JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PIERRE HUMBERT

Géométrie plane dans l'espace attaché à l'opérateur Δ_3

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 21 (1942), p. 141-153.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1942_9_21__141_0>

Géométrie plane dans l'espace attaché à l'opérateur Δ_3;

PAR PIERRE HUMBERT.

I. — Généralités et définitions.

1. BUT DE CE TRAVAIL. — Dans ses importants travaux sur l'équation

$$\Delta_3 U = \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial z^3} - 3\frac{\partial^3 U}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = 0.$$

M. Jacques Devisme a considéré (¹) l'espace attaché à l'opérateur Δ_3, où l'on appelle, par définition, *distance* d'un point à l'origine la quantité

$$\rho = (x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)^{\frac{1}{3}}.$$

Il a récemment repris cette étude (²), à laquelle j'ai moi-même apporté une contribution (³). Dans les pages qui suivent, je voudrais étudier quelques propriétés de *Géométrie plane* dans cet espace, c'est-à-dire considérer le plan (des xy) où la *distance* du point (x, y) à l'origine est donnée par

$$(x^3 + y^3)^{\frac{1}{3}}$$

et la distance $\overline{M_1 M_2}$ du point $M_1(x_1, y_1)$ au point $M_2(x_2, y_2)$, les axes étant rectangulaires, est donnée par

$$[(x_2 - x_1)^3 + (y_2 - y_1)^3]^{\frac{1}{3}}.$$

Comme on le verra, de curieux théorèmes peuvent être indiqués pour les courbes de ce plan, à condition d'introduire au début un certain nombre de *définitions* simples, extensions naturelles des définitions correspondantes pour le plan euclidien. Nous serons conduits, en particulier, à considérer sous un jour nouveau certaines cubiques planes, d'un intérêt euclidien mince, mais qui, dans notre plan, se révéleront comme des généralisations remarquables des cercles ou des coniques ordinaires.

(¹) *Ann. Fac. de Toulouse*, 3ᵉ série, t. 25, 1933, p. 143-238.
(²) *C. R. Acad. Sc.*, t. 208, 1939; p. 1543; *ibid.*, t. 208, 1939, p. 1773.
(³) *C. R. Acad. Sc.*, t. 208, 1939, p. 1965; *ibid.*, t. 209, 1939, p. 590.

Dans ce qui suit, nous emploierons couramment des termes ou des expressions géométriques, dans un sens différent du sens habituel. Nous prendrons soin de les écrire toujours en *italique*, réservant l'écriture romaine à ces mêmes termes pris dans leur sens euclidien. Par exemple, nous appellerons *distance* d'un point à l'origine la quantité $(x^3+y^3)^{\frac{1}{3}}$; mais nous appellerions distance d'un point à l'origine la quantité $(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$.

2. Directions isotropes. — Il résulte de la définition même de la *distance* qu'il existe dans le plan trois *directions isotropes*, données par

$$x^3+y^3=(x+y)(x+jy)(x+j^2y)=0.$$

On remarquera que l'une de ces directions est réelle (seconde bissectrice). Néanmoins, sur la droite réelle, $x+y=0$, la *distance* de deux points quelconques est nulle. Les points de rencontre avec la droite de l'infini de ces trois directions *isotropes* sont les trois *points cycliques* du plan.

3. Division harmonique. — Soient, sur une droite, trois points A_1, A_2, A_3, et un quatrième point A. Nous dirons qu'un point B de cette même droite est *conjugué harmonique* de A par rapport à A_1, A_2, A_3, si l'on a la relation

$$\frac{1}{AA_1}+\frac{1}{AA_2}+\frac{1}{AA_3}=\frac{3}{AB},$$

qui peut encore s'écrire

$$\frac{BA_1}{AA_1}+\frac{BA_2}{AA_2}+\frac{BA_3}{AA_3}=0.$$

La notion de *faisceau harmonique* (de $3+2$ directions) en découle aussitôt.

