JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PAUL DELENS

Sur certaines relations entre tétraèdres et quadriques

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 21 (1942), p. 111-121.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1942_9_21__111_0>

Sur certaines relations entre tétraèdres et quadriques;

PAR PAUL DELENS

(Paris).

Des enseignements dont les élèves et disciples de M. É. Cartan sont reconnaissants à leur Maître, le moins précieux n'est sans doute pas l'exemple qu'il leur a donné du travail continu, ordonné et volontaire. Pour cette raison d'abord, comme pour l'intérêt personnel que M. Cartan m'a témoigné, j'aurais voulu que ma contribution à l'hommage qui lui est rendu dans ce Recueil soit de quelque importance. Les circonstances sont cause que mon apport sera au contraire bien modeste; je m'en excuse.

Mon admiration et ma gratitude vont également à M. É. Borel. Je me félicite que ces Volumes jubilaires permettent ainsi aux géomètres d'honorer ensemble deux illustres représentants du génie français.

1. Certains auteurs, M. B. Gambier en particulier (1), ont étudié récemment diverses configurations remarquables de tétraèdres et de quadriques. Des travaux antérieurs sur la théorie du tétraèdre (2) m'ont conduit à insister d'abord sur une importante configuration de cette espèce; j'en tire ensuite quelques conséquences.

Partons du cas simple de deux tétraèdres $\mathfrak{T}$ et Θ tels qu'une quadrique contienne les sommets du premier et soit conjuguée au second. Soient A, B, C, D et α, β, γ, δ les sommets et les faces de $\mathfrak{T}$, conçus respectivement comme points-masses et plans-masses. Soient de même L_1, L_2, L_3, L_0 et λ_1, λ_2, λ_3, λ_0

---

(1) Je cite seulement quelques-unes des dernières publications : B. GAMBIER, *Triangles homologiques, tétraèdres homologiques, tétraèdres en situation hyperboloïdale* (*Bull. Soc. math. de France*, **66**, 1938, p. 8-47); *Couples de tétraèdres de Möbius* (*Ann. Éc. Norm.*, **56**, 1939, p. 71-118); B. GAMBIER et LABROUSSE, *Tétraèdres inscrits dans une biquadrique et conjugués à une quadrique* (*Bull. Soc. math. de France*, **67**, 1939, p. 117-222).

(2) P. DELENS, *Sur la géométrie du tétraèdre* (*Mathesis*, **51**, 1937, p. 119-127; p. 444-456; **52**, 1938, p. 62-79); *Formules du tétraèdre* (*l'Enseignement Math.*, **37**, 1938, p. 173-182); *Sur quelques nouvelles acquisitions de la géométrie du tétraèdre* (*Journ. de Math.*, **18**, 1939, p. 303-321).

les sommets et les faces de Θ. En traduisant qu'une quadrique

$$\chi \equiv q_1\lambda_1^2 + q_2\lambda_2^2 + q_3\lambda_3^2 + q_0\lambda_0^2$$

conjuguée à Θ contient A, B, C, D (est apolaire aux formes A^2, B^2, C^2, D^2), la compatibilité des quatre équations de condition en q_1, q_2, q_3, q_0 s'exprime par l'annulation d'un déterminant du quatrième ordre, soit

$$(1)\qquad (A^2, B^2, C^2, D^2 \mid \lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2, \lambda_0^2) \equiv \begin{vmatrix} (A\lambda_1)^2 & (A\lambda_2)^2 & (A\lambda_3)^2 & (A\lambda_0)^2 \\ (B\lambda_1)^2 & (B\lambda_2)^2 & (B\lambda_3)^2 & (B\lambda_0)^2 \\ (C\lambda_1)^2 & (C\lambda_2)^2 & (C\lambda_3)^2 & (C\lambda_0)^2 \\ (D\lambda_1)^2 & (D\lambda_2)^2 & (D\lambda_3)^2 & (D\lambda_0)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Le déterminant annulé est celui de la matrice des $(J\lambda_i)^2$, avec

$$J = A, B, C, D, \qquad i = 1, 2, 3, 0;$$

$(J\lambda_i)$ désigne le produit scalaire d'un sommet J de $\mathfrak{T}$ par une face λ_i de Θ. La réciprocité dualistique de (1) entraîne l'existence d'une quadrique Q conjuguée à $\mathfrak{T}$ et tangente aux faces de Θ. On peut dire que le tétraèdre $\mathfrak{T}$ est *harmoniquement inscrit* à Θ par l'intermédiaire de la quadrique χ, ou Θ *harmoniquement circonscrit* à $\mathfrak{T}$ par l'intermédiaire de Q.

La matrice des $(J\lambda_i)^2$ serait en général de rang 4; les abaissements successifs de son rang conduisent à distinguer les cas :

I. *La matrice des* $(J\lambda_i)^2$ *est de rang* 3. *Le système de tétraèdres* $\mathfrak{T}$, Θ *admet une quadrique* χ *passant par les sommets de* $\mathfrak{T}$ *et conjuguée à* Θ, *une quadrique* Q *conjuguée à* $\mathfrak{T}$ *et tangente aux faces de* Θ.

II. *La matrice est de rang* 2. *Le système* $\mathfrak{T}$, Θ *admet un faisceau linéaire ponctuel de quadriques* (χ) *et un faisceau linéaire tangentiel* (Q).

