JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ADOLPHE BUHL

Ondes. Analyse. Géométrie. Arithmétique

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 21 (1942), p. 123-139.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1942_9_21__123_0>

Ondes. Analyse. Géométrie. Arithmétique;

PAR ADOLPHE BUHL.

Combien il est agréable d'écrire sur les travaux de M. Élie Cartan! Leur puissance synthétique est immense et me paraît englober tout ce que je connais. Une telle impression est naturellement attribuable à la notion de *groupe*. M. Cartan a considérablement développé la Théorie de Sophus Lie, à la fois en profondeur et en puissance, en lui donnant un substratum *intégral*. Les formes de Pfaff, naturellement utilisées par l'illustre géomètre français, ont été faites, à l'origine, pour être placées sous des intégrales d'ordre de multiplicité quelconque et donner d'abord des formules *stokiennes*. Construire l'une de celles-ci sans aller au delà des intégrales *doubles* ni au delà des formes de Pfaff *linéaires*, conduit au célèbre système de Maurer-Cartan, véritable clef du chef-d'œuvre de Lie et prototype d'autres systèmes réalisant de merveilleuses synthèses géométriques.

Dans les formules stokiennes, les variétés d'intégration peuvent être déformées de façon quelconque. Mais la Physique exige aussi des déformations régies par des équations différentielles. Les intégrales invariantes, à ce nouveau point de vue, constituent la Théorie des Invariants intégraux due surtout à Henri Poincaré, Théophile De Donder et toujours Élie Cartan. Ce qui suit relève de cet algorithme; il s'agit *d'ondes intégrales* transportant des aires invariantes. C'est toute une Géométrie, fondée sur la notion d'aire, conformément à une conception qui appartient encore à M. Cartan. Cette Géométrie exige des transformations *algébriques*, comprend des transports de valeurs *arithmétiques* et s'apparente ainsi à la Géométrie des Nombres de Minkowski magnifiquement reprise en un récent ouvrage d'un grand mathématicien américain, M. Harris Hancock.

Et tout cela coule élégamment, facilement. Au point de vue historique, que d'efforts, que de détours pour arriver à de tels résultats. Et cependant, maintenant, la sensation d'effort a disparu. N'est-ce pas là ce qui caractérise les grandes œuvres d'art?

1. ONDES. ACCEPTIONS DIVERSES. — Il semble maintenant banal d'affirmer que les Théories ondulatoires ont une généralité qui dépasse celle de toutes les théories mathématiques classiques.

Qu'est-ce qu'une onde? La question a été souvent posée et l'a encore été récemment par M. Tullio Levi-Civita, en de remarquables écrits. Citons notamment *Caratteristiche dei Sistemi differenziali e Propagazione ondosa* (Bologna, Nicola Zanichelli, 1931) et *What are Waves?* dans *The Rice Institute Pamphlet*, d'octobre 1938 (The Rice Institute, Houston, Texas).

Une onde semble être une variété *variable* qui propage quelque chose. Ainsi soit C une constante et, au temps t, la surface

$$f(x, y, z, t) = C.$$

Pour certains auteurs ([1]), cette surface, variable avec t, est un *front d'onde*, propageant la constante C.

Certaines aires, certains volumes, certaines intégrales attachées à des variétés déformables peuvent rester constants pendant la déformation; il y a alors propagation d'*ondes intégrales*. Ces dernières peuvent être entendues de bien des manières; ainsi les *formules stokiennes* donnent des intégrales invariantes pour des déformations *quelconques* des champs d'intégration. Mais, comme dans ce qui suit, les déformations peuvent être régies par des équations différentielles.

Dans un milieu déformable certaines variétés peuvent être des lieux de singularités; plus précisément, ces variétés peuvent n'être traversées ou touchées par les particules en mouvement qu'avec de brusques variations de vitesses ou d'accélérations d'ordres quelconques. On est alors dans le cas d'*ondes différentielles*.

Enfin, la représentation graphique de certains phénomènes éveille tout naturellement l'idée d'*ondulation*.

Au delà de ces *images*, il y a les domaines non imagés, non imageables et même non imaginables, la notion d'onde étant alors agnostique beaucoup plus que les courbes sans tangentes ou les surfaces sans plans tangents, ces dernières sortes de variétés offrant des spécimens que l'on peut se représenter, sinon exactement, du moins avec des approximations de plus en plus grandes.

Toutes les notions ondulatoires se tiennent de très près. Ainsi sur des surfaces variables qui sont *ondes intégrales* courent facilement des lignes qui sont *ondes différentielles*.

Les premières généralités qui vont suivre sont de nature intégrale; une intégrale est, en effet, de la nature d'une addition et, de ce fait, plus primordiale

---

([1]) Par exemple, GEORGE BIRTWISTLE, *La nouvelle Mécanique des Quanta*, Préface de M. Jacques Hadamard. Traduction M. Ponte et Y. Rocard, 1929. Librairie Blanchard (*voir* p. 154).

qu'une dérivée qui est de la nature d'un rapport. Toutefois, quand on en arrive au stade différentiel, les dérivées — surtout lorsque leur conception est sur le point de disparaître — se comportent encore d'une manière étrange pleine, le plus souvent, d'un très grand intérêt.