4. Orthogonalité. — Étant donnée une direction de coefficient angulaire m, nous dirons qu'une direction μ lui est orthogonale si μ est *conjugué harmonique* de m par rapport aux trois directions *isotropes*. Un calcul simple montre que l'on doit alors avoir la relation

$$\mu m^2=-1.$$

On voit aussitôt qu'il existe de plus une direction μ' telle que la direction m lui soit *orthogonale :* différente de μ, μ' est donnée par

$$\mu'^2 m=-1.$$

La direction $-\mu'$ jouit de la même propriété : mais nous nous bornerons à considérer la valeur positive. Nous sommes donc amenés à envisager, en un point M d'une droite Δ, deux directions attachées à Δ par des relations d'*orthogonalité :* la direction μ, que nous appellerons *première perpendiculaire* à Δ, et la direction μ', que nous appellerons *seconde perpendiculaire*.

Les deux *perpendiculaires* à l'axe horizontal sont confondues avec la verticale, et réciproquement. La *première perpendiculaire* à la droite isotrope réelle (seconde bissectrice) est cette droite elle-même; sa *seconde perpendiculaire* est la première bissectrice.

La tangente en un point d'une courbe étant unique, et définie comme dans le plan euclidien, on voit qu'on aura en ce point deux *normales* à la courbe, la *première et la deuxième perpendiculaire* à la tangente. Nous les appellerons respectivement *première et deuxième normales*. Il leur correspondra, sur l'axe des x, deux *sous-normales*. Les points caractéristiques sur chacune de ces *normales* sont les *premier et deuxième centres de courbure*.

5. Faisceaux orthogonaux de trois droites. — Trois droites concourantes, de coefficients angulaires m_1, m_2, m_3, seront dites former un *faisceau orthogonal* si l'on a

$$m_1 m_2 m_3 = -1.$$

Soient OA, OB, OC les trois rayons d'un tel faisceau : si OB et OC sont confondus, OA sera *première perpendiculaire* à ce rayon double; si OC est confondu avec OA, OA sera *deuxième perpendiculaire* à OB.

Soit γ une courbe donnée : on appellera courbe *orthoptique* de γ le lieu des points d'où l'on peut lui mener trois tangentes formant un *faisceau orthogonal*.

On appellera *foyer* d'une courbe tout point d'où l'on peut lui mener trois tangentes parallèles aux trois directions *isotropes*.

Les trois directions *isotropes* formant un *faisceau orthogonal*, l'*orthoptique* d'une courbe γ passera par les *foyers* de γ.

6. Bissectrices. — Soit un faisceau de trois directions concourantes, m_1, m_2, m_3. On appellera *bissectrice* de ce faisceau une direction μ, telle que sa *première perpendiculaire* lui soit *conjuguée harmonique* par rapport aux trois directions m_1, m_2, m_3.

Le calcul montre alors qu'il existe, pour un faisceau quelconque, quatre *bissectrices*, données par l'équation

$$\begin{aligned}\mu^4(m_1+m_2+m_3) - 2\mu^3(m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_3 m_1) + 3\mu^2(m_1 m_2 m_3 + 1)\\ - 2\mu(m_1+m_2+m_3) + m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_3 m_1 = 0.\end{aligned}$$

Si le faisceau possède un rayon double, une des *bissectrices* coïncide avec ce rayon.