III. *La matrice est de rang* 1. *Le système* $\mathfrak{T}$, Θ *admet un réseau linéaire* $\{\chi\}$ *et un réseau linéaire* $\{Q\}$.

Dans le cas I [une condition (1)], le système de tétraèdres dépend de 23 paramètres; pour II (quatre conditions indépendantes), de 20 paramètres; pour III (six conditions indépendantes), de 18 paramètres.

Dans chaque cas la détermination du système $\mathfrak{T}$, Θ est aisée par le choix de A, B, C, D sur χ conjuguée à Θ, ou sur la base du faisceau (χ), ou parmi les huit points associés (dans le cas le plus général) du réseau $\{\chi\}$; ou de même par le choix de λ_1, λ_2, λ_3, λ_0 avec des quadriques Q.

Les relations imposées dans le cas III sont toutes celles du type

$$(A^2, B^2 \mid \lambda_1^2, \lambda_2^2) \equiv (A\lambda_1)^2(B\lambda_2)^2 - (A\lambda_2)^2(B\lambda_1)^2 = 0,$$

se décomposant en

$$[(A\lambda_1)(B\lambda_2) - (A\lambda_2)(B\lambda_1)][(A\lambda_1)(B\lambda_2) + (A\lambda_2)(B\lambda_1)] = 0,$$

donc, *dans le cas* III, *ou bien les arêtes* AB, ... *de* $\mathfrak{T}$ *rencontrent les arêtes* $\lambda_1 \lambda_2$, ... *de* Θ, *ou bien les paires de sommets* A, B, ... *de* $\mathfrak{T}$ *sont conjuguées harmoniques des paires de faces* λ_1, λ_2, ... *de* Θ. Je n'examine pas le détail des cas possibles, m'en tenant dans la suite à un cas particulier, celui où chacun des tétraèdres $\mathfrak{T}$ et Θ est autopolaire pour l'autre (polarité tétraédrique).

Remarque. — La condition (1) pouvait aussi se traduire par l'annulation d'un produit extérieur de formes *algébriques* de Grassmann, exprimant leur dépendance linéaire, soit

$$(1') \qquad [A^2, B^2, C^2, D^2, \widehat{L_2 L_3}, \widehat{L_3 L_1}, \widehat{L_1 L_2}, \widehat{L_0 L_1}, \widehat{L_0 L_2}, \widehat{L_0 L_3}] = 0,$$

ou du déterminant du dixième ordre des coordonnées correspondantes. La réciprocité dualistique précédente n'est pas en évidence en (1'); les cas d'abaissement du rang des tableaux de coordonnées se présentent aussi différemment à partir de (1) et (1').

2. Rappelons la détermination analytique d'un *couple harmonique* $\mathfrak{T}$, Θ de tétraèdres réciproquement autopolaires. Soient, par rapport à $\mathfrak{T}$, x_i, y_i, z_i, t_i ($i = 1, 2, 3, 0$) les coordonnées tétraédriques homogènes des sommets L_i de Θ; ces coordonnées correspondent aux masses affectées aux sommets et aux faces de $\mathfrak{T}$. Traduire que le plan polaire pour $\mathfrak{T}$ de chaque sommet de Θ contient les autres sommets de ce tétraèdre donne six paires de conditions, analogues aux suivantes, entre L_0 et L_1,

$$\frac{x_1}{x_0} + \frac{y_1}{y_0} + \frac{z_1}{z_0} + \frac{t_1}{t_0} = 0, \qquad \frac{x_0}{x_1} + \frac{y_0}{y_1} + \frac{z_0}{z_1} + \frac{t_0}{t_1} = 0.$$

En posant $x_1 = \mu x_0$, $y_1 = \nu y_0$, $z_1 = \rho z_0$, $t_1 = \sigma t_0$, ces conditions s'écrivent

$$-\frac{\nu + \rho}{\mu + \sigma} = 1 = \frac{\nu\rho}{\mu\sigma}$$

et entraînent d'abord

$$\nu\rho = \mu\sigma, \quad \rho\mu = \nu\sigma, \quad \mu\nu = \rho\sigma, \qquad \text{donc} \qquad \mu^2 = \nu^2 = \rho^2 = \sigma^2.$$

Avec ε, ε', $\varepsilon'' = \pm 1$, on obtient finalement

$$\mu = \varepsilon\sigma, \qquad \nu = \varepsilon'\sigma, \qquad \rho = \varepsilon''\sigma, \qquad \varepsilon\varepsilon'\varepsilon'' = 1,$$
$$1 + \varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon'' \equiv (1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon') = 0.$$

Bref, *le système de coordonnées étant choisi pour que* L_0 *en soit le point-unité*, les coordonnées respectives de L_1, L_2, L_3, L_0 seront

$$(1, -1, -1, 1), \quad (-1, 1, -1, 1), \quad (-1, -1, 1, 1), \quad (1, 1, 1, 1).$$