2. Aires cylindriques. — La formule intégrale la plus simple qui exprime une aire gauche S est

$$S = \iint_s \sqrt{p^2 + q^2 + 1}\, dx\, dy. \tag{1}$$

L'aire S est considérée sur la surface d'équation $z = z(x, y)$. L'intégrale double est étendue à la projection s de la *cloison* S, projection faite sur le plan Oxy. La première chose à faire, pour calculer S, est, à partir de $z = z(x, y)$, de calculer

$$p^2 + q^2 = \lambda(x, y). \tag{2}$$

Mais, une fois obtenu le second membre $\lambda(x, y)$, on observe qu'il ne provient pas seulement de la surface initiale σ, d'équation $z = z(x, y)$, mais d'une infinité d'autres surfaces Σ définies par l'équation aux dérivées partielles (2). Toutes ces surfaces Σ donnent une vaste famille d'ondes intégrales, c'est-à-dire de cloisons pouvant se propager dans un cylindre *fermé* Γ quelconque, à génératrices parallèles à Oz, cette propagation conservant l'aire S.

Au premier abord, on croit voir, en l'équation (2), une de ces équations en x, y, z, p, q dont on a coutume de dire que la théorie est faite et bien faite. En réalité l'intégration de l'équation (2) soulève des problèmes multiples dont l'ensemble pourrait occuper la vie de plusieurs mathématiciens, nombre de questions restant d'ailleurs en suspens.

3. Premier recours aux fonctions monogènes. — Nous examinerons d'abord un thème très particulier qui rattache l'équation (2) aux fonctions monogènes. Soient

$$f(x + iy) = X(x, y) + i\,Y(x, y) \tag{3}$$

et les deux surfaces

$$z = X(x, y), \qquad z = Y(x, y). \tag{4}$$

Comme on a les relations de monogénéité de Cauchy

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y}, \qquad \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x}, \tag{5}$$

on a aussi

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2. \tag{6}$$

Donc p^2+q^2 a la même expression, en x, y, sur l'une ou sur l'autre des surfaces (4). Ainsi de

$$a\log(x+iy)=\frac{a}{2}\log(x^2+y^2)+ia\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}=a\log r+ia\,\theta,$$

on conclut que les deux surfaces

$$(7)\qquad z=a\log r \quad \text{et} \quad z=a\theta,$$

si r, θ, z sont des coordonnées semi-polaires, sont telles qu'un cylindre Γ y découpe des aires équivalentes. La première de ces surfaces (7) est de révolution et a pour méridien une banale logarithmique; la seconde est l'hélicoïde réglé à plan directeur.

4. Ondes intégrales non analytiques. — La formule (3) n'est évidemment pas altérée si l'on ajoute une constante $\alpha+i\beta$ au premier membre en ajoutant α à $X(x,y)$ et β à $Y(x,y)$. Alors les cloisons d'équations (4) sont déplacées, dans le cylindre Γ, par simples translations parallèles à Oz. Ce résultat évident n'est insignifiant que dans le domaine analytique dont nous ne sommes pas sortis jusqu'ici. Il permet des constructions *non analytiques* et des considérations d'*ondes différentielles* se propageant sur des *ondes intégrales*, toutes choses qui sont d'un grand intérêt.

Soient S_1 et S_2 les deux cloisons (*fig.* 1) appartenant respectivement aux

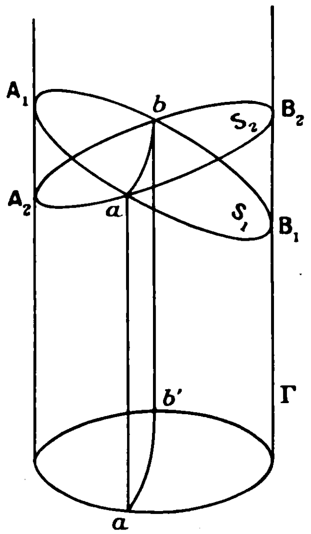

Fig. 1.

deux surfaces d'équations (4). Ces cloisons sont évidemment limitées au cylindre Γ. Supposons qu'elles se coupent suivant une ligne ab, ce qui se réalisera naturellement pour des surfaces à nappes infinies telles que (7); dans le cas contraire, on pourrait toujours provoquer une intersection par translation, parallèle à Oz, de S_1 ou de S_2. Les aires totales des cloisons S_1 ou S_2 sont égales. Mais l'aire aB_1ba est aussi égale à aB_2ba. De même abA_1a et abA_2a. Dans ces conditions la cloison *non analytique* aB_2bA_1a a même aire S que les précédentes; c'est encore une solution de la question. De même aB_1bA_2a. Et maintenant, si l'on imprime aux cloisons S_1 et S_2 des translations parallèles à Oz (c'est-à-dire aux génératrices de Γ) les cloisons non analytiques que nous venons de considérer sont parcourues par leur intersection ab, intersection qui est de la nature d'une onde différentielle puisque, lorsqu'on traverse cette ligne, le vecteur vitesse est brusquement modifié, tout au moins en direction.

