soit P un point quelconque, et soient P, $\tau(P)$, $\tau^2(P)$, ... ses images obtenues par les itérations de la transformation $\tau = \sigma_A\sigma_B$. Cette suite de points est divergente.*

D'après **4.7**, c'est une conséquence immédiate du théorème auxiliaire **1.2**.

5. Sur les homothéties contenues dans le groupe G_O. — Nous appellerons *chaîne* (d'origine O) engendrée par le point A_1 la suite des points

$$A_1,\quad A_2 = \sigma_{A_1}(O),\qquad A_3 = \sigma_{A_2}(A_1),\qquad \ldots,\qquad A_n = \sigma_{A_{n-1}}(A_{n-2}),\qquad \ldots.$$

Désignons par $A_{-1} = \sigma_O(A_1)$ l'image de A_1 obtenue par la demi-rotation σ_O, et soit $A_{-1}, A_{-2}, \ldots$ la chaîne engendrée par A_{-1}. Dans la suite des points

$$\ldots, \quad A_{-n}, \quad \ldots, \quad A_{-2}, \quad A_{-1}, \quad A_0 = O, \quad A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_n, \quad \ldots,$$

que nous appellerons *double chaîne*, tout élément A_ν est le milieu du couple $A_{\nu-1}, A_{\nu+1}$.

5.1. *La demi-rotation σ_{A_k} autour du point A_k de la double chaîne transforme le point A_n en A_{2k-n}.*

Pour raison de simplicité, posons $k = 0$. La demi-rotation σ_O transforme O en O et A_1 en A_{-1}; comme A_1 est le milieu du couple O, A_2, il résulte de **4.4** que $\sigma_O(A_1) = A_{-1}$ est le milieu du couple $O, \sigma_O(A_2)$, d'où $\sigma_O(A_2) = A_{-2}$. Par induction de n à $n+1$, on déduit de là, pour tout n, $\sigma_O(A_n) = A_{-n}$.

5.2. *Les points de la chaîne $A_1, A_2, \ldots$ forment une suite divergente.*

En effet le produit $\sigma_O\sigma_{A_1}$ des demi-rotations σ_O et σ_{A_1} transforme le point A_n en A_{n+2} (**5.1**); il résulte de la proposition **4.8** que les suites $A_1, A_3, A_5, \ldots$ et $A_2, A_4, A_6, \ldots$ sont divergentes.

5.3. *Si la transformation T de G_O change le point A_1 en A'_1, elle change le $n^{ième}$ élément A_n de la chaîne engendrée par A_1 en le $n^{ième}$ élément A'_n de la chaîne engendrée par A'_1.*

D'après la proposition **4.4**, le milieu A_1 du couple O, A_2 est changé par T en le milieu $A'_1 = T(A_1)$ du couple $O, T(A_2)$; il résulte de là que $T(A_2) = A'_2$; et ainsi de suite.

Désignons, pour tout entier positif n, par T_n la transformation du groupe G_O qui change le point A_1 en le $n^{ième}$ point A_n de la chaîne engendrée par A_1. On voit facilement que T_n est indépendant du choix du point A_1; soit en effet A'_1 un autre point quelconque et soit T la transformation de G_O qui change A_1 en A'_1; la transformation $T^{-1}T_nT$ change A'_1 en le $n^{ième}$ élément A'_n de la chaîne engendrée par A'_1. Comme le groupe G_O est commutatif, $T^{-1}T_nT = T_n$.

En conséquence de la proposition **5.1**, les éléments $A_{n'}$, $A_{2n'}$, $A_{3n'}$, ... de la chaîne A_1, A_2, ... forment aussi une chaîne. La transformation $T_{n'}$ change le point A_1 en $A_{n'}$; d'après **5.3** elle change donc le point A_n en $A_{nn'}$. Chacune des transformations $T_{nn'}$ et $T_n T_{n'}$ de G_O transforme A_1 en $A_{nn'}$; il résulte de là que

$$T_n T_{n'} = T_{nn'}.$$

Désignons par $T_{\frac{m}{n}}$ la transformation $T_m T_n^{-1}$. Comme le groupe G_O est commutatif, on a, pour des entiers positifs m, n, m', n' quelconques

$$T_{\frac{m}{n}} T_{\frac{m'}{n'}} = T_m T_n^{-1} T_{m'} T_{n'}^{-1} = T_m T_{m'} T_n^{-1} T_{n'}^{-1} = T_{mm'} T_{nn'}^{-1} = T_{\frac{mm'}{nn'}},$$

c'est-à-dire

$$T_r T_{r'} = T_{rr'},$$

où r et r' sont des nombres rationnels positifs quelconques. Nous avons donc démontré la proposition suivante :

5.4. *Les transformations T_r correspondant aux nombres rationnels positifs r forment un sous-groupe de G_O; le produit de T_r et $T_{r'}$ est $T_{rr'}$.*

Pour tout nombre rationnel positif r, nous désignons par A_r l'image de A_1 obtenue par la tranformation T_r; nous désignons par A_{-r} l'image de A_r obtenue par la demi-rotation σ_O.