Le couple harmonique $\mathfrak{T}$, Θ dépend, par le choix arbitraire de $\mathfrak{T}$ et L_0, de 15 *paramètres seulement*; les douze conditions considérées se réduisaient à neuf indépendantes. On reconnaît que L_1, L_2, L_3 sont les conjugués de L_0 dans les involutions biaxiales $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_3$ définies par les paires d'arêtes opposées de $\mathfrak{T}$; ces opérations sont liées aux homologies involutives $\mathcal{H}_J$ ayant pour centre un sommet de $\mathfrak{T}$, pour plan la face opposée, par les relations *symboliques* (¹) telles que

$$\mathcal{H}_A \mathcal{H}_D = \mathcal{H}_D \mathcal{H}_A = \varepsilon \mathcal{H}_1 \qquad \text{ou} \qquad \varepsilon \mathcal{H}_A = \mathcal{H}_1 \mathcal{H}_D = \mathcal{H}_D \mathcal{H}_1 \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Il s'ensuit, L_D étant le transformé de L_0 par $\mathcal{H}_D$, etc., que le tétraèdre Θ', de sommets L_A, L_B, L_C, L_D est construit à partir de L_D comme Θ à partir de L_0. *Dans le système de coordonnées précédent* les sommets de Θ' ont pour coordonnées

$$(-1, 1, 1, 1), \quad (1, -1, 1, 1) \quad (1, 1, -1, 1), \quad (1, 1, 1, -1).$$

Les tétraèdres $\mathfrak{T}$, Θ, Θ' forment un *système desmique* de Stephanos. Ils sont deux à deux autopolaires et deux tétraèdres du système sont conjugués dans chacune des homologies involutives ayant pour centre un sommet, pour plan la face opposée du troisième tétraèdre. Pour Θ et Θ' les correspondances sont ainsi réalisées entre $L_1L_2L_3L_0$ et $L_DL_CL_BL_A$ par $\mathcal{H}_A$, $L_CL_DL_AL_B$ par $\mathcal{H}_B$, $L_BL_AL_DL_C$ par $\mathcal{H}_C$, $L_AL_BL_CL_D$ par $\mathcal{H}_D$.

M'arrêtant désormais aux propriétés du système desmique, je désigne maintenant par $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}_p$ (au lieu de Θ), $\mathfrak{T}_a$ (au lieu de Θ') les trois tétraèdres de ce système; j'appelle $\mathfrak{T}$ le tétraèdre de base, $\mathfrak{T}_p$ le tétraèdre principal, $\mathfrak{T}_a$ l'adjoint de $\mathfrak{T}$. *Ceci sans aucune particularisation autre que nominale*, les relations ici en cause étant projectives et non métriques ou affines. Avec les abréviations $\mathfrak{T}$ = tétraédrique (pour le tétraèdre de base), p = principal, j'appelle encore principal ou $(\mathfrak{T}, p)$ le système de coordonnées dont L_0 est le point-unité. Je rappelle que les relations entre les sommets de $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}_p$, $\mathfrak{T}_a$ peuvent s'écrire (avec des masses convenables)

$$\begin{array}{ll} 2L_1 = A - B - C + D, & 2L_A = -A + B + C + D, \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ 2L_0 = A + B + C + D, & 2L_D = A + B + C - D. \end{array}$$

S'ensuivent les relations entre groupes de 8 points associés

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 + L_4^2 = L_A^2 + L_B^2 + L_C^2 + L_D^2,$$

mais d'autres relations existent entre les produits algébriques ou les carrés des sommets, comme celles correspondant à la relation (1′) et à l'abaissement du

(¹) Si les notations $\mathcal{H}_A$, $\mathcal{H}_D$, ... désignent des opérateurs agissant sur les points, ou des matrices de coordonnées, on obtient seulement

$$\mathcal{H}_A \mathcal{H}_D = -\mathcal{H}_B \mathcal{H}_C, \qquad \dots.$$

rang de la matrice qui y figure, à savoir

$$2(\widehat{L_0L_1}+\widehat{L_2L_3}) = A^2 - B^2 - C^2 + D^2, \qquad 2(\widehat{L_0L_2}+\ldots) = \ldots,$$
$$2(\widehat{L_0L_3}+\ldots) = \ldots.$$

Les tableaux de coordonnées $(\mathcal{T}, p)$ des sommets de $\mathcal{T}_p$ et de $\mathcal{T}_a$, et aussi de leurs faces, étant formés de termes de carrés tous égaux à 1, on vérifie bien — comme aussi par la géométrie — que les couples harmoniques $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}_p$ et $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}_a$ (et de même $\mathcal{T}_p$, $\mathcal{T}_a$) satisfont aux conditions du cas III (n° **1**). Sans détailler davantage, j'énonce la particularité d'un couple harmonique $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}_p$ à 15 paramètres, due à la réciprocité signalée, qui le caractérise parmi les systèmes $\mathcal{T}$, Θ (à 18 paramètres en général) du cas III :

IV. *Pour un couple harmonique de tétraèdres $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}_p$ existent à la fois un réseau linéaire $\{\chi\}$ de quadriques contenant les sommets de $\mathcal{T}$ et conjuguées à $\mathcal{T}_p$ et un réseau linéaire $\{\chi'\}$ de quadriques contenant les sommets de $\mathcal{T}_p$ et conjuguées à $\mathcal{T}$; de même des réseaux linéaires tangentiels $\{Q\}$ et $\{Q'\}$ de quadriques tangentes aux faces de $\mathcal{T}_p$ et conjuguées à $\mathcal{T}$, ou tangentes aux faces de $\mathcal{T}$ et conjuguées à $\mathcal{T}_p$.*

3. L'introduction du système desmique $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}_p$, $\mathcal{T}_a$ prolonge les relations entre quadriques et tétraèdres. Esquissons analytiquement les faits (¹).

