JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. VESSIOT

**Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre, $F(x, y, z, p, q, z, s, t) = 0$, intégrables par la méthode de Darboux; (suite)**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série*, tome 21 (1942), p. 1-66.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1942_9_21__1_0>

# JOURNAL

DE

# MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.


## *Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre,* $F(x, y, z, p, q, z, s, t) = 0$, *intégrables par la méthode de Darboux;*

(*Suite*).


PAR E. VESSIOT.


### INTRODUCTION ET RÉSUMÉ.

Ce travail fait suite au Mémoire qui a paru récemment, sous le même titre, dans ce Journal [1] et dans lequel j'ai déterminé les faisceaux de transformations infinitésimales associés aux équations

$$(1) \qquad F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,$$

dont chacun des deux systèmes de caractéristiques (supposés distincts), a deux invariants au moins du premier ou du second ordre. J'applique

[1] E. VESSIOT, *Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre,* $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$, *intégrables par la méthode de Darboux* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 9[e] série, t. 18, 1939, p. 1).

les résultats et les méthodes de ce Mémoire, ainsi que je l'avais annoncé, à la recherche de celles de ces équations qui s'intègrent explicitement.

Elles se répartissent en classes, toutes les équations d'une même classe se déduisant de l'une quelconque d'entre elles par les diverses transformations de contact de l'espace $(x, y, z)$. Je donne pour chacune de ces classes C un représentant type T, et, pour chacune de ces équations types T, ses invariants et son intégrale générale.

Conformément au fait fondamental que mes recherches ont mis en évidence, c'est la théorie des groupes continus finis qui domine la question. Chaque type T est fourni par l'une des structures des groupes à deux ou trois paramètres; mais certaines de ces structures donnent plusieurs types distincts.

Comme je l'avais démontré ([1]), pour qu'une équation (1), dont chaque système de caractéristiques a deux invariants au moins du premier ou du second ordre, ait une intégrale générale explicite, il faut et il suffit que chaque système ait un invariant au moins du premier ordre. Cela équivaut à dire qu'elle est réductible par une transformation de contact à la forme

$$s = f(x, y, z, p, q), \tag{2}$$

ou, en d'autres termes, que dans la classe C dont elle fait partie, figure une équation (2). J'ai donc pu choisir, pour les types T, des équations de cette forme.

On sait que Goursat a étudié autrefois ([2]) les équations (2) dont chaque système de caractéristiques a un invariant du second ordre et trouvé que ce sont celles qui se ramènent, par des transformations de la forme

$$x' = \xi(x), \quad y' = \eta(y), \quad z' = \zeta(x, y, z), \tag{3}$$

soit à des équations de Laplace (intégrables par la méthode de Laplace), soit à certaines formes canoniques G, déterminées par lui.

---

([1]) *Loc. cit.*, n^os **16**, **17**, **31**, **34**.

([2]) E. Goursat, *Recherches sur quelques équations aux dérivées partielles du second ordre* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2^e série, t. 1, 1899, p. 31-78 et 439-464).

Ces équations G de Goursat, ayant deux invariants du premier ou du second ordre pour chaque système de caractéristiques, et étant de la forme (2), doivent, d'après ce que je viens de dire, se retrouver dans les classes C; mais le principe de classification de Goursat, relatif aux transformations (3), étant moins extensif que le nôtre, relatif aux transformations de contact, certaines classes C peuvent, *a priori*, contenir plus d'une équation G. J'indique à quel type T peut effectivement se ramener chaque équation G, et je donne une transformation (ponctuelle ou de contact) qui opère cette réduction.

Les types T sont au nombre de douze; l'un d'eux dépend d'une constante arbitraire, et un autre de fonctions arbitraires d'un argument. Trois, dont celui-ci, sont des équations de Laplace.

Il y a onze équations G. Deux d'entre elles, qui dépendent d'une fonction arbitraire de deux arguments, se ramènent, par des transformations de contact à des types T ne dépendant d'aucun arbitraire, et dont l'un est une équation de Laplace. Les neuf autres sont irréductibles entre elles vis-à-vis des transformations (2) : trois sont d'emblée identiques à des types T; les transformations qui ramènent les six autres à des types T sont des transformations ponctuelles très simples.

Le fait que les équations G appartiennent à des classes C explique que Goursat ait pu les intégrer. Mais il n'y est arrivé, pour plusieurs, que par des artifices cachés et des calculs difficiles qui ne sont pas toujours donnés complètement.

Les intégrales générales que je donne pour les divers types T découlent d'une méthode unique, sûre et régulière ([1]), fondée sur l'emploi des équations finies des groupes paramétriques de la structure dont chaque classe provient. La forme en est entièrement explicite et garde, même dans les cas difficiles, un caractère d'élégance.

Voici, pour terminer cet aperçu, un tableau des types T, avec quelques indications sur leur origine ([2]).

---

([1]) Cette méthode d'intégration a été donnée dans la première partie du Mémoire, *loc. cit.*, n[os] **15** et **31**.

([2]) Ces résultats ont été publiés dans une communication à l'Académie des Sciences de Paris (*C. R. Acad. Sc.*, t. **205**, 1937, p. 779).

*a*. Trois invariants pour chaque système. — Un seul type,

$$s = 0. \tag{A}$$

*b*. Trois invariants pour un système, deux pour l'autre. — Les types qui correspondent à ce cas sont associés à des faisceaux de la forme

$$\frac{\partial f}{\partial u} + u_1 \frac{\partial f}{\partial u_0} + u_0 \varphi_\alpha(u) \mathrm{L}_\alpha, \quad \frac{\partial f}{\partial v} + v_0 \psi_\alpha(v) \mathrm{M}_\alpha, \quad \frac{\partial f}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial v_0} \qquad (\alpha = 1, 2),$$

où $\boxed{\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2}$, $\boxed{\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2}$ sont des transformations infinitésimales de base d'un couple de groupes paramétriques de l'une ou l'autre des deux structures de groupes à deux paramètres [1].

1° *Structure abélienne*. — Un type unique,

$$s = \frac{p}{x+y}, \tag{$\mathrm{B_I}$}$$

équation de Laplace dont les invariants $h$, et $k$ (au sens et avec les notations de Darboux) sont nuls.

Les équations VIII de Goursat [2] s'y ramènent par des transformations de contact.

2° *Structure non abélienne*. — Un type unique,

$$s = q\, e^z, \tag{$\mathrm{B_{II}}$}$$

équation de Moutard, qui ne diffère pas de l'équation X de Goursat, et à laquelle les équations VI de Goursat se ramènent par des transformations de contact.

---

(1) Voir la première partie du Mémoire, *loc. cit.*, n° **30**. Il s'agit ici de réduire le nombre des arbitraires, et de calculer des types d'équations associés aux faisceaux ainsi obtenus.

(2) Les équations G ont été numérotées par Goursat avec des chiffres romains, par lesquels nous les désignons ici. Ses équations VI et VIII sont celles qui dépendent d'une fonction arbitraire de deux arguments. Il y a donc, en fait, une infinité d'équations de la forme VI et de la forme VIII.

*c*. DEUX INVARIANTS POUR CHAQUE SYSTÈME. — **Les types qui correspondent à ce cas sont associés à des faisceaux de la forme**

$$\frac{\partial f}{\partial u} + u_0 \varphi_\alpha(u) L_\alpha, \quad \frac{\partial f}{\partial v} + v_0 \psi_\alpha(v) M_\alpha, \quad \frac{\partial f}{\partial u_0}, \quad \frac{\partial f}{\partial v_0} \qquad (\alpha = 1, 2, 3),$$

**où $\boxed{L_1, L_2, L_3}$, $\boxed{M_1, M_2, M_3}$ sont des transformations infinitésimales de base d'un couple de groupes paramétriques de l'une quelconque des cinq structures de groupes à trois paramètres (¹).**

1° *Structure simple du groupe projectif à une variable*. — Trois types,

$$(C_I^1) \qquad s + 2e^z = 0,$$

équation de Liouville. En posant $z' = z + \log 2$, $y' = -y$, on obtient l'équation IX de Goursat

$$(C_I^2) \qquad s = e^z \sqrt{p^2 - 1}.$$

Le changement de variable $x = e^{2x'}$, $z = z' - x'$ ramène à ce type l'équation VII de Goursat.

$$(C_I^3) \qquad s = \frac{\sqrt{p^2 - 1}\sqrt{q^2 - 1}}{\operatorname{sh} z}.$$

Le changement de variables $z = iz'$, $x = -x'$ ramène à ce type l'équation III de Goursat.

2° *Structure à dérivé de degré* 2, *dépendant d'une constante arbitraire* (²),

$$(W_1, W_2) = (m - 1) W_2, \qquad (W_3, W_1) = W_3, \qquad (W_2, W_3) = 0.$$

Trois types : d'abord le *type général*,

$$(C_{II}^1) \qquad s = \frac{1 - m}{z} \theta(p)\theta(q) \qquad (m \neq 0, 1),$$

(¹) Voir la première partie du Mémoire, *loc. cit.*, n° **23**. Ici encore, il s'agit de réduire autant que possible les arbitraires que comporte cette forme de faisceaux et de calculer des types pour les divers cas de réduction obtenus.

(²) Le mot « degré » désigne ici le nombre de paramètres du groupe en question, qui est, d'après les formules de structure écrites, $\boxed{W_2, W_3}$.

où la fonction $\theta(w)$ est définie par l'équation

$$w + (m-1)\theta = (w-\theta)^{1-m}.$$

Un changement de fonction, de la forme $z = hz'$, y ramène l'équation IV de Goursat. Chaque valeur de $m$ donne une classe différente : pour $m = 2$, on obtient l'équation II de Goursat en posant $x' = ix$, $y' = iy$, $z' = -z$.

On a ensuite *deux types spéciaux* : pour $m = 0$,

$$(C_{\text{II}}^2) \qquad \frac{s}{pq} = \frac{1}{z-x} + \frac{1}{z-y},$$

et, pour $m = 1$,

$$(C_{\text{II}}^3) \qquad s = \frac{1}{x+y}\theta(p)\theta(q),$$

où la fonction $\theta(w)$ est définie par

$$\log(1+\theta) = w + \theta.$$

L'équation $C_{\text{II}}^2$ est une équation de Moutard, et il suffit de poser

$$z' = \log(z-x) - \log(z-y)$$

pour la ramener à l'équation XI de Goursat.

D'autre part, l'équation V de Goursat se ramène à $C_{\text{II}}^3$ par le changement de fonction $z' = i\frac{\pi}{2}(x+y) - z$.

3° *Structure spéciale à dérivé de degré* 2,

$$(W_1, W_2) = W_3 - W_2, \qquad (W_3, W_1) = W_3, \qquad (W_2, W_3) = 0.$$

Type unique :

$$(C_{\text{III}}) \qquad s = \frac{1}{z}\theta(p)\theta(q),$$

la fonction $\theta(w)$ est ici définie par l'équation

$$\theta = (w+\theta)\log(w+\theta).$$

Ce type résulte de $C_{\text{II}}^1$ par un passage à la limite, qui fait passer de la structure précédente à celle-ci. Il suffit de faire tendre $m$ vers zéro.

L'équation $C_{III}$ se confond, du reste, avec un cas singulier de l'équation IV de Goursat, signalé par lui incidemment.

4° *Structure à dérivé de degré* 1,

$$(W_1, W_2) = 0, \qquad (W_1, W_3) = 0, \qquad (W_2, W_3) = W_1.$$

Type unique :

$$(C_{IV}) \qquad s + \frac{2}{x+y}\sqrt{pq} = 0.$$

C'est, au changement près du signe $+$ en signe $-$ (qui est sans importance), l'équation I de Goursat.

5° *Structure abélienne.* — Une infinité de classes, représentées par un type général dépendant de fonctions arbitraires,

$$(C_V) \qquad s + ap + bq + cz = 0,$$

avec

$$a = -\frac{\partial \log G}{\partial y}, \qquad b = -\frac{\partial \log E}{\partial x}, \qquad c = ab,$$

$E =$ déterminant $|\varphi_\alpha \psi_\alpha \psi'_\alpha|$, $\quad G =$ déterminant $|\psi_\alpha \varphi_\alpha \varphi'_\alpha|$, $\quad (\alpha = 1, 2, 3)$,

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ étant trois fonctions arbitraires de $x$ et $\psi_1, \psi_2, \psi_3$, trois fonctions arbitraires de $y$.

C'est le type des équations de Laplace dont les invariants $h_1$, $k_1$ (dans le sens et avec les notations de Darboux) sont nuls.

## VI. — Recherche des équations E, ayant deux invariants au moins, du premier ou du second ordre, pour chaque système de caractéristiques, qui sont intégrables explicitement. Types fournis par les groupes à deux paramètres.

**35.** Dans ce paragraphe et dans les suivants, nous allons former et intégrer les diverses équations, types T, auxquelles on peut ramener, par des transformations de contact, les équations E ayant deux invariants au moins du premier ou du second ordre pour chaque système de caractéristiques, qui sont intégrables explicitement.

Le plus simple de ces types T, qui convient au cas de trois invariants de chaque système, sera, d'après les nos **32**, **33**, **34**, l'équation

$$(A) \qquad s = 0.$$

Pour les deux autres hypothèses, trois invariants pour l'un des systèmes seulement, et deux invariants pour chaque système, nous avons donné, au n° **30** et au n° **23** respectivement, la forme générale des faisceaux $\Phi$ associés à de telles équations. Ce sera le point de départ de notre étude.

Nous avons vu, par ailleurs, aux nos **16**, **17**, **31**, **34**, que pour qu'une équation E satisfasse à la question, il faut et il suffit qu'elle ait deux invariants au moins du premier ou du second ordre pour chaque système et qu'il y ait, dans la classe à laquelle elle appartient, une équation de la forme

$$(E_0) \qquad s = f(x, y, z, p, q).$$

Il sera donc naturel de chercher, pour les types T, des équations de cette forme.

Ils feront, dès lors, partie des équations $E_0$ qui ont un invariant du second ordre de chaque système. On sait que Goursat a montré autrefois (1) que celles-ci peuvent se ramener, par des *transformations ponctuelles*, soit au type linéaire de Laplace, soit à un certain nombre d'équations types G, qu'il a données, et ce qui précède explique que Goursat ait réussi, de plus, à intégrer ses diverses équations G.

Le problème que nous traitons ainsi diffère cependant de celui de Goursat, car nous ne considérons deux types T comme distincts que s'ils représentent deux classes différentes, c'est-à-dire si l'on ne peut pas passer de l'un à l'autre par une *transformation de contact*. Mais nous aurons à examiner auquel de nos types T appartient chacune des équations G de Goursat. On verra que celles qui ne dépendent pas de fonctions arbitraires font partie de classes différentes, et qu'elles sont identiques ou se ramènent, par des transformations ponctuelles très simples, aux types T de ces classes.

(1) *Loc. cit.*, p. 2, note (2).

**36**. Nous nous occuperons d'abord du cas où l'un des sous-faisceaux singuliers a trois invariants et l'autre deux. Nous avons trouvé dans ce cas, pour les faisceaux associés $\mathcal{F}$ qui sont *intégrables* (n[os] **29, 30**), la forme canonique

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial f}{\partial u} + u_1 \frac{\partial f}{\partial u_0} + u_0 \varphi_\alpha(u) L_\alpha, & X_3 &= \frac{\partial f}{\partial u_1} \\ X_2 &= \frac{\partial f}{\partial v} + v_0 \psi_\alpha(v) M_\alpha, & X_4 &= \frac{\partial f}{\partial v_0} \end{aligned} \qquad (\alpha = 1, 2),$$

où l'on doit prendre, pour $L_1$, $L_2$ et $M_1$, $M_2$ des transformations de base d'un couple $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ de groupes paramétriques d'une quelconque des structures des groupes à deux paramètres.

On peut en faire disparaître tout signe de fonction arbitraire. En effet, le rapport $\varphi_2 : \varphi_1$ n'est pas une constante, car si l'on avait $\varphi_2 = c\varphi_1$, $X_1$ aurait un troisième invariant, distinct de $v$ et $v_0$, à savoir un invariant de $L_1 + cL_2$. On pourra donc prendre $u' = \varphi_2 : \varphi_1$ comme variable nouvelle à la place de $u$. Cela donnera, au lieu de $X_1$, une transformation de la forme

$$\frac{\partial f}{\partial u} + u_1 \varphi(u) \frac{\partial f}{\partial u_0} + u_0 \varphi_0(u)(L_1 + uL_2)$$

(en laissant tomber l'accent de $u'$). On pourra ensuite poser

$$u'_0 = u_0 \varphi_0(u), \qquad u'_1 = u_0 \varphi'_0(u) + u_1 \varphi(u) \varphi_0(u),$$

ce qui donnera, pour $\mathcal{F}_1$ (en laissant tomber les accents), la base

$$X_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + u_1 \frac{\partial f}{\partial u_0} + u_0(L_1 + uL_2), \qquad X_3 = \frac{\partial f}{\partial u_1}.$$

En opérant de même sur $\mathcal{F}_2$, on aura le type annoncé

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial f}{\partial u} + u_1 \frac{\partial f}{\partial u_0} + u_0(L_1 + uL_2), & X_3 &= \frac{\partial f}{\partial u_1}, \\ X_2 &= \frac{\partial f}{\partial v} + v_0(M_1 + vM_2), & X_4 &= \frac{\partial f}{\partial v_0}. \end{aligned} \right.$$

**36** *bis*. Les deux types de structure, pour les groupes à deux paramètres, sont représentés par les deux groupes

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial f}{\partial z_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial z_2}; \qquad z'_1 = z_1 + a_1, \qquad z'_2 = z_2 + a_2,$$

$$\text{(II)} \qquad \frac{\partial f}{\partial z}, \quad z\frac{\partial f}{\partial z}; \qquad z' = a_1 z + a_2,$$

dont les formules de structure [1] sont respectivement,

$$\text{(I } bis\text{)} \qquad c_1 = a_1 + b_1, \qquad c_2 = a_2 + b_2,$$

$$\text{(II } bis\text{)} \qquad c_1 = a_1 b_1 \qquad c_2 = a_1 b_2 + a_2.$$

On en tire, pour les groupes $\mathcal{L}$ et $\mathfrak{M}$,

$$(2) \quad \begin{cases} (\mathcal{L}_{\text{I}}) & L_1 = \dfrac{\partial f}{\partial w_1}, & L_2 = \dfrac{\partial f}{\partial w_2}; \\ (\mathfrak{M}_{\text{I}}) & M_1 = \dfrac{\partial f}{\partial w_1}, & M_2 = \dfrac{\partial f}{\partial w_2}, \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} (\mathcal{L}_{\text{II}}) & L_1 = w_1 \dfrac{\partial f}{\partial w_1} + w_2 \dfrac{\partial f}{\partial w_2}, & L_2 = \dfrac{\partial f}{\partial w_2}; \\ (\mathfrak{M}_{\text{II}}) & M_1 = w_1 \dfrac{df}{\partial w_1}, & M_2 = w_1 \dfrac{\partial f}{\partial w_2}. \end{cases}$$

Pour trouver une équation E associée à (1), nous avons à considérer le dérivé de (1) qui est [2]

$$(4) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial u} + u_0(L_1 + uL_2), & \dfrac{\partial f}{\partial u_0}; & \dfrac{\partial f}{\partial u_1}, \\ \dfrac{\partial f}{\partial v}, & M_1 + vM_2; & \dfrac{\partial f}{\partial v_0}; \end{cases}$$

et à en chercher une intégrale complète. Pour avoir une équation de la forme $s = \sigma(x, y, z, p, q)$, nous devons prendre comme variables indépendantes un invariant du premier ordre de chaque sous-faisceau singulier. Il est naturel de prendre ici $x = u$, $y = v$. Nous cherchons

---

[1] Équations (45) du n° **31**.