Pour tout entier positif n, les points $A_{\frac{m}{2n}}$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ forment une double chaîne, en conséquence de la proposition **5.3**. En appliquant la proposition **5.1** à ces doubles chaînes, nous obtenons le résultat suivant :

5.5. *Le produit τ_r de la demi-rotation σ_O et de la demi-rotation autour du point $A_{\frac{r}{2}}$ change le point $A_{r'}$ en $A_{r+r'}$ (r et r' désignent des nombres rationnels quelconques).*

Nous allons démontrer la proposition suivante :

5.6. *La suite des points $A_{\frac{1}{2}}$, $A_{\frac{1}{3}}$, $A_{\frac{1}{4}}$, ... converge vers O.*

Désignons par k^n et $k^{\frac{1}{n}}$ les cercles de centre O passant par A_n et par $A_{\frac{1}{n}}$. Si la suite des points $A_{\frac{1}{n}}$ ne tendait pas vers O, soit $n_1, n_2, \ldots$ une suite d'entiers positifs tels que les points $A_{\frac{1}{n_1}}, A_{\frac{1}{n_2}}, \ldots$ se trouvent à l'extérieur du cercle $k^\star$ de centre O. Comme $T_n\left(k^{\frac{1}{n}}\right) = k^1$, si Q est un point quelconque intérieur à $k^\star$ (différent de O), ses images obtenues par les transformations $T_{n_1}, T_{n_2}, \ldots$ sont toutes intérieures à k^1. Désignons par T la transformation de G_O qui transforme Q en A_1; tous les points $T_{n_\nu} T(Q) = T T_{n_\nu}(Q) = T_{n_\nu}(A_1) = A_{n_\nu}$ seraient alors intérieurs au cercle $T(k^1)$; c'est en contradiction avec la proposition 5.2 qui affirme que la suite $A_1, A_2, \ldots$ est divergente.

5.7. *Au poins A_1 et à un nombre positif ε arbitraire, on peut faire correspondre un entier n_0 tel que, pour tout $n > n_0$, la distance de deux points consécutifs quelconques de la double chaîne*

$$\ldots, \quad A_{-\frac{2}{n}}, \quad A_{-\frac{1}{n}}, \quad O = A_0, \quad A_{\frac{1}{n}}, \quad A_{\frac{2}{n}}, \quad A_{\frac{3}{n}}, \quad \ldots, \quad A_1, \quad \ldots$$

est inférieure à ε.

D'après la proposition 5.5, la transformation τ_1 change le point O en A_1 et le point $A_{\frac{1}{n}}$ en $A_{1+\frac{1}{n}}$; comme τ_1 est continue, il résulte de 5.6 que la suite $A_{1+\frac{1}{n}}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ converge vers A_1. Soit δ un nombre positif tel que toute transformation du groupe qui déplace chacun des points A_0 et A_1 de distances inférieures à δ diffère de l'identité de moins de ε. Si n_0 est suffisamment grand, pour tout $n > n_0$, les distances $\left(A_0, A_{\frac{1}{n}}\right)$ et $\left(A_1, A_{1+\frac{1}{n}}\right)$ sont plus petites que δ. La transformation $\tau_{\frac{1}{n}}$ qui change A_0 en $A_{\frac{1}{n}}$ et A_1 en $A_{1+\frac{1}{n}}$ (*voir* 5.5) diffère donc de l'identité de moins de ε. Il résulte de là que, pour tout entier m, la distance des points $A_{\frac{m}{n}}$ et $A_{m+\frac{1}{n}} = \tau_{\frac{1}{n}}\left(A_{\frac{m}{n}}\right)$ est inférieure à ε.

Nous entendons par *demi-ligne* OA_1 la réunion de l'ensemble des points A_r dont l'indice r est positif rationnel, et de son dérivé; nous entendons par *ligne* OA_1 la réunion de l'ensemble des points A_r d'indice rationnel r et de son dérivé. Les points A_r seront appelés *points rationnels* de la ligne OA_1 (ou de la demi-ligne OA_1) par rapport à A_1.

Nous définissons les *translations du plan suivant la ligne* OA_1 de la façon suivante. Soit P un point quelconque de la ligne OA_1 et soit Q le milieu du couple O, P. Le produit $\tau = \sigma_O \sigma_Q$ des demi-rotations σ_O et σ_Q change le point O en P. La transformation τ qui, d'après la proposition 4.7, n'admet aucun point invariant, est appelée translation suivant la ligne OA_1, correspondant au point P.

Les translations τ_r correspondant aux points rationnels A_r transforment l'ensemble des points rationnels $A_{r'}$ en lui-même (5.5). Comme τ_r est continue, elle transforme la ligne OA_1 en elle-même.