On peut construire des cloisons, ayant toujours même aire S que S_1 ou S_2, pourvues d'une infinité de lignes singulières telles que ab. Ces lignes singulières peuvent même être serrées indéfiniment les unes contre les autres d'où des cloisons présentant en chaque point des *incertitudes* quant à la détermination du plan tangent. Ces incertitudes sont des cas particuliers des fameuses *incertitudes de Heisenberg*; ce sont avec elles que certains géomètres commencent à parler de *surfaces sans plans tangents*. On voit que de telles surfaces peuvent cependant être *quarrables*; elles sont de la nature des surfaces développables *non réglées* dues à Henri Lebesgue (A. Buhl, *Nouveaux Éléments d'Analyse*, 1937, t. I, Chap. I, § 8).

Depuis que ces lignes sont écrites, Henri Lebesgue, le 26 juillet 1941, a cessé de vivre, du moins de notre vie si misérable et imparfaite. Il était né en 1875. J'adresse un souvenir ému à son illustre Mémoire.

5. Quasi-analyticité. — Dans le domaine complexe, on peut concevoir aussi des fonctions analytiques possédant une infinité de lignes singulières qui, en vertu de certaines variations paramétriques, se serrent de plus en plus, jusqu'à ce qu'on ne puisse, en aucune région du champ, imaginer de cercle de convergence, si petit soit-il. Alors l'analyticité, au sens de Weierstrass, disparaît. Et cependant la monogénéité au sens de Cauchy ne disparaît pas totalement pour cela, les dérivations restant possibles dans le sens des bandes infiniment étroites comprises entre deux lignes singulières infiniment voisines. Suivant la terminologie adoptée par M. Émile Borel, on peut obtenir ainsi *des classes* de fonctions *quasi-analytiques*.

6. Émiettement corpusculaire. — On peut encore imaginer (*fig.* 1) que la base du cylindre Γ soit divisée en éléments infiniment petits ou très petits, ε', projections, par *canaux* parallèles à Oz, d'éléments ε situés d'abord sur une cloison telle que S_1. Si, dans chaque canal, on déplace l'élément ε qu'il contient, ces déplacements étant quelconques et inégaux de canal à canal contigu, ceci n'empêche pas que l'ensemble des éléments ε a toujours même aire S que la cloison d'où ils proviennent. Nous assistons alors à l'*émiettement corpus-*

culaire d'une onde intégrale. Et, par chaque corpuscule ε_i provenant de l'émiettement, on peut toujours faire passer une onde S_i qui le pilote.

7. Rapprochements avec la représentation conforme. — A partir de l'égalité fondamentale (3), les formules de la représentation conforme sont

$$X = X(x, y), \qquad Y = Y(x, y). \tag{8}$$

Différentiant, élevant au carré, ajoutant et écrivant que $dS^2 = ds^2$, il vient

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} = 0. \tag{9}$$

On voit qu'il est bon de ne pas séparer la représentation conforme de la théorie des ondes intégrales précédemment exposée. Il y a autant de simplicité en (6) qu'en (9) et se demander ce que l'on peut faire des surfaces (4) est aussi intéressant que d'étudier la transformation (8). Les deux membres de la première équation (9) sont égaux aux deux membres de (6).

8. Ondes dépendant de l'équation de D'Alembert. — En partant toujours de la base analytique fondamentale représentée par l'égalité (3), nous obtenons, en (5) les conditions de monogénéité qui conduisent immédiatement à l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

Celle-ci, pour $y = ict$, donne l'équation de D'Alembert

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0. \tag{10}$$

Or, c'est là l'équation archaïque et classique de la propagation ondulatoire avec solutions *simples* de natures diverses, certaines étant *trigonométriques* et correspondant alors à des ondes « manifestement ondulées ».

La transformation de Lorentz correspond également de manière immédiate à l'équation (10).

9. Nouvelles Théories de la Lumière. — Si $\zeta = x + iy$, on peut adjoindre à (3), par dérivations partielles en x et en y,

$$f'(\zeta) = \left(\frac{\partial}{\partial y} + i\frac{\partial}{\partial x}\right)Y, \qquad if'(\zeta) = \left(\frac{\partial}{\partial y} + i\frac{\partial}{\partial x}\right)X,$$

d'où l'unique opérateur différentiel entre parenthèses. Or cet opérateur joue un rôle essentiel dans les nouvelles Théories de la Lumière selon M. Louis de Broglie. Lumière *itérée*. Lumière *duale*. Voir encore les *Nouveaux Éléments d'Analyse* (t. II, Chap. VII).

10. Ondes intégrales et réseaux plans orthogonaux. — Une première manière de généraliser les résultats précédents consiste à former des égalités du type (6) sans qu'elles soient tenues de se scinder en des conditions (5).