[2] Nous séparons par un « point et virgule » les transformations distinguées

$$\frac{\partial f}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial v_0}.$$

donc une intégrale complète qui comprenne ces deux fonctions, elle sera fournie par le sous-faisceau de (4) qui les admet pour invariants, c'est-à-dire

$$\mathrm{M}_1 + v\mathrm{M}_2, \quad \frac{\partial f}{\partial u_0}; \quad \frac{\partial f}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial v_0}. \tag{5}$$

Ce serait, dans les deux cas,

$$x = u, \qquad y = v, \qquad z = vw_1 - w_2, \tag{6}$$

et, $\dfrac{\partial f}{\partial u_1} = \mathrm{X}_3$, $\dfrac{\partial f}{\partial v_0} = \mathrm{X}_4$ étant transformations principales, on aura

$$p = \mathrm{X}_1 z, \qquad p = \mathrm{X}_2 z, \qquad \sigma = \mathrm{X}_1 q = \mathrm{X}_2 p. \tag{7}$$

Cela donne, dans le premier cas,

$$p = u_0(v - u), \qquad q = w_1, \qquad \sigma = u_0, \tag{8}$$

c'est-à-dire l'équation (du type de Laplace)

$$p = s(y - x) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{y - x}\right) = 0; \tag{9}$$

et, dans le deuxième cas,

$$p = u_0(vw_1 - w_2 - u), \qquad q = w_1, \qquad \sigma = u_0 w_1, \tag{10}$$

c'est-à-dire l'équation

$$pq = s(z - x) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{z - x}\right) = 0. \tag{11}$$

**37**. Appliquons la méthode d'intégration du n° **31**. Nous avons, dans le premier cas, à intégrer les deux faisceaux $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$,

$$\frac{\partial f}{\partial u} + u_0 \frac{\partial f}{\partial w_1} + u_1 \frac{\partial f}{\partial u_0} + u u_0 \frac{\partial f}{\partial w_2}, \quad \frac{\partial f}{\partial u_1}, \tag{12}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} + v_0 \frac{\partial f}{\partial w_1} + v v_0 \frac{\partial f}{\partial w_2}, \quad \frac{\partial f}{\partial v_0}; \tag{13}$$

qu'on réduit à la forme canonique en y réduisant d'abord leurs dérivés

$$\frac{\partial f}{\partial u}, \quad \frac{\partial f}{\partial w_1} + u \frac{\partial f}{\partial w_2}; \quad \frac{\partial f}{\partial u_0}, \quad \frac{\partial f}{\partial u_1}, \tag{$\mathcal{F}''_1$}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}, \quad \frac{\partial f}{\partial w_1} + v \frac{\partial f}{\partial w_2}; \quad \frac{\partial f}{\partial v_0}. \tag{$\mathcal{F}'_2$}$$

On peut garder $u$ et $v$, respectivement, comme variables indépendantes, en leur associant un invariant de $\frac{\partial f}{\partial w_1}+u\frac{\partial f}{\partial w_2}$ et $\frac{\partial f}{\partial w_1}+v\frac{\partial f}{\partial w_2}$, (respectivement), soient $a=uw_1-w_2$ et $b=vw_1-w_2$.

Il vient ainsi

$$(12\ bis)\qquad \frac{\partial f}{\partial u}+w_1\frac{\partial f}{\partial a}+u_0\frac{\partial f}{\partial w_1}+u_1\frac{\partial f}{\partial u_0},\quad \frac{\partial f}{\partial u_1},$$

dont l'intégrale générale est, $\xi(u)$ étant une fonction arbitraire,

$$(14)\qquad a=\xi(u),\qquad w_1=\xi',\qquad u_0=\xi'',\qquad u_1=\xi''',\qquad w_2=u\xi'-\xi;$$

et

$$(13\ bis)\qquad \frac{\partial f}{\partial v}+w_1\frac{\partial f}{\partial b}+v_0\frac{\partial f}{\partial w_1},\quad \frac{\partial f}{\partial v_0},$$

dont l'intégrale générale est, $\eta(v)$ étant une fonction arbitraire,

$$(15)\qquad b=\eta(v),\qquad w_1=\eta',\qquad v_0=\eta'',\qquad w_2=v\eta'-\eta.$$

L'intégrale générale de $\mathcal{F}$ est alors, d'après la formule (47) du n° **31**, où les $\Omega_i$ sont les seconds membres de 1 *bis*,

$$(16)\qquad w_1=\xi'(u)+\eta'(v),\qquad w_2=u\xi'(u)+v\eta'(v)-\xi(u)-\eta(v);$$

et l'on a, par suite, d'après (6), pour l'intégrale générale de (9),

$$(17)\qquad z=(y-x)\xi'(x)+\xi(x)+\eta(y).$$

**37** *bis*. Opérons de même dans le deuxième cas. Nous aurons à intégrer les deux faisceaux $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$,

$$(18)\qquad \frac{\partial f}{\partial u}+u_1\frac{\partial f}{\partial u_0}+u_0\left[w_1\frac{\partial f}{\partial w_1}+(w_2+u)\frac{\partial f}{\partial w_2}\right],\quad \frac{\partial f}{\partial u_1},$$

$$(19)\qquad \frac{\partial f}{\partial v}+v_0\left[w_1\frac{\partial f}{\partial w_1}+vw_1\frac{\partial f}{\partial w_2}\right],\quad \frac{\partial f}{\partial v_0};$$

et considérerons, à cet effet, encore leurs dérivés

$$(\mathcal{F}''_1)\qquad \frac{\partial f}{\partial u},\quad w_1\frac{\partial f}{\partial w_1}+(w_2+u)\frac{\partial f}{\partial w_2};\quad \frac{\partial f}{\partial u_0},\quad \frac{\partial f}{\partial u_1},$$

$$(\mathcal{F}'_2)\qquad \frac{\partial f}{\partial v},\quad \frac{\partial f}{\partial w_1}+v\frac{\partial f}{\partial w_2};\quad \frac{\partial f}{\partial v_0}.$$

En raisonnant comme ci-dessus, nous serons conduit à introduire, respectivement, les variables auxiliaires $a = \frac{w_2 + u}{w_1}$ et $b = vw_1 - w_2$. On obtient ainsi, à la place de (18),

$$(18\,bis)\qquad \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{w_1}\frac{\partial f}{\partial a} + u_0 w_1 \frac{\partial f}{\partial w_1} + u_1 \frac{\partial f}{\partial u_0},\quad \frac{\partial f}{\partial u_1},$$

dont la réduction s'achèverait en posant

$$w'_1 = \frac{1}{w_1},\qquad u'_0 = -u_0 w'_1,\qquad u'_1 = (u_0^2 - u_1)w'_1,$$

ce qui donne, pour intégrale,

$$(20)\qquad a = \xi(u),\qquad \frac{1}{w_1} = \xi',\qquad w_2 = \frac{\xi}{\xi'} - u.$$

On a, de même, pour (19),

$$(19\,bis)\qquad \frac{\partial f}{\partial v} + w_1 \frac{\partial f}{\partial b} + v_0 w_1 \frac{\partial f}{\partial w_1},\quad \frac{\partial f}{\partial v_0},$$

dont la réduction s'achèverait en prenant $v'_0 = v_0 w_1$, d'où l'intégrale

$$(21)\qquad b = \eta(v),\qquad w_1 = \eta',\qquad w_2 = v\eta' - \eta.$$

L'intégrale générale de (11) est ainsi, comme conséquence de celle de $\mathcal{F}$,

$$(22)\qquad w_1 = \frac{\eta'}{\xi'},\qquad w_2 = \frac{v\eta' - \eta}{\xi'} + \frac{\xi}{\xi'} - u,$$

la suivante

$$(23)\qquad z = \frac{\eta(y) - \xi(x)}{\xi'(x)} + x.$$

**38.** Nous modifierons légèrement les types (9) et (11) trouvés. Pour le premier, en changeant $x$ en $-x$, nous aurons le type [1],

$$(B_1)\qquad s = \frac{p}{x+y}.$$

---

(1) On vérifie facilement que les invariants $k$ et $h_1$ de Darboux, pour cette équation de Laplace, sont nuls. La forme (17) de l'intégrale générale est d'accord avec la théorie de Darboux pour les équations de Laplace.

Pour le second, en posant

$$(24) \qquad z - x = e^{z'},$$

on le ramène d'abord à

$$s' e^{z'} = q';$$

et en changeant $z'$ en $-z'$, on aura le type

$$(\mathrm{B_{II}}) \qquad s = q e^{z},$$

qui appartient à la catégorie des *équations de Moutard*.

Ce dernier type est (au changement près de $x$ en $y$ et $y$ en $x$) le type X de Goursat. Goursat a donné deux autres types, pour le cas que nous considérons ici (trois invariants pour un des systèmes de caractéristiques et deux invariants pour l'autre), à savoir les types

$$(\mathrm{VI}) \qquad p - z\frac{s}{q} + \mathrm{F}\left(x, \frac{s}{q}\right) = 0,$$

et

$$(\mathrm{VIII}) \qquad p - sy + \mathrm{F}(x, s) = 0,$$

la fonction F étant, dans les deux cas, une fonction arbitraire de ses deux arguments. Mais, quelle que soit cette fonction, ces équations appartiennent, la première à la classe de $\mathrm{B_{II}}$ et la seconde à la classe de $\mathrm{B_I}$. Nous le montrerons en réduisant aux formes canoniques que nous avons trouvées [équations (18), (19) et équations (12), (13) respectivement], les faisceaux associés à ces deux types.

**39.** Les sous-faisceaux singuliers du faisceau $\mathcal{F}$ associé à une équation

$$(25) \qquad s = \sigma(x, y, z, p, q),$$

c'est-à-dire du faisceau

$$(26) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{X}f &= \frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} + r\frac{\partial f}{\partial p} + \sigma\frac{\partial f}{\partial q}, \\ \mathrm{Y}f &= \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} + \sigma\frac{\partial f}{\partial p} + t\frac{\partial f}{\partial q}, \quad \frac{\partial f}{\partial r}, \quad \frac{\partial f}{\partial t}, \end{aligned} \right.$$

sont

$$(27)\qquad (\mathcal{F}_1)\quad X_1 = Xf + Y\sigma\frac{\partial f}{\partial t}, \qquad X_3 = \frac{\partial f}{\partial r},$$

$$(28)\qquad (\mathcal{F}_2)\quad X_2 = Yf + X\sigma\frac{\partial f}{\partial r}, \qquad X_4 = \frac{\partial f}{\partial t}.$$

On vérifie, en effet, immédiatement, que ces faisceaux (27), (28) satisfont aux relations de structure $(X_{2i-1}, X_{2j}) = 0$ $(i, j = 1, 2)$.

Si l'on applique les opérations $Xf$ et $Yf$ aux deux membres de l'équation VIII, on trouve

$$(29)\qquad r + F'_x(x, s) - [y - F'_s(x, s)]Xs = 0, \qquad Ys = 0.$$

Ceci prouve que $\mathcal{F}_2$ admet les invariants $u$, $u_0$, $u_1$ (dont les deux premiers sont de premier ordre) donnés par les formules [1]

$$(30)\qquad u = x, \qquad p - yu_0 + F(x, u_0) = 0, \qquad u_1 = Xu_0.$$

D'autre part, $Y\sigma$ étant nul, $\mathcal{F}_1$ admet les invariants

$$(31)\qquad v = y, \qquad v_0 = t.$$

Si nous prenons ces invariants comme variables, nous obtenons, pour base de $\mathcal{F}$,

$$X_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + u_1\frac{\partial f}{\partial u_0} + [vu_0 - F(u, u_0)]\frac{\partial f}{\partial z} + u_0\frac{\partial f}{\partial q}, \qquad X_3 = \frac{\partial f}{\partial u_1},$$
$$X_2 = \frac{\partial f}{\partial v} + q\frac{\partial f}{\partial z} + v_0\frac{\partial f}{\partial q}, \qquad X_4 = \frac{\partial f}{\partial v_0}.$$

Pour ramener $X_2$ à sa forme canonique, il faut prendre pour variable, à la place de $z$, un invariant de $\frac{\partial f}{\partial v} + q\frac{\partial f}{\partial z}$, soit

$$(32)\qquad w_2 = vq - z,$$

---

(1) D'après le n° **4**, on déduit des invariants du premier ordre $u$ et $u_0$ l'invariant du second ordre $u_1 = X_1 u_0 : X_1 u = Xu_0$. On a, d'après (29), pour l'expression de $u_1$,

$$u_1 = [r + F'_x(x, u_0)] : [y - F'_{u_0}(x, u_0)],$$

formule où $u_0$ devra être remplacé par la fonction de $x$, $y$, $p$ tirée de (30).

et, si nous posons encore

$$w_1 = q, \tag{33}$$

nous aurons la forme

$$X_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + u_1 \frac{\partial f}{\partial u_0} + u_0 \frac{\partial f}{\partial w_1} + F(u, u_0) \frac{\partial f}{\partial w_2}, \qquad X_3 = \frac{\partial f}{\partial u_1}, \tag{34}$$

$$X_2 = \frac{\partial f}{\partial v} + v_0 \left( \frac{\partial f}{\partial w_1} + v \frac{\partial f}{\partial w_2} \right), \qquad X_4 = \frac{\partial f}{\partial v_0}, \tag{35}$$

qui est du type obtenu au n° **29**. Elle met en évidence la structure I pour les groupes $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$, et ceci suffit à prouver que l'équation VIII de Goursat appartient à notre classe $B_I$.

Nous allons cependant poursuivre la réduction de $\mathcal{F}$, suivant la méthode du n° **30**, de manière à arriver à une transformation de contact faisant passer de (VIII) à ($B_I$).

Nous devons chercher pour cela un *invariant spécial*, du premier ordre, de $\mathcal{F}_2$. Les dérivés $\mathcal{F}'_1$ et $\mathcal{F}''_1$ de $\mathcal{F}_1$ sont

$$(\mathcal{F}'_1) \qquad \mathcal{X}_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + u_0 \frac{\partial f}{\partial w_1} + F \frac{\partial f}{\partial w_2}, \qquad \mathcal{X}_2 = \frac{\partial f}{\partial u_0}; \qquad \frac{\partial f}{\partial u_1},$$

$$(\mathcal{F}''_1) \qquad \mathcal{X}_1, \quad \mathcal{X}_2, \quad \mathcal{X}_3 = \frac{\partial f}{\partial w_1} + F'_{u_0} \frac{\partial f}{\partial w_2}; \qquad \frac{\partial f}{\partial u_1}.$$

Nous avons à considérer la transformation principale de $\mathcal{F}'_1$,

$$\Omega f = \omega_1 \mathcal{X}_1 + \omega_2 \mathcal{X}_2,$$

qui est définie par la condition $(\Omega, \mathcal{X}_3) \equiv 0 \pmod{\mathcal{F}''_1}$. Or, celle-ci s'écrit $\Omega F'_{u_0} = 0$, ce qui prouve que

$$u' = F'_{u_0}(u, u_0) \tag{36}$$

pourra être pris pour l'invariant spécial cherché. La transformation (34) sera alors divisée par $X_1 u' = F''_{uu_0} + u_1 F''_{u_0^2}$, et donnera ainsi, en remplaçant $u_1$ par

$$u'_1 = \frac{u_1}{F''_{uu_0} + u_1 F''_{u_0^2}}, \tag{37}$$

la transformation de la base nouvelle

$$(38)\qquad \frac{\partial f}{\partial u'}+\frac{1}{F''_{uu_0}}\left(u_0\frac{\partial f}{\partial w_1}+F\frac{\partial f}{\partial w_0}\right) + u'_1\left(\frac{\partial f}{\partial u_0}-a_1(u',u_0)\frac{\partial f}{\partial w_1}-a_2(u',u_0)\frac{\partial f}{\partial w_2}\right),$$

où l'on a, sous le bénéfice de (36),

$$(39)\qquad a_1(u',u_0)=\frac{u_0F''_{u_0^2}}{F''_{uu_0}},\qquad a_2(u',u_0)=\frac{FF''_{u_0^2}}{F''_{uu_0}}.$$

On devra ensuite remplacer $w_1$ et $w_2$ par deux invariants de la transformation infinitésimale qui figure dans (38) en facteur de $u'_1$, à savoir, par exemple ($c$ étant une constante arbitrairement choisie),

$$(40)\qquad w'_1=w_1+\int_c^{u_0}a_1\,du_0,\qquad w'_2=w_2+\int_c^{u_0}a_2\,du_0.$$

La base de $F_1$ prend ainsi la forme

$$(41)\qquad X_1=\frac{\partial f}{\partial u'}+u'_1\frac{\partial f}{\partial u_0}+\varphi_1(u',u_0)\frac{\partial f}{\partial w'_1}+\varphi_2(u',u_0)\frac{\partial f}{\partial w'_2},\qquad X_2=\frac{\partial f}{\partial u'_1},$$

les fonctions $\varphi_1$, $\varphi_2$ étant, sous le bénéfice de (36),

$$(42)\qquad \varphi_1(u',u_0)=\frac{u_0}{F''_{uu_0}}+\int_c^{u_0}\frac{\partial a_1}{\partial u'}du_0,\qquad \varphi_2(u',u_0)=\frac{F}{F''_{uu_0}}+\int_c^{u_0}\frac{\partial a_2}{\partial u'}du_0,$$

et l'on conclut de ces formules, par un calcul facile,

$$(43)\qquad \frac{\partial\varphi_1}{\partial u_0}=\frac{1}{F''_{uu_0}},\qquad \frac{\partial\varphi_2}{\partial u_0}=\frac{u'}{F''_{uu_0}}.$$

Nous supposerons ici, pour simplifier les formules, que $F(u, u_0)$ s'annule pour $u=u_0$, ce que l'on obtiendra en faisant, dans VIII, le changement de variable préliminaire $\bar{z}=z+\int F(x,0)\,dx$.

On conclut alors, de (43) et (42) [1],

$$(44)\qquad \varphi_1=\int_c^{u_0}\frac{du_0}{(F''_{uu_0})},\qquad \varphi_2=u'\varphi_1.$$

---

[1] Les parenthèses de $(F''_{uu_0})$ indiquent que $u$ est remplacé dans $F''_{uu_0}$ par la fonction de $u'$ et $u_0$ définie par (36).

Le calcul se termine dès lors en posant $u'_0 = \varphi_1(u', u_0)$, c'est-à-dire

$$(45) \qquad u'_0 = \int_c^{u_0} \frac{du_0}{(F''_{uu_0})}, \qquad u''_1 = \frac{u_1}{F''_{uu_0}} - \int_c^{u_0} \left( \frac{F'''_{u^2 u_0}}{(F''_{uu_0})^3} \right) du_0,$$

ce qui donne, pour $\mathcal{F}$, la base

$$(46) \qquad X_1 = \frac{\partial f}{\partial u'} + u''_1 \frac{\partial f}{\partial u'_0} + u'_0 \left( \frac{\partial f}{\partial w'_1} + u' \frac{\partial f}{\partial w'_2} \right), \qquad X_3 = \frac{\partial f}{\partial u''_1},$$

$$(47) \qquad X_2 = \frac{\partial f}{\partial v} + v_0 \left( \frac{\partial f}{\partial w'_1} + v \frac{\partial f}{\partial w'_2} \right), \qquad X_4 = \frac{\partial f}{\partial v_0}.$$

Le faisceau associé à l'équation VIII a été ainsi transformé dans le faisceau associé à l'équation

$$(48) \qquad p' = s'(y - x');$$

et l'on a, d'après (6) et (8), les formules

$$(49) \qquad x' = u', \qquad y = v, \qquad z' = v w'_1 - w'_2, \qquad p' = u'_3(v - u'), \qquad q' = w'_1,$$

qui, rapprochées des formules (30), (31), (32), (33), (36), (39), (40) et (45) définissent une transformation de contact faisant passer de l'une des équations à l'autre.

**40.** On donne au résultat une forme un peu plus simple en prenant, dans les intégrations des formules (40) et (45), au lieu de la variable $u_0$, la variable $u$ qui lui est liée par l'équation (36), et en désignant par $\omega(x, x')$ la fonction définie par

$$(50) \qquad x' = F'_\omega(x, \omega).$$

La transformation de contact obtenue est ainsi définie par le système d'équations suivant :

$$(51) \qquad \begin{cases} p - \omega y + F(x, \omega) = 0, & z' = z - \int [\omega y - F(x, \omega)]\, dx, \\ p' = (x' - y) \int \dfrac{dx}{F''_{\omega^2}(x, \omega)}, & q' = q - \int \omega\, dx, \end{cases}$$

étant entendu que $x'$ joue le rôle de paramètre constant dans les intégrations effectuées par rapport à $x$. Vérifions que ces formules satisfont bien à la question : nous verrons que cela est vrai en laisant aux intégrales le caractère d'intégrales indéfinies, et sans avoir besoin de faire sur $F(x, s)$ l'hypothèse $F(x, 0) = 0$.

Différentions, en effet, totalement la seconde des équations (51), en tenant compte des autres. Il vient, eu égard à (50),

$$\begin{aligned} dz' &= dz - p\,dx - dx' \int (y - F'_\omega) \frac{\partial \omega}{\partial x'} dx - dy \int \omega\,dx \\ &= dz - p\,dx + (q' - q)\,dy - (y - x')\,dx' \int \frac{\partial \omega}{\partial x'} dx \\ &= dz - p\,dx + (q' - q)\,dy + (x' - y)\,dx' \int \frac{dx}{F''_{\omega^2}}. \end{aligned}$$

D'où

$$dz' - p'\,dx' - q'\,dy = dz - p\,dx - q\,dy.$$

On a donc bien affaire à une transformation de contact.