D'après le résultat 5.5, le produit $\tau_r \tau_{r'}$ des translations τ_r et $\tau_{r'}$ correspondant aux points rationnels A_r et $A_{r'}$ transforme le point O en $A_{r+r'}$ et le point A_1 en $A_{1+r+r'}$; de même pour les transformations $\tau_{r'}\tau_r$ et $\tau_{r+r'}$. De notre condition sur le groupe G, il résulte donc

$$\tau_r \tau_{r'} = \tau_{r'} \tau_r = \tau_{r+r'},$$

c'est-à-dire *les translations suivant la ligne* OA_1 *qui correspondent aux points rationnels forment un groupe commutatif.*

Soient B et C deux points quelconques de la ligne OA_1; désignons par τ et par τ' les translations suivant la ligne OA_1 correspondant aux points B et C. Soient $A_{r_1}, A_{r_2}, \ldots$ et $A_{s_1}, A_{s_2}, \ldots$ deux suites de points rationnels qui convergent vers B et vers C, respectivement. D'après le théorème 4.6, les translations τ_{r_ν} et τ, de même que les translations τ_{s_ν} et τ' diffèrent d'arbitrairement peu si ν est suffisamment grand. De la continuité uniforme des transformations τ et τ', il résulte donc que les transformations $\tau\tau'$ et $\tau'\tau$ diffèrent de $\tau_{r_\nu}\tau_{s_\nu} = \tau_{s_\nu}\tau_{r_\nu} = \tau_{r_\nu+s_\nu}$ d'aussi peu que l'on veut si ν est assez grand. Par suite *les transformations* $\tau\tau'$ *et* $\tau'\tau$ *sont identiques.*

Il résulte de là $\tau(C) = \tau'\tau(O) = \tau\tau'(O) = \tau'(B)$; désignons ce point par D. La suite des points $A_{r_\nu+s_\nu} = \tau_{r_\nu+s_\nu}(O)$ converge vers D. La translation τ'' suivant la ligne OA_1 qui correspond au point D diffère de $\tau_{r_\nu+s_\nu}$ d'arbitrairement peu si ν est assez grand. Par conséquent

$$\tau'' = \tau\tau' = \tau'\tau.$$

Nous avons ainsi démontré le théorème suivant :

5.8. *Les translations suivant la ligne OA_1 forment un groupe continu commutatif qui est simplement transitif sur la ligne OA_1.*

Désignons par h le groupe des translations suivant la ligne OA_1.

5.9. *La ligne OA_1 est un ensemble nulle part dense dans le plan.*

Dans le cas contraire, cet ensemble *fermé* aurait au moins un *point intérieur*, et comme il est *topologiquement homogène* (c'est-à-dire qu'on peut transformer tout point de l'ensemble en tout autre point de l'ensemble par une transformation topologique de l'ensemble en lui-même, à savoir par une translation τ), l'invariance des points intérieurs par les transformations topologiques nous fournit ce résultat que tous les points de l'ensemble sont ses points intérieurs. La ligne OA_1 serait alors identique au plan entier, et le groupe h des translations suivant la ligne OA_1 serait un *groupe continu simplement transitif dans le plan*. En vertu du théorème démontré dans le paragraphe **2**, il y aurait alors dans le groupe h un sous-groupe continu d'ordre 1 contenant la transformation τ_1 et, avec celle-ci, les transformations suivantes : la $n^{\text{ième}}$ racine de τ_1, c'est-à-dire la transformation $\tau_{\frac{1}{n}}$ $(n = 1, 2, \ldots)$; la $m^{\text{ième}}$ puissance de $\tau_{\frac{1}{n}}$, c'est-à-dire la transformation $\tau_{\frac{m}{n}}$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$; les éléments d'accumulation des transformations $\tau_{\frac{m}{n}}$. Ce sous-groupe d'ordre 1 serait donc identique au groupe h d'ordre 2, ce qui est évidemment une contradiction.

Les transformations T_r du sous groupe G_0 correspondant aux nombres rationnels positifs r transforment entre eux les points rationnels de la demi-ligne OA_1, d'après la proposition **5.4**. Comme la transformation T_r est continue, elle transforme la demi-ligne OA_1 en elle-même.

Si A est un point quelconque de la demi-ligne OA_1 (différent de O), et si $A_{r_1}, A_{r_2}, \ldots$ est une suite de points rationnels de cette demi-ligne, qui converge vers le point A, la transformation T du groupe G_0 qui change A_1 en A diffère de la transformation T_{r_ν} d'aussi peu que l'on veut pourvu que ν soit assez grand. Il résulte de là que la transformation T change aussi la demi-ligne OA_1 en elle-même.

Les transformations du groupe G_0, qui transforment la demi-ligne OA_1 en elle-même, forment un sous-groupe de G_0 que nous désignerons par g_0; *g_0 est un vrai sous-groupe de G_0* parce que la demi-ligne OA_1 n'est nulle part dense dans le plan (5.9). *Le groupe g_0 est fermé et dense en soi*, en conséquence de **5**.7. La trajectoire de g_0 passant par le point $A = A_1$ est la demi-ligne OA_1 (excepté le point O); elle est *bien enchaînée* d'après la proposition 5.7; elle *n'est pas compacte* en conséquence de **5**.2.