On peut imaginer une première surface $z=f(x, y)$ pour laquelle on aura

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2. \tag{11}$$

Cette équation est tout naturellement vérifiée pour $z=f$. Reste à obtenir des modes de vérification plus généraux. Or l'équation (11) peut être écrite

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}=0, \tag{12}$$

si l'on pose

$$u=z+f, \qquad v=z-f. \tag{13}$$

Or l'égalité (12) exprime que les deux familles de courbes planes

$$u(x, y)=C_1 \quad \text{et} \quad v(x, y)=C_2 \tag{14}$$

forment un réseau orthogonal. Réciproquement, à tout réseau orthogonal (14), on peut faire correspondre, par les formules (13), une équation (11) d'où, au moins, dans tout cylindre Γ, deux fronts d'ondes à aires équivalentes.

A remarquer que $u+iv=(1-i)(f+iz)$ si bien que les relations de monogénéité qui permettent de scinder (11) permettent aussi de scinder (12), et ce sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}.$$

On pourrait encore associer les considérations précédentes à la Théorie des équations différentielles du premier ordre. A toute équation

$$P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy=0$$

on peut adjoindre

$$Q(x, y)\,dx-P(x, y)\,dy=0,$$

d'où deux intégrales générales (14), d'où l'on remontera encore, par (13), à une équation (11).

11. Propagations hélicoïdales. — Tout l'exposé déjà fait pourrait être repris en coordonnées semi-polaires. Bornons-nous à remarquer que la formule (1) doit alors être remplacée par

$$S=\iint_s \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2+1}\; r\,dr\,d\theta.$$

Si bien que si l'on écrit

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2=\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2, \tag{15}$$

pour une surface $z=f(r,\theta)$, on a là une équation aux dérivées partielles, à fonction inconnue z, donnant, dans tout cylindre Γ, une propagation de cloisons à aire S invariante.

Supposons que l'on considère d'abord la cloison *hélicoïdale* d'équation

$$z=a\theta+f(r), \tag{16}$$

avec $f(r)$ maintenant fonction de r seul. Alors l'équation (15) est à remplacer par

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2=f'^2(r)+\frac{a^2}{r^2}.$$

Il est remarquable que l'on obtienne encore, pour celle-ci, une intégrale *complète* du type hélicoïdal.

En posant

$$z=b\theta+\varphi(r), \tag{17}$$

on a

$$\varphi=\int\sqrt{f'^2(r)+\frac{a^2-b^2}{r^2}}\,dr.$$

C'est bien là une intégrale *complète* puisque dépendant de deux constantes arbitraires, savoir b et la constante additive provenant, dans φ, de l'intégration indéfinie, constante ici sous-entendue.

Soit simplement, en (16), $z=a\theta$; on aura, en (17),

$$z=b\theta+\sqrt{a^2-b^2}\log r.$$

C'est là, pour $b=0$, l'association signalée en les formules (7).

Plus généralement, on voit que les hélicoïdes *de pas différents*,

$$z=a\theta+f(r) \qquad \text{et} \qquad z=b\theta+\varphi(r)$$

peuvent donner des aires égales dans un cylindre Γ quelconque, pourvu que les fonctions $f(r)$ et $\varphi(r)$ soient convenablement liées.

Pour deux surfaces de révolution ($a=0$, $b=0$), la méthode qui vient d'être exposée ne donnera jamais que des surfaces de révolution ne différant l'une de l'autre que par des translations, dans le sens des génératrices du cylindre Γ, ou par des symétries prises par rapport à des plans normaux à Γ, ce qui est banal. Mais cette banalité, comme nous l'avons observé plus haut, cesse encore si l'on quitte les considérations analytiques.

Soient (*fig.* 2) des cercles, de même rayon, ayant tous leur centre sur Oz et l'assemblage d'arcs AB, BC, CD, DE, EF. La figure tournant autour de Oz donne des assemblages de zones sphériques. Pour deux assemblages quelconques de ce genre, on a, dans un cylindre Γ quelconque, des aires équivalentes. Ces assemblages peuvent être sans cesse modifiés par déplacements sur Oz des centres des arcs primitivement considérés, les cercles engendrés par les points B, C, D, ... étant de la nature d'ondes différentielles.

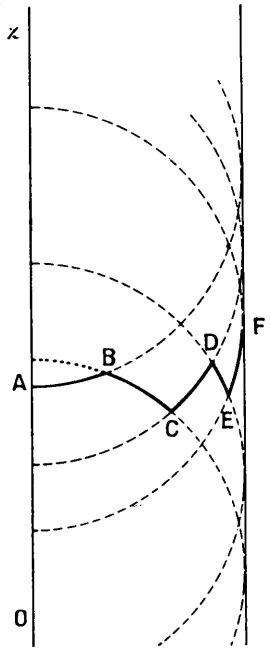

Fig. 2.