Dans le système des quadriques circonscrites à $\mathcal{T}$, le réseau $\{\chi\}$ est déterminé par l'une des conditions : être circonscrit à $\mathcal{T}_a$, ou conjugué à $\mathcal{T}_p$, — et il possède l'autre. Son équation en coordonnées $(\mathcal{T}, p)$ X_A, X_B, X_C, X_D est

$$\{\chi\} \qquad m_1(X_BX_C + X_DX_A) + m_2(X_CX_A + X_DX_B) + m_3(X_AX_B + X_DX_C) = 0.$$

Les U_J étant les coordonnées tangentielles correspondant aux X_J, la polarité $(\mathcal{T})$

$$X_AU_A = X_BU_B = X_CU_C = X_DD_D$$

échange les réseaux $\{\chi\}$ et $\{Q'\}$.

Le réseau $\{\chi'\}$ conjugué à $\mathcal{T}$, circonscrit à $\mathcal{T}_p$ et $\mathcal{T}_a$, a pour équation

$$\{\chi'\} \qquad m_AX_A^2 + m_BX_B^2 + m_CX_C^2 + m_DX_D^2 = 0 \qquad \text{avec } m_A + m_B + m_C + m_D = 0.$$

De même le réseau $\{\chi''\}$ de quadriques circonscrites à $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}_p$, conjuguées à $\mathcal{T}_a$, a pour équation

$$\{\chi''\} \qquad m_1(X_BX_C - X_DX_A) + m_2(X_CX_A - X_DX_B) + m_3(X_AX_B - X_DX_C) = 0.$$

(¹) A côté de mes Mémoires cités, *cf.* les exposés géométriques de J. Neuberg, Note IV du *Traité de Géométrie de* Rouché et de Comberousse, t. **2**; N. Altshiller-Court, *Modern pure solid Geometry* (New-York, 1935) et *Sur la géométrie du tétraèdre* (*Mathesis*, **51**, 1937, p. 307-313).

Chaque quadrique de $\{\chi'\}$ est conservée par les homologies $\mathcal{H}_J$, tandis que les quadriques de $\{\chi\}$ et $\{\chi''\}$ sont celles que conserve l'inversion $(\mathcal{C}, p)$ et les inversions associées, dont les points doubles sont les sommets de $\mathcal{C}_p$ et $\mathcal{C}_a$. Montrons que *toute quadrique circonscrite à $\mathcal{C}$ se rattache ainsi à un système de coordonnées $(\mathcal{C})$, principal pour elle, et aux systèmes de coordonnées associés.* Soit en effet, en coordonnées $(\mathcal{C})$ arbitraires x_J, la quadrique φ d'équation

$$\mu_1 x_B x_C + \mu'_1 x_D x_A + \mu_2 x_C x_A + \mu'_2 x_D x_B + \mu_3 x_A x_B + \mu'_3 x_D x_C = 0. \tag{2}$$

Cherchons à déterminer les facteurs n_J du changement de coordonnées $x_J = n_J X_J$ pour que l'inversion $(\mathcal{C})$

$$X_A X'_A = X_B X'_B = X_C X'_C = X_D X'_D$$

conserve la quadrique φ. Ceci correspond aux relations

$$\mu_1 n_B n_C = \mu'_1 n_D n_A, \qquad \mu_2 n_C n_A = \mu'_2 n_D n_B, \qquad \mu_3 n_A n_B = \mu'_3 n_D n_C,$$

d'où

$$\frac{n_A}{n_D} = \varepsilon_1 \sqrt{\frac{\mu'_2 \mu'_3}{\mu_2 \mu_3}}, \qquad \frac{n_B}{n_D} = \varepsilon_2 \sqrt{\frac{\mu'_3 \mu'_1}{\mu_3 \mu_1}}, \qquad \frac{n_C}{n_D} = \varepsilon_3 \sqrt{\frac{\mu'_1 \mu'_2}{\mu_1 \mu_2}},$$

avec

$$\varepsilon_1, \ \varepsilon_2, \ \varepsilon_3 = \pm 1.$$

On prendra $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = \pm 1$ ou -1 avec le signe commun imposé aux rapports $\frac{\mu'_1}{\mu_1}, \frac{\mu'_2}{\mu_2}, \frac{\mu'_3}{\mu_3}$ pour rester dans les systèmes de coordonnées et de coefficients réels. Ce choix $(+1)$ ou (-1) différencie les réseaux $\{\chi\}$ et $\{\chi''\}$, tandis que les choix pour $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ définissent le point-unité des coordonnées X_J en un des sommets de $\mathcal{C}_p$ ou $\mathcal{C}_a$. Avec $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = +1$ nous ramènerons le quadrique φ dans le réseau $\{\chi\}$, puis avec $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = +1$ (choix de L_0), nous prendrons finalement

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{n_A}{\sqrt{|\mu_1 \mu'_2 \mu'_3|}} = \frac{n_B}{\sqrt{|\mu_2 \mu'_3 \mu'_1|}} = \frac{n_C}{\sqrt{|\mu_3 \mu'_1 \mu'_2|}} = \frac{n_D}{\sqrt{|\mu_1 \mu_2 \mu_3|}}, \\ &\frac{m_1}{\omega_1 \sqrt{|\mu_1 \mu'_1|}} = \frac{m_2}{\omega_2 \sqrt{|\mu_2 \mu'_2|}} = \frac{m_3}{\omega_3 \sqrt{|\mu_3 \mu'_3|}}, \end{aligned} \right. \tag{3}$$

où $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ sont les signes de μ_1, μ_2, μ_3 (ou μ'_1, μ'_2, μ'_3).