7. Inversion. — Si un point $A(x, y)$ est situé à une *distance* ρ de l'origine O, nous appellerons *inverse* de ce point par rapport à O un point $P(x_1, y_1)$, situé sur OA, et tel que sa distance ρ_1 à O soit donnée par

$$\rho_1 \rho^2 = k^3.$$

k étant une constante (module de l'*inversion*). On voit que cette *inversion* n'est pas réciproque. On aura les formules

$$x_1 = \frac{k^3 x}{x^3 + y^3}, \qquad y_1 = \frac{k^3 y}{x^3 + y^3}.$$

Nous verrons dans les paragraphes qui suivent de nombreux exemples d'*inversion*. Pour le moment, signalons seulement que l'*inverse* d'une hyperbole équilatère $xy = a^2$ par rapport à son centre est un folium de Descartes

$$x_1^3 + y_1^3 - \frac{k^3}{a^2} x_1 y_1 = 0.$$

II. — Cercles.

8. Nous appellerons *cercle* toute courbe du troisième degré passant par les trois *points cycliques*.

L'équation d'un *cercle* sera donc de la forme

$$x^3 + y^3 + P_2(x, y) + P_1(x, y) + k = 0,$$

P_2 et P_1 étant des polynomes homogènes en x et y, de degrés respectifs 2 et 1.

L'*inverse* d'une conique par rapport à son centre est un *cercle*

$$x^3 + y^3 + P_2(x, y) = 0$$

ayant un point double à l'origine. Nous l'appellerons *cercle* Γ_1. Le folium de Descartes est une variété de Γ_1.

Si dans l'équation d'un *cercle* il n'y a pas de terme rectangle, on pourra toujours, par un changement de coordonnées, mettre cette équation sous la forme

$$x^3 + y^3 + ax + by + c = 0.$$

Nous désignerons un tel *cercle* par Γ_2.

Par un calcul évident, on démontrera que le *cercle* Γ_2 jouit d'une propriété remarquable : c'est le lieu du sommet d'un *faisceau orthogonal* dont les rayons passent chacun par un point fixe du plan.

Nous nous bornerons à étudier les courbes, que nous appellerons *cercles réduits*, dans lesquels la coordonnée y ne figure que par son cube. Cela nous conduira alors aux trois équations suivantes, correspondant à trois types de *cercles* que nous considérerons successivement

$$x^3 + y^3 = a^3 \qquad (\textit{cercle } C),$$
$$x^3 + y^3 + 3hx^2 = 0 \qquad (\textit{cercle } C_1),$$
$$x^3 + y^3 + 3a^2 x = b^3 \qquad (\textit{cercle } C_2);$$

nous y joindrons un cas particulier de ce dernier *cercle*,

$$x^3 + y^3 + 3a^2x = 0 \qquad (\textit{cercle } C'_2).$$

On remarquera d'ailleurs que C_1 et C sont des cas particuliers de C_2; mais leurs propriétés sont si importantes qu'il est nécessaire de les examiner à part.

9. Cercle C. — Sa propriété principale est évidente, c'est le lieu des points *équidistants* de l'origine, *centre* du *cercle*. La longueur a est le *rayon*. La courbe possède une asymptote réelle, $x + y = 0$. Elle est symétrique par rapport à la première bissectrice.

Le coefficient angulaire de la tangente en un point quelconque M étant

$$y' = -\frac{x^2}{y^2},$$

celui de la *seconde normale* sera $\frac{y}{x}$. D'où le

Théorème. — *Dans le* cercle C, *la* seconde normale *passe constamment par le* centre.

Si, par un point A extérieur au *cercle*, on mène une sécante rencontrant le *cercle* en A_1, A_2 et A_3, le lieu du *conjugué harmonique* de A par rapport à A_1, A_2, A_3 est la *polaire* de A par rapport au *cercle*. C'est une droite dont l'équation, en désignant par h et k les coordonnées de A, est

$$h^2x + k^2y = a^3.$$

Elle est *première perpendiculaire* à la droite OA. Mais la réciprocité euclidienne entre pôles et polaires n'existe pas ici.

Si l'on considère deux *cercles* C, $x^3 + y^3 = a^3$ et $(x - \alpha)^3 + y^3 = b^3$, leurs tangentes communes rencontreront la ligne des *centres* en trois points dont les abscisses seront données par

$$x = \frac{a\alpha}{a + \varepsilon b} \qquad (\varepsilon = 1, j, j^2).$$

Ce sont les trois *centres de similitude* des deux *cercles*. On remarquera qu'ils forment avec les deux *centres* des *cercles* une division *harmonique*.