Comme le groupe G_0 est homéomorphe au groupe des similitudes de centre O du plan euclidien (4.1), il résulte de la théorie des approximations diophantiques que ses seuls sous-groupes fermés et denses en soi sont les suivants :

1° le groupe Γ_0 des rotations autour du point O;

2° les produits de Γ_0 par les puissances $S^n (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ d'une transformation S de G_0 n'appartenant pas à Γ_0;

3° sous-groupe continu, non cyclique, d'ordre 1;

4° les produits d'un sous-groupe continu, non cyclique, d'ordre 1 par les puissances d'une rotation périodique autour de O.

En ce qui concerne le groupe g_0, les cas (1) et (2) sont exclus. En effet la trajectoire du groupe Γ_0 passant par A est le cercle k_0^A qui est un ensemble compact; la trajectoire du groupe $S^n \Gamma_0$ est formée par l'ensemble des cercles de centre O passant par les points $S^n(A)$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$; cet ensemble n'est pas bien enchaîné. Il ne reste donc qu'envisager les groupes (3) et (4).

La trajectoire d'un sous-groupe continu, non cyclique d'ordre 1 de G_0 est une *demi-ligne simple et ouverte* ([1]) qui a un point commun avec chaque cercle k_0. La demi-ligne OA_1 est donc ou bien une demi-ligne simple et ouverte ou bien la somme d'un nombre fini de demi-lignes simples et ouvertes qui se correspondent par une rotation périodique autour de O.

([1]) *Voir* la définition de *ligne simple et ouverte* dans le paragraphe **1**; une ligne simple et ouverte est divisée par un quelconque de ses points en deux demi-lignes simples et ouvertes.

La ligne OA_1 est formé par la demi-ligne OA_1 et son image obtenue par la demi-rotation autour de O. Par conséquent, la ligne OA_1 est ou bien une ligne simple et ouverte ou bien la somme d'un nombre fini de lignes simples et ouvertes qui se correspondent par une rotation périodique autour de O.

La dernière éventualité s'exclut par l'homogénéité de la ligne OA_1. En effet la demi-rotation autour du point $A_{\frac{1}{2}}$ transforme un voisinage du point A_1 relatif à la ligne OA_1, qui est un arc simple, en un voisinage de la même sorte du point O.

Il résulte de là :

5.10. *Le sous-groupe g_0 de G_0 formé par les transformations qui transforment la demi-ligne OA_1 en elle-même est un groupe continu, non cyclique, d'ordre* 1.

Nous appelons les transformations contenues dans g_0 *homothéties* de centre O. Toute homothétie de centre O transforme les demi-lignes OP en elles-mêmes et les cercles k_0 entre eux.

En conséquence du résultat obtenu, *la ligne OA_1 est une ligne simple et ouverte.*

L'ensemble des points rationnels A_r est partout dense sur la ligne OA_1. Comme la translation τ_r, sans point invariant, transforme le point $A_{r'}$ en $A_{r+r'}$, les points rationnels A_r se succèdent sur la ligne OA_1 dans le même ordre que les nombres rationnels r leur correspondant. Nous introduisons, sur la ligne OA_1, la *coordonnée x* en attribuant à tout point rationnel A_r la coordonnée $x = r$ et en étendant l'attribution de la coordonnée par continuité à tous les points de la ligne.

Avec la coordonnée x, les transformations de la ligne OA_1 engendrées par les translations contenues dans le groupe h s'expriment par la formule $x' = x + a$, où a est un nombre réel quelconque. Cette proposition résulte immédiatement de **5**.5, en tenant compte de la continuité du groupe et de celle de la coordonnée.

D'une façon semblable, il résulte de la proposition **5**.4 qu'avec la même coordonnée x, les transformations de la ligne OA_1 engendrées par les homothéties de centre O s'expriment par la formule $x' = cx$, où c désigne un nombre réel positif quelconque.

Nous énonçons le résultat obtenu dans le théorème suivant :

5.11. *Avec la coordonnée x, les transformations de la ligne OA_1 engendrées par les translations contenues dans le groupe h s'expriment par la formule $x' = x + a$ (a réel). Avec la même coordonnée, les transformations de la ligne OA_1 engendrées par les homothéties contenues dans le groupe g_0 s'expriment par la formule $x' = cx$* (c réel positif).

6. L'EXPRESSION ANALYTIQUE DES TRANSFORMATIONS DU GROUPE G. — Les raisonnements du paragraphe précédent ont montré que les points O et A_1, qui ont été choisi arbitrairement, déterminent une ligne OA_1.