Quand le nombre des points A, B, C, ... augmente indéfiniment, on obtient une *microstructure* pouvant affecter une forme curviligne qu'un observateur *grossier* déclarera quelconque, mais dans laquelle un observateur *subtil* reconnaîtra la microstructure en question. Les ondes intégrales transportant des aires invariantes ne seront alors perceptibles que pour l'observateur subtil. Ces perceptions, subordonnées aux qualités de l'observateur, sont parmi les conceptions les plus philosophiquement délicates de la microphysique.

12. Généralités sur la propagation cylindrique des aires. — Nous reprenons maintenant l'équation

$$p^2 + q^2 = \lambda(x, y) \tag{2}$$

en ne faisant d'abord aucune hypothèse sur le second membre, du moins aucune en dehors des conditions générales d'analyticité classiquement admises dans la Théorie des équations en x, y, z, p, q.

Écrire le système *canonique* ou *caractéristique* de l'équation (2) ne donne rien d'immédiatement remarquable. Il semble préférable de profiter de la forme de l'équation (2) en l'écrivant

$$p^2 + q^2 = e^{2F(x,y)}, \tag{18}$$

puis en posant

$$p = e^F \cos\Phi, \qquad q = e^F \sin\Phi. \tag{19}$$

ce qui entraîne la condition

$$\frac{\partial}{\partial y}(e^F \cos\Phi) = \frac{\partial}{\partial x}(e^F \sin\Phi).$$

ou bien

$$\cos\Phi \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \sin\Phi \frac{\partial\Phi}{\partial y} = F_y \cos\Phi - F_x \sin\Phi.$$

On est ramené à une équation linéaire, du premier ordre, en Φ. Cette fois, le système caractéristique

$$\frac{dx}{\cos\Phi} = \frac{dy}{\sin\Phi} = \frac{d\Phi}{F_y \cos\Phi - F_x \sin\Phi}$$

se scinde en

$$y' = \operatorname{tang}\Phi, \qquad \Phi' = F_y - F_x y', \tag{20}$$

la dernière équation étant d'une symétrie remarquable que l'on peut encore mieux marquer en l'écrivant

$$d\Phi = \begin{vmatrix} dx & dy \\ F_x & F_y \end{vmatrix}.$$

On tire des équations (20)

$$\frac{y''}{1 + y'^2} = F_y - F_x y'. \tag{21}$$

C'est l'équation différentielle fondamentale de la question. Étant du premier degré en y'' et du troisième degré en y', elle rappelle l'équation des lignes géodésiques tout en étant notablement plus simple. Malgré cela, l'équation (21) est encore, *en général*, d'une transcendance redoutable qui semble défier les méthodes d'intégration connues. Supposons cependant que l'on ait pu l'intégrer et écrire, avec deux constantes C_1 et C_2,

$$y = \Psi(x, C_1, C_2), \qquad y' = \operatorname{tang}\Phi = \Psi'(x, C_1, C_2).$$

On tirera de là

$$C_1(x, y, \Phi) \quad \text{et} \quad C_2(x, y, \Phi).$$

Puis, en écrivant que C_2 est fonction arbitraire de C_1, soit $C_2 = \Theta(C_1)$, on aura Φ, en x et y, cette fonction Φ dépendant de la fonction arbitraire Θ. Enfin on portera Φ dans (19) et

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

donnera z par quadrature de différentielle totale exacte. Mais ces généralités ne peuvent être explicitement développées tant que l'équation (21) n'est pas intégrée. Et comme, pour celle-ci, aucune méthode générale n'apparaît, force est encore de revenir à des formes particulières de F.

L'équation (21) équivaut à une certaine équation (3) donnée par Gaston Darboux dans son grand Ouvrage sur les *Surfaces* (t. 2, 2e édition, 1915, Livre V, Chap. VI, p. 453). Il s'agit alors particulièrement des analogies entre les mouvements plans et la théorie des lignes géodésiques.

15. Retour a l'emploi d'une fonction monogène. — L'équation (21) peut s'écrire

$$\frac{dy'}{1+y'^2} = F_y\,dx - F_x\,dy, \tag{22}$$

le premier membre étant la différentielle exacte de arc tang y'. Si le second membre était aussi une différentielle exacte dE, une première intégration serait immédiate. Pour cela il faudrait que l'on ait

$$dE = E_x\,dx + E_y\,dy = F_y\,dx - F_x\,dy,$$

d'où

$$E_x = F_y, \qquad E_y = -F_x,$$

et il existerait une fonction

$$\varphi(x+iy) = E(x, y) + i\,F(x, y). \tag{23}$$

A partir de (22), on aurait successivement, h étant une constante,

$$\text{arc tang}\,y' = E + h, \qquad y' = \text{tang}(E+h) = \text{tang}\,\Phi, \qquad \Phi = E + h,$$

$$p = e^F\cos(E+h), \qquad q = e^F\sin(E+h),$$

$$z = \Lambda + \int e^F[\cos(E+h)\,dx + \sin(E+h)\,dy], \tag{24}$$

si Λ est une simple constante d'intégration. Avec les deux constantes arbitraires Λ et h, on vient donc d'obtenir une *intégrale complète* pour l'équation (18) quand, bien entendu, la fonction $F(x, y)$ est engagée dans une relation telle que (23).