Précisons la condition pour qu'une quadrique φ, d'équation (2), soit à génératrices réelles. Les traces, sur un plan δ de $\mathcal{C}$, de φ et de son plan tangent en D ayant pour équations $x_D = 0$ et respectivement

$$\mu_1 x_B x_C + \mu_2 x_C x_A + \mu_3 x_A x_B = 0, \qquad \mu'_1 x_A + \mu'_2 x_B + \mu'_3 x_C = 0, \tag{4}$$

la condition de réalité cherchée (des intersections des traces) est

$$\mu_1^2 \mu_1'^2 + \mu_2^2 \mu_2'^2 + \mu_3^2 \mu_3'^2 - 2\mu_2 \mu'_2 \mu_3 \mu'_3 - 2\mu_3 \mu'_3 \mu_1 \mu'_1 - 2\mu_1 \mu'_1 \mu_2 \mu'_2 \geqq 0.$$

Cette condition n'est pas toujours satisfaite avec $\mu_1 \mu'_1$, $\mu_2 \mu'_2$, $\mu_3 \mu'_3$ de même signe; elle le serait dans le cas contraire.

4. On sait qu'aux droites $JM_J (J = A, B, C, D)$ d'un *quadruple hyperboloïdique* ([1]) se rattache la *situation hyperboloïdique des tétraèdres* $\mathcal{C} \equiv ABCD$; $\tau \equiv M_A M_B M_C M_D$. En posant $M_S = \Sigma x_{SJ} J\,(S, J = A, B, C, D)$, les termes x_{SJ} du tableau de coordonnées des M_S pour lesquels $S \neq J$ sont les seuls intéressant le quadruple de droites; ce sont aussi (suivant les lignes du tableau) les coordonnées plückériennes non nulles des droites $[JM_J]$. Les conditions connues (relations de de Céva) pour la situation hyperboloïque sont

$$(5)\qquad \begin{cases} x_{BC}\,x_{CD}\,x_{DB} = x_{CB}\,x_{BD}\,x_{DC}, & x_{DC}\,x_{CA}\,x_{AD} = x_{CD}\,x_{DA}\,x_{AC}, \\ x_{DA}\,x_{AB}\,x_{BD} = x_{AD}\,x_{DB}\,x_{BA}, & x_{BA}\,x_{AC}\,x_{CB} = x_{AB}\,x_{BC}\,x_{CA}; \end{cases}$$

trois seulement de ces conditions sont indépendantes.

La situation hyperboloïdique des tétraèdres $\mathcal{C}$, τ est *double* en ce sens que, dans ces tétraèdres, les plans des faces opposés aux sommets associés ont aussi pour intersections quatre droites d'un nouveau quadruple hyperboloïdique. En effet, *deux tétraèdres en situation hyperboloïdique sont deux tétraèdres polaires par rapport à une quadrique.* La manière la plus instructive d'établir ce fait est sans doute de traduire la situation hyperboloïdique des droites $[JM_J]$ par une relation

$$(6)\qquad \theta_A[AM_A] + \theta_B[BM_B] + \theta_C[CM_C] + \theta_D[DM_D] = 0,$$

où les conditions de compatibilité pour l'existence des coefficients θ_J sont les relations (5). Mais on peut, dans le système de coordonnées *homogènes* x_{SJ}, par un choix convenable des masses affectées aux points M_J, modifier ces coordonnées pour satisfaire à $x_{SJ} = x_{JS}$, vérifiant évidemment les relations (5) ([2]). *Ceci fait* nous utilisons la relation

$$(7)\qquad \Delta \equiv [AM_A] + [BM_B] + [CM_C] + [DM_D] = 0 \qquad (x_{SJ} = x_{JS})$$

équivalente à

$$(8)\qquad P \equiv AM_A + DM_B + CM_C + DM_D = \widehat{AM_A} + \widehat{BM_B} + \widehat{CM_C} + \widehat{DM_D}$$

(les produits JM_J au premier membre étant *généraux*, ceux du second membre *symétriques*), puisque (7) exprime que la partie alternée de P est nulle. Or, par $x_{SJ} = x_{SJ}$, P est une polarité à matrice symétrique, noyau d'une quadrique tangentielle, dont la forme adjointe est également symétrique (C. Q. F. D.).

([1]) La semi-quadrique, dont les droites du quadruple sont génératrices, peut être décomposée en deux faisceaux plans de droites, avec une génératrice commune; le cas de quatre droites concourantes en un point est plus particulier.