Si O' et A'_1 sont deux points quelconques de la ligne OA_1, leur milieu $A'_{\frac{1}{2}}$ et le point $A'_2 = \sigma_{A'_1}(O')$ appartiennent aussi à la ligne OA_1 en conséquence des propositions 4.5 et 4.6. Il résulte de là que tous les points de la ligne $O'A'_1$, dont les coordonnées relatives aux points O', A'_1 sont des nombres dyadiques rationnels, appartiennent à la ligne OA_1; l'ensemble de ces points est partout dense sur la ligne $O'A'_1$, par suite tous les points de la ligne $O'A'_1$ appartiennent à la ligne OA_1. Comme les lignes OA_1 et $O'A'_1$ sont des lignes simples et ouvertes, elles sont donc identiques. D'où le résultat suivant :

6.1. *Une ligne est uniquement déterminée par deux quelconques de ses points.*

Il résulte de la proposition 4.4 par un raisonnement analogue à celui employé ci-dessus :

6.2. *Si la transformation T du groupe G transforme les points A et B en A' et B', elle transforme la ligne AB en la ligne $A'B'$.*

Nous introduisons dans le groupe Γ_0 des rotations ρ autour de O un *paramètre canonique* $\Theta(0 \leq \Theta < 2\pi)$ tel que le produit des rotations ρ_Θ et $\rho_{\Theta'}$ correspondant aux paramètres Θ et Θ' soit la rotation $\rho_{\Theta+\Theta'}$ qui correspond au paramètre $\Theta + \Theta'$ (lequel nous réduisons selon le module 2π). La valeur Θ est le *nombre de rotation* ([1]) appartenant à

([1]) Il s'agit ici d'un cas particulier de la notion de *nombre de rotation*, introduite par POINCARÉ dans ses recherches sur les courbes définies par une équation différentielle.

la rotation ρ_Θ. Θ reste invariant par transformation; cela veut dire que, pour un élément quelconque T du groupe G, les nombres de rotation correspondant à ρ_Θ et à $T^{-1}\rho_\Theta T$ sont égaux.

Soient OA et OB deux demi-lignes issues de O; chacune d'elles a un point commun et un seul avec un cercle quelconque k_0 de centre O; il y a donc une rotation ρ_Θ autour de O et une seule qui transforme la demi-ligne OA en OB. Nous appelons la valeur du paramètre Θ correspondant à cette rotation *angle* $\sphericalangle AOB$ formé par les demi-lignes OA et OB. De l'invariance du nombre de rotation par transformation découle le résultat suivant :

6.3. *Si une transformation de G transforme les points O, A, B en les points O', A', B', les angles $\sphericalangle AOB$ et $\sphericalangle A'O'B'$ sont égaux.*

Si $\sphericalangle AOB = \pm\frac{\pi}{2}$, nous disons que les lignes OA et OB sont *perpendiculaires*.

6.4. *Si la ligne c coupe les lignes a et b et forme avec elles des angles correspondants égaux, les lignes a et b n'ont pas de point commun.*

Soient A et B les points communs de c avec a et avec b; soit O un point quelconque de c différent de A et de B. L'homothétie μ de centre O qui transforme le point A en B, change, d'après **6.3**, la ligne a en b. Si P était un point commun de a et de b, les points P et $\mu(P)$ de la demi-ligne OP appartiendraient à la ligne b, en contradiction avec le théoréme **6.1**.

6.5. *Si la ligne c coupe les lignes a et b et forme avec elles des angles correspondants inégaux, les lignes a et b ont un point commun.*

Soient A et B les points communs de c avec a et avec b. Désignons par a' la ligne passant par A pour laquelle c forme avec a' et b des angles correspondants égaux. Soit O un point de c différent de A et de B; nous joignons O à un point P' de a qui est séparé de O par la ligne a'. Soit P le point commun de la ligne a' avec le segment OP' de la ligne OP'. Par une homothétie de centre O, nous transformons le point P en P'; au point A de la ligne OA correspond, par cette homothétie, un point A' de OA; l'image de la ligne a' est une ligne a'' telle que la ligne c forme avec a'' et b des angles correspondants égaux. Par une homothétie de centre A, nous transformons le point A' en B; en vertu de **6**.3, la ligne a'' sera changée en b et la ligne a en elle-même; par conséquent au point commun P' de a et a'' correspond un point commun des lignes a et b.

Nous appelons deux *lignes parallèles* si elles n'ont pas de point commun. Les propositions **6**.4 et **6**.5 montrent que, pour le système des lignes, *l'axiome d'Euclide sur les parallèles se trouve vérifié.*

Les transformations du groupe G transforment des lignes parallèlles en des lignes parallèles.

Les translations suivant la ligne OA transforment le faisceau des lignes parallèles à OA en lui-même, et, en vertu de **6**.3, aussi le faisceau des lignes perpendiculaires sur OA en lui-même.