10. Cercle C_1. — Son équation étant

$$x^3 + y^3 + 3hx^2 = 0,$$

on voit qu'il possède à l'origine un point de rebroussement à tangente verticale. Il coupe l'axe des x en un second point, $x = -3h$, où la tangente, également verticale, est d'inflexion. Son asymptote réelle a pour équation $x + y + h = 0$. Il existe une tangente horizontale au point $x = -2h$, $y = -h\sqrt[3]{4}$.

Les points $x = -4h$ et $x = -h$ sont des *foyers*, ce dernier double.

On démontrera aisément les théorèmes suivants :

THÉORÈME. — *Le* cercle C_1 *est l'*inverse *d'une droite verticale, ne passant pas par le* pôle d'inversion (*origine*).

THÉORÈME. — *Le* cercle C_1 *est le lieu du sommet d'un faisceau de deux droites* orthogonales (*quelle que soit d'ailleurs la nature de l'*orthogonalité), *dont les deux rayons passent par des points fixes* (*l'origine, et un point sur l'axe des x*).

THÉORÈME. — *L'*orthoptique *du* cercle C_1 *est un autre* cercle *de même type, déduit du premier par une translation horizontale d'amplitude* $-h$. *Le point de rebroussement de ce nouveau* cercle *est au foyer double de* C_1.

La présence dans le *cercle* C_1 d'un point de rebroussement à l'origine, et donc le fait que les rayons issus de ce point ne couperont le *cercle* qu'en un point mobile, permettent d'étendre à cette courbe diverses constructions classiques, et d'introduire ainsi des courbes nouvelles, par exemple :

A. *La cissoïdale.* — On l'obtiendra par la construction bien connue : soit une droite $x=a$; un rayon issu de O coupe le *cercle* en M et la droite en P : la *cissoïdale* sera le lieu d'un point Q de ce rayon, tel que $OQ=MP$. Son équation sera

$$x(x^3+y^3)+ay^3+(a+3h)x^3=0.$$

C'est donc une quartique *circulaire* ayant un point triple à l'origine. Dans le cas particulier où $a=-3h$, c'est-à-dire où la droite est tangente à C_1, on aura la *cissoïde*

$$x(x^3+y^3)-3hy^3=0,$$

qui possède deux asymptotes réelles, $x+y+h=0$ et $x=3h$, et à l'origine un point méplat à tangente horizontale.

Nour retrouverons ces courbes ultérieurement.

B. *La cardioïde.* — C'est la conchoïde du *cercle* C_1 par rapport au point de rebroussement, la *longueur* constante étant égale à $-3h$. L'équation en est

$$(x^3+y^3+3hx^2)^3=27h^3(x^3+y^3)^2.$$

Elle est susceptible d'une autre définition remarquable : soit le *cercle* C

$$x^3+y^3=27h^3$$

et considérons son point de rencontre $(3h, 0)$ avec l'axe des x. Par ce point menons la *seconde perpendiculaire* à une tangente quelconque au *cercle :* le lieu du point d'intersection, c'est-à-dire une *podaire* du *cercle* C, n'est autre que la *cardioïde* ci-dessus.

11. CERCLE C_2. — Son équation est, avons-nous dit,

$$x^3+y^3+3a^2x=b^3.$$

Il a la deuxième bissectrice comme asymptote réelle; sa forme dépend essentiellement des valeurs respectives de a et b. Nous nous contenterons d'énumérer ses propriétés principales.

THÉORÈME. — *Le lieu du sommet d'un* faisceau orthogonal *dont les trois rayons passent par trois points fixes de l'axe des x est un* cercle C_2.

THÉORÈME. — *Le lieu des points tels que le rapport de leurs* distances *à deux points fixes de l'axe des x soit constant est un* cercle C_2.