([2]) En ne tenant compte que des termes où $x_{SJ} \neq x_{JS}$, la modification pourrait s'interpréter par un glissement des points M_J sur les droites du quadruple, donc un changement du tétraèdre τ. En tenant compte au contraire des termes x_{JJ}, le tétraèdre τ reste conservé (les points *géométriques* en ses sommets sont les mêmes, les points *analytiques* modifiés); c'est ce point de vue que nous adoptons.

La réduction de coordonnées, dans le système ($\mathfrak{T}$) initial, est une première simplification. Nous allons, pour le quadruple hyperboloïdique [$\mathrm{JM_J}$], rechercher un système de coordonnées privilégié simplifiant encore les expressions de Δ et de

$$(8') \qquad P \equiv \Sigma x_{AA} A^2 + 2\Sigma\left(x_{BC}\widehat{BC} + x_{DA}\widehat{DA}\right) \qquad (x_{SJ} = x_{JS}).$$

Il est facile de voir qu'on est ramené au problème traité au numéro précédent où le choix de coordonnées principales incorporant la quadrique φ au réseau $\{\chi\}$ a transformé sa matrice suivant

$$(9) \qquad \begin{Bmatrix} 0 & \mu_3 & \mu_2 & \mu'_1 \\ \mu_3 & 0 & \mu_1 & \mu'_2 \\ \mu_2 & \mu_1 & 0 & \mu'_3 \\ \mu'_1 & \mu'_2 & \mu'_3 & 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} 0 & m_3 & m_2 & m_1 \\ m_3 & 0 & m_1 & m_2 \\ m_2 & m_1 & 0 & m_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 & 0 \end{Bmatrix},$$

à un facteur sans importance près; la dernière forme possède aussi la symétrie par rapport à la deuxième diagonale et la conserve par une permutation arbitraire effectuée à la fois sur les lignes et les colonnes.

Nous supposerons désormais le tétraèdre τ', de sommets $\mathrm{M_J}$, inscrit à $\mathfrak{T}(x_{JJ} = 0)$: *la situation hyperboloïdique de deux tétraèdres* $\mathfrak{T}$, τ' *dont le second est inscrit au premier équivaut à l'existence d'une quadrique* P′ *inscrite à* $\mathfrak{T}$, *circonscrite à* τ'. Sur la matrice de P′ nous pourrons effectuer la réduction

$$(10) \qquad \begin{Bmatrix} 0 & x_{AB} & x_{AC} & x_{AD} \\ x_{BA} & 0 & x_{BC} & x_{BD} \\ x_{CA} & x_{CB} & 0 & x_{CD} \\ x_{DA} & x_{DB} & x_{DC} & 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} 0 & \xi_3 & \xi_2 & \xi_1 \\ \xi_3 & 0 & \xi_1 & \xi_2 \\ \xi_2 & \xi_1 & 0 & \xi_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & 0 \end{Bmatrix}.$$

En effet, la quadrique P′, d'équation tangentielle

$$(11) \qquad x_{BC}\,u_B u_C + x_{DA}\,u_D u_A + x_{CA}\,u_C u_A + x_{DB}\,u_D u_B + x_{AB}\,u_A u_B + x_{DC}\,u_D u_C = 0,$$

s'incorpore par le changement de coordonnées tangentielles $u_J = q_J \mathrm{U_J}$, aux quadriques d'un réseau $\{Q'\}$ du n° **2**

$$\{Q'\} \qquad \xi_1(\mathrm{U_B U_C + U_D U_A}) + \xi_2(\mathrm{U_C U_A + U_D U_B}) + \xi_3(\mathrm{U_A U_B + U_D U_C}) = 0,$$

conservées par l'inversion ($\mathfrak{T}$) entre plans

$$\mathrm{U_A U'_A = U_B U'_B = U_C U'_C = U_D U'_D}.$$

Une simple transcription du n° **3** donne les déterminations

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{q_A}{\sqrt{|x_{BC}x_{CD}x_{DB}|}} = \frac{q_B}{\sqrt{|x_{CD}x_{DA}x_{AC}|}} = \frac{q_C}{\sqrt{|x_{DA}x_{AB}x_{BD}|}} = \frac{q_D}{\sqrt{|x_{AB}x_{BC}x_{CA}|}}, \\ &\frac{\xi_1}{\sigma_1\sqrt{|x_{BC}x_{DA}|}} = \frac{\xi_2}{\sigma_2\sqrt{|x_{CA}x_{DB}|}} = \frac{\xi_3}{\sigma_3\sqrt{|x_{AB}x_{DC}|}}, \end{aligned} \right.$$

σ_1, σ_2, σ_3 étant les signes de x_{BC}, x_{CA}, x_{AB}, ou (x_{DA}, x_{DB}, x_{DC}).

Remarquons que la transformation (10) s'effectue par multiplication des lignes et des colonnes de la première matrice par q_A, q_B, q_C, q_D; ces deux opérations correspondent aux substitutions effectuées dans Δ et P' (ou P) : $J = q_J J'$, $M_S = \Sigma x_{SJ} J = \Sigma X_{SJ} J' (S, J = A, B, C, D; J' = A', B', C', D')$, — soit $x_{SJ} q_J = x_{SJ}$, puis $X_{SJ} q_S = \xi_i (i = 1, 2, 3)$ à un facteur d'ensemble près. Les X_{SJ} sont des coordonnées ponctuelles ($\mathfrak{T}$, p) correspondant aux coordonnées tangentielles U_J.