Si une translation τ suivant la ligne OA transforme le point P en P', alors la ligne PP' est parallèle à OA. Autrement, soit O le point commun des lignes PP' et OA; désignons par Q et Q' les points communs de la ligne OA avec les perpendiculaires sur OA passant par les points P et P'. L'homothétie μ de centre O qui transforme P en P' change le point Q en Q'; la translation τ change aussi P en P' et Q en Q'. Les transformations μ et τ de G qui coïncident aux points P et Q devraient être identiques; mais cela est impossible, car μ admet un point invariant et τ n'en admet aucun. De la sorte, nous avons démontré que *les translations suivant la ligne OA transforment toute ligne parallèle à OA en elle-même.*

Nous introduisons dans le plan un système de *coordonnées rectangulaire* (x, y) de la manière suivante. Sur la ligne OA, nous définissons la coordonnée x par le procédé décrit dans le paragraphe précédent; soit O l'origine $x = 0$, et soit OA la demi-ligne pour laquelle $x > 0$. Désignons par OB et OB' les deux demi-lignes perpendiculaires sur OA issues de O, de telle façon qu'il soit : $\sphericalangle AOB = \sphericalangle B'OA = + \frac{\pi}{2}$. Si k_0 est un cercle quelconque de centre O, et si x désigne la coordonnée du point commun de k_0 avec la demi-ligne OA, nous attribuons aux points communs de k_0 avec les demi-lignes OB et OB' respectivement les valeurs x et $-x$ comme leurs coordonnées y.

Soit P un point du plan; nous menons par P les perpendiculaires sur OA et sur OB et nous désignons leurs points communs avec les lignes OA et OB par A_x et par B_y; soient x et y les coordonnées respectives de ces points. Nous associons au point P le couple des nombres réels (x, y) que nous appelons ses coordonnées.

Des résultats obtenus, on conclut immédiatement que, dans le système de coordonnées que nous venons de définir, les translations suivant la ligne OA s'expriment par les formules $x' = x + a$, $y' = y$ (*voir* 5.11); pareillement, les translations suivant la ligne OB s'expriment par les formules $x' = x$, $y' = y + b$. Nous entendons par ***translation du plan*** le produit d'une translation suivant la ligne OA et d'une translation suivant la ligne OB. Pour ces translations, la proposition suivante découle des résultats obtenus :

6.6. *Les translations du plan forment un groupe commutatif, simplement transitif dans le plan, et sont exprimées par les formules $x' = x + a$, $y' = y + b$, où a et b désignent des nombres réels quelconques.*

Les homothéties de centre O transforment les demi-lignes issues de O en elles-mêmes, et les cercles de centre O l'un en l'autre. Par conséquent, une homothétie de centre O engendre sur les lignes OA et OB les transformations $x' = cx$ et $y' = cy$ (*voir* 5.11), où la constante c a la même valeur dans les deux équations. Comme cette transformation transforme les faisceaux des lignes parallèles à OA et à OB en eux-mêmes, il s'ensuit que le point (x, y) est transformé par cette homothétie en le point (cx, cy). Par suite :

6.7. *Les homothéties de centre O s'expriment par les formules $x' = cx$, $y' = cy$, où c est un nombre réel positif quelconque.*

En conséquence de ce dernier résultat, toute ligne passant par l'origine O s'exprime par une équation linéaire de la forme $y = cx$. Toute ligne peut être transformée par une translation du plan en une ligne passant par l'origine; de là nous concluons que *toute ligne s'exprime par une équation linéaire.*

Les rotations autour de O transforment toute ligne en une ligne, par conséquent, les rotations autour de O s'expriment par des équations linéaires de la forme suivante : $x' = ax + by$, $y' = cx + dy$, où les coefficients a, b, c, d sont des nombres réels dépendant continûment de l'angle Θ de la rotation. Par la rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$ autour de O, le point de coordonnées $(1,0)$ est transformé en le point $(0,1)$ et celui-ci en le point $(-1,0)$; pour ce cas, les coefficients ont les valeurs suivantes : $a=d=0$, $-b=c=1$; d'où les formules $x'=-y$, $y'=x$. La rotation d'angle Θ, exprimée par les formules $x'=ax+by$, $y'=cx+dy$, transforme le point $(1,0)$ en le point (a,c) et le point $(0,1)$ en le point (b,d). La rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ change le point (a,c) en le point (b,d); on obtient de là les équations $b=-c$, $d=a$.

Nous introduisons la *coordonnée complexe* $z=x+iy$. Posons $r=+\sqrt{a^2+b^2}$, et $a=r\cos\varphi$, $b=-r\sin\varphi$; les formules de la rotation peuvent être alors mises sous la forme de l'équation complexe suivante :

$$z'=re^{i\varphi}z.$$

Si c'est une rotation de période n, l'expression de sa $n^{\text{ième}}$ puissance nous donne

$$z^{(n)}=r^n e^{in\varphi}z\equiv z;$$

de là résulte $n\varphi=2m\pi$, par conséquent $\varphi=\Theta$; ensuite $r^n=1$, d'où $r=1$. Les rotations périodiques contenues dans le groupe Γ_O forment un ensemble partout dense dans Γ_O; comme r varie continûment avec Θ, il en résulte que, pour toute rotation autour de O, on a $r=1$. C'est le *théorème de Pythagore* que nous venons de démontrer. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

6.8. *Les rotations du plan autour de l'origine O s'expriment par les formules*

$$x'=x\cos\Theta-y\sin\Theta,\qquad y'=x\sin\Theta+y\cos\Theta,$$

ou, avec la coordonnée complexe $z=x+iy$, par la formule

$$z'=e^{i\Theta}z.$$

Nous démontrons la proposition suivante :