D'après ce que nous avons vu au paragraphe 3, les surfaces $z = E$ et $z = F$ donnent déjà des aires équivalentes dans tout cylindre Γ. Nous avons maintenant, en (24), une nouvelle famille dépendant des constantes h et Λ, famille toujours construite à partir des fonctions harmoniques E et F. Et comme (24) est une intégrale complète, il reste à faire, de Λ, une fonction arbitraire $\Lambda(h)$ et à chercher l'enveloppe, à un paramètre h, des surfaces (24). Toutes les enveloppes ainsi obtenues seront de nouvelles surfaces donnant, dans tout cylindre Γ, des cloisons de même aire. On voit qu'au delà des surfaces $z = E$

et $z = F$, il y a encore beaucoup d'autres résultats géométriques à obtenir avec le secours des fonctions harmoniques.

Mais on ne peut oublier que ce sont là théories particulières qui correspondent au cas où, dans l'équation (18), la fonction F est, elle-même, harmonique.

On peut aussi voir, dans le résultat (24), une propriété *intégrale*, nouvelle ou peu connue, des fonctions harmoniques.

Géométriquement, on peut développer davantage en écrivant l'équation (24) sous la forme

$$z = X \cos h + Y \sin h + \text{const.} \tag{24a}$$

D'où

$$X_x = Y_y = e^F \cos E, \qquad X_y = -Y_x = e^F \sin E.$$

Des fonctions harmoniques E et F, nous sommes passés à d'autres, X et Y, pour lesquelles l'égalité (24a) est une intégrale complète de l'équation

$$p^2 + q^2 = X_x^2 + X_y^2 = Y_x^2 + Y_y^2.$$

Pour en déterminer l'intégrale générale, il faut associer les deux égalités

$$z = X \cos a + Y \sin a + b(a),$$
$$0 = X \sin a - Y \cos a - b'(a).$$

Si l'on peut éliminer a entre celles-ci, on aura finalement une certaine équation $\lambda(X, Y, z) = 0$ dépendant du choix de la fonction arbitraire b.

Ceci posé, soient les hélicoïdes développables, où γ est l'angle constant de la normale avec Oz,

$$p^2 + q^2 = k^2 = \operatorname{tang}^2 \gamma.$$

Ici, le passage de l'intégrale complète à l'intégrale générale conduit à écrire

$$z = k(x \cos a + y \sin a) + b(a),$$
$$0 = k(x \sin a - y \cos a) - b'(a),$$

d'où, si l'on peut éliminer a, une équation $\lambda(kx, ky, z) = 0$ où la fonction λ est évidemment la même que la précédente. D'où cet élégant théorème :

Soient les hélicoïdes développables

$$p^2 + q^2 = k^2 \qquad \textit{ou} \qquad \lambda(kx, ky, z) = 0$$

en termes finis. Si, dans toutes ces équations $\lambda = 0$, *on remplace* kx *et* ky *respectivement par* X *et par* Y *provenant de* $f(x + iy) = X + iY$ *avec* f *quelconque, on obtient ainsi des surfaces dans lesquelles tout cylindre fermé* Γ, *de génératrices parallèles à* Oz, *découpe des aires équivalentes.*

14. Second cas d'intégrabilité. — Après le cas harmonique, l'équation (2) offre encore un second cas élémentaire d'intégrabilité lorsqu'on peut l'écrire

$$p^2+q^2=\mu(x)+\nu(y), \tag{25}$$

avec $\mu(x)$ fonction de x seul et $\nu(y)$ fonction de y seul. On a alors une équation, dite à variables séparées, qui permet de poser

$$p^2-\mu=\nu-q^2=a,$$

si a est une constante, d'où

$$p=\sqrt{\mu+a}, \qquad q=\sqrt{\nu-a}$$

et, par intégration de $dz=p\,dx+q\,dy$, une intégrale complète de (25). Il suit de là que l'équation (21), avec

$$e^{2F}=\mu+\nu, \qquad 2F=\log(\mu+\nu), \qquad 2F_x=\frac{\mu'}{\mu+\nu}, \qquad 2F_y=\frac{\nu'}{\mu+\nu},$$

$$y'=\operatorname{tang}\Phi=\frac{q}{p}=\sqrt{\frac{\nu-a}{\mu+a}}, \tag{26}$$

prend la forme

$$2\,d\operatorname{arc\,tang}\sqrt{\frac{\nu-a}{\mu+a}}=\frac{\nu'\,dx-\mu'\,dy}{\mu+\nu}$$

qui doit être susceptible d'une vérification identique. Or, en effectuant la différentiation indiquée dans le premier membre, il vient

$$\frac{(\mu+a)\,\nu'\,dy-(\nu-a)\,\mu'\,dx}{\sqrt{(\mu+a)(\nu-a)}}=\nu'\,dx-\mu'\,dy,$$

ce qui est une identité d'après l'expression (26) de y' en μ, ν, a.