THÉORÈME. — *Le lieu des points tels que la somme des cubes de leurs* distances *à deux points fixes de l'axe des x (ici a et $-a$) soit constante (ici $2b^3$) est le* cercle C_2.

THÉORÈME. — *Le lieu des points tels que la somme des cubes de leurs* distances *à trois points fixes de l'axe des x (ici* o, *a et $-a$) soit constante (ici $3b^3$) est le* cercle C_2.

Dans le cas $b = 0$, nous avons le cercle C'_2

$$x^3 + y^3 + 3a^2x = 0,$$

qui passe par l'origine, avec tangente verticale. C'est le lieu des points tels que le rapport de leurs *distances* à deux points fixes de l'axe des x soit égal à -1.

L'*inverse* de C'_2 par rapport à l'origine est une droite verticale.

On peut remarquer aussi que l'*orthoptique* de la cissoïde

$$y(x^2 + y^2) - ax^2 = 0$$

est un *cercle* du type C'_2,

$$x^3 + (y - a)^3 + \frac{27}{4} a^2 x = 0.$$

12. CENTRES ET DIAMÈTRES. — Nous appellerons *centre* de trois points alignés le *conjugué harmonique* du point à l'infini par rapport à ces trois points.

Nous appellerons *centre* d'une cubique un point qui soit le *centre* des points de rencontre de la cubique avec toute sécante passant par lui. Si l'équation de la cubique est $f(x, y) = 0$, les coordonnées du *centre* s'obtiendront par la résolution du système $f'_{x_0} = f'_{y_0} = 0$.

L'origine est pour le *cercle* C un véritable *centre*. Le *cercle* C_1 possède un centre $x_0 = -2h$, $y_0 = 0$. Le folium de Descartes, $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, a deux *centres*, l'origine (point double du folium) et le point $x_0 = y_0 = a$.

Le lieu des *centres* des points d'intersection d'une cubique avec une droite parallèle à une direction fixe sera le *diamètre* correspondant à cette direction. Les *diamètres* passent tous par le *centre* de la courbe, et, naturellement, par les points de contact des tangentes parallèles à la direction considérée. On appellera *sommet* d'une courbe tout point où la tangente est *orthogonale* au *diamètre* passant par ce point; ce *diamètre* sera appelé *axe*.

Dans le *cercle* C, le *diamètre* d'une direction quelconque est *deuxième perpendiculaire* à cette direction. Ainsi tous les points du *cercle* sont des *sommets*. On peut aussi énoncer ce

THÉORÈME. — *La droite joignant le* centre *d'un* cercle C *au* centre P *de trois points alignés du* cercle *est* deuxième perpendiculaire *à la sécante*,

ainsi que ce

Corollaire. — Soit A un point de l'axe des x. Menons par A une sécante rencontrant le *cercle* C en trois points ayant pour *centre* un point P : le lieu de P lorsque la droite tourne autour de A est un *cercle* C_1 passant par A et O.

On pourra aussi établir le théorème plus général suivant :

THÉORÈME. — *Si, par un point* A *quelconque on mène une sécante mobile rencontrant un* cercle C_1, *le lieu du* centre *des trois points de rencontre est un* cercle Γ_2, *passant par le point* A, *par l'origine, et par le* centre *de* C_1.

Des théorèmes analogues s'appliquent au cercle C_2, et même à des *cercles* plus compliqués (comme par exemple le folium).

III. — Paraboles.

Nous garderons leur nom de paraboles (cubique, semi-cubique) aux courbes du troisième degré ainsi désignées dans le plan euclidien.

13. PARABOLE CUBIQUE. — Soit la parabole cubique

$$y^3 + 3p^2x = 0,$$

ayant à l'origine un point d'inflexion à tangente verticale.