5. Il reste, avant de conclure, à compléter quelques points. Soit la quadrique réglée φ, d'équation (2). Elle porte la semi-quadrique déterminée par les droites $[JM_J]$ de traces M_J sur les faces de $\mathfrak{T}$, si les équations analogues à (4)

$$(13)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\mu_1}{x_{AD}} + \dfrac{\mu'_2}{x_{AC}} + \dfrac{\mu'_3}{x_{AB}} = 0, & \mu'_1 x_{AD} + \mu_2 x_{AC} + \mu_3 x_{AB} = 0, \\ \dfrac{\mu'_1}{x_{BC}} + \dfrac{\mu_2}{x_{BD}} + \dfrac{\mu'_3}{x_{BA}} = 0, & \mu_1 x_{BC} + \mu'_2 x_{BD} + \mu_3 x_{BA} = 0, \\ \dfrac{\mu'_1}{x_{CB}} + \dfrac{\mu'_2}{x_{CA}} + \dfrac{\mu_3}{x_{CD}} = 0, & \mu_1 x_{CB} + \mu_2 x_{CA} + \mu'_3 x_{CD} = 0, \\ \dfrac{\mu_1}{x_{DA}} + \dfrac{\mu_2}{x_{DB}} + \dfrac{\mu_3}{x_{DC}} = 0, & \mu'_1 x_{DA} + \mu'_2 x_{DB} + \mu'_3 x_{DC} = 0 \end{array}\right.$$

sont compatibles en μ_1, μ_2, μ_3, μ'_1, μ'_2, μ'_3. Les trois équations de conditions sont les relations (5) indépendantes. Si elles sont satisfaites, en prenant $x_{SJ} = x_{SJ}$, on obtient par

$$(14)\qquad \frac{\mu_1}{x_{DA}} + \frac{\mu_2}{x_{DB}} + \frac{\mu_3}{x_{DC}} = 0, \qquad \mu_1 x_{BC} + \mu_2 x_{CA} + \mu_3 x_{AB} = 0,$$

si l'on n'a pas $x_{BC} x_{DA} = x_{CA} x_{DB} = x_{DC} x_{AB}$ (cas d'indétermination), les valeurs proportionnelles des μ et μ'

$$(15)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\mu_1}{\dfrac{x_{AB}}{x_{DB}} - \dfrac{x_{AC}}{x_{DC}}} = \dfrac{\mu_2}{\dfrac{x_{BC}}{x_{DC}} - \dfrac{x_{BA}}{x_{DA}}} = \dfrac{\mu_3}{\dfrac{x_{CA}}{x_{DA}} - \dfrac{x_{CB}}{x_{DB}}}, \\ \mu'_1 = \dfrac{x_{BC}}{x_{AD}} \mu_1, \qquad \mu'_2 = \dfrac{x_{CA}}{x_{BD}} \mu_2, \qquad \mu'_3 = \dfrac{x_{AB}}{x_{CD}} \mu_3, \end{array}\right.$$

qui permettent de vérifier, entre (3) et (12), les relations

$$q_A n_A = q_B n_B = q_C n_C = q_D n_D,$$

donc *le choix de coordonnées principales, ponctuelles ou tangentielles, permettant, à partir des coordonnées* ($\mathfrak{T}$) *correspondantes* x_J, u_J, *les réductions des équations des quadriques* φ *et* P' *à des formes* $\{\chi\}$ *et* $\{Q'\}$, *est le même.*

Une fois ces réductions faites, les formules (14) et (15) sont devenues

$$(16)\qquad \frac{m_1}{\xi_1}+\frac{m_2}{\xi_2}+\frac{m_3}{\xi_3}=0, \qquad m_1\xi_1+m_2\xi_2+m_3\xi_3=0,$$

$$(17)\qquad \frac{m_1}{\dfrac{\xi_2}{\xi_3}-\dfrac{\xi_3}{\xi_2}}=\frac{m_2}{\dfrac{\xi_3}{\xi_1}-\dfrac{\xi_1}{\xi_3}}=\frac{m_3}{\dfrac{\xi_1}{\xi_2}-\dfrac{\xi_2}{\xi_1}} \qquad (\xi_1^2=\xi_2^2=\xi_3^2 \text{ exclu}).$$

Les ξ_1, ξ_2, ξ_3 ordonnés comme dans le tableau (10) sont, dans chaque face de $\mathfrak{T}$, des termes de coordonnées triangulaires appartenant au système $(\mathfrak{T}, p)$ mais résultant de l'accord des masses précédemment affectées aux points M_J par $x_{SJ}=x_{JS}$, les valeurs proportionnelles des coordonnées X_{JS} de M_J étant celles de ξ_1, ξ_2, ξ_3 prises dans l'ordre correspondant à la face de $\mathfrak{T}$ considérée. Il est évident par (17) que *la quadrique* φ *porte aussi la semi-quadrique déterminée par le quadruple hyperboloïdique* $[J\overline{M_J}]$ *complémentaire du premier, lié à la quadrique* $\overline{P'}$ *déduite de* P' *par le changement de* ξ_1, ξ_2, ξ_3 *en leurs inverses* (¹). L'explication est la suivante :