6.9. *Toute transformation du groupe G est le produit d'une homothétie de centre O, d'une rotation autour de O et d'une translation.*

Soit T une transformation quelconque de G. Soit $A' = T(A)$ et $O' = T(O)$. Désignons par τ la translation du plan qui transforme O' en O, et soit $A_1 = \tau(A')$. Désignons par ρ la rotation autour de O qui transforme la demi-ligne OA_1 en OA, et soit $A_2 = \rho(A_1)$. Soit finalement μ l'homothétie de centre O qui transforme A_2 en A. Les transformations T et $(\tau\rho\mu)^{-1}$ du groupe G coïncident aux points O et A; elles sont donc identiques.

Les transformations μ^{-1}, ρ^{-1}, τ^{-1} s'expriment par les formules $z' = cz$, $z' = e^{i\varphi}z$ et $z' = z + b$ (*voir* **6**.6, **6**.7, **6**.8); en posant $ce^{i\varphi} = a$, nous obtenons l'expression suivante de T : $z' = az + b$.

Le groupe G, de même que le groupe des transformations $z' = az + b$, est doublement transitif dans le plan; par suite toute transformation $z' = az + b$ appartient au groupe G. Nous avons obtenu le résultat suivant, énoncé comme théorème II dans l'Introduction :

6.10. *Le groupe doublement transitif G est identique au groupe des transformations linéaires $z' = az + b$, où a et b désignent des nombres complexes quelconques* ($a \neq 0$).

7. Le groupe homographique de la sphère. — Soit G' un groupe continu *triplement transitif* de transformations topologiques de la surface d'une sphère en elle-même. Soit U un point de la sphère; les transformations de G', qui laissent le point U invariant, forment un sous-groupe G_U de G' qui est doublement transitif sur la sphère privée du point U.

Si O est un point différent de U, désignons par G_{OU} le sous-groupe de G' formé par les transformations qui laissent les points O et U invariants. Il y a dans G_{OU} une transformation involutive et une seule (*voir* § **4**); nous la désignons par σ_{OU} et nous l'appelons *demi-rotation autour du couple* O, U. Comme O et U ont été choisis arbitrairement, il résulte de là qu'à deux points quelconques A et B de la sphère correspond une demi-rotation σ_{AB} autour du couple A, B et une seule.

7.1. *Si la demi-rotation σ_{AB} échange entre eux les points C et D, la demi-rotation σ_{CD} échange entre eux les points A et B.*

Soit en effet ρ la transformation de G' qui change le triple de points (A, B, C) en (C, D, A). D'après un théorème de M. Brouwer [1], ρ admet au moins un point invariant P qui est nécessairement distinct de A et de C. La transformation ρ^2 admet trois points invariants : P, A et C, par conséquent $\rho^2 = 1$. La transformation involutive ρ échange entre eux les points A et C, et de même les points B et D. La transformée de la demi-rotation σ_{AB} par ρ, c'est-à-dire $\rho^{-1}\sigma_{AB}\rho$ est involutive, ses points invariants sont C et D, elle est donc la demi-rotation σ_{CD} :

$$\rho^{-1}\sigma_{AB}\rho = \sigma_{CD}.$$

L'expression à gauche montre que la demi-rotation σ_{CD} échange entre eux les points A et B.

7.2. *Toute transformation du groupe G' qui n'appartient pas au sous-groupe G_U est le produit d'une transformation T de G_U et d'une demi-rotation σ_{AB}.*

Soit S une transformation de G' n'appartenant pas à G_U. Désignons par C l'image du point U obtenue par S, et soient A et B deux points qui se correspondent par la demi-rotation σ_{CU}. Désignons par A' et B' les images de ces points obtenues par l'inverse de la transformation S. Si T est la transformation de G_U, qui change A' en A et B' en B, et σ_{AB} la demi-rotation autour du couple A, B, qui, d'après **7.1**, échange entre eux les points C et U, la transformation $T.\sigma_{AB}$ transforme le triple de points (A', B', U) en le triple (A, B, C) de même que la transformation S. Par suite $T.\sigma_{AB}$ est identique à S.

Nous transformons la surface de la sphère sur le plan par une projection stéréographique de centre U. Nous introduisons, dans le plan, une *coordonnée complexe* z telle que les transformations du groupe G_U s'expriment par la formule $z' = az + b$ (*voir* **6.10**).

7.3. *Toute demi-rotation contenue dans le groupe G' s'exprime par une transformation linéaire de la coordonnée complexe z.*

Désignons par A et A' les points d'affixes $z = \pm 1$, et par P et P' les points d'affixes $z = \pm \zeta$; soit O l'origine $z = 0$. La demi-rotation σ_{OU}

(1) *Voir* la note (1), p. 69.

(2) Concernant la démonstration suivante, *cf.* B. de Kerékjártó, *Sur les inversions dans un groupe commutatif* (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. **210**, 1940, p. 288).