Si l'on considère ses cordes parallèles à la direction m, il leur correspond deux *diamètres*, $y = \pm p\sqrt{\frac{3}{-m}}$. Les *diamètres* sont donc tous parallèles à Ox. Le *centre* est rejeté à l'infini dans la direction Ox; l'origine est un *sommet*, et l'axe des x est l'*axe* de la courbe.

La parabole cubique possède deux *foyers* F et F' sur l'*axe*, dont les abscisses sont $\pm\frac{2p}{3}$. Les *polaires* de ces *foyers* par rapport à la courbe sont les droites $x = \pm\frac{4p}{3}$; leur *podaire* (*seconde orthogonalité*) est la tangente au *sommet*. Les deux droites $x = \pm\frac{2p}{3}$ sont *orthoptiques*.

L'équation de la *seconde normale* en un point x, y d'une courbe étant

$$(Y - y)\sqrt{y'} = i(X - x),$$

la *seconde sous-normale* est $iy\sqrt{y'}$. Comme dans la parabole cubique on a

$$y' = -\frac{p_2}{y^2},$$

on en déduit la propriété fondamentale suivante :

THÉORÈME. — *Dans la parabole cubique, la* seconde sous-normale *est constante et égale à p.*

Une deuxième propriété également remarquable, dont la démonstration est immédiate, s'énonce ainsi :

THÉORÈME. — *Dans la parabole cubique, la tangente en un point* M *est* bissectrice *du faisceau formé par les deux* rayons vecteurs MF, MF', *et la parallèle à l'*axe *menée par* M.

On voit ainsi le grand intérêt qui s'attache à l'étude de cette courbe faite dans le nouveau plan.

Considérons à présent la *seconde normale* en M dont l'équation est

$$p(Y-y) - Xy - \frac{y^4}{3p^2} = 0$$

et cherchons son enveloppe. Les coordonnées de son point caractéristique, *second centre de courbure*, seront

$$X_0 = 4x - p,$$
$$Y_0 = -\frac{y^4}{p^3}.$$

Soit alors N le point de rencontre de la *deuxième normale* avec l'*axe :* son abscisse est $x - p$. Par ce point menons la parallèle à la tangente : cette droite aura pour équation

$$Y = -\frac{p^2}{y^2}(X - x + p),$$

elle rencontrera l'ordonnée de M en un point dont l'abscisse X sera donnée par

$$y = -\frac{p^2}{y^2}(X - x + p),$$

d'où l'on tire

$$X + p = 4x.$$

Donc $X = X_0$, et l'on obtient le *centre de courbure* en appliquant à la *seconde normale* exactement la construction, *mutatis mutandis*, qui, dans le plan euclidien, donne le centre de courbure de la parabole du second degré.

Ajoutons encore les deux propriétés suivantes :

a. La *podaire* (*seconde orthogonalité*) de la parabole cubique par rapport à son *sommet* est la *cissoïde*

$$x(x^2+y^2)-\frac{2p}{3}y^2=0.$$

b. L'*inverse* de la parabole cubique par rapport à son *sommet* est aussi une *cissoïde*

$$x(x^2+y^2)+\frac{K^2}{3p^2}y^2=0.$$

14. PARABOLE SEMI-CUBIQUE. — Nous prendrons l'équation de cette courbe sous la forme

$$y^2-\frac{27}{8}px^2=0.$$

Elle possède à l'origine un rebroussement à tangente verticale.

Cette courbe n'a qu'un *foyer* F, sur l'axe des x, d'abscisse $\frac{p}{2}$. La *polaire* du *foyer* est la droite $x=-\frac{p}{2}$; la *podaire* du *foyer*, en considérant cette fois *la première orthogonalité*, est la tangente de rebroussement (axe des y). La droite $x=\frac{p}{2}$ est *orthoptique*.

L'origine est *centre* de la courbe ; les *diamètres* sont des paraboles du second degré.

Si N et T sont les points de rencontre avec l'axe des x de la *première normale* et de la tangente en un point M de la courbe, les points M, N et T sont sur un *cercle* C_1, dont T est le point de rebroussement et N le point d'inflexion. Le *foyer* F de la parabole semi-cubique est *foyer* pour ce *cercle*.