Considérant, d'autre part, $x'$ et $y$ comme variables indépendantes et dérivant la première et la troisième des équations (51) par rapport à $y$, nous avons

$$\begin{aligned} s &= \omega + (y - F'_\omega) \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} - F'_x \frac{\partial x}{\partial y} - r \frac{\partial x}{\partial y}, \\ s' &= -\int \frac{dx}{F''_{\omega^2}} + (x' - y) \frac{1}{F''_{\omega^2}} \frac{\partial x}{\partial y}. \end{aligned}$$

D'où, comme conséquence des formules de transformation; l'identité

$$s - \omega(x, x') = M\left(s' - \frac{p'}{y - x'}\right), \qquad M = \frac{(y - x')\dfrac{\partial \omega}{\partial x} - F'_\omega}{(x' - y)} F''_{\omega^2},$$

où M est une fonction de $r$, $x$, $x'$ et $y$. L'équation (51) devient donc, par la transformation de contact considérée, le résultat de l'élimination de $x'$ entre $s = \omega(x, x')$ et la première des équations (51), qui définit $x'$, c'est-à-dire précisément l'équation VIII,

$$p - sy + F(x, s) = 0.$$

**41.** Occupons-nous maintenant de l'équation VI de Goursat. Calcul et raisonnements étant analogues à ceux que nous venons de développer pour l'équation VIII, nous les abrégerons. Les invariants de $\mathcal{F}_2$ sont ici, $u$, $u_0$, $u_1$, définis par

$$(52) \qquad u = x, \qquad p - zu_0 + F(x, u_0) = 0, \qquad u_1 = X u_0;$$

et ceux de $\mathcal{F}_1$ sont

$$v = y, \qquad v_0 = \frac{t}{q}. \tag{53}$$

En posant

$$w_1 = q, \qquad w_2 = vq - z, \tag{54}$$

nous avons, pour le faisceau $\mathcal{F}$ associé à l'équation, la base

$$\left\{\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial f}{\partial u} + u_1 \frac{\partial f}{\partial u_0} + u_0\left(w_1 \frac{\partial f}{\partial w_1} + w_2 \frac{\partial f}{\partial w_2}\right) + F(u, u_0)\frac{\partial f}{\partial w_2}, &\qquad X_3 &= \frac{\partial f}{\partial u_1}, \\ X_2 &= \frac{\partial f}{\partial v} + v_0\left(w_1 \frac{\partial f}{\partial w_1} + v w_1 \frac{\partial f}{\partial w_2}\right), & X_4 &= \frac{\partial f}{\partial v_0}; \end{aligned}\right. \tag{55}$$

ce qui met en évidence les groupes $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$ relatifs à l'équation (11), et prouve, par là même, que VI est réductible à (11), et par conséquent à $B_{II}$, c'est-à-dire encore à l'équation X de Goursat, par des transformations de contact appropriées.

En raisonnant comme aux nos **30** et **40**, on est conduit à la transformation définie comme il suit. Soit $\omega(x, x')$ l'intégrale générale de l'équation

$$F''_{\omega^2}\frac{\partial \omega}{\partial x} + F''_{x\omega} - \omega F'_{\omega} + F = 0, \tag{56}$$

$x'$ étant la constante d'intégration; et $a(x, x')$, $b(x, x')$ deux autres fonctions définies par les équations

$$\frac{\partial a}{\partial x} + \omega a = 0, \qquad \frac{\partial b}{\partial x} = F a. \tag{57}$$

Nous considérerons la transformation $\mathcal{T}$ définie par les équations

$$p - z\omega + F(x, \omega) = 0, \qquad z' = az + b, \tag{58}$$

$$p' = (z' - x')\frac{\partial \log a}{\partial x'}, \qquad q' = aq. \tag{59}$$

En différentiant totalement la seconde des équations (58), et tenant compte des autres, on trouve

$$dz' - p'\,dx' = a(dz - p\,dx) + \left[\frac{\partial b}{\partial x'} - \frac{b - x'}{a}\frac{\partial a}{\partial x'}\right]dx'.$$

La transformation $\mathfrak{G}$ sera donc une transformation de contact si la fonction de $x$ et $x'$,

$$G(x, x') = (b - x')\frac{\partial \log a}{\partial x'} - \frac{\partial b}{\partial x'} \tag{60}$$

est identiquement nulle. Or, on a, en tenant compte de (57),

$$G'_x = -\frac{\partial \omega}{\partial x'}(b - x' + aF'_\omega). \tag{61}$$

$G'_x$ sera donc nulle si

$$H(x, x') = b - x' + aF'_\omega \tag{62}$$

est elle-même nulle. Or on a, d'après (57),

$$H'_x = a\left(F''_{\omega^2}\frac{\partial \omega}{\partial x} + F''_{x\omega} - \omega F'_\omega + F\right), \tag{63}$$

ce qui s'annule identiquement d'après (56).

La transformation $\mathfrak{G}$ sera donc de contact si $H(x, x')$ et $G(x, x')$ sont nulles pour une valeur particulière quelconque $x_0$ de $x$. Si nous désignons par $a_0(x')$, $b_0(x')$ les valeurs (laissées arbitraires jusqu'ici), auxquelles $a$ et $b$ se réduisent pour $x = x_0$, et par $f(x')$ la valeur à laquelle se réduit $F'_\omega(x, \omega)$ pour $x = x_0$ [valeur qui est connue dès que la fonction $\omega(x, x')$ est choisie], nous aurons à satisfaire aux deux conditions

$$b_0 - x' + a_0 f = 0, \qquad (b_0 - x')\frac{a'_0}{a_0} - b'_0 = 0, \tag{64}$$

qui se réduisent à

$$1 + a_0 f'' = 0, \qquad b_0 - x' + a_0 f = 0, \tag{65}$$

et se résolvent sans difficulté.

**42.** Vérifions que la transformation de contact $\mathfrak{G}$, ainsi définie, change l'équation VI en (11). Considérons, à cet effet, $x'$ et $y$ comme des variables indépendantes, et dérivons, par rapport à $y$, la première des équations (58) et la première des équations (59). Il viendra, compte tenu de (59),

$$s - q\omega + \left[ r - p\omega - z' \frac{\partial \omega}{\partial x} + F'_x + F'_\omega \frac{\partial \omega}{\partial x} \right] \frac{\partial x}{\partial y} = 0,$$

$$s' - \frac{p'q'}{z' - x'} + (x' - z') \frac{\partial^2 \log a}{\partial x' \, \partial x} \frac{\partial x}{\partial y} = 0;$$

d'où, par l'élimination de $\frac{\partial x}{\partial y}$, une identité de la forme

$$s' - \frac{p'q'}{z' - x'} = M(s - q\omega),$$

où M est une fonction de $r, p, z, x, z', x'$. Ce qui fournit la vérification cherchée, puisque l'élimination de $\omega$ entre (58) et $s - q\omega = 0$ donne l'équation VI.

## VII. — Types intégrables fournis par les groupes à trois paramètres. 1° Structure simple du groupe projectif à une variable.

**43**. Passons à la recherche des types d'équations E, intégrables explicitement pour lesquelles chacun des systèmes de caractéristiques a deux invariants. D'après le n° **23**, nous aurons à trouver les équations E associées à des faisceaux $\mathcal{F}$ de la forme

$$(1) \quad (\mathcal{F}_1) \quad X_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + u_0 \varphi_\alpha(u) L_\alpha, \qquad X_3 = \frac{\partial f}{\partial u_0} \qquad (\alpha = 1, 2, 3),$$

$$(2) \quad (\mathcal{F}_2) \quad X_2 = \frac{\partial f}{\partial v} + v_0 \psi_\alpha(u) M_\alpha, \qquad X_4 = \frac{\partial f}{\partial v_0} \qquad (\alpha = 1, 2, 3),$$

$(L_1, L_2, L_3)$, $(M_1, M_2, M_3)$ étant deux groupes $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$, en $w_1$, $w_2$, $w_3$, simplement transitifs et réciproques, qui seront un couple de groupes paramétriques de l'une des cinq structures de groupes à trois paramètres.

Les cinq types de structure à considérer seront [1]

$$
\begin{array}{llll}
(\mathrm{I}) & (w_1, w_2) = w_1, & (w_2, w_3) = w_3, & (w_1, w_3) = 2w_2,\\
(\mathrm{II}) & (w_1, w_2) = 0, & (w_1, w_3) = w_1, & (w_2, w_3) = c\,w_2,\\
(\mathrm{III}) & (w_1, w_2) = 0, & (w_1, w_3) = w_1, & (w_2, w_3) = w_1 + w_2,\\
(\mathrm{IV}) & (w_1, w_2) = 0, & (w_1, w_3) = 0, & (w_2, w_3) = w_1,\\
(\mathrm{V}) & (w^1, w_2) = 0, & (w_1, w_3) = 0, & (w_2, w_3) = 0.
\end{array}
$$

**44**. Considérons le premier. Il a pour représentant le groupe projectif à une variable

$$(\mathrm{I}) \qquad w' = \frac{a_1 w + a_2}{a_3 w + 1},$$

pour lequel les équations de structure (11) du n° **14** sont :

$$(3) \qquad c_1 = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_3}{a_3 b_2 + 1}, \qquad c_2 = \frac{a_1 b_2 + a_2}{a_3 b_2 + 1}, \qquad c_3 = \frac{a_3 b_1 + b_3}{a_3 b_2 + 1}.$$

Les équations finies des groupes $\mathcal{L}$ et $\mathfrak{M}$ sont donc

$$(4)\ (\mathcal{L}) \qquad w'_1 = \frac{a_1 w_1 + a_2 w_3}{a_3 w_2 + 1}, \qquad w'_2 = \frac{a_1 w_2 + a_2}{a_3 w_2 + 1}, \qquad w'_3 = \frac{a_3 w_1 + w_3}{a_3 w_2 + 1},$$

$$(5)\ (\mathfrak{M}) \qquad w'_1 = \frac{b_1 w_1 + b_3 w_2}{b_2 w_3 + 1}, \qquad w'_2 = \frac{b_2 w_1 + w_2}{b_2 w_3 + 1}, \qquad w'_3 = \frac{b_1 w_3 + b_3}{b_2 w_3 + 1};$$

et leurs transformations infinitésimales de base seront :

$$(6)\ (\mathcal{L}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{L}_1 = w_1 \dfrac{\partial f}{\partial w_1} + w_2 \dfrac{\partial f}{\partial w_2}, \quad \mathrm{L}_2 = w_3 \dfrac{\partial f}{\partial w_1} + \dfrac{\partial f}{\partial w_2}, \quad \mathrm{L}_3 = w_1 \dfrac{\partial f}{\partial w_3} - w_2 w_\alpha \dfrac{\partial f}{\partial w_\alpha} \\ \qquad\qquad (\alpha = 1, 2, 3), \end{array} \right.$$

$$(7)\ (\mathfrak{M}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{M}_1 = w_1 \dfrac{\partial f}{\partial w_1} + w_3 \dfrac{\partial f}{\partial w_3}, \quad \mathrm{M}_2 = w_1 \dfrac{\partial f}{\partial w_2} - w_3 w_\alpha \dfrac{\partial f}{\partial w_\alpha}, \quad \mathrm{M}_3 = w_2 \dfrac{\partial f}{\partial w_1} + \dfrac{\partial f}{\partial w_3} \\ \qquad\qquad (\alpha = 1, 2, 3). \end{array} \right.$$

On remarque que l'on passe de $\mathcal{L}$ à $\mathfrak{M}$ en permutant $w_2$ et $w_3$. Cela permute $\mathrm{L}_1$ et $\mathrm{M}_1$, $\mathrm{L}_2$ et $\mathrm{M}_3$, $\mathrm{L}_3$ et $\mathrm{M}_2$ ; et pour passer de (4) à (5), et inversement, on permutera $a_1$ et $b_1$, $a_2$ et $b_3$, $a_3$ et $b_2$.

---

[1] Voir par exemple, S. Lie et Fr. Engel, *Theorie der Transf. Gruppen*, t. 3, p. 716.

Si l'on effectue, dans les transformations (6), le changement de variables (4), les transformations ($L_i$) obtenues sont données par les formules

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l} a(L_1) = (a_1 + a_2 a_3)\,L'_1 - a_1 a_2 L'_2 + a_3 L'_3 \\ a(L_2) = \quad -2 a_1 a_3\; L'_1 + \quad a_1^2 L'_2 - a_3^2 L'_3 \\ a(L_3) = \qquad\quad 2 a_2\; L'_1 - \quad a_2^2 L'_2 + \quad L'_3 \end{array}\right\} \qquad (a = a_1 - a_2 a_3),$$

où les $L'_i$ sont les $L_i$ écrits avec les lettres accentuées $w'_i$, au lieu des lettres $w_i$.

On en conclut la possibilité de ramener $\varphi_\alpha(u)\,L_\alpha$, ($\alpha = 1, 2, 3$), par un changement de variables (4), où les $a_i$ seront des fonctions de $u$ convenablement choisies, à la forme $\varphi_1(u)\,L_1$, ou $\varphi_2(u)\,L_2$, suivant que $\varphi_1^2 + 4\varphi_2\varphi_3$ sera non nul, ou nul.

Ce changement de variables changera, dans (1), le terme $\frac{\partial f}{\partial u}$ en

$$(9)\qquad \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{da_\alpha}{du}\frac{\partial w'_\beta}{\partial a_\alpha}\frac{\partial f}{\partial w'_\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3).$$

Or, d'après des équations fondamentales de la théorie des groupes [1], les expressions $\frac{\partial w'_\beta}{\partial a_i}\frac{\partial f}{\partial w'_\beta}$ sont des combinaisons linéaires et homogènes des $L'_i$, à coefficients fonctions des $a_i$. Donc les expressions (9) seront de la forme

$$\frac{\partial f}{\partial u} + m_\alpha(u)\,L'_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, 3);$$

de sorte que, en remplaçant $u_0$ par une autre variable, de la forme $mu_0 + m_1$, dans le cas $\varphi_1^2 + 4\varphi_2\varphi_3 \neq 0$, et $mu_0 + m_2$ dans le cas $\varphi_1^2 + 4\varphi_2\varphi_3 = 0$, on aura ramené (1) à la forme

$$(10)\qquad X_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + m_2(u)\,L_2 + m_3(u)\,L_3 + u_0 L_1, \qquad X_3 = \frac{\partial f}{\partial u_0},$$

pour le cas $\varphi_1^2 + 4\varphi_2\varphi_3 \neq 0$; et à la forme

$$(11)\qquad X_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + m_1(u)\,L_1 + m_3(u)\,L_3 + u_0 L_2, \qquad X_3 = \frac{\partial f}{\partial u_0},$$

dans le cas $\varphi_1^2 + 4\varphi_2\varphi_3 = 0$.

---

(1) S. Lie et Fr. Engel, *Theorie der Transf. Gruppen*, t. I.

En opérant de même sur le sous-faisceau (2) de $\mathcal{F}$, on est conduit à décomposer le cas de la structure I en trois cas distincts, que nous devrons traiter séparément.

**45.** Le cas le plus simple est celui où l'on aura

$$(12)\quad \begin{cases} X_1 = \dfrac{\partial f}{\partial u} + m_1(u)\,L_1 + m_3(u)\,L_3 + u_0 L_2, \\ X_2 = \dfrac{\partial f}{\partial v} + n_1(v)\,M_1 + n_2(v)\,M_2 + v_0 M_3. \end{cases}$$

Le dérivé $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$ est alors

$$\frac{\partial f}{\partial u} + m_1 L_1 + m_3 L_3, \quad \frac{\partial f}{\partial v} + n_1 M_1 + n_2 M_2, \quad L_2, \quad M_3; \quad \frac{\partial f}{\partial u_0}, \quad \frac{\partial f}{\partial v_0}.$$

Pour le réduire à sa forme canonique (¹)

$$\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial p}, \quad \frac{\partial f}{\partial q}; \quad \frac{\partial f}{\partial u_0}, \quad \frac{\partial f}{\partial v_0},$$

nous prendrons comme variables les éléments de l'intégrale complète $u$, $v$, $\omega = w_1 - w_2 w_3$, constituée par trois invariants du sous-faisceau complet $\{L_2, M_3\}$. Si l'on remarque que l'on a

$$(13)\quad \begin{cases} L_1\omega = \omega, & L_2\omega = 0, & L_3\omega = -2w_2\omega, \\ M_1\omega = \omega, & M_2\omega = -2w_3\omega, & M_3\omega = 0, \end{cases}$$

on est conduit à poser

$$(14)\qquad e^z = \omega = w_1 - w_2 w_3, \qquad x = u, \qquad y = v,$$

ce qui donne, en omettant des termes en $\dfrac{\partial f}{\partial u_0}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial v_0}$,

$$(15)\quad \begin{cases} X_1 = \dfrac{\partial f}{\partial x} + p\dfrac{\partial f}{\partial z} + \rho\dfrac{\partial f}{\partial p} + \sigma\dfrac{\partial f}{\partial q} + \ldots, & X_3 = \dfrac{\partial f}{\partial u_0}, \\ X_2 = \dfrac{\partial f}{\partial y} + q\dfrac{\partial f}{\partial z} + \sigma\dfrac{\partial f}{\partial p} + \tau\dfrac{\partial f}{\partial q} + \ldots, & X_4 = \dfrac{\partial f}{\partial v_0}, \end{cases}$$

(¹) Voir $M_2$, n° **7**, p. 212. On observera que $\dfrac{\partial f}{\partial u_0}$, $\dfrac{\partial f}{\partial v_0}$ sont des transformations distinguées de $\mathcal{F}'$.

avec

$$(16)\qquad p = \frac{X_1\omega}{\omega} = m_1 - 2\, m_3 w_2, \qquad q = \frac{X_2\omega}{\omega} = n_1 - 2\, n_2 w_3,$$

$$(17)\qquad \rho = X_1 p, \qquad \tau = X_2 q, \qquad \sigma = X_1 q = X_2 p = -\, 2\, m_3 n_2\, \omega.$$

D'où, pour l'équation E,

$$(16)\qquad s = -\, 2\, m_3(x)\, n_2(x)\, e^z.$$

Elle se réduira à la forme de Liouville

$$(C_I^1)\qquad s + 2\, e^z = 0,$$

si l'on prend pour variables indépendantes, au lieu de $u$ et $v$,

$$(17)\qquad x = \int m_3(u)\, du, \qquad y = \int n_2(v)\, dv,$$

ce qui équivaut à supposer

$$(18)\qquad m_3(u) = 1, \qquad n_2(v) = 1$$

dans le faisceau initial.

Tous les faisceaux $\mathcal{F}$ considérés appartiennent donc à une même classe, et l'on obtiendrait l'équation $C_I^1$ en partant du faisceau, obtenu en faisant $m_3 = n_2 = 1$, $m_1 = n_1 = 0$,

$$(19)\qquad \begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial f}{\partial u} + L_3 + u_0 L_2, & X_3 &= \frac{\partial f}{\partial u_0}; \\ X_2 &= \frac{\partial f}{\partial v} + M_2 + v_0 M_3, & X_4 &= \frac{\partial f}{\partial v_0}. \end{aligned}$$

Les formules (16) deviendront ainsi

$$p = -\, 2\, w_2, \qquad q = -\, 2\, w_3,$$

et l'on aura, par suite,

$$\rho = X_1 p = 2\, w_2^2 - 2\, u_0, \qquad \tau = X_2 q = 2\, w_3^2 - 2\, v_0,$$

ce qui donne les invariants du second ordre de E

$$(20)\qquad -\, 2\, u_0 = r - \frac{p^2}{2}, \qquad -\, 2\, v_0 = t - \frac{q^2}{2}.$$

**16.** Appliquons maintenant la méthode du n° **15** pour intégrer le faisceau (19), et par suite, l'équation $C_1^1$. Nous avons à intégrer d'abord le faisceau $\mathcal{F}_1$

$$X_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + L_3 + u_0 L_2, \qquad X_3 = \frac{\partial f}{\partial u_0}, \tag{21}$$

en le réduisant à la forme canonique [1]

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} + \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial \alpha_0} + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} + \alpha_3 \frac{\partial f}{\partial \alpha_2}, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_3}, \tag{22}$$

dont l'intégrale générale est

$$\alpha_0 = \varphi(\alpha), \qquad \alpha_1 = \varphi'(\alpha), \qquad \alpha_2 = \varphi''(\alpha), \qquad \alpha_3 = \varphi'''(\alpha), \tag{23}$$

$\varphi$ étant une fonction arbitraire de $\alpha$.

Les variables $\alpha$ et $\alpha_0$ constituant une intégrale complète du 2^e^ dérivé de (12)

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} + \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial \alpha_0}, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_1}; \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_2}, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_3}.$$

Nous prenons donc le 2^e^ dérivé $\mathcal{F}_1''$ de (21), qui est [2]

$$\frac{\partial f}{\partial u} + L_3, \quad L_2; \quad L_1, \quad \frac{\partial f}{\partial u_0}.$$

$L_1$ est transformation distinguée, et $\{L_2, L_1\}$ est complet : il admet pour invariants $u$ et $w_3$. Nous posons donc

$$\left\{ \begin{aligned} &\alpha = u, \qquad \alpha_0 = w_3, \qquad \alpha_1 = X_1 \alpha_0 = \omega, \\ &\alpha_2 = X_1 \alpha_1 = -2 w_2 \omega, \qquad \alpha_3 = X_1 \alpha_2 = 2(3 w_2^2 - u_0)\,\omega, \end{aligned} \right. \tag{24}$$

et la réduction sera effectuée.

L'intégrale générale de $\mathcal{F}_1$ est donc

$$w_3 = \varphi(u), \qquad \omega = \varphi'(u), \qquad w_2 = -\frac{\varphi''}{2\varphi'}, \qquad w_1 = \varphi' - \frac{\varphi\varphi''}{2\varphi'}, \tag{25}$$

---

[1] Voir $M_2$, n^os^ **14** et **15**, p. 231 et suivantes.