Évidemment l'étude de l'équation (25) comprend les cas où le second membre serait fonction de x seul ou de y seul. Cette dernière remarque fait penser à l'équation

$$p^2+q^2=f(z),$$

qui est celle des *surfaces moulures*. Aucune accointance entre ce sujet très élémentaire et celui ici traité malgré l'analogie apparente des équations. C'est toujours l'occasion de remarquer combien l'on connaît peu les équations en x, y, z, p, q quand on n'a fait que les survoler avec les généralités des Traités classiques.

15. Troisième cas d'intégrabilité. — Nous avons vu, au paragraphe **11**, le cas où l'équation (2) avait un second membre fonction de r seul ($r^2=x^2+y^2$). Examinons maintenant le cas où ce même second membre serait fonction de l'angle polaire θ seul. C'est comme si l'on posait, dans (18),

$$F(x,y)=f(t), \qquad t=\frac{y}{x}.$$

Alors l'équation (21) devient

$$\frac{xy''}{1+y'^2} = f'(t)(1+ty') \tag{27}$$

De $y = tx$, on conclut

$$y' = t'x + t = u + t, \qquad u = t'x,$$

$$y'' = t''x + 2t' = \left(\frac{du}{dx} + t'\right) = t'\left(\frac{du}{dt} + 1\right),$$

et l'équation (27) devient

$$u\left(\frac{du}{dt} + 1\right) = f'(t)\,[1 + t(u+t)]\,[1 + (u+t)^2]. \tag{28}$$

Elle est ramenée au premier ordre et l'équation (27) est, en effet, une de ces équations du second ordre que l'on peut ramener au premier parce que l'équation est homogène en x, y, dx, dy, d^2y. Mais l'équation (28) ne semble point maniable. Nouvel impasse transcendant.

16. Canaux conoïdaux. — Dans tout ce qui précède les aires et éléments d'aire se propagent par canaux cylindriques parallèles à l'axe Oz. Nous avons déjà donné, en différentes publications (1), une théorie générale de la propagation en canaux de forme quelconque. Nous n'avons pas à y revenir ici en détail. Rappelons simplement que, parmi les canaux *rectilignes*, les plus intéressants ne sont pas les canaux *cylindriques* mais les canaux *conoïdaux*. Ceux-ci donnent notamment une évaluation particulièrement simple, vraisemblablement la plus simple de toutes, des aires sphériques.

Soit une sphère S, *un diamètre* DD′ *et un cylindre* C *circonscrit, parallèlement à* DD′. *Toute aire sphérique* A, *de contour* F, *est projetée inaltérée, sur* C, *par le conoïde droit défini par* F *et la directrice* DD′. Démonstration immédiate par la méthode infinitésimale en faisant usage d'un conoïde infiniment délié. La proposition semble avoir été connue d'Archimède; elle donne une théorie des aires sphériques qui vaut mieux que toute autre et cependant semble avoir été à peu près ignorée dans l'enseignement. Toutefois le *Cours de Géométrie* de R. Estève et H. Mitault (1936, t. II, p. 196, Gauthier-Villars) reprend l'idée. Celle-ci est également appuyée par M. Georges Bouligand dans la Préface écrite pour un récent ouvrage de R. Dugas : *Essai sur l'incompréhension mathématique* (1940, Vuibert). Mais laissons les canaux conoïdaux malgré la richesse des résultats les concernant.

(1) *Tourbillons, Corpuscules, Ondes* (*Ann. de la Fac. des Sc. de Toulouse*, 3e série, t. XXIV, 1932). *Structures analytiques et Théories physiques* (*Mémorial des Sc. physiques*, fasc. XXII, 1933). *Analyses corpusculaires et ondulatoires* (*Mémorial des Sc. physiques*, fasc. XXXIV, 1937). *Nouveaux éléments d'Analyse*, t. I, 1937; t. II, 1938; t. III, 1940.

17. Canaux coniques. — Ce cas a encore été traité dans les publications précitées, mais nous avons à le rattacher à de nouvelles considérations. Reprenons-le brièvement.

Une cloison, d'élément dS, en M, est définie par une équation

$$F(X, Y, Z) = 0$$

et limitée à un cône OC. On établit provisoirement, sur le contour C, une cloison d'élément $d\sigma$. Les éléments dS et $d\sigma$ se correspondent par projection conique de centre O. On a (*fig.* 3)

$$\frac{\cos\lambda\, dS}{\overline{OM}^2} = \frac{\cos\mu\, d\sigma}{\overline{ON}^2}.$$

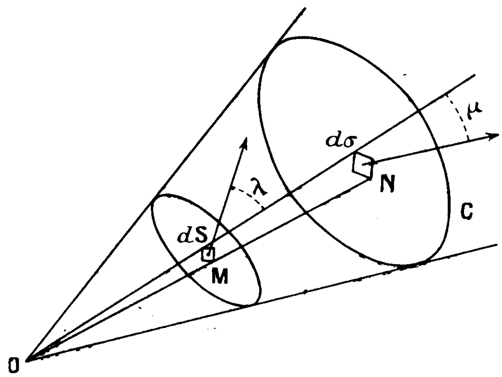

Fig. 3.

ou bien

$$(29)\qquad \frac{(XF_X + YF_Y + ZF_Z)\, dS}{(X^2 + Y^2 + Z^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{F_X^2 + F_Y^2 + F_Z^2}} = \frac{(\alpha x + \beta y + \gamma z)\, d\sigma}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Suivant les notations habituelles, la normale en l'élément $d\sigma$, en N, a des cosinus directeurs α, β, γ.