La courbe jouit de propriétés importantes, parallèles à celles de la parabole cubique, que nous énumérons ci-dessous :

THÉORÈME. — *Dans la parabole semi-cubique, la première* sous-normale *est constante et égale à* $\frac{3p}{2}$.

THÉORÈME. — *Dans la parabole semi-cubique, la tangente en un point* M *est* bissectrice *du faisceau formé par le* rayon vecteur MF *et la parobole à l'axe des x comptée deux fois.*

THÉORÈME. — *Le* premier centre de courbure *de la parabole semi-cubique s'obtient par la même construction que le* second centre de courbure *de la parabole cubique, en faisant jouer ici la* première orthogonalité.

IV. — Ellipses et hyperboles.

15. Nous appellerons *ellipse* la courbe dont l'équation est

$$\frac{x^3}{a^3}+\frac{y^3}{b^3}-1=0.$$

Elle possède une asymptote réelle, $ay-bx=0$. L'origine est *centre* de l'*ellipse*.

Il n'y a aucune différence entre *l'ellipse* et la courbe qu'on pourrait appeler *hyperbole*,

$$\frac{x^3}{a^3}-\frac{y^3}{b^3}-1=0,$$

qui est simplement symétrique de la première par rapport à l'axe des x. L'*hyperbole équilatère*, $x^3-y^3=a^3$, est symétrique du *cercle* C.

Comme dans le plan euclidien, l'*ellipse* est le lieu décrit par un point M fixé sur un segment AB, de *longueur* constante, dont les extrémités se déplacent sur les deux axes de coordonnées.

Le *second centre de courbure* de l'*ellipse* s'obtient exactement comme le centre de courbure de l'ellipse : on prendra le point de rencontre N avec Ox de la *seconde normale* en un point M; par N on mènera la parallèle à la tangente en M jusqu'à son intersection I avec la droite joignant M au *centre* O de l'*ellipse :* le point I et le *second centre de courbure* sont sur une parallèle à Oy.

Trois théories fondamentales relatives à l'ellipse euclidienne s'étendent à l'*ellipse* comme il suit.

A. *Diamètres.* — La direction de coefficient angulaire m coupe l'*ellipse* en trois points dont le *centre* est sur l'une des deux droites

$$y=\pm x\sqrt{-\frac{b^3}{ma^3}}.$$

Ce sont les deux *diamètres conjugués* de la direction m. On remarquera que les axes de coordonnées sont de véritables axes pour l'*ellipse*, et que la courbe a deux sommets $(a, 0)$ et $(0, b)$.

Soit M un point de l'*ellipse*, désignons par M_1 et M_2 les points de rencontre réels avec l'*ellipse* des deux *diamètres conjugués* de OM : nous démontrerons sans peine le théorème qu'on pourrait appeler d'Apollonius :

THÉORÈME. — *Il existe entre les longueurs des* diamètres conjugués *la relation suivante*

$$\overline{OM}_1^3+\overline{OM}_2^3+2\overline{OM}^3=2(a^3+b^3).$$

On remarquera aussi que dans l'*hyperbole équilatère*, trois *diamètres conjugués* forment un *faisceau orthogonal*.

B. *Ellipse conjuguée.* — Par un point $M(x, y)$ de l'*ellipse*, menons des parallèles aux *axes*, rencontrant l'asymptote réelle en P et Q. Complétons le rectangle MPQ : nous obtenons un point M_1 qui aura pour coordonnées

$$x_1 = \frac{a}{b} y, \qquad y_1 = \frac{b}{a} x.$$

Le lieu de M_1 est donc l'*ellipse*

$$\frac{x_1^3}{a^3} + \frac{y_1^3}{b^3} + 1 = 0,$$

que nous appellerons *ellipse conjuguée* de la première. Elle a les mêmes asymptotes que l'*ellipse* primitive. Ses principales propriétés sont exprimées par les deux théorèmes suivants :

Théorème. — *Les tangentes en deux points* conjugués M *et* M_1 *se coupent sur l'asymptote réelle.*

Théorème. — *Si l'on mène* OP première perpendiculaire *à l'asymptote, les rayons* OP, OM *et* OM_1 *forment un* faisceau orthogonal.