[2] Les formules de structure de $\mathcal{L}$ sont $(L_1, L_2) = -L_2$, $(L_1, L_3) = L_3$, $(L_2, L_3) = -2L_1$.

en omettant la valeur de $u_0$, qui n'aura pas à intervenir. Et nous aurons de même pour $\mathcal{F}_2$,

$$(26)\qquad w_2 = \psi(v), \qquad \omega = \psi', \qquad w_3 = -\frac{\psi''}{2\psi'}, \qquad w_1 = \psi' - \frac{\psi\psi''}{2\psi'}.$$

Les formules, déduites de (3),

$$(27)\qquad w_1 = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_3}{a_3 b_2 + 1}, \qquad w_2 = \frac{a_1 b_2 + a_2}{a_3 b_2 + 1}, \qquad w_3 = \frac{a_3 b_1 + b_3}{a_3 b_2 + 1},$$

qui entraînent

$$(28)\qquad \omega = \frac{(a_1 - a_2 a_3)(b_1 - b_2 b_3)}{(a_3 b_2 + 1)^2},$$

donnent dès lors l'intégrale générale de $\mathcal{F}$, en y remplaçant les $a_i$ par l'intégrale générale de $\mathcal{F}_1$ et les $b_i$ par l'intégrale générale de $\mathcal{F}_2$. On a ainsi, en particulier,

$$(29)\qquad \omega = \frac{\varphi'(u)\psi'(v)}{[\varphi(u)\psi(v) + 1]^2};$$

ce qui suffit à donner l'intégrale générale de $C_1^1$, en vertu des formules (14), sous la forme classique [1]

$$(30)\qquad e^z = \frac{\varphi'(x)\psi'(y)}{[\varphi(x)\psi(y) + 1]^2}.$$

**47.** Passons au second cas de la structure I,

$$(31)\qquad \begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial f}{\partial u} + m_2(u) L_2 + m_3(u) L_3 + u_0 L_1, \\ X_2 &= \frac{\partial f}{\partial v} + n_1(v) M_1 + n_2(v) M_2 + v_0 M_3. \end{aligned}$$

Le dérivé $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$ est alors

$$\frac{\partial f}{\partial u} + m_2 L_2 + m_3 L_3, \quad \frac{\partial f}{\partial v} + n_1 M_1 + n_2 M_2, \quad L_1, \quad M_3; \quad \frac{\partial f}{\partial u_0}, \quad \frac{\partial f}{\partial v_0}.$$

---

(1) Si l'on pose $z' = z + \log 2$, $y' = -y$, $\varphi(x) = X(x)$, $\psi(y) = \frac{1}{Y(y')}$, l'équation $C_1^1$ prend la forme $s = e^z$, et l'intégrale (30) devient $e^z = \frac{2X'Y'}{(X+Y)^2}$. $C_1^1$ est alors identique à l'équation X de Goursat.

Le faisceau complet $\{L_1, M_3\}$ admet les invariants, $u$, $v$ et $\frac{\omega}{w_2}$. Nous pourrons donc poser

$$x = u, \qquad y = v, \qquad e^z = \frac{\omega}{w_2}, \tag{32}$$

et il viendra, pour la forme canonique (15), en particulier,

$$p = X_1 z = -m_3 w_2 - m_2 \frac{1}{w_2}, \qquad \sigma = X_2 p = \left(-m_3 + m_2 \frac{1}{w_2^2}\right) n_2 \omega. \tag{33}$$

En éliminant $u$, $v$, $\omega$, $w_2$ entre les équations (32), (33), et $s = \sigma$, on obtient l'équation E cherchée :

$$se^{-z} = n_2(y)\sqrt{p^2 - 4m_2(x)\,m_3(x)}. \tag{34}$$

On voit qu'en faisant

$$x = 2\int\sqrt{m_2(u)\,m_3(u)}\,du, \qquad y = \int n_2(y)\,dy, \tag{35}$$

on aurait obtenu le type, débarrassé de fonctions arbitraires,

$$s = e^z\sqrt{p^2 - 1}, \tag{$C_I^2$}$$

auquel l'équation VII de Goursat,

$$s = e^z\sqrt{xp^2 + p}, \tag{VII}$$

se ramène par le changement de variables

$$x = e^{2x'}, \qquad z = z' - x'. \tag{36}$$

Ici encore, les faisceaux $\mathcal{F}$ considérés, comme les équations E associées, constituent une même classe. Le choix primitif de variables [équations (32)] conduirait, par ailleurs, à l'équation type $C_I^2$ directement, si les $m_i(u)$ et les $n_i(v)$ étaient choisis, — ce qui est loisible puisque le type ne dépend pas du choix de ces fonctions — de manière que l'on ait

$$4m_2 m_3 = 1, \qquad n_2 = 1. \tag{37}$$

Ceci nous permettra de supposer, pour les calculs qui vont suivre,

$$m_2 = m_3 = \frac{1}{2}, \qquad n_1 = 0, \qquad n_2 = 1. \tag{38}$$

On a ainsi, pour $p = X_1 z$, $q = X_2 z$, $s = X_2 p = X_1 q$,

$$(39)\quad p = -\frac{1}{2}\left(w_2 + \frac{1}{w_2}\right), \quad q = -2w_3 - e^z, \quad s = -(w_2 + p)e^z = e^z\sqrt{p^2 - 1};$$

et l'on en déduit ([1]), pour $r = X_1 p$, $t = X_2 q$,

$$(40)\quad \begin{cases} r = (w_2 + p)\left(\dfrac{1}{w_2} + p + u_0\right) = -\sqrt{p^2 - 1}\left(\sqrt{p^2 - 1} + u_0\right), \\ t = 2w_3^2 - 2v_0 - qe^z = \dfrac{1}{2}(q^2 + e^{2z}) - 2v_0. \end{cases}$$

De là les invariants du second ordre, des deux systèmes de caractéristiques de $C_1^2$ :

$$(41)\quad -u_0 = \frac{r}{\sqrt{p^2 - 1}} + \sqrt{p^2 - 1}, \qquad -2v_0 = t - \frac{1}{2}(q^2 + e^{2z}).$$

**48.** Pour intégrer $C_1^2$, nous avons à intégrer d'abord $\mathcal{F}_1$, qui est

$$(42)\quad X_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{2}(L_2 + L_3) + u_0 L_1, \qquad X_3 = \frac{\partial f}{\partial u_0}.$$

Suivant la méthode appliquée au n° **46**, nous considérons son dérivé second $\mathcal{F}_1''$, qui a pour base, outre $\frac{\partial f}{\partial u_0}$, les transformations

$$(43)\quad \Omega f = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{2}(L_2 + L_3), \qquad L_1, \qquad L_2 - L_3.$$

$\Omega f$ est transformation distinguée, et a pour l'un de ses invariants tout invariant de $\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{2}(1 - w_2^2)\frac{\partial f}{\partial w_2}$ : l'un de ceux-ci est

$$(44)\quad w_2' = e^u \frac{w_2 - 1}{w_2 + 1}$$

Si alors on effectue dans $\Omega f$ la transformation (4), avec

$$(45)\quad a_1 = e^u, \qquad a_2 = -e^u, \qquad a_3 = 1,$$

le terme en $\frac{\partial f}{\partial w_2'}$ sera nul. Or le raisonnement employé au n° **44** montre

---

([1]) La valeur de $w_2$ a été tirée de la première des équations (39); et on l'a écrite $w_2 = -p - \sqrt{p^2 - 1}$, afin d'obtenir $C_1^2$ telle quelle. En réalité, le radical $\sqrt{p^2 - 1}$ y est susceptible de deux déterminations.

que $\Omega f$ prend, par ce changement de variables, la forme

$$(46) \qquad \frac{\partial f}{\partial u} + l_1(u)L'_1 + l_2(u)L'_2 + l_3(u)L'_3,$$

dans laquelle le coefficient de $\frac{\partial f}{\partial w'_2}$ est $l_1 w'_2 + l_2 - l_3 w'^2_2$. Puisque ce coefficient est nul, c'est que $l_1$, $l_2$, $l_3$ le sont tous trois. Donc le changement de variables considéré réduit $\Omega f$ à $\frac{\partial f}{\partial u}$; ce qui revient à dire que les trois fonctions $w'_1$, $w'_2$, $w'_3$ définies par les formules (4) et (45) sont trois invariants (indépendants) de $\Omega f$.

Par ailleurs, d'après les formules (8), ce même changement de variables donne

$$(47) \qquad (L_1) = \frac{1}{2}(e^u L'_2 + e^{-u} L'_3), \qquad (L_2) - (L_3) = e^u L'_2 - e^{-u} L'_3.$$

$\mathcal{F}''_1$ étant ainsi devenu

$$(48) \quad \left\{ \begin{array}{l} L'_2 = w'_3 \frac{\partial f}{\partial w'_1} + \frac{\partial f}{\partial w'_2}, \qquad L'_3 = w_1 \frac{\partial f}{\partial w'_3} - w'_2 w'_\alpha \frac{\partial f}{\partial w'_\alpha}; \qquad \frac{\partial f}{\partial u}, \qquad \frac{\partial f}{\partial u_0} \\ \qquad\qquad\qquad (\alpha = 1, 2, 3), \end{array} \right.$$

nous pourrons prendre comme variables conjuguées $\alpha$, $\alpha_0$, pour réduire $\mathcal{F}_1$ à sa forme canonique, deux invariants de $L'_2$, soit :

$$(49) \qquad \alpha = w'_3, \qquad \alpha_0 = \frac{1}{2}(w'_2 w'_3 - w'_1) = -\frac{1}{2}\omega'.$$

Or on a maintenant, à cause de l'identité

$$X_1 = \Omega + u_0 L_1,$$

et de (47), la formule

$$(50) \qquad X_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{u_0}{2}(e^u L'_2 + e^{-u} L'_3);$$

et l'introduction des variables $\alpha$, $\alpha_0$, à la place de $w'_3$ et $w'_1$, donne

$$(L'_2) = \frac{\partial f}{\partial w'_2}, \qquad (L'_3) = -w'^2_2 \frac{\partial f}{\partial w'_2} - 2\alpha_0 \left( \frac{\partial f}{\partial \alpha} + w'_2 \frac{\partial f}{\partial \alpha_0} \right).$$

Le faisceau $\mathcal{F}_1$ prend ainsi la forme :

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}+\alpha_1\frac{\partial f}{\partial \alpha_0}+\alpha_2\frac{\partial f}{\partial \alpha_1}-\frac{e^u}{\alpha_0 u_0}\frac{\partial f}{\partial u},\quad \frac{\partial f}{\partial u_0},$$

avec

$$(51)\qquad \alpha_1 = w'_2,\qquad \alpha_2=\frac{\alpha_1^2-e^{2u}}{2\alpha_0},$$

et la réduction à la forme canonique (26) s'achèverait facilement.

L'intégrale générale de $\mathcal{F}_1$ est donc donnée par les formules (4) et (45), avec

$$(52)\qquad w'_1 = \alpha\varphi'-2\varphi,\qquad w'_2=\varphi',\qquad w'_3=\alpha,\qquad \omega'=-2\varphi,$$

$\varphi$ étant une fonction arbitraire de $\alpha$, et $u$ étant donné, en fonction de $\alpha$, par

$$(53)\qquad e^{2u}=\varphi'^2-2\varphi\varphi''.$$

On peut, du reste, résoudre les formules (4) sous la forme

$$(54)\qquad w_1=\frac{a'_1 w'_1+a'_2 w'_3}{a'_3 w'_2+1},\qquad w_2=\frac{a'_1 w'_2+a'_2}{a'_3 w'_2+1},\qquad w_3=\frac{a'_3 w'_1+w'_3}{a'_3 w'_2+1},$$

avec

$$(55)\qquad a'_1=e^{-u},\qquad a'_2=1,\qquad a'_3=-e^{-u},\qquad a'=a'_1-a'_2a'_3=2e^{-u}.$$

**49.** L'intégrale générale de $\mathcal{F}$ est donnée, dès lors, par les formules (27), où les $a_i$ et les $b_i$ sont fournis par les équations donnant les intégrales de $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$, c'est-à-dire :

$$(56)\quad\left\{\begin{array}{l} a_1=\dfrac{e^{-u}\varphi_1+\alpha}{-e^{-u}\varphi'+1},\qquad a_2=\dfrac{e^{-u}\varphi'+1}{-e^{-u}\varphi'+1},\qquad a_3=\dfrac{-e^{-u}\varphi_1+\alpha}{-e^{-u}\varphi'+1},\\[2ex] a_1-a_2a_3=\dfrac{-4\varphi e^{-u}}{(-e^{-u}\varphi'+1)^2},\qquad \varphi_1=\alpha\varphi'-2\varphi,\qquad e^{2u}=\varphi'^2-2\varphi\varphi'',\\[2ex] b_1=\psi'-\dfrac{\psi\psi''}{2\psi'},\qquad b_2=\psi,\qquad b_3=-\dfrac{\psi''}{2\psi'},\qquad b_1-b_2b_3=\psi',\end{array}\right.$$

où $\varphi$ est une fonction arbitraire de $\alpha$ et $\psi$ une fonction arbitraire de $v$. D'où l'intégrale générale de $C_I^2$ :

$$e^z=\frac{(a_1-a_2a_3)(b_1-b_2b_3)}{(a_1b_2+a_2)(a_3b_2+1)},\qquad x=u,\qquad y=v,$$

ou, sous forme explicite [1],

$$(57)\quad 2\psi' e^{x-z} = \varphi''(\alpha\psi+1)^2 - 2\varphi'\psi(\alpha\psi+1) + 2\varphi\psi^2, \qquad e^{2x} = \varphi'^2 - 2\varphi\varphi'',$$

avec les deux fonctions arbitraires $\varphi(\alpha)$ et $\psi(y)$. On remarquera qu'il en résulte, pour l'intégrale de l'équation VII de Goursat,

$$(58)\quad 2\psi' e^{-z} = \varphi''(\alpha\psi+1)^2 - 2\varphi'\psi(\alpha\psi+1) + 2\varphi\psi^2, \qquad x = \varphi'^2 - 2\varphi\varphi''.$$

**50**. Pour le troisième et dernier cas de la structure I, nous aurons

$$(59)\quad \begin{cases} X_1 = \dfrac{\partial f}{\partial u} + m_2(u)L_2 + m_3(u)L_3 + u_0 L_1, \\ X_2 = \dfrac{\partial f}{\partial v} + n_2(v)M_2 + n_3(v)M_3 + v_0 M_1. \end{cases}$$

Le dérivé $\mathfrak{F}'$ de $\mathfrak{F}$ est

$$\frac{\partial f}{\partial u} + m_2 L_2 + m_3 L_3, \quad \frac{\partial f}{\partial v} + n_2 M_2 + n_3 M_3 \quad L_1, \quad M_1; \quad \frac{\partial f}{\partial u_0}, \quad \frac{\partial f}{\partial v_0};$$

et son sous-faisceau complet $\{L_1, M_1\}$ admet les invariants $u$, $v$ et $\dfrac{\omega}{w_1}$. L'équation E que l'on obtiendrait en posant, par analogie avec les cas précédents,

$$x = u, \qquad y = v, \qquad e^z = \frac{\omega}{w_1} \qquad (\omega = w_1 - w_2 w_3),$$

se simplifie par le changement de variables défini par

$$dz' = \frac{dz}{\sqrt{1-e^z}},$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{sh} z' = 2e^{-z}\sqrt{1-e^z}, \qquad \text{ou } \operatorname{ch}\frac{z'}{2} = e^{-\frac{z}{2}}.$$

Nous poserons donc, d'emblée,

$$(60)\quad x = u, \qquad y = v, \qquad \operatorname{ch}\frac{z}{2} = \sqrt{\frac{w_1}{\omega}} \qquad (\omega = w_1 - w_2 w_3),$$

---

[1] Si l'on posait $\psi(y) = \dfrac{1}{Y(y)}$, on aurait, plus simplement encore,

$$(57\ bis)\quad 2Y' e^{x-z} + \varphi''(\alpha+Y)^2 - 2\varphi'(\alpha+Y) + 2\varphi = 0, \qquad e^{2x} = \varphi'^2 - 2\varphi\varphi''.$$

d'où

$$(60\,bis)\qquad \begin{cases} \operatorname{sh}\dfrac{z}{2} = \sqrt{\dfrac{w_2 w_3}{\omega}}, & \operatorname{th}\dfrac{z}{2} = \sqrt{\dfrac{w_2 w_3}{w_1}}, \\ \operatorname{ch} z = \dfrac{w_1 + w_2 w_3}{\omega}, & \operatorname{sh} z = 2\dfrac{\sqrt{w_1 w_2 w_3}}{\omega}. \end{cases}$$

Le calcul de $p = X_1 z$, $q = X_2 z$, $s = X_1 q = X_2 p$ donne alors

$$(61)\qquad \begin{cases} p = \dfrac{m_2}{w_2}\operatorname{th}\dfrac{z}{2} + m_3 w_2 \coth\dfrac{z}{2}, \qquad q = \dfrac{n_3}{w_3}\operatorname{th}\dfrac{z}{2} + n_2 w_3 \coth\dfrac{z}{2}, \\ s = \left(\dfrac{m_2}{w_2}\operatorname{th}\dfrac{z}{2} - m_3 w_2 \coth\dfrac{z}{2}\right)\left(\dfrac{q}{\operatorname{sh} z} - n_2\omega\dfrac{1}{w_2}\right). \end{cases}$$

D'où, compte tenu de ($60\,bis$) et (61),

$$s\operatorname{sh} z = \left(\frac{m_2}{w_2}\operatorname{th}\frac{z}{2} - m_3 w_2 \coth\frac{z}{2}\right)\left(\frac{n_3}{w_3}\operatorname{th}\frac{z}{2} - n_2 w_3 \coth\frac{z}{2}\right),$$

et par conséquent

$$(62)\qquad s\operatorname{sh} z = \sqrt{p^2 - 4m_2 m_3}\sqrt{q^2 - 4n_2 n_3}.$$

Si donc on prend pour variables, au lieu de $x = u$, $y = v$,

$$(63)\qquad x = 2\int \sqrt{m_2(u)\,m_3(u)}\,du, \qquad y = 2\int \sqrt{n_2(v)\,n_3(v)}\,dv,$$

on aura la forme type

$$(C_1^3)\qquad s\operatorname{sh} z = \sqrt{p^2 - 1}\sqrt{q^2 - 1},$$

à laquelle l'équation III de Goursat,

$$(\text{III})\qquad s\sin z = \sqrt{p^2 + 1}\sqrt{q^2 + 1},$$

se ramène par le changement de variables

$$z = iz', \qquad x = -x'.$$

Ce troisième cas donne donc, comme les autres, une seule classe de faisceaux $\Phi$ et d'équations E associées; et l'on obtiendra directement la forme type $C_1^3$, avec les variables (60), si l'on a choisi des $m_i$ et des $n_i$ satisfaisant aux conditions

$$(64)\qquad 4m_2 m_3 = 1, \qquad 4n_2 n_3 = 1.$$

Nous prendrons, pour les calculs qui restent à faire,

$$(65) \qquad 2m_2 = 1, \qquad 2m_3 = 1, \qquad 2n_2 = 1, \qquad 2n_3 = 1.$$

Nous aurons alors

$$(66) \qquad 2p = \frac{1}{w_2}\,\mathrm{th}\,\frac{z}{2} + w_2\,\mathrm{coth}\,\frac{z}{2},$$

d'où, pour $r = X_1 p$,

$$2r = \left(\frac{1}{w_2}\,\mathrm{th}\,\frac{z}{2} - w_2\,\mathrm{coth}\,\frac{z}{2}\right)\left[\frac{p}{\mathrm{sh}\,z} - u_0 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{w_2} - w_2\right)\right];$$

et, en éliminant $w_2$ au moyen de (66),

$$(67) \qquad r = -\sqrt{p^2-1}\,(\sqrt{p^2-1}\,\mathrm{coth}\,z + u_0).$$

On aura, de même, par raison de symétrie

$$(68) \qquad t = -\sqrt{q^2-1}\,(\sqrt{q^2-1}\,\mathrm{coth}\,z + v_0).$$

De là les invariants du second ordre de E

$$(69) \quad -u_0 = \frac{r}{\sqrt{p^2-1}} + \sqrt{p^2-1}\,\mathrm{coth}\,z, \qquad -v_0 = \frac{t}{\sqrt{q^2-1}} + \sqrt{q^2-1}\,\mathrm{coth}\,z.$$

**51.** D'après les formules obtenues au n° **48** pour l'intégrale générale de $\mathcal{F}_1$, l'intégrale générale du faisceau $\mathcal{F}$ considéré ici sera donnée par les formules (27) avec

$$(70) \left\{\begin{array}{llll} a_1 = \dfrac{\varphi_1 + \alpha e^u}{-\varphi' + e^u}, & a_2 = \dfrac{\varphi' + e^u}{-\varphi' + e^u}, & a_3 = \dfrac{-\varphi_1 + \alpha e^u}{-\varphi' + e^u}, & \varphi_1 = \alpha\varphi' - 2\varphi, \\ b_1 = \dfrac{\psi_1 + \beta e^v}{-\psi' + e^v}, & b_2 = \dfrac{-\psi_1 + \beta e^v}{-\psi' + e^v}, & b_3 = \dfrac{\psi' + e^v}{-\psi' + e^v}, & \psi_1 = \beta\psi' - 2\psi, \end{array}\right.$$

$\varphi$ et $\psi$ étant des fonctions arbitraires $\varphi(\alpha)$ et $\psi(\beta)$ des variables auxiliaires $\alpha$ et $\beta$, et $u$ et $v$ étant liées à ces variables par les formules

$$(70\,bis) \qquad e^{2u} = \varphi'^2 - 2\varphi\varphi'', \qquad e^{2v} = \psi'^2 - 2\psi\psi''.$$

On aura donc, pour l'intégrale générale de $C_1^3$, sous le bénéfice des mêmes formules (70), et des relations (60),

$$(71) \quad e^{2x} = \varphi'^2 - 2\varphi\varphi'', \qquad e^{2y} = \psi'^2 - 2\psi\psi'', \qquad \mathrm{ch}^2\frac{z}{2} = \frac{(a_1 b_1 + a_2 b_3)(a_3 b_2 + 1)}{(a_1 - a_2 a_3)(b_1 - b_2 b_3)};$$

et la dernière de ces formules devient, sous forme explicite,

$$(72)\qquad 4\varphi\psi e^{x+y}\,\mathrm{ch}^2\frac{z}{2} = [\varphi_1\psi_1 + \varphi'\psi' + (\alpha\beta + 1)e^{x+y}]^2 - [(\alpha\psi_1 + \psi')e^{x} + (\beta\varphi_1 + \varphi')e^{y}]^2,$$

et, en tenant compte de (71),

$$(73)\qquad 4\varphi\psi e^{x+y}\left(\mathrm{ch}^2\frac{z}{2} - 2\right) = (\alpha\beta + 1)^2(4\varphi\psi\varphi''\psi'' - \varphi'^2\psi'^2) + 4(\alpha\beta + 1)[2\varphi\psi(\varphi'\psi')' - \varphi'\psi'(\varphi\psi)'] + 8\varphi\psi(\varphi\psi'' + \psi\varphi'') - 4(\varphi^2\psi'^2 + \psi^2\varphi'^2).$$

## VIII. — Suite des Types intégrables fournis par les groupes à trois paramètres. 2° Structures pour lesquelles le groupe dérivé est à deux paramètres.