Dans le premier membre de l'égalité (29), l'attention est attirée par le trinome coefficient de dS. On pense que, si la fonction F était homogène, ce trinome se réduirait (Théorème d'Euler) à mF, en désignant par m l'ordre d'homogénéité. Or F ne peut être homogène, sans quoi *toute* la cloison S serait sur un cône tel que OC et la figure 3 ne pourrait exister.

Il y a cependant moyen d'arranger les choses et de profiter de considérations d'homogénéité.

Toute équation $F(X, Y, Z) = 0$ *peut prendre la forme* $f(X, Y, Z) = 1$ *avec f homogène d'ordre un.* En effet, avec ρ paramètre quelconque, il suffit d'écrire

$$F\left(\frac{X}{\rho}, \frac{Y}{\rho}, \frac{Z}{\rho}\right) = 0$$

et de résoudre par rapport à ρ pour avoir

$$\rho = f(X, Y, Z), \qquad f(kX, kY, kZ) = k\rho = kf(X, Y, Z),$$

ce qui, pour $\rho = 1$, démontre l'assertion.

Alors, en remplaçant $F(X, Y, Z) = 0$ par $f(X, Y, Z) = 1$, l'équation (29) peut s'écrire

$$\frac{(Xf_X + Yf_Y + Zf_Z)f^2\,dS}{(X^2+Y^2+Z^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{f_X^2+f_Y^2+f_Z^2}} = \frac{(\alpha x + \beta y + \gamma z)\,d\sigma}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Dans le premier membre, on a introduit le facteur f^2 ce qui ne change rien, puisque $f = 1$, mais ce qui rend le coefficient de dS homogène d'ordre *zéro*. Comme

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z},$$

on peut, dans ce coefficient de dS, remplacer X, Y, Z respectivement par x, y, z d'où finalement

$$\frac{f^3\,dS}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+f_z^2}} = (\alpha x + \beta y + \gamma z)\,d\sigma,$$

$$S = \iint_\sigma f^{-3}\sqrt{f_x^2+f_y^2+f_z^2}\,(\alpha x + \beta y + \gamma y)\,d\sigma.$$

C'est là une intégrale stokienne qui donne l'aire de la cloison S par intégration sur la cloison σ. Et S est complètement déterminée par la seule donnée du contour C. Mais tout ceci a été grandement développé ailleurs. Nous n'y revenons maintenant qu'en vue du paragraphe suivant.

18. La Géométrie des Nombres. — Les propagations d'ondes transversales en des canaux coniques viennent de nous inciter à faire une Géométrie des Surfaces en laquelle toute surface est représentée par une équation $f(x, y, z) = 1$, avec f homogène. Or c'est ainsi que peut également débuter la « Géométrie des Nombres » de Minkowski, comme le montre le récent Ouvrage de M. Harris Hancock, *Development of the Minkowski Geometry of Numbers*, 1939 (New-York, The Macmillan Company). Pour Minkowski, $f(x, y, z)$ est une *distance radiale* et la surface $f = 1$, supposée d'abord convexe, limite le *corps standard*. On passe de là au corps-M, d'équation $f = M$, lequel contient des répétitions du corps standard auquel on peut donner des formes permettant de « paver » ainsi tout l'espace sans lacunes ni duplicatures. Le corps standard contient, ou ne contient pas, certains points dont les coordonnées ont des valeurs arithmétiques déterminées; il se répète, se *propage*, en propageant de certaines propriétés arithmétiques. Le cas est analogue à celui des *ondes intégrales* envisagées dans ce qui précède.

La convexité du corps standard constitue une hypothèse simple mais non obligatoire, ce qui s'accorde ici avec la possibilité d'attribuer, *à une surface quelconque*, une équation $f = 1$.

Les résolutions, en ρ, du paragraphe précédent, en particulier les résolutions *algébriques*, lient précisément l'Algèbre et l'Arithmétique à de certaines invariances intégrales qui, une fois nées, se propagent en nous renseignant, là où elles passent, sur la nature algébrico-arithmétique de l'espace.

Ainsi les propriétés algébrico-arithmétiques, comme tant d'autres choses, comme tout sans doute, seraient susceptibles d'une propagation ondulatoire. Au fond, c'est ce que semble avoir aperçu Minkowski.

Pour le bel Ouvrage de M. Harris Hancock, on trouvera une analyse bibliographique dans *L'Enseignement mathématique*, t. 38, 1939-40, p. 169.