C. *Ellipses orthogonales.* — Soient les deux *ellipses* concentriques

$$\frac{x^3}{a^3} + \frac{y^3}{b^3} - 1 = 0, \qquad \frac{x^3}{a'^3} + \frac{y^3}{b'^3} - 1 = 0,$$

telles que

$$a^3 + b^3 = a'^3 + b'^3.$$

Si M est un de leurs points communs, on démontrera que les tangentes en M aux deux *ellipses* forment avec le rayon MO un *faisceau orthogonal.*

Terminons en indiquant que si, dans une *ellipse* la longueur de l'*axe a* devient infinie, le *sommet* correspondant restant fixe sur Ox, et la quantité $\frac{b^3}{a}$ restant finie et égale à p^2, l'*ellipse* a pour limite la parabole cubique

$$y^3 + 3p^2 x = 0.$$

16. *La para-hyperbole.* — Cherchons le lieu des points *équidistants* d'un point $F(-a, 0)$ et d'une droite D, $x = a$. On devra avoir

$$(x + a)^3 + y^3 = (a - x)^3.$$

La courbe demandée a donc pour équation

$$2x^3 + y^3 + 6a^2 x = 0.$$

L'avant-dernière équation peut s'écrire aussi

$$(x - a)^3 + y^3 = -(a + x)^3,$$

ce qui prouve que la courbe est aussi le lieu d'un point *équidistant* du point F′(*a*, o) et de la droite D′, $x = -a$.

La courbe a aussi deux *foyers* F et F′ et deux *directrices* D et D′. On vérifiera d'ailleurs que F et F′ sont de véritables *foyers*.

De plus, si nous cherchons le lieu des points M tel que la différence MF′ — MF soit constante et égale à $2FF' = 2a$, on trouvera, par un calcul immédiat, que ce lieu se décompose en l'axe des x, puis en la courbe déjà trouvée

$$2x^3 + y^3 + 6a^2x = 0.$$

Ainsi cette cubique généralise à la fois la parabole et l'hyperbole : nous lui donnerons le nom de *para-hyperbole*.

On remarquera encore que la *para-hyperbole* est le lieu d'un point tel que le produit des coefficients angulaires des trois droites le joignant à l'origine et à deux points fixes de l'axe des x, symétriques par rapport à O, soit constant et égal à -2. Les points fixes en question ne se confondent pas d'ailleurs avec les *foyers* de la *para-hyperbole*.

La tangente en un point M de la *para-hyperbole* s'obtient par la construction très simple suivante, dont on remarquera la parfaite analogie avec la construction classique de Roberval : joignons M au *foyer* F, menons par F la *première perpendiculaire* à MF, jusqu'à sa rencontre T avec la *directrice* D correspondant à F : la droite MT est la tangente à la *para-hyperbole*. Cette droite passe aussi par le point T′ situé sur la *directrice* D′ et obtenu de la même manière à partir du *foyer* F′.

On peut considérer aussi une *para-hyperbole conjuguée* de la première. Son équation sera

$$2x_1^3 + y_1^3 + 2^{-\frac{1}{3}}.6a^2y_1 = 0.$$

Les *para-hyperboles conjuguées* ont les mêmes propriétés que les *ellipses conjuguées*.

Remarquons enfin que l'*inverse* de la *para-hyperbole* par rapport à l'origine est une *cissoïdale*

$$x(x^2 + y^2) + \frac{k^2}{6a^2}(2x^2 + y^2) = 0.$$