**52.** Le type de structure II dépend d'un paramètre $c$. Les deux valeurs $c = 1$, $c = 0$ constituent des cas singuliers, qui devront être examinés à part. Pour le cas général, nous prendrons comme représentant du type le groupe linéaire

$$(1)\qquad x' = a_1 x + a_2 y + a_3, \qquad y' = a_1^m y,$$

dont les formules de structure sont [*voir* n° **14**, équations (11)],

$$(2)\qquad c_1 = a_1 b_1, \qquad c_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1^m, \qquad c_3 = a_1 b_3 + a_3.$$

Les deux groupes paramétriques $\mathcal{L}$ et $\mathfrak{M}$ sont donc

$$(3)\ (\mathcal{L})\qquad w'_1 = a_1 w_1, \qquad w'_2 = a_1 w_2 + a_2 w_1^m, \qquad w'_3 = a_1 w_3 + a_3,$$

$$(4)\qquad \mathrm{L}_1 = w_\alpha \frac{\partial f}{\partial w_\alpha}\quad (\alpha = 1, 2, 3), \qquad \mathrm{L}_2 = w_1^m \frac{\partial f}{\partial w_2}, \qquad \mathrm{L}_3 = \frac{\partial f}{\partial w_3};$$

$$(5)\ (\mathfrak{M})\qquad w'_1 = b_1 w_1, \qquad w'_2 = b_2 w_1 + b_1^m w_2, \qquad w'_3 = b_3 w_1 + w_3,$$

$$(6)\qquad \mathrm{M}_1 = w_1 \frac{\partial f}{\partial w_1} + m w_2 \frac{\partial f}{\partial w_2}, \qquad \mathrm{M}_2 = w_1 \frac{\partial f}{\partial w_2}, \qquad \mathrm{M}_3 = w_1 \frac{\partial f}{\partial w_3},$$

avec les formules de structure

$$(7)\qquad (\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2) = (m - 1)\,\mathrm{L}_2, \qquad (\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_3) = -\,\mathrm{L}_3, \qquad (\mathrm{L}_2, \mathrm{L}_3) = 0,$$

$$(8)\qquad (\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2) = (1 - m)\,\mathrm{M}_2, \qquad (\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_3) = \mathrm{M}_3, \qquad (\mathrm{M}_2, \mathrm{M}_3) = 0.$$

Les valeurs exceptionnelles de $m$, à réserver, seront $m = 1$ et $m = 0$ : elles correspondent respectivement à $c = 0$ et $c = 1$.

Si l'on effectue dans les $L_i$ la transformation (3), on obtient

$$(9) \quad (L_1) = L'_1 + (m-1)\, a_2 a_1^{-m} L'_2 - a_3 L'_3, \qquad (L_2) = a_1^{1-m} L'_2, \qquad (L_3) = a_1 L'_3.$$

On passe de $\mathcal{L}$ à $\mathfrak{M}$ et inversement par l'*inversion*

$$(10) \qquad w'_1 = \frac{1}{w_1}, \qquad w'_2 = -\frac{w_2}{w_1^{m+1}}, \qquad w'_3 = -\frac{w_3}{w_1};$$

elle échange $L_1$ et $-M_1$, $L_2$ et $-M_2$, $L_3$ et $-M_3$.

En raisonnant comme au n° **44**, on en conclut que l'on pourra prendre

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial f}{\partial u} + m_2(u)\, L_2 + m_3(v)\, L_3 + u_0 L_1, \\ X_2 &= \frac{\partial f}{\partial v} + n_2(v)\, M_2 + n_3(v)\, M_3 + v_0 M_1. \end{aligned} \right.$$

Le dérivé $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$ est alors

$$\frac{\partial f}{\partial u} + m_2 L_2 + m_3 L_3, \quad \frac{\partial f}{\partial v} + n_2 M_2 + n_3 M_3, \quad L_1, \quad M_1; \quad \frac{\partial f}{\partial u_0}, \quad \frac{\partial f}{\partial v_0},$$

et, pour chercher l'équation E associée, on prendra comme variables trois invariants du sous-faisceau complet $\{L_1, M_1\}$,

$$(12) \qquad x = u, \qquad y = v, \qquad z = \log(w_1^{-m} w_2 w_3^{m-1}).$$

Cela donne, pour $p = X_1 z$, $q = X_2 z$, $s = X_1 q = X_2 p$, les formules

$$p = m_2 \frac{w_1^m}{w_2} + (m-1)\, m_3 \frac{1}{w_3}, \qquad q = n_2 \frac{w_1}{w_2} + (m-1)\, n_3 \frac{w_1}{w_3},$$
$$-s = m_2 n_2 \frac{w_1^{m+1}}{w_2^2} + (m-1)\, m_3 n_3 \frac{w_1}{w_3^2},$$

qui s'écrivent, en tenant compte de (12),

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} & p = m_2 e^{-z} w_3^{m-1} + (m-1)\, m_3 w_3^{-1}, \quad q = n_2 e^{-z} \left(\frac{w_3}{w_1}\right)^{m-1} + (m-1)\, n_3 \left(\frac{w_3}{w_1}\right)^{-1}, \\ & -s = m_2 n_2 e^{-2z} \left(\frac{w_3}{w_1}\right)^{m-1} w_3^{m-1} + (m-1)\, m_3 n_3 \left(\frac{w_3}{w_1}\right)^{-1} w_3^{-1}; \end{aligned} \right.$$

et il ne reste plus qu'à éliminer $w_3$ et $\frac{w_3}{w_1}$ entre ces trois équations.

Nous les simplifierons, à cet effet, en posant, au lieu de $x=u$, $y=v$,

$$(14)\qquad x=\int m_2^{\frac{1}{m}} m_3^{\frac{m-1}{m}}\,du,\qquad y=\int n_2^{\frac{1}{m}} n_3^{\frac{m-1}{m}}\,dv,$$

$$(15)\qquad \lambda=\left(\frac{m_3}{m_2}\right)^{\frac{1}{m}} e^{\frac{z}{m}} w_3^{-1},\qquad \mu=\left(\frac{n_3}{n_2}\right)^{\frac{1}{m}} e^{\frac{z}{m}}\left(\frac{w_1}{w_3}\right);$$

ce qui donne

$$(16)\qquad \begin{cases} p\,e^{\frac{z}{m}}=\lambda^{1-m}+(m-1)\lambda, \qquad q\,e^{\frac{z}{m}}=\mu^{1-m}+(m-1)\mu, \\ \qquad -s\,e^{\frac{2z}{m}}=(\lambda\mu)^{1-m}+(m-1)\lambda\mu. \end{cases}$$

On est alors conduit à poser

$$(17)\qquad z'=e^{\frac{z}{m}}=w_1^{-1} w_2^{\frac{1}{m}} w_3^{\frac{m-1}{m}},$$

ce qui donne

$$(18)\qquad \begin{cases} mp'=\lambda^{1-m}+(m-1)\lambda, \qquad mq'=\mu^{1-m}+(m-1)\mu, \\ \qquad m^2s'z'=(1-m)\lambda\mu(\lambda^{-m}-1)(\mu^{-m}-1). \end{cases}$$

On en conclut le type cherché (où nous laissons tomber les accents),

$$(C_{II}^1)\qquad sz+(m-1)\theta(p)\theta(q)=0,$$

la fonction $\theta(\omega)$ étant définie par l'élimination de $\lambda$ entre les équations

$$(19)\qquad mw=\lambda^{1-m}+(m-1)\lambda,\qquad m\theta=\lambda^{1-m}-\lambda,$$

c'est-à-dire par l'équation

$$(20)\qquad [w+(m-1)\theta](w-\theta)^{m-1}=1,$$

Ce type correspond à l'équation IV de Goursat, qui est

$$(\mathrm{IV})\qquad sz+\varphi(p)\varphi(q)=0,$$

la fonction $\varphi(w)$ étant définie par l'équation

$$(21)\qquad (\varphi-\alpha w)^\alpha=(\varphi-\beta w)^\beta \quad \text{où} \quad \alpha\beta=-1.$$

On ramènerait (IV) à $C_{II}^{1}$, en posant

$$\alpha = \sqrt{m-1}, \qquad \beta = -\frac{1}{\sqrt{m-1}}, \tag{22}$$

et en effectuant sur $z$ un changement de variable de la forme

$$z' = kz, \tag{22 bis}$$

$k$ étant une constante convenablement choisie. Le cas $\beta = \alpha$ correspond donc au cas $m = 0$; et le cas $m = 1$ se trouve écarté.

**52** *bis*. Rappelons que les variables dont le choix a donné $C_{II}^{1}$ sont

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} & x = \int m_2(u)^{\frac{1}{m}} m_3(u)^{\frac{m-1}{m}} du, \qquad y = \int n_2(v)^{\frac{1}{m}} n_3(v)^{\frac{m-1}{m}} du, \\ & z = w_1^{-1} w_2^{\frac{1}{m}} w_3^{\frac{m-1}{m}}. \end{aligned} \right.$$

On pourra conserver le choix $x = u$, $y = v$ pour les variables indépendantes, à condition de choisir les $m_i$ et $n_i$, ce qui sera loisible, de manière à satisfaire aux relations

$$m_2 = m_3^{1-m}, \qquad n_2 = n_3^{1-m}. \tag{24}$$

Nous prendrons

$$m_2 = m_3 = 1, \qquad n_2 = n_3 = 1. \tag{25}$$

Calculons les invariants de E. Nous aurons ici

$$\lambda = \frac{z}{w_3}, \qquad mp = \lambda^{1-m} + (m-1)\lambda;$$

d'où, pour $r = X_1 p$, l'équation

$$\begin{aligned} mr &= (1-m)(\lambda^{1-m} - \lambda)\left(\frac{p}{z} - \frac{1}{w_3} - u_0\right) \\ &= (1-m)\, m\theta\left(\frac{p-\lambda}{z} - u_0\right) = (1-m)\, m\theta\left(\frac{\theta}{z} - u_0\right). \end{aligned}$$

Donc E à pour invariants [1]

$$(26)\quad (m-1)u_0 = \frac{r}{\theta(p)} + (m-1)\frac{\theta(p)}{z}, \quad (1-m)v_0 = \frac{t}{\theta(q)} + (m-1)\frac{\theta(q)}{z}.$$

**53.** Pour trouver l'intégrale générale de ($C_{II}^1$), nous avons à intégrer d'abord $\mathcal{F}_1$, qui est, sous l'hypothèse (25),

$$(27)\qquad X_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + L_2 + L_3 + u_0 L_1, \qquad X_3 = \frac{\partial f}{\partial u_0}.$$

Le dérivé second $\mathcal{F}''_1$ est

$$\Omega f = \frac{\partial f}{\partial u} + L_2 + L_3, \qquad (m-1)L_2 - L_3, \qquad L_1; \qquad \frac{\partial f}{\partial u_0}.$$

$\Omega f$ en est une transformation distinguée. Prenons pour variables nouvelles ses invariants évidents

$$(28)\qquad w'_1 = w_1, \qquad w'_2 = w_2 - u w_1^m, \qquad w'_3 = w_3 - u.$$

Ces formules définissent une transformation (3) de $\mathcal{L}$, avec

$$(29)\qquad a_1 = 1, \qquad a_2 = -u, \qquad a_3 = -u.$$

Les formules (9) deviennent par suite,

$$(L_1) = L'_1 - (m-1)u L'_2 + u L'_3, \qquad (L_2) = L'_2, \qquad (L_3) = L'_3;$$

de sorte que $X_1$ devient

$$X_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + u_0 \{ L'_1 - u[(m-1)L'_2 - L'_3] \}.$$

Pour le réduire à sa forme canonique, nous prenons pour variables conjuguées deux invariants de $(m-1)L'_2 - L'_3$, soit

$$(30)\qquad \alpha = w'_1, \qquad \alpha_0 = w'_3 + \frac{1}{m-1} w'_2 w_1'^{-m}.$$

---

[1] On obtient, pour $t = X_2 q$, par un calcul analogue,

$$t = (1-m)\theta(q)\left[\frac{\theta(q)}{z} + v_0\right].$$

Il vient alors, pour les autres variables canoniques,

$$(31)\qquad \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{X_1\alpha_0}{X_1\alpha} = w'_3 w_1'^{-1} - w'_2 w_1'^{-(m+1)}, \\[2ex] \alpha_2 = \dfrac{X_1\alpha_1}{X_1\alpha} = m w'_2 w_1'^{-(m+2)} + m u w_1'^{-2}, \end{cases}$$

et l'on tire de ces équations

$$(32)\qquad \begin{aligned} &m w'_2 = (m-1)\alpha^m(\alpha_0 - \alpha\alpha_1), \qquad m w'_3 = (m-1)\alpha_0 + \alpha\alpha_1, \\ &m u = \alpha^2\alpha_2 + (m-1)(\alpha\alpha_1 - \alpha_0); \end{aligned}$$

puis, au moyen de (28),

$$(33)\qquad w_1 = \alpha, \qquad m w_2 = \alpha^{m+2}\alpha_2, \qquad m w_3 = \alpha^2\alpha_2 + m\alpha\alpha_1;$$

et les équations (32) et (33) donnent l'intégrale générale de $\mathcal{F}_1$, si l'on y considère $\alpha_0$ comme une fonction arbitraire $m\varphi(\alpha)$, et $\alpha_1$, $\alpha_2$ comme les dérivées, première et seconde, de $\alpha_0$.

Nous déduirons l'intégrale générale de $\mathcal{F}_2$,

$$(34)\qquad X_2 = \frac{\partial f}{\partial v} + M_2 + M_3 + v_0 M_1, \qquad X_4 = \frac{\partial f}{\partial v_0},$$

de celle que nous venons de trouver pour $\mathcal{F}_1$ au moyen du changement de variables (10). Il donnera le faisceau

$$\frac{\partial f}{\partial v} - L'_2 - L'_3 - v_0 L'_1, \qquad \frac{\partial f}{\partial v_0};$$

et il suffira de changer encore $w'_2$ en $-w'_2$, $w'_3$ en $-w'_3$ et $v_0$ en $-v_0$, pour revenir à la forme de $\mathcal{F}_1$. L'intégrale générale cherchée sera donc donnée par

$$(35)\qquad w_1 = \beta^{-1}, \qquad m w_2 = \beta^2\beta_2, \qquad m w_3 = \beta\beta_2 + m\beta_1,$$

$$(36)\qquad m v = \beta^2\beta_2 + (m-1)(\beta\beta_1 - \beta_0), \quad \beta_0 = m\psi(\beta), \quad \beta_1 = m\psi'(\beta), \quad \beta_2 = m\psi''(\beta).$$

Les formules (2) conduiront alors à l'intégrale générale de $\mathcal{F}$,

$$(37)\qquad w_1 = a_1 b_1, \qquad w_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1^m, \qquad w_3 = a_1 b_3 + a_3,$$

avec

$$(38)\qquad a_1 = \alpha, \qquad a_2 = \alpha^{m+2}\varphi'', \qquad a_3 = \alpha^2\varphi'' + m\alpha\varphi',$$

$$(39)\qquad b_1 = \beta^{-1}, \qquad b_2 = \beta\psi'', \qquad b_3 = \beta\psi'' + m\psi'.$$

$$(40)\qquad u = \alpha^2\varphi'' + (m-1)(\alpha\varphi' - \varphi), \qquad v = \beta^2\psi'' + (m-1)(\beta\psi' - \psi),$$

$\varphi$ étant une fonction arbitraire de $\alpha$ et $\psi$ une fonction arbitraire de $\beta$.

L'intégrale générale de $C_{\text{II}}^1$ est alors définie par

$$(41)\qquad x = u, \qquad y = v, \qquad z = w_1^{-1} w_2^{\frac{1}{m}} w_3^{\frac{m-1}{m}},$$

et donnée, par suite, par les formules définitives

$$(42)\qquad \begin{cases} x = \alpha^2\varphi''(m-1)(\alpha\varphi' - \varphi), \qquad y = \beta^2\psi'' + (m-1)(\beta\psi' - \psi), \\ z^m = (\alpha^{m+1}\varphi'' + \beta^{m+1}\psi'')\left[(\alpha\varphi'' + m\varphi') + (\beta\psi'' + m\psi')\right]^{m-1}. \end{cases}$$

**54.** *Cas* $m = 0$. — Les formules (1) à (10) du n° **52** deviennent

$$(43)\qquad x' = a_1 x + a_2 y + a_3, \qquad y' = y,$$

$$(44)\qquad c_1 = a_1 b_1, \qquad c_2 = a_1 b_2 + a_2, \qquad c_3 = a_1 b_3 + a_3.$$

$$(45)\ (\mathcal{L})\qquad w'_1 = a_1 w_1, \qquad w'_2 = a_1 w_2 + a_2, \qquad w'_3 = a_1 w_3 + a_3,$$

$$(47)\qquad L_1 = w_\alpha \frac{\partial f}{\partial w_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, 3), \qquad L_2 = \frac{\partial f}{\partial w_2}, \qquad L_3 = \frac{\partial f}{\partial w_3},$$

$$(48)\ (\mathfrak{M})\qquad w'_1 = b_1 w_1, \qquad w'_2 = b_2 w_1 + w_2, \qquad w'_3 = b_3 w_1 + w_3,$$

$$(49)\qquad M_1 = w_1 \frac{\partial f}{\partial w_1} + w_2 \frac{\partial f}{\partial w_2}, \qquad M_2 = w_1 \frac{\partial f}{\partial w_2}, \qquad M_3 = w_1 \frac{\partial f}{\partial w_3},$$

$$(50)\qquad (L_1, L_2) = -L_2, \qquad (L_1, L_3) = -L_3, \qquad (L_2, L_3) = 0,$$

$$(51)\qquad (M_1, M_2) = M_2, \qquad (M_1, M_3) = M_3, \qquad (M_2, M_3) = 0,$$

$$(52)\qquad (L_1) = L'_1 - a_2 L'_2 - a_3 L'_3, \qquad (L_2) = a_1 L'_2, \qquad (L_3) = a_1 L'_3,$$

$$(53)\qquad (\text{Inversion}) \qquad w'_1 = \frac{1}{w_1}, \qquad w'_2 = -\frac{w_2}{w_1}, \qquad w'_3 = -\frac{w_3}{w_1},$$

et l'on peut prendre, par suite, encore, pour définir $\mathcal{F}_1$

$$(54)\qquad \begin{cases} X_1 = \dfrac{\partial f}{\partial u} + m_2(u)\,L_2 + m_3(u)\,L_3 + u_0 L_1, \\ X_2 = \dfrac{\partial f}{\partial v} + n_2(v)\,M_2 + n_3(v)\,M_3 + v_0 M_1. \end{cases}$$