échange entre eux les points A et A', et de même les points P et P'; il résulte de la proposition **7**.1 que les points O et U sont échangés entre eux et par la demi-rotation $\sigma_{AA'}$ et par la demi-rotation $\sigma_{PP'}$. La transformation $\sigma_{AA'}\sigma_{PP'} = \mu'$ admet les points invariants O et U; elle appartient donc au sous-groupe G_{OU}. D'après **6**.7 et **6**.8, on peut exprimer μ' par une équation de la forme $z' = \zeta' z$.

Désignons par μ la transformation $z' = \frac{z}{\zeta}$ de G_{OU} qui change les points P et P' en A et A'. La transformée de la demi-rotation $\sigma_{AA'}$ par μ^{-1} est la demi-rotation $\sigma_{PP'}$

$$\mu\sigma_{AA'}\mu^{-1} = \sigma_{PP'}.$$

Cette relation jointe à la relation $\sigma_{AA'}\sigma_{PP'} = \mu'$ donne

$$\sigma_{AA'}\cdot\mu\sigma_{AA'}\mu^{-1} = \mu'$$

que nous écrirons sous la forme

$$\sigma_{AA'}\mu\sigma_{AA'} = \mu'\mu.$$

Désignons par $\sigma_{AA'}(z)$ la coordonnée complexe du point en lequel le point d'affixe z est changé par la demi-rotation $\sigma_{AA'}$.

La transformation $\sigma_{AA'}\mu\sigma_{AA'}$ transforme le point z en le point $\sigma_{AA'}\left[\sigma_{AA'}(z)\cdot\frac{1}{\zeta}\right]\cdot$ En effet $\sigma_{AA'}$ change le point z en $\sigma_{AA'}(z)$, μ change ce dernier en $\sigma_{AA'}(z)\cdot\frac{1}{\zeta}$ et $\sigma_{AA'}$ le change en $\sigma_{AA'}\left[\sigma_{AA'}(z)\cdot\frac{1}{\zeta}\right]\cdot$ D'autre part, la transformation $\mu'\mu$ transforme le point z en $\frac{\zeta'}{\zeta}z$. Nous obtenons donc la relation

$$\sigma_{AA'}\left[\sigma_{AA'}(z)\cdot\frac{1}{\zeta}\right] = \frac{\zeta'}{\zeta}z$$

valable pour toutes valeurs complexes z et ζ. Pour déterminer ζ' en fonction de ζ, posons, dans cette équation, $z = 1$; on a $\sigma_{AA'}(1) = 1$, par suite

$$\sigma_{AA'}\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{\zeta'}{\zeta}\cdot$$

Posons dans l'équation ci-dessus $\zeta = \frac{1}{z}$, conséquemment

$$\frac{1}{\zeta} = z \qquad \text{et} \qquad \frac{\zeta'}{\zeta} = \sigma_{AA'}(z),$$

nous obtenons l'équation suivante :

$$\sigma_{AA'}[\sigma_{AA'}(z).z] = \sigma_{AA'}(z).z.$$

Cette équation signifie que, pour toute valeur de z, le point $\sigma_{AA'}(z).z$ est un point invariant de la transformation $\sigma_{AA'}$; il coïncide donc ou avec le point $+1$ ou avec -1, c'est-à-dire

$$\sigma_{AA'}(z) = \pm \frac{1}{z}.$$

Si $z = 1$, on a $\sigma_{AA'}(z) = + \frac{1}{z}$, et, comme $\sigma_{AA'}(z)$ est continu, on obtient de là, pour toute valeur complexe z, l'expression suivante

$$\sigma_{AA'}(z) = + \frac{1}{z}.$$

Nous avons donc démontré que *la demi-rotation $\sigma_{AA'}$ autour du couple de points $z = \pm 1$ s'exprime par la transformation linéaire $z' = \frac{1}{z}$.*

Soit B, C un autre couple quelconque de points (différents de U). Désignons par T la transformation du groupe G_U qui change les points A et A' en B et C. Il résulte de la relation $T^{-1}\sigma_{AA'}T = \sigma_{BC}$ et du fait que T et $\sigma_{AA'}$ sont des transformations linéaires de z, que la demi-rotation σ_{BC} s'exprime aussi par une transformation linéaire de z.

En conséquence des résultats 6.10, 7.2 et 7.3, toute transformation du groupe G' peut être exprimée par une transformation linéaire de la variable complexe z. Le groupe G' ainsi que le groupe des transformations linéaires $z' = \frac{az+b}{cz+d}$ sont triplement transitifs sur la sphère; il en résulte donc que toute transformation linéaire appartient au groupe G'. Nous avons ainsi démontré le théorème suivant (qui est le théorème III énoncé dans l'Introduction) :

7.4. *Le groupe G' triplement transitif est identique au groupe des transformations linéaires $z' = \frac{az+b}{cz+d}$, où a, b, c, d désignent des nombres complexes quelconques tels que $ad - bc \neq 0$.*