Dans l'inversion ponctuelle $(\mathfrak{T}, p)$ conservant la quadrique φ, un plan mené par un sommet de $\mathfrak{T}$ a pour transformé (en général) un cône de même sommet, circonscrit au triangle de base opposé. Par suite *l'inversion ponctuelle* $(\mathfrak{T}, p)$ *échange les quadruples hyperboloïdiques* $[JM_J]$ *et* $[J\overline{M_J}]$, *cependant que nous avons vérifié que l'inversion* $(\mathfrak{T}, p)$ *entre plans conserve chacune des quadriques tangentielles* P' *et* $\overline{P'}$ *inscrites à* $\mathfrak{T}$ *en les sommets* M_J *ou* $\overline{M_J}$ *des tétraèdres* τ' et $\overline{\tau'}$ (²).

D'autre part *si quatre points dans les faces de* $\mathfrak{T}$ *définissent avec les sommets opposés un quadruple hyperboloïdique, les droites polaires de ces points par rapport aux triangles des faces sont aussi en situation hyperboloïdique et réciproquement* [relations (5)].

Appelons dès lors *solidaires* quatre points des faces $\mathfrak{T}$ liés hyperboloïdiquement aux sommets opposés, quatre droites de ces faces formant quadruple hyperboloïdique, etc., tous systèmes dépendant d'un point *directeur* L_0 et d'un tétraèdre $\mathfrak{T}_p$; *solidaires* encore les systèmes de coordonnées triangulaires des faces de $\mathfrak{T}$ dont les points-unités, les droites-unités sont les éléments précédents : *de tels systèmes dépendent, par les réductions indiquées, d'un système de coordonnées* $(\mathfrak{T})$, *dit ici principal.* Et l'inversion $(\mathfrak{T}, p)$ induit, dans les faces de $\mathfrak{T}$, en coordonnées triangulaires principales, des inversions triangulaires échangeant les points M_J et $\overline{M_J}$ d'une même face.

Les recherches précédentes m'ont été suggérées par une remarque de M. V. Thébaut (*Mathesis*, 54, 1940, question proposée n° 3172, p. 95). Le

---

(¹) D'après (16), les quadriques P' et $\overline{P'}$ sont apolaires à φ.

(²) Les droites $[M_J\overline{M_J}]$, de coordonnées $m_i (i=1, 2, 3)$ dans les faces de $\mathfrak{T}$, sont également en situation hyperboloïdique.

résultat obtenu permet la liaison entre la géométrie des triangles faces d'un tétraèdre (ou des trièdres de ce tétraèdre) et la géométrie de ce tétraèdre *au moyen de coordonnées appropriées*, dans un cas plus général que celui jusqu'ici considéré (droites JM_i concourantes). *Il est permis d'y voir un principe de cohésion qui faisait encore défaut à la théorie du tétraèdre.*

Dans l'exemple considéré par M. Thébault, les points de Lemoine des faces du tétraèdre sont ainsi solidaires et rattachés au point que j'ai appelé point de Lemoine du tétraèdre, point-unité d'un système de coordonnées ($\mathfrak{T}$) principales *métriquement définies*. Cet exemple justifie une autre possibilité, celle d'une représentation des ∞^2 quadruples hyperboloïdiques précédents dépendant d'un tétraèdre $\mathfrak{T}_p$ par les points M d'un triangle θ associé à $\mathfrak{T}$; M a dans θ les coordonnéees homogènes ξ_1, ξ_2, ξ_3 dont le point-unité ($\xi_1 = \xi_2 = \xi_3$) correspond au point-unité L_0 du système ($\mathfrak{T}, p$), donc aux coordonnées (p) elles-mêmes. Par (16) les coefficients m_1, m_2, m_3 deviennent dans θ des coordonnées de droites : celles de la droite joignant deux points M et $\overline{M}$ inverses (par changement des ξ en leurs inverses), et aussi les coefficients de la conique circonscrite à θ et contenant M et $\overline{M}$. Remarquons que, pour L_0 et les autres sommets de $\mathfrak{T}_p(\xi_1^2 = \xi_2^2 = \xi_3^2)$, l'on est dans le cas de quadruples de droites JM_i concourantes, pour lesquels les équations (14) ou (16) ne déterminent plus une quadrique φ, mais seulement un faisceau linéaire de cônes.

J'ai déjà utilisé partiellement (*loc. cit.*) une telle représentation pour les coordonnées principales métriques, avec le triangle associé de Von Staudt. On peut penser qu'elle rendra les mêmes services dans le cas général pour le choix des grandeurs fondamentales du tétraèdre à attacher au système de coordonnées choisi; sa possibilité résulte de ce que les ξ sont, comme le montrent par exemple les formules (12), relatives aux paires d'arêtes opposées du tétraèdre ([1]).

([1]) Quelques résultats de cette étude sont annoncés dans ma Note *Sur la Théorie du tétraèdre* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 211, 1940, p. 220). Une définition plus générale des éléments solidaires, à partir des involutions biaxiales de $\mathfrak{S}_p$, est donnée dans la Note *Sur certains éléments permutant du tétraèdre* (*Ibid.*, t. 211, 1940, p. 273).