Le dérivé $\mathcal{F}'$ est

$$\frac{\partial f}{\partial u} + m_2 L_2 + m_3 L_3, \qquad \frac{\partial f}{\partial v} + n_2 M_2 + n_3 M_3, \qquad L_1, \qquad M_1; \qquad \frac{\partial f}{\partial u_0}, \qquad \frac{\partial f}{\partial v_0}$$

et il a pour intégrale complète les invariants de $\{L_1, M_1\}$

$$x = u, \qquad y = v, \qquad z = \frac{w_2}{w_3}. \tag{55}$$

On a alors, pour $p = X_1 z$ et $q = X_2 z$,

$$p = \frac{1}{w_3}(m_2 - m_3 z), \qquad q = \frac{w_1}{w_3}(n_2 - n_3 z); \tag{56}$$

et l'on en déduit, pour $s = X_2 p = X_1 q$,

$$s = \frac{w_1}{w_3^2}[m_3(n_3 z - n_2) + n_3(m_3 z - m_2)]. \tag{57}$$

L'élimination de $\frac{1}{w_3}$ et $\frac{w_1}{w_3}$ entre (56) et (57) donne alors, pour l'équation E associée à $\mathcal{F}_1$

$$\frac{s}{pq} = \frac{m_3}{m_3 z - m_2} + \frac{n_3}{n_3 z - n_2}. \tag{58}$$

Le rapport $\frac{m_2}{m_3}$ n'est pas une constante; car si c'était une constante $k$, $\mathcal{F}_1$ admettrait, outre les invariants $y$ et $v_0$, l'invariant du sous-faisceau complet $\{kL_2 + L_3, L_1\}$. On pourra donc prendre pour variable $x$, au lieu de $u$, et de même, pour $y$, à la place de $v$, les variables

$$x = \frac{m_2(u)}{m_3(u)}, \qquad y = \frac{n_2(v)}{n_3(v)}: \tag{59}$$

ce qui donnera, au lieu de (58), le type

$$\frac{s}{pq} = \frac{1}{z - x} + \frac{1}{z - y}. \tag{$C_{II}^2$}$$

Pour les calculs ultérieurs, nous pourrons prendre les variables (55), avec

$$m_3 = n_3 = 1, \qquad m_2(u) = u, \qquad n_2(v) = v.$$

On aura ainsi, directement, l'équation $C_{II}^2$, le faisceau $\mathcal{F}$ étant

$$\left\{\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial f}{\partial u} + uL_2 + L_3 + u_0 L_1, \\ X_2 &= \frac{\partial f}{\partial v} + vM_2 + M_3 + v_0 M_1, \qquad \frac{\partial f}{\partial u_0}, \qquad \frac{\partial f}{\partial v_0}. \end{aligned}\right. \tag{60}$$

Les formules (56) deviendront

$$(61)\qquad p = \frac{u-z}{w_3}, \qquad q = \frac{v-z}{w_3} w_1;$$

et la première donnera, par exemple, pour $r = X_1 p$,

$$\frac{r}{p} = \frac{1-p}{u-z} - \frac{1+u_0 w_3}{w_3} = \frac{1-2p}{u-z} - u_0.$$

D'où les invariants du second ordre de $C_{II}^2$,

$$(62)\qquad -u_0 = \frac{r}{p} - \frac{2p-1}{z-x}, \qquad -v_0 = \frac{t}{q} - \frac{2q-1}{z-y}.$$

**55.** Passons à l'intégration de $C_{II}^2$, qui va résulter de celle de $\mathcal{F}_1$

$$(63)\qquad X_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + u L_2 + L_3 + u_0 L_1, \qquad X_3 = \frac{\partial f}{\partial u_0}.$$

Le dérivé second, $\mathcal{F}_1''$, est

$$\frac{\partial f}{\partial u}, \quad u L_2 + L_3; \quad L_1, \quad \frac{\partial f}{\partial u_0}.$$

On peut donc prendre pour variables conjuguées deux invariants du sous-faisceau $\left\{\frac{\partial f}{\partial u}, L_1, \frac{\partial f}{\partial u_0}\right\}$, qui est complet, car $L_1$ est une transformation distinguée de $\mathcal{F}_1''$. Nous poserons

$$(64)\qquad \alpha = \frac{w_3}{w_1}, \qquad \alpha_0 = \frac{w_2}{w_1},$$

et, par suite,

$$\alpha_1 = \frac{X_1 \alpha_0}{X_1 \alpha} = u, \qquad \alpha_2 = \frac{X_1 \alpha_1}{X_1 \alpha} = w_1.$$

L'intégrale générale de $\mathcal{F}_1$ est ainsi, $\varphi$ étant une fonction arbitraire de $\alpha$ (variable auxiliaire),

$$(65)\qquad u = \varphi', \qquad w_1 = \varphi'', \qquad w_2 = \varphi\varphi'', \qquad w_3 = \alpha\varphi''.$$

On en déduit l'intégrale générale de $\mathcal{F}_2$ par la transformation (53), accompagnée du changement de $w_1'$ en $-w_1'$, de $u$ en $v$ et de $u_0$ en $-v_0$, qui change $X_1$ en

$$X_2 = \frac{\partial f}{\partial v} + v M_2 + M_3 + v_0 M_1.$$

On obtient ainsi, $\psi$ étant une fonction arbitraire de $\beta$ (variable auxiliaire), l'intégrale générale de $\mathcal{F}_2$

$$(66) \qquad v = \psi', \qquad w_1 = -\frac{1}{\psi''}, \qquad w_2 = \psi, \qquad w_3 = \beta;$$

et les formules, déduites de (44),

$$(67) \qquad w_1 = a_1 b_1, \qquad w_2 = a_1 b_2 + a_2, \qquad w_3 = a_1 b_3 + a_3,$$

— où $(a_1, a_2, a_3)$; $(b_1, b_2, b_3)$ sont les valeurs de $(w_1, w_2, w_3)$ données respectivement par (65) et (67) — donnent l'intégrale générale de $\mathcal{F}$,

$$(68) \quad u = \varphi', \quad v = \psi', \quad w_1 = -\frac{\varphi''}{\psi''}, \quad w_2 = \varphi''(\varphi + \psi), \quad w_3 = \varphi''(\alpha + \beta).$$

De là l'intégrale générale de $C_{II}^2$

$$(69) \qquad x = \varphi'(\alpha), \qquad y = \psi'(\beta), \qquad z = \frac{\varphi(\alpha) + \psi(\beta)}{\alpha + \beta}.$$

**56.** On aperçoit que cette intégrale générale peut se transformer en appliquant la transformation de Legendre à chacun des systèmes de quantités $[\alpha, \varphi(\alpha), \varphi'(\alpha)]$, $[\beta, \psi(\beta), \psi'(\beta)]$. En désignant par X une fonction arbitraire de $x$, et Y une fonction arbitraire de $y$, il vient

$$\begin{aligned} \varphi' &= x, & \alpha &= X', & \varphi &= xX' - X, \\ \psi' &= y, & \beta &= Y', & \psi &= yY' - Y; \end{aligned}$$

d'où, pour l'intégrale générale de $C_{II}^2$,

$$(70) \qquad z = x + y - \frac{X + Y}{X' + Y'}.$$

L'équation est une équation de Moutard.

Effectivement, si l'on cherche à faire disparaître le terme en $pq$ par un changement de variables $z' = \theta(x, y, z)$, on a, pour déterminer $\theta$, la condition [1]

$$\frac{\partial}{\partial z} \log \frac{\partial \theta}{\partial z} = -\frac{1}{z - x} - \frac{1}{z - y},$$

---

[1] Comparez une Note de Cosserat, dans la *Théorie des surfaces* de Darboux, t. IV, p. 407.

qui est vérifiée, par exemple, par $\theta = \log(z-x) - \log(z-y)$; et si l'on pose, en conséquence,

$$e^{z'} = \frac{z-x}{z-y}, \tag{71}$$

on obtient, en laissant tomber les accents, la tranformée suivante, qui est le type XI de Goursat et a la forme canonique des équations de Moutard,

$$s + \frac{d}{dx}\left(\frac{e^z}{x-y}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{e^{-z}}{x-y}\right) = 0. \tag{XI}$$

Son intégrale générale est, d'après (70) et (71),

$$e^z = \frac{y(X'+Y') - (X+Y)}{x(X'+Y') - (X+Y)}. \tag{72}$$

**57.** *Cas* $m = 1$. — Les formules fondamentales du début du n° 52 deviennent, dans ce cas,

$$c_1 = a_1 b_1, \qquad c_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1, \qquad c_3 = a_1 b_3 + a_3, \tag{73}$$

$$(\mathcal{L})\quad w'_1 = a_1 w_1, \qquad w'_2 = a_2 w_1 + a_1 w_2, \qquad w'_3 = a_1 w_3 + a_3, \tag{74}$$

$$(\mathfrak{M})\quad w'_1 = b_1 w_1, \qquad w'_2 = b_2 w_1 + b_1 w_2, \qquad w'_3 = b_3 w_1 + w_3, \tag{75}$$

$$L_1 = w_1 \frac{\partial f}{\partial w_1} + w_2 \frac{\partial f}{\partial w_2} + w_3 \frac{\partial f}{\partial w_3}, \qquad L_2 = w_1 \frac{\partial f}{\partial w_2}, \qquad L_3 = \frac{\partial f}{\partial w_3}, \tag{76}$$

$$M_1 = w_1 \frac{\partial f}{\partial w_1} + w_2 \frac{\partial f}{\partial w_2}, \qquad M_2 = w_1 \frac{\partial f}{\partial w_2}, \qquad M_3 = w_1 \frac{\partial f}{\partial w_3}, \tag{77}$$

$$(L_1, L_2) = 0, \qquad (L_1, L_3) = -L_3, \qquad (L_2, L_3) = 0, \tag{78}$$

$$(M_1, M_2) = 0, \qquad (M_1, M_3) = M_3, \qquad (M_2, M_3) = 0. \tag{79}$$

Les transformations $L_2$ et $M_2$, respectivement distinguées dans $\mathcal{L}$ et $\mathfrak{M}$, sont identiques, conformément à la théorie de Lie.

L'inversion

$$w'_1 = \frac{1}{w_1}, \qquad w'_2 = -\frac{w_2}{w_1^2}, \qquad w'_3 = -\frac{w_3}{w_1}, \tag{80}$$

échange $L_1$ et $-M_1$, $L_2$ et $-M_2$, $L_3$ et $-M_3$. Enfin la transformation (74), effectuée dans les $L_i$, donne

$$(L_1) = L'_1 - a_3 L'_3, \qquad (L_2) = L'_2, \qquad (L_3) = a_1 L'_3. \tag{81}$$

Par suite

$$X_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + u_0[\varphi_1(u)L_1 + \varphi_2(u)L_2 + \varphi_3(u)L_3]$$

devient, par cette transformation (74),

$$(X_1) = \frac{\partial f}{\partial u} + \left(\frac{a'_1}{a_1} + u_0\varphi_1\right)L'_1 + \left(\frac{a'_2}{a_1} + u_0\varphi_2\right)L'_3 + (a'_3 - a_3 u_0\varphi_1 + a_1 u_0 \varphi_3)L'_3.$$

Aucun des $\varphi_i$ n'est nul; car, si l'un d'eux était nul, $\{X_1, X_3\}$ admettrait, outre les invariants $v$ et $v_0$, tout invariant de l'un des trois groupes $(L_h, L_j)$. De plus $\frac{\varphi_2}{\varphi_1}$ n'est pas une constante, car si l'on avait $\varphi_2 = c\varphi_1$, $(c = \text{const.})$, $\{X_1, X_3\}$ admettrait tout invariant du groupe $(L_1 + cL_2, L_3)$. On peut donc prendre $\frac{\varphi_2}{\varphi_1}$ pour nouvelle variable; et, par conséquent, en supposant ce changement de variable effectué, supposer $\varphi_2 = u\varphi_1$. Si l'on prend alors

$$a_1 = u\frac{\varphi_1}{\varphi_2}, \qquad a_2 = ua_1 - \int a_1\,du, \qquad a_3 = u, \qquad u'_0 = \frac{a'_1}{a_1} + u_0\varphi_1,$$

$\mathcal{F}_1$ sera réduit à la forme

$$(82) \qquad X_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + L_3 + u_0(L_1 + uL_2), \qquad X_3 = \frac{\partial f}{\partial u_0}.$$

En effectuant dans cette transformation l'inversion (80), accompagnée du changement de $u$ en $-v$ et de $u_0$ en $v_0$, on obtiendra la forme à laquelle on peut réduire $\mathcal{F}_2$, à savoir

$$(83) \qquad X_2 = \frac{\partial f}{\partial v} + M_3 + v_0(M_1 - vM_2), \qquad X_4 = \frac{\partial f}{\partial v_0}.$$

Le dérivé $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$ est alors

$$\frac{\partial f}{\partial u} + L_3, \quad \frac{\partial f}{\partial v} + M_3, \quad L_1 + uL_2, \quad M_1 - vM_2; \quad \frac{\partial f}{\partial u_0}, \quad \frac{\partial f}{\partial v_0};$$

et une de ses intégrales complètes sera fournie par trois invariants du sous-faisceau complet $\left\{L_1 + uL_2,\ M_1 - vM_2,\ \frac{\partial f}{\partial u_0},\ \frac{\partial f}{\partial v_0}\right\}$, soit

$$(84) \qquad x = u, \qquad y = v, \qquad z = \frac{w_2}{w_1} - u\log w_3 - v\log\frac{w_3}{w_1}.$$

En portant ces variables dans $X_1$ et $X_2$, on obtient, pour

$$p = X_1 z, \qquad q = X_2 z, \qquad s = X_2 p = X_1 q,$$

les expressions

$$(85)\quad \begin{cases} p = -\log w_3 - (u+v)\dfrac{1}{w_0}, \qquad q = -\log\dfrac{w_3}{w_1} - (u+v)\dfrac{w_1}{w_3}, \\ s = -\dfrac{1}{w_3} - \dfrac{w_1}{w_3} + (u+v)\dfrac{w_1}{w_3^2}; \end{cases}$$

et il ne reste qu'à éliminer $w_3$ et $\frac{w_3}{w_1}$ entre ces équations pour avoir l'équation E cherchée. On simplifie en posant

$$(86)\qquad \lambda = (u+v)\frac{1}{w_3}, \qquad \mu = (u+v)\frac{w_1}{w_3},$$

ce qui donne

$$(87)\qquad p + \log(u+v) = \log\lambda - \lambda, \qquad q + \log(u+v) = \log\mu - \mu,$$

$$(88)\qquad s + \frac{1}{u+v} = \frac{1}{u+v}(\lambda - 1)(\mu - 1).$$

ceci conduit à remplacer $z$ par

$$(89)\qquad z' = z + (u+v)\log(u+v),$$

ce qui ramènera (88) à la forme

$$(\mathrm{C}_{\mathrm{ii}})\qquad s(x+y) = \theta(p)\theta(q),$$

la fonction $\theta(w)$ étant définie par l'équation

$$(90)\qquad \log(1+\theta) - \theta = w.$$

Le changement de variable

$$(91)\qquad z' = i\frac{\pi}{2}(x+y) - z.$$

transforme cette équation en l'équation (V) de Goursat

$$(\mathrm{V})\qquad s(x+y) + \varphi(p)\,\varphi(q) = 0$$

dans laquelle $\varphi(w)$ est définie par l'équation

$$(92)\qquad \log(\varphi - 1) + \varphi = w.$$

**58.** Passons à l'intégration de $C^3_{II}$. Le dérivé second de $\mathcal{F}_1$

$$\Omega = \frac{\partial f}{\partial u} + L_3, \qquad \Omega_1 = L_1 + u L_2, \qquad \Omega_2 = L_2 + L_3, \qquad \frac{\partial f}{\partial u_0},$$

a pour transformation distinguée $\Omega$, qui admet pour invariants $w_1$, $w_2$, $w_3 - u$. Nous prendrons, pour réduire $\mathcal{F}_1$ à sa forme canonique, deux variables conjuguées $\alpha$ et $\alpha_0$ qui soient des invariants communs à $\Omega$ et $\Omega_2$, soit

$$\text{(93)} \qquad \alpha = w_1, \qquad \alpha_0 = w_3 - u - \frac{w_2}{w_1}.$$

Comme on a $X_1 = \Omega + u_0 \Omega_1$, il vient ensuite

$$X_1 \alpha = u_0 \Omega_1 \alpha = u_0 \alpha, \qquad X_1 \alpha_0 = u_0 \Omega_1 \alpha_0 = u_0 (w_3 - u), \qquad \alpha_1 = \frac{X_1 \alpha_0}{X_1 \alpha} = \frac{w_3 - u}{\alpha},$$

$$X_1 \alpha_2 = u_0 \Omega_1 \alpha_2 = u_0 \frac{u}{\alpha}, \qquad \alpha_2 = \frac{X_1 \alpha_1}{X_1 \alpha} = \frac{u}{\alpha^2},$$

donc

$$\text{(94)} \qquad \alpha_1 = \frac{w_3 - u}{\alpha}, \qquad \alpha_2 = \frac{u}{\alpha^2}.$$

L'intégrale générale de $\mathcal{F}_1$ est ainsi, $\varphi$ étant une fonction arbitraire de $\alpha$,

$$\text{(95)} \quad u = \alpha^2 \varphi'', \qquad w_1 = \alpha, \qquad w_2 = \alpha(\alpha\varphi' - \varphi), \qquad w_3 = \alpha(\alpha\varphi'' + \varphi').$$

L'intégrale générale de $\mathcal{F}_2$ en résultera par l'inversion (80), accompagnée du changement de $u$ en $-v$; en remplaçant $\alpha$ par $\beta$ et $\varphi(\alpha)$ par $-\psi(\beta)$, ce sera donc

$$\text{(96)} \qquad v = \beta^2 \psi'', \qquad w_1 = \frac{1}{\beta}, \qquad w_2 = \frac{\beta\psi' - \psi}{\beta}, \qquad w_3 = \beta\psi'' + \psi'.$$

Les formules (73), où les $w_i$ remplacent les $c_i$, et où les $a_i$ et $b_i$ sont remplacés par les expressions des $w_i$ données, respectivement, par (95) et (96), donnent alors l'intégrale générale de $\mathcal{F}$

$$\text{(97)} \quad \left\{ \begin{aligned} & u = \alpha^2\varphi'', \qquad v = \beta^2\psi'', \qquad w_1 = \frac{\alpha}{\beta}, \qquad w_2 = \frac{\alpha}{\beta}(\alpha\varphi' - \varphi + \beta\psi' - \psi), \\ & \qquad\qquad w_3 = \alpha(\alpha\varphi'' + \varphi' + \beta\psi'' + \psi'); \end{aligned} \right.$$

et les formules (84) fournissent l'intégrale générale de $C_{II}^3$

$$(98)\quad \begin{cases} x = \alpha^2\varphi'', \qquad y = \beta^2\psi'', \\ z = \alpha\varphi' - \varphi + \beta\psi' - \psi - x\log(\alpha H) - y\log(\beta H) + (x+y)\log(x+y) \\ \text{où } H = \alpha\varphi'' + \varphi' + \beta\psi'' + \psi'. \end{cases}$$

**59.** Cas $m = 2$. — Ce cas ne présente rien d'exceptionnel, mais nous devons le signaler parce qu'il conduit à l'équation II de Goursat, à savoir

$$(\mathrm{II})\qquad sz = \sqrt{1+p^2}\sqrt{1+q^2}.$$

L'équation (20) devient, en effet, dans ce cas

$$w^2 - \theta^2 = 1, \qquad \theta = \sqrt{w^2 - 1},$$

de sorte que $C_{II}^1$ est alors

$$(99)\qquad sz + \sqrt{p^2-1}\sqrt{q^2-1} = 0,$$

d'où on passe à l'équation (II) par le changement de variables

$$(100)\qquad x' = ix, \qquad x' = iy, \qquad z' = -z.$$

**60.** — Comme représentant de la structure III, nous prendrons le groupe

$$(1)\qquad x' = c_1 x + c_2 y + c_3, \qquad y' = y + \log c_1,$$

qui donne les équations de structure

$$(2)\qquad c_1 = a_1 b_1, \qquad c_2 = a_1 b_2 + a_2, \qquad c_3 = a_1 b_3 + a_2 \log b_1 + a_3,$$

et les deux groupes paramétriques

$$(3)\quad (\mathcal{L}),\qquad w'_1 = a_1 w_1, \qquad w'_2 = a_1 w_2 + a_2, \qquad w'_3 = a_1 w_3 + a_2 \log w_1 + a_3,$$

$$(4)\quad (\mathfrak{M}),\qquad w'_1 = b_1 w_1, \qquad w'_2 = w_2 + b_2 w_1, \qquad w'_3 = w_3 + (\log b_1) w_2 + b_3 w_1.$$

Les transformations infinitésimales de base de ceux-ci seront

$$(5)\quad L_1 = w_\alpha \frac{\partial f}{\partial w_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, 3), \qquad L_2 = \frac{\partial f}{\partial w_2} + \log w_1 \frac{\partial f}{\partial w_3}, \qquad L_3 = \frac{\partial f}{\partial w_3},$$

$$(6)\qquad M_1 = w_1 \frac{\partial f}{\partial w_1} + w_2 \frac{\partial f}{\partial w_3}, \qquad M_2 = w_1 \frac{\partial f}{\partial w_2}, \qquad M_3 = w_1 \frac{\partial f}{\partial w_3},$$

avec les formules de structure

$$(7)\qquad (L_1, L_2) = L_3 - L_2, \qquad (L_1, L_3) = -L_3, \qquad (L_2, L_3) = 0,$$
$$(8)\qquad (M_1, M_2) = M_2 - M_3, \qquad (M_1, M_3) = M_3, \qquad (M_2, M_3) = 0.$$

Si l'on effectue dans les $L_i$ la transformation (3), on obtient

$$(9)\qquad (L_1) = L'_1 - a_2 L'_2 + (a_2 - a_3) L'_3, \qquad (L_2) = a_1 L'_2, \qquad (L_3) = a_1 L'_3.$$

On en conclut, comme au n° **44**, que l'on pourra prendre

$$(10)\qquad X_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + m_2(u) L_2 + m_3(u) L_3 + u_0 L_1.$$

Par ailleurs, on passe de $\mathcal{L}$ à $\mathcal{M}$, et inversement, par l'inversion

$$(11)\qquad w'_1 = \frac{1}{w_1}, \qquad w'_2 = -\frac{w_2}{w_1}, \qquad w'_3 = \frac{w_2 \log w_1 - w_3}{w_1}:$$

elle échange $L_1$ et $-M_1$, $L_2$ et $-M_2$, $L_3$ et $-M_3$. On pourra donc prendre aussi

$$(12)\qquad X_2 = \frac{\partial f}{\partial v} + n_2(v) M_2 + n_3(v) M_3 + v_0 M_1.$$

Le faisceau $\mathcal{F}$ étant ainsi défini, cherchons l'équation E associée. Le dérivé $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$ contient le sous-faisceau complet $\left\{L_1, M_1; \frac{\partial f}{\partial u_0}, \frac{\partial f}{\partial v_0}\right\}$, où figurent les transformations distinguées de $\mathcal{F}'$, à savoir $\frac{\partial f}{\partial u_0}$ et $\frac{\partial f}{\partial v_0}$. On a donc, comme intégrale complète de $\mathcal{F}'$, le système fondamental d'invariants de ce sous-faisceau

$$(13)\qquad x = u, \qquad y = v, \qquad z = \frac{w_3}{w_2} + \log \frac{w_2}{w_1}.$$

Le changement de variables défini par ces équations (13), effectué dans $X_1$ et $X_2$, donne d'abord

$$p = \frac{1}{w_2}[m_2(1 - z + \log w_2) + m_3], \qquad q = \frac{w_1}{w_2}\left[n_2\left(1 - z + \log \frac{w_2}{w_1}\right) + n_3\right];$$

et ces formules peuvent s'écrire simplement

$$(14)\qquad pe^z = m_0 \alpha (1 - \log \alpha), \qquad qe^z = n_0 \beta (1 - \log \beta),$$

si l'on pose

$$(15)\qquad \lambda = \frac{1}{w_2} e^{z - \frac{m_3}{m_2}}, \qquad \mu = \frac{w_1}{w_2} e^{z - \frac{n_1}{n_2}}, \qquad m_0 = m_2 e^{\frac{m_3}{m_2}}, \qquad n_0 =$$

ce qui est licite parce que ni $m_2$, ni $n_2$ n'est nul [1].

Ceci conduit à prendre pour variables, au lieu des v

$$(16)\qquad x = \int m_0 du, \qquad y = \int n_0 dv, \qquad z = \frac{w_2}{w_1} e^{\frac{w_3}{w_2}},$$

de sorte qu'on aura

$$(17)\qquad p = \lambda(1 - \log\lambda), \qquad q = \mu(1 - \log\mu), \qquad \lambda = \frac{z}{w_2} e^{-\frac{m_3}{m_2}},$$

On tire alors de là

$$s = -\lambda\log\lambda\left(\frac{q}{z} - \frac{1}{w_2}\frac{1}{n_0}X_2 w_2\right) = -\lambda\log\lambda\left(\frac{q}{z} - \frac{w_1}{n_0 w}\right.$$

ou, compte tenu de (17) et de la valeur de $n_0$ donnée par

$$(18)\qquad sz = (\lambda\log\lambda)(\mu\log\mu).$$

L'équation E cherchée est donc

$$(\mathrm{C_{III}})\qquad sz = \theta(p)\,\theta(q),$$

où la fonction $\theta(w)$ est définie par l'élimination de $\lambda$ ent

$$(19)\qquad w = \lambda(1 - \log\lambda), \qquad \theta = \lambda\log\lambda,$$

c'est-à-dire par l'équation

$$(20)\qquad \theta = (w + \theta)\log(w + \theta).$$

Ce type $\mathrm{C_{III}}$ correspond au cas singulier signalé par Gou équation IV, que nous avons rencontrée au n° **52**,

$$(\mathrm{IV})\qquad sz + \varphi(p)\varphi(q) = 0,$$

---

[1] Si l'on avait, par exemple, $m = 0$, $\mathcal{F}_1$ admettrait, outre $v$ et $v$ invariant, qui serait tout invariant du faisceau complet $\{L_1, L_3$ nous supposons que ni $\mathcal{F}_1$, ni $\mathcal{F}_2$ n'a plus de deux invariants indép

où la fonction $\varphi(w)$ peut être définie comme intégrale de l'équation

$$\frac{d\varphi}{dw} = \frac{w}{\varphi} + k, \tag{21}$$

$k$ étant une constante arbitraire. Le cas singulier a lieu pour $k = \pm 2i$.

La fonction $\theta(w)$, définie par l'équation (20), est, en effet, une intégrale de l'équation

$$\frac{d\theta}{dw} + \frac{w}{\theta} + 2 = 0, \tag{22}$$

qui se ramène à (21) en posant $\theta = i\varphi$ : ce qui change $C_{III}$ en (IV).

**61.** — L'équation $C_{III}$ provient, du reste de $C'_{II}$ par un passage à la limite. Si l'on fait tendre, en effet, $m$ vers zéro dans les équations $C'_{II}$ et (19) du n° **52**, on obtient la forme $C_{III}$, la fonction $\theta$ étant définie par l'élimination de $\lambda$ entre les équations

$$w = \lambda(1 - \log\lambda), \qquad \theta = -\lambda\log\lambda. \tag{23}$$

Or celles-ci ne diffèrent des équations (19) que par le changement de $\theta$ en $-\theta$, lequel n'altère pas la forme de $C_{III}$.

La structure III peut, du reste, être considérée comme un cas limite de la structure II, obtenu en faisant tendre $m$ vers zéro. Si, en effet, on prend comme représentant de la structure II le groupe

$$\mathfrak{X}_1 = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \mathfrak{X}_2 = e^{(m-1)x}\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad \mathfrak{X}_3 = e^{-x}\frac{\partial f}{\partial y}. \tag{24}$$

qui a les mêmes formules de structure

$$(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2) = (m-1)\mathfrak{X}_2, \qquad (\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_3) = -\mathfrak{X}_3, \qquad (\mathfrak{X}_2, \mathfrak{X}_3) = 0, \tag{25}$$

que le groupe (4) du n° **52** [1], on ne peut y faire $m = 0$, car cela rendrait $\mathfrak{X}_2$ identique à $\mathfrak{X}_3$; mais on peut faire tendre $m$ vers zéro en prenant comme transformations de base

$$\mathfrak{X}_1, \quad \mathfrak{X}'_2 = \frac{\mathfrak{X}_2 - \mathfrak{X}_3}{m}, \qquad \mathfrak{X}_3.$$

---

[1] Le groupe (1) du n° **52** donne aussi, bien entendu, ces mêmes formules de structure (25). On les obtient en le définissant par ses transformations infinitésimales

$$\mathfrak{X}_1 = x\frac{\partial f}{\partial x} + my\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad \mathfrak{X}_2 = y\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \mathfrak{X}_3 = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Cela donne, à la limite, le groupe

$$(26)\qquad \mathfrak{X}_1 = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \mathfrak{X}'_2 = x e^{-x}\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad \mathfrak{X}_3 = e^{-x}\frac{\partial f}{\partial y},$$

dont les formules de structure,

$$(27)\qquad (\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}'_2) = \mathfrak{X}_3 - \mathfrak{X}'_2, \qquad (\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_3) = -\mathfrak{X}_3, \qquad (\mathfrak{X}_2, \mathfrak{X}_3$$

sont identiques à celles du groupe (5) du n° **60** ci-dessu est, par conséquent, un représentant de la structure III.

**62.** — L'équation $C_{III}$ ne dépendant pas du choix de $m_i$ et $n_i$ introduits dans les formules initiales (10) et (12), n supposer maintenant

$$(28)\qquad m_2 = 1, \qquad m_3 = 0, \qquad n_2 = 1, \qquad n_3 = 0,$$

c'est-à-dire

$$(29)\qquad X_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + L_2 + u_0 L_1, \qquad X_2 = \frac{\partial f}{\partial v} + M_2 + v_0 M_1;$$

et au lieu de (16) et (17),

$$(30)\qquad x = u, \qquad y = v, \qquad z = \frac{w_2}{w_1} e^{\frac{w_3}{w_1}},$$

$$(31)\qquad p = \lambda(1 - \log\lambda), \qquad q = \mu(1 - \log\mu), \qquad \lambda = \frac{z}{w_2}, \qquad \mu$$

On aura donc, pour $r = X_1 p$, $t = X_2 q$,

$$r = -\lambda \log\lambda\left[\frac{p}{z} - \frac{1}{w_2}(1 + u_0 w_2)\right] = \theta(p)\left[\frac{\theta(p)}{z} + u\right.$$

$$t = -\mu\log\mu\left[\frac{q}{z} - \frac{w_1}{w_2} + v_0\right] \qquad = \theta(q)\left[\frac{\theta(q)}{z} - v\right.$$

De là les invariants du second ordre de $\mathcal{F}_1$ et de $\mathcal{F}_2$, e de $C_{III}$,

$$(32)\qquad u_0 = \frac{r}{\theta(p)} - \frac{\theta(p)}{z}, \qquad -v_0 = \frac{t}{\theta(q)} - \frac{\theta(q)}{z}.$$

---

(1) Le groupe (1) du même numéro donne aussi, naturellemen de structure (27). Il suffit pour les obtenir, de le définir par ses t infinitésimales

$$\mathfrak{X}_1 = x\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad \mathfrak{X}'_1 = y\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \mathfrak{X}_3 = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

On remarquera que ces formules sont celles qu'on obtiendrait en faisant $m = 0$ dans les formules (26) du n° **52**, au changement près de $\theta$ en $-\theta$.

**63.** Passant à l'intégration de $C_{III}$, nous réduirons d'abord $\mathcal{F}_1$ à sa forme canonique. Son second dérivé $\mathcal{F}_1''$ est

$$\Omega f = \frac{\partial f}{\partial u} + L_2, \quad L_1, \qquad \Omega_1 f = L_2 - L_3, \quad \frac{\partial f}{\partial u_0}.$$

$\Omega$ en est une transformation distinguée, de sorte qu'on aura une intégrale complète en prenant deux invariants du sous-faisceau complet $\left\{\Omega, \Omega_1, \frac{\partial f}{\partial u_0}\right\}$, soit

$$\alpha = w_1, \qquad x_0 = u - w_3 + w_2(\log w_1 - 1). \tag{33}$$

On a alors, $X_1$ étant $\Omega + u_0 L_1$,

$$X_1 \alpha = u_0 \alpha, \qquad X_1 x_0 = u_0(w_2 - x_0 - u),$$

d'où

$$\alpha_1 = \frac{X_1 x_0}{X_1 \alpha} = \frac{w_2 - x_0 - u}{\alpha}. \tag{34}$$

Ensuite, on trouve

$$X_1 x_1 = u_0 \frac{w_2}{\alpha},$$

d'où

$$x_2 = \frac{X_1 \alpha_1}{X_1 \alpha} = \frac{w_2}{\alpha^2}. \tag{35}$$

L'intégrale générale de $\mathcal{F}_1$ est ainsi, $\varphi$ étant une fonction arbitraire de $\alpha$,

$$w_1 = \alpha, \qquad w_2 = \alpha^2 \varphi'', \qquad u = \alpha^2 \varphi'' - \alpha \varphi' + \varphi, \qquad w_3 = \alpha^2 \varphi'' \log \alpha - \alpha \varphi'. \tag{36}$$

On passe de $X_1$ à $X_2$ par le changement de variables (11), accompagné du changement de $u$ en $-v$ et de $u_0$ en $v_0$. On déduit ainsi, de (36), l'intégrale de $\mathcal{F}_2$

$$w_1 = \frac{1}{\beta}, \qquad w_2 = \beta \psi'', \qquad v = \beta^2 \psi'' - \beta \psi' + \psi, \qquad b_3 = -\psi'. \tag{37}$$

Pour la symétrie des valeurs de $u$ et $v$, nous avons remplacé la fonction arbitraire $\varphi(\alpha)$ par $-\psi(\beta)$. Des formules (2) on déduit, comme dans les calculs analogues, l'intégrale générale de

$$(38)\quad \begin{cases} w_1 = \dfrac{\alpha}{\beta}, \qquad w_2 = \alpha(\alpha\varphi'' + \beta\psi''), \qquad w_3 = \alpha^2\varphi'' \log\dfrac{\alpha}{\beta} \\ u = \alpha^2\varphi'' - \alpha\varphi' + \varphi, \qquad v = \beta^2\psi'' - \beta\psi' + \psi; \end{cases}$$

et les équations (30) donnent alors l'intégrale générale d

$$(39)\quad \begin{cases} x = \alpha^2\varphi'' - \alpha\varphi' + \varphi, \qquad y = \beta^2\psi'' - \beta\psi' + \psi, \\ \log z = \dfrac{\alpha\varphi''\log\alpha + \beta\psi''\log\beta - \varphi' - \psi'}{\alpha\varphi'' + \beta\psi''} + \log(\alpha\varphi'' + \beta\psi \end{cases}$$

Remarquons pour terminer que, d'après ce que l'on a on doit pouvoir obtenir l'intégrale générale de $C_{III}$ en fais vers zéro dans les formules (42), du n° **53**, qui donne générale de $C_{II}^1$. On retrouve ainsi exactement les équati nous venons d'obtenir. Cela est évident pour les expr et de $y$, et, pour $z$, cela résulte de l'application de la règle à la formule

$$\log z = \frac{\log(\alpha^{m+1}\varphi'' + \beta^{m+1}\psi'') + (m-1)\log(\alpha\varphi'' + \beta\psi'' + m}{m}$$

qui équivaut à l'équation en $z^m$ des formules (42) du n° 5

IX. — **Suite et fin des Types intégrables fournis par à trois paramètres. 3° Structure comportant une tr distinguée et Structure abélienne.**

**64.** Comme représentant de la structure IV, je prend

$$(40)\qquad x' = x + c_3 y + c_1, \qquad y' = y + c_2,$$

dont les formules de structure sont

$$(41)\qquad c_1 = a_1 + b_1 + a_3 b_2, \qquad c_2 = a_2 + b_2, \qquad c_3 = a_3 + b$$

Les groupes paramétriques seront donc

$$(42)\qquad (\mathcal{L})\quad w_1' = w_1 + a_3 w_2 + a_1, \qquad w_2' = w_2 + a_2, \qquad w_3' = w$$

$$(42\ bis)\qquad L_1 = \frac{\partial f}{\partial w_1}, \qquad L_2 = \frac{\partial f}{\partial w_2}, \qquad L_3 = \frac{\partial f}{\partial w_3} + w_2\frac{\partial f}{\partial w_1},$$

et

$$(43)\qquad w'_1 = w_1 + b_2 w_3 + b_1,\qquad w'_2 = w_2 + b_2,\qquad w'_3 = w_3 + b_3,$$

$$(43\ bis)\qquad M_1 = \frac{\partial f}{\partial w_1},\qquad M_2 = \frac{\partial f}{\partial w_2} + w_3\frac{\partial f}{\partial w_1},\qquad M_3 = \frac{\partial f}{\partial w_3},$$

avec les formes de structure

$$(44)\qquad (L_1,\ L_2) = 0,\qquad (L_1,\ L_3) = 0,\qquad (L_2,\ L_3) = \ \ L_1,$$

$$(45)\qquad (M_1,\ M_2) = 0,\qquad (M_1,\ M_3) = 0,\qquad (M_2,\ M_3) = -M_1.$$

La transformation (42) change les $L_i$ en

$$(46)\qquad (L_1) = L'_1,\qquad (L_2) = a_3 L'_1 + L'_2,\qquad (L_3) = L'_3 - a_2 L'_1;$$

et, par suite, elle change

$$X_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + u_0\varphi_\alpha(u)L_\alpha\qquad (\alpha = 1,\ 2,\ 3)$$

en

$$\frac{\partial f}{\partial u} + [u_0(\varphi_1 + a_3\varphi_2 - a_2\varphi_3) - a_2 a'_3]L'_1 + (a'_2 + u_0\varphi_2)L'_2 + (a'_3 + u_0\varphi_3)L'_3.$$

On en conclut que l'on peut ramener $X_1$ à la forme

$$(47)\qquad X_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + m(u)L_1 + u_0(L_2 + uL_3),$$

en posant

$$(48)\qquad \varphi_1 + a_3\varphi_2 - a_2\varphi_3 = 0,\qquad a'_2\varphi_3 - a'_3\varphi_2 = 0,\qquad u' = \frac{\varphi_3}{\varphi_2},$$

et modifiant $u_0$ en conséquence.

Par ailleurs, l'inversion

$$(49)\qquad w'_1 = -w_1 + w_2 w_3,\qquad w'_2 = -w_2,\qquad w'_3 = -w_3$$

échange $L_i$ et $-M_i$; de sorte que si on l'accompagne du changement de $v$ en $-v$, elle change (47) en

$$(50)\qquad X_2 = \frac{\partial f}{\partial v} + n(v)M_1 + v_0(M_2 - vM_3),$$

$u_0$ étant remplacé par $-v_0$. On définira donc le faisceau $\mathcal{F}$ par les transformations (47) et (50), jointes à $X_3 = \frac{\partial f}{\partial u_0}$, $X_4 = \frac{\partial f}{\partial v_0}$.

Le dérivé $\mathcal{F}'$ sera, abstraction faite de ces dernières,

$$\frac{\partial f}{\partial u} + m L_1, \quad \frac{\partial f}{\partial v} + n M_1, \quad L_2 + u L_3, \qquad M_2 - v M_3;$$

et pour sa réduction à la forme canonique qui conduira à l
associée à $\mathcal{F}$, on pourra prendre l'intégrale complète fo
et un invariant de $\{ L_2 + u L_3,\ M_2 - v M_3 \}$, soit

$$(51) \qquad x = u, \qquad y = v, \qquad z = w_1 + \frac{w_3^2 - 2 u w_2 w_3 - u v w_2^2}{2(u + v)}$$

Le changement de variables défini par ces formules d
$X_1$ et $X_2$,

$$p = X_1 z = m - \frac{1}{2}\left(\frac{w_3 + v w_2}{u + v}\right)^2, \qquad q = X_2 z = n - \frac{1}{2}\left(\frac{w_3 -}{u \cdot}\right.$$

ce qui conduit à introduire, à la place de $z$,

$$(52) \qquad z' = 2\left(\int m\, du + n\, dv - z\right).$$

On aura alors

$$(53) \qquad \sqrt{p'} = \frac{w_3 + v w_2}{u + v}, \qquad \sqrt{q'} = \frac{w_3 - u w_2}{u + v};$$

et $s' = X_2 p' = X_1 q'$ sera donnée, par exemple, par

$$\frac{s'}{2\sqrt{p'}} = \frac{w_2}{u + v} - \frac{w_3 + v w_2}{(u + v)^2} = \frac{u w_2 - w_3}{(u + v)^2} = -\frac{\sqrt{q'}}{u + v}.$$

D'où l'équation E cherchée, (en laissant tomber les accent

$$(C_{IV}) \qquad s + \frac{2\sqrt{pq}}{x + y} = 0.$$

C'est, au changement près du signe devant le radical
indifférent, le type (I) de Goursat,

$$(I) \qquad s = \frac{2\sqrt{pq}}{x + y}.$$

Le résultat auquel nous sommes arrivés ne dépend pa
de $m(u)$ et $n(v)$. En conséquence, nous supposons pour
calcul (invariants et intégration)

$$(54) \qquad m = 0, \qquad n = 0,$$

c'est-à-dire

$$(55) \qquad X_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + u_0(L_2 + uL_3), \qquad X_2 = \frac{\partial f}{\partial v} + v_0(M_1 - vM_3).$$

D'après (53), on aura, pour $r' = X_1 p'$:

$$\frac{r'}{2\sqrt{p'}} = -\frac{\sqrt{p'}}{u+v} + u_0,$$

d'où les invariants de $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ (respectivement), et de E,

$$(56) \qquad u_0 = \frac{r}{2\sqrt{p}} + \frac{\sqrt{p}}{x+y}, \qquad -v_0 = \frac{t}{2\sqrt{q}} + \frac{\sqrt{q}}{x+y}.$$

**65.** Passant à l'intégration de $C_{IV}$, nous allons réduire $\mathcal{F}_1$ à sa forme canonique. Le dérivé second $\mathcal{F}''_1$ est

$$(57) \qquad \Omega = \frac{\partial f}{\partial u}, \qquad \Omega_1 = L_2 + uL_3, \quad L_3; \quad \frac{\partial f}{\partial u_0},$$

et $\Omega$ en est transformation distinguée. Nous prendrons, en conséquence, pour variables conjuguées deux invariants de $\left\{\frac{\partial f}{\partial u}, L_3\right\}$:

$$(58) \qquad \alpha = w_2, \qquad \alpha_0 = w_2 w_3 - w_1.$$

On aura

$$X_1\alpha = u_0, \qquad X_1\alpha_0 = u_0 w_3, \qquad \alpha_1 = \frac{X_1\alpha_0}{X_1\alpha} = w_3,$$

$$X_1\alpha_1 = u_0 u, \qquad \alpha_2 = \frac{X_1\alpha_1}{X_1\alpha} = u;$$

et l'intégrale générale de $\mathcal{F}_1$ est ainsi

$$(59) \qquad w_1 = \alpha\varphi' - \varphi, \qquad w_2 = \alpha, \qquad w_3 = \varphi, \qquad u = \varphi'',$$

$\varphi$ étant une fonction arbitraire de $\alpha$. D'après ce qu'on a vu pour le passage de $\mathcal{F}_1$ à $\mathcal{F}_2$, on en déduit l'intégrale générale de $\mathcal{F}_2$ en y changeant $u$ en $-v$, $\alpha$ en $\beta$, et $\varphi(\alpha)$ en $-\psi(\beta)$, les nouveaux $w_i$ dérivant des fonctions (59) par l'inversion (49), ce qui donne

$$(60) \qquad w_1 = -\psi, \qquad w_2 = -\beta, \qquad w_3 = \psi', \qquad v = \psi''.$$

D'après la théorie générale, il ne reste plus, pour avoir l'intégrale générale de $\mathcal{F}$, qu'à prendre pour les $w_i$ les seconds membres des formules (41), où les $a_i$ seront les seconds membres des trois premières équations (59) et les $b_i$ ceux des trois premières équations (60), ce qui donne

$$(61)\quad \begin{cases} w_1 = -\varphi - \psi + (\alpha - \beta)\varphi', \qquad w_2 = \alpha - \beta, \qquad w_3 = \varphi' + \psi', \\ u = \varphi'', \qquad v = \psi''. \end{cases}$$

D'après (51), (52) et (54), on en déduit l'intégrale générale de $C_{IV}$, qui est, après quelques réductions,

$$(62)\quad \begin{cases} x = \varphi'', \qquad y = \psi'', \\ z = \dfrac{(\alpha-\beta)^2\varphi''\psi'' + 2(\alpha-\beta)(\psi'\varphi'' - \varphi'\psi'') - (\varphi'+\psi')^2}{\varphi''+\psi''} + 2(\varphi+\psi). \end{cases}$$

**66.** Pour le type V de structure, le dernier à examiner, nous prenons comme représentant le groupe des translations,

$$(63)\qquad x' = x + c_1, \qquad y' = y + c_2, \qquad z' = z + c_3,$$

dont les formules de structure sont

$$(64)\qquad c_1 = a_1 + b_1, \qquad c_2 = a_2 + b_2, \qquad c_3 = a_3 + b_3,$$

et qui est identique, par conséquent, à ses deux groupes paramétriques. On a ainsi

$$(65)\qquad L_i = M_i = \frac{\partial f}{\partial w_i} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

$$(66)\qquad (L_i, L_j) = 0, \qquad (M_i, M_j) = 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3);$$

de sorte que le faisceau $\mathcal{F}$ à considérer est

$$(67)\quad \begin{cases} X_1 = \dfrac{\partial f}{\partial u} + u_0\varphi_\alpha(u)\dfrac{\partial f}{\partial w_\alpha}, \qquad X_2 = \dfrac{\partial f}{\partial v} + v_0\psi_\alpha(v)\dfrac{\partial f}{\partial w_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, 3), \\ X_3 = \dfrac{\partial f}{\partial u_0}, \qquad X_4 = \dfrac{\partial f}{\partial v_0}. \end{cases}$$

On ne peut pas ici faire disparaître les fonctions arbitraires. On pourrait faire $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = u$, $\psi_1 = 1$, $\psi_2 = v$, $\varphi_3$ et $\psi_3$ demeurant des fonctions arbitraires, mais il est préférable de garder, sans aucune particularisation, les $\varphi_i$ et les $\psi_i$ pour la symétrie des calculs. Nous supposerons seulement, afin de pouvoir simplifier ceux-ci, que les wronskiens des $\varphi_i$ et des $\psi_i$ sont égaux à l'unité, c'est-à-dire

$$(68)\qquad \underset{(i=1,2,3)}{\text{Dét.}}\,|\varphi_i \quad \varphi_i' \quad \varphi_i''| = 1, \qquad \underset{(i=1,2,3)}{\text{Dét.}}\,|\psi_i \quad \psi_i' \quad \psi_i''| = 1;$$

ce que l'on peut toujours obtenir en remplaçant $u_0$ par $u'_0 = \lambda(u)u_0$, et $v_0$ par $v'_0 = \mu(v)v_0$, et choisissant convenablement les fonctions $\lambda(u)$ et $\mu(v)$.

Le dérivé $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$ est

$$\frac{\partial f}{\partial u}, \quad \frac{\partial f}{\partial v}, \quad \varphi_\alpha \frac{\partial f}{\partial w_\alpha}, \quad \psi_\alpha \frac{\partial f}{\partial w_\alpha}; \quad \frac{\partial f}{\partial u_0}, \quad \frac{\partial f}{\partial v_0} \qquad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Pour obtenir une équation E associée à $\mathcal{F}$, nous pouvons prendre pour intégrale complète les fonctions $u$ et $v$ et un invariant du sous-faisceau complet $\left\{ \varphi_\alpha \frac{\partial f}{\partial w_\alpha}, \psi_\alpha \frac{\partial f}{\partial w_\alpha} \right\}$ $(\alpha = 1, 2, 3)$. Nous poserons donc

$$(69) \qquad x = u, \qquad y = v, \qquad z = w_\alpha \theta_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, 3),$$

avec

$$(70) \qquad \theta_1 = \varphi_2\psi_3 - \varphi_3\psi_2, \qquad \theta_2 = \varphi_3\psi_1 - \varphi_1\psi_3, \qquad \theta_3 = \varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1.$$

On a alors, pour $p = X_1 z$, $q = X_2 z$, $s = X_2 p = X_1 q$,

$$(71) \qquad p = w_\alpha \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial u}, \qquad q = w_\alpha \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial v}; \qquad s = w_\alpha \frac{\partial^2 \theta_\alpha}{\partial u \, \partial v} \qquad (\alpha = 1, 2, 3);$$

d'où, par élimination des $w_i$, une équation linéaire de la forme de Laplace, que j'écris, avec les notations de Darboux [1],

$$(72) \qquad s + ap + bq + cz = 0,$$

et dont je vais expliciter les coefficients. Comme on a

$$(73) \qquad \frac{\partial \theta_h}{\partial u} = \varphi'_i\psi_j - \varphi_j\psi'_i, \qquad \frac{\partial \theta_h}{\partial v} = \varphi_i\psi'_j - \varphi_j\psi'_i, \qquad \frac{\partial^2 \theta_h}{\partial u \, \partial v} = \varphi'_i\psi'_j - \varphi'_j\psi'_i,$$

$(h, i, j)$ provenant de $(1, 2, 3)$ par permutation circulaire, elle se présente d'abord sous la forme

$$(74) \qquad Ds - Ap + Bp - Cz = 0,$$

D, A, B, C étant les déterminants obtenus en rayant successivement la première, la deuxième, la troisième et la quatrième colonne de la matrice

$$\left\| \frac{\partial^2 \theta_h}{\partial u \, \partial v} \quad \frac{\partial \theta_h}{\partial u} \quad \frac{\partial \theta_h}{\partial v} \quad \theta_h \right\| \qquad (h = 1, 2, 3),$$

[1] G. Darboux, *Théorie des surfaces*, t. 2, Chap. I.

que l'on peut écrire, avec une notation que les formules (70) et (73) rendent évidente,

$$\|(\varphi'\psi')_h \quad (\varphi'\psi)_h \quad (\varphi\psi')_h \quad (\varphi\psi)_h\| \qquad (h=1,2,3). \tag{75}$$

**66** *bis*. L'expression de ces déterminants se transforme ensuite comme il suit. Prenant, par exemple, le déterminant D, je le multiplie par le déterminant

$$(\varphi\varphi'\psi) = \text{Dét.}\,|\varphi_h \quad \varphi'_h \quad \psi_h| \qquad (h=1,2,3), \tag{76}$$

ce qui donne

$$D(\varphi\varphi'\psi) = -(\varphi\varphi'\psi)(\varphi\psi'\psi)(\varphi'\varphi\psi),$$

d'où

$$D = -\varphi_\alpha \Psi_\alpha \psi'_\beta \Phi_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3), \tag{77}$$

avec

$$\left\{\begin{array}{l} \Phi_1(u) = \varphi_2\varphi'_3 - \varphi_3\varphi'_2, \qquad \Phi_2(u) = \varphi_3\varphi'_1 - \varphi_1\varphi'_3, \\ \qquad \Phi_3(u) = \varphi_1\varphi'_2 - \varphi_2\varphi'_1\,; \end{array}\right. \tag{78}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \Psi_1(v) = \psi_2\psi'_3 - \psi_3\psi'_2, \qquad \Psi_2(v) = \psi_3\psi'_1 - \psi_1\psi'_3, \\ \qquad \Psi_3(v) = \psi_1\psi'_2 - \psi_2\psi'_1. \end{array}\right. \tag{79}$$

On trouve de même

$$\left\{\begin{array}{l} A = -\varphi_\alpha \Psi_\alpha \psi'_\beta \Phi_\beta, \qquad B = \varphi'_\alpha \Psi_\alpha \psi_\beta \Phi_\beta, \qquad C = \varphi'_\alpha \Psi_\alpha \psi'_\beta \Phi_\beta \\ \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3). \end{array}\right. \tag{80}$$

Si donc on pose

$$E = \varphi_\alpha \Psi_\alpha, \qquad G = \psi_\alpha \Phi_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, 3), \tag{81}$$

on aura

$$a = -\frac{\partial \log G}{\partial y}, \qquad b = -\frac{\partial \log E}{\partial x}, \qquad c = ab. \tag{82}$$

L'équation (72) se présente donc sous ce que Darboux a appelé une forme réduite [1], qui sera la forme type cherchée

$$s + ap + bq + cz = 0, \tag{$C_V$}$$

---

[1] *Loc. cit.*, p. 26.

avec les notations (82), (81), (78), (79), et pour laquelle les hypothèses (68) n'ont pas eu à intervenir.

Les invariants $h$ et $k$, de Darboux, sont [1]

$$h = -\frac{\partial^2 \log G}{\partial x\,\partial y}, \qquad k = -\frac{\partial^2 \log E}{\partial x\,\partial y}. \tag{83}$$

Calculons les invariants suivants

$$h_1 = 2h - k - \frac{\partial^2 \log h}{\partial x\,\partial y}, \qquad k_1 = 2k - h - \frac{\partial^2 \log k}{\partial x\,\partial y}. \tag{84}$$

On a d'abord

$$h\,G^2 = \psi_\alpha \Phi'_\alpha \psi'_\beta \Phi_\beta - \psi'_\alpha \Phi'_\alpha \psi_\beta \Phi_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3). \tag{85}$$

Le second membre de cette formule est le produit des deux matrices

$$\begin{Vmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \\ \psi'_1 & \psi'_2 & \psi'_3 \end{Vmatrix}, \qquad \begin{Vmatrix} \Phi'_1 & \Phi'_2 & \Phi'_3 \\ \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 \end{Vmatrix}.$$

Les déterminants de la première sont $\Psi_1$, $\Psi_2$, $\Psi_3$. Pour calculer ceux de la seconde, il suffit de considérer le wronskien

$$\text{Dét.}\,|\varphi_i \quad \varphi'_i \quad \varphi''_i| \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{86}$$

Les $\Phi_i$ sont les mineurs des $\varphi''_i$, les $\Phi'_i$ sont les mineurs des $\varphi'_i$, pris en signes contraires; les déterminants cherchés sont donc égaux aux $\varphi_i$, d'après la théorie classique des déterminants adjoints, puisque le wronskien (86) est supposé égal à 1. On a donc, par (85),

$$h\,G^2 = \varphi_\alpha \Psi_\alpha = E,$$

c'est-à-dire

$$h = \frac{E}{G^2}, \qquad k = \frac{G}{E^2}. \tag{87}$$

Par suite, d'après (84),

$$h_1 = 2\frac{E}{G^2} - \frac{G}{E^2} - \frac{\partial^2 \log E}{\partial x\,\partial y} + 2\frac{\partial^2 \log G}{\partial x\,\partial y},$$

et ce résultat est nul d'après (83) et (87).

---

[1] $h = \dfrac{\partial a}{\partial x} + ab - c$, $k = \dfrac{\partial b}{\partial y} + ab - c$.

On a donc affaire aux équations de Laplace pour lesquelles les invariants $h_1$ et $k_1$ sont tous deux nuls.

**67.** Nous aurons une nouvelle concordance de la théorie de Darboux, pour les équations de Laplace, et de notre présente théorie, pour la forme de l'intégrale générale de $C_v$, que nous allons chercher maintenant, toujours en supposant les conditions (68) réalisées.

Réduisons d'abord $\mathcal{F}_1$ à sa forme canonique. Son dérivé second $\mathcal{F}_1''$ est

$$\frac{\partial f}{\partial u}, \quad \Omega = \varphi_\alpha \frac{\partial f}{\partial w_\alpha}, \qquad \varphi'_\alpha \frac{\partial f}{\partial w_\alpha}; \quad \frac{\partial f}{\partial u_0}.$$

$\Omega$ est transformation distinguée, et nous prendrons comme variables conjuguées deux invariants de $\left\{ \varphi_\alpha \frac{\partial f}{\partial w_\alpha}, \varphi'_\alpha \frac{\partial f}{\partial w_\alpha} \right\}$, soit

$$(88) \qquad \alpha = u, \qquad \alpha_0 = w_\gamma \Phi_\gamma \qquad (\gamma = 1, 2, 3).$$

Il viendra

$$X_1 \alpha = 1, \qquad X_1 \alpha_0 = w_\gamma \Phi'_\gamma = \alpha_1, \qquad X_1 \alpha_1 = w_\gamma \Phi''_\gamma = \alpha_2 \qquad (\gamma = 1, 2, 3);$$

et l'intégrale générale de $\mathcal{F}_1$ sera définie par

$$(89) \quad w_\gamma \Phi_\gamma = \varphi(u), \qquad w_\gamma \Phi'_\gamma = \varphi'(u), \qquad w_\gamma \Phi''_\gamma = \varphi''(u) \qquad (\gamma = 1, 2, 3),$$

$\varphi(u)$ étant une fonction arbitraire.

L'intégrale générale de $\mathcal{F}_2$ sera définie d'une manière analogue, de sorte que, d'après (64), l'intégrale générale de $\mathcal{F}$ s'obtiendra par l'élimination des $a_i$ et $b_i$ entre les équations

$$(90) \quad \left\{ \begin{array}{llll} w_i = a_i + b_i, & a_\gamma \Phi_\gamma = \varphi, & a_\gamma \Phi'_\gamma = \varphi', & a_\gamma \Phi''_\gamma = \varphi'', \\ & b_\gamma \Psi_\gamma = \psi, & b_\gamma \Psi'_\gamma = \psi', & b_\gamma \Psi''_\gamma = \psi'' \\ & & (i, j = 1, 2, 3), & \end{array} \right.$$

$\varphi$ étant une fonction arbitraire de $u$ et $\psi$ une fonction arbitraire de $v$.

Pour en déduire l'intégrale générale de $C_v$, il suffira de calculer la combinaison

$$(91) \qquad z = \theta_\gamma w_\gamma = a_\gamma \theta_\gamma + b_\gamma \theta_\gamma \qquad (\gamma = 1, 2, 3).$$

Or on a, par exemple,

$$(92) \qquad a_\gamma \theta_\gamma = \text{Dét.}\,|\,a_i \quad \varphi_i \quad \psi_i\,| \qquad (i=1,2,3);$$

et en multipliant les deux membres par le wronskien des $\Phi_i$, on obtient au second membre un déterminant qui se réduit à

$$(93) \qquad \varphi_\gamma \Phi''_\gamma(\varphi'\psi_\gamma\Phi_\gamma - \varphi\psi_\gamma\Phi'_\gamma) \qquad (\gamma=1,2,3).$$

Or on a

$$\Phi''_h = (\varphi_i\varphi'''_j - \varphi_j\varphi'''_i) + (\varphi'_i\varphi''_j - \varphi'_j\varphi''_i),$$

$(h, i, j)$ dérivant de $(1, 2, 3)$ par permutation circulaire, d'où il résulte que le wronskien des $\Phi_i$ se décompose en deux déterminants dont l'un est nul et l'autre est l'adjoint du wronskien des $\varphi_i$, changé de signe, et aussi que $\varphi_\gamma\Phi''_\gamma$ se réduit à ce dernier wronskien. Donc le wronskien des $\Phi_i$ est égal à $-1$, et $\varphi_\gamma\Phi''_\gamma$ est égal à $1$; et l'on a, par suite,

$$a_\gamma\theta_\gamma = \varphi_\gamma\psi_\gamma\Phi'_\gamma - \varphi'\psi_\gamma\Phi_\gamma.$$

En tenant compte des notations (81), on a, en définitive, pour l'intégrale générale de $C_v$ cherchée,

$$(94) \qquad z = \varphi\frac{\partial G}{\partial x} - \varphi' G + \psi\frac{\partial E}{\partial y} - \psi' E,$$

$\varphi$ étant une fonction arbitraire de $x$, $\psi$ une fonction arbitraire, et E et G étant les déterminants

$$(95) \qquad E = \text{Dét.}\,|\,\varphi_i \quad \psi_i \quad \psi'_i\,|, \qquad G = \text{Dét.}\,|\,\psi_i \quad \varphi_i \quad \varphi'_i\,| \qquad (i=1,2,3)$$

(où les $\varphi_i$ sont des fonctions de $x$ et les $\psi_i$ des fonctions de $y$), qui servent à définir les coefficients (82) de $C_v$.

**68.** Il nous reste, pour achever, à calculer les invariants du second ordre de $\mathcal{F}_1$ et de $\mathcal{F}_2$, qui sont aussi ceux des deux systèmes de caractéristiques de $C_v$. Reprenant les formules (69) et (71), avec les notations des formules (75) et (76), nous avons

$$(96) \qquad z = (w\varphi\psi), \qquad p = (w\varphi'\psi), \qquad q = (w\varphi\psi')$$

et nous aurons ensuite, pour $r = X_1 p$,

$$(97) \qquad r = (w\varphi''\psi) + u_0(\varphi\varphi'\psi).$$

Le déterminant $(\varphi\varphi'\psi)$ est $\psi_\alpha \Phi_\alpha = G$. Pour calculer le déterminant $(w\varphi''\psi)$ en tirant les $w_i$ des formules (96), nous le multiplions par le déterminant

$$D = \text{Dét.}\,|\,(\varphi'\psi)_h \quad (\varphi\psi')_h \quad (\varphi\psi)_h\,| \qquad (h = 1, 2, 3),$$

dont la valeur est, d'après (77) et (81),

$$D = -EG. \tag{98}$$

On a ainsi

$$G(w\varphi''\psi) = z(\varphi''\varphi'\psi) - p\frac{\partial G}{\partial x}. \tag{99}$$

Reste à calculer le déterminant $(\varphi''\varphi'\psi) = \Delta$. Je lui substitue, à cet effet, son adjoint

$$\Delta^2 = \text{Dét.}\,|\,(\varphi'\psi)_h \quad (\psi\varphi'')_h \quad (\varphi''\varphi')_h\,|, \qquad (h = 1, 2, 3);$$

et je multiplie celui-ci par le déterminant

$$(\varphi\psi\psi') = \varphi_\alpha \Psi_\alpha = E.$$

J'obtiens ainsi l'identité

$$\Delta = \frac{1}{E}\left(G\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{\partial E}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial x}\right), \tag{100}$$

et j'ai, d'après (97) et (99),

$$u_0 = \frac{r}{G} - \frac{z}{G^2}\Delta + \frac{p}{G^2}\frac{\partial G}{\partial x}. \tag{101}$$

L'expression de $v_0$ en résultera, en échangeant E, G et $x$, $y$. On a ainsi, en définitive, pour les invariants cherchés,

$$\left\{\begin{aligned} u_0 &= \frac{1}{G^2}\frac{\partial(pG)}{\partial x} - \frac{z}{E}\frac{\partial\left(\frac{1}{G}\frac{\partial E}{\partial x}\right)}{\partial x}, \\ v_0 &= \frac{1}{E^2}\frac{\partial(qE)}{\partial y} - \frac{z}{G}\frac{\partial\left(\frac{1}{E}\frac{\partial G}{\partial y}\right)}{\partial y}. \end{aligned}\right. \tag{102}$$