JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

PAUL VINCENSINI

Les surfaces de Voss et la déformation des réseaux cinématiquement conjugués

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 20 (1941), p. 427-440.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1941_9_20__427_0>

Les surfaces de Voss et la déformation des réseaux cinématiquement conjugués;

Par Paul VINCENSINI.

Introduction.

Les surfaces (de Voss) admettant un réseau conjugué formé de géodésiques ont donné lieu à de nombreux travaux. L'une de leurs propriétés les plus remarquables consiste en ce que le réseau conjugué géodésique est *persistant*, c'est-à-dire ne cesse de rester conjugué (géodésique) au cours d'une déformation à un paramètre de la surface qui le porte.

On retrouve les surfaces de Voss, en cherchant les couples de surfaces applicables, telles que les asymptotiques de l'une des deux surfaces d'un même couple aient pour homologues, sur l'autre surface, les courbes d'un réseau conjugué. Les deux surfaces d'un tel couple sont dites *adjointes*; ce sont deux surfaces de Voss applicables avec correspondance des réseaux conjugués géodésiques. Si ces derniers réseaux sont *minima* on a les surfaces *minima adjointes*.

Je me propose de montrer ici comment on peut rattacher les surfaces de Voss à la théorie des réseaux *cinématiquement conjugués*. Je l'ai brièvement indiqué dans une Note des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (1), que je développe et complète ici, et où il s'agit de *déterminer les surfaces* S *admettant une déformation transformant les réseaux cinématiquement conjugués de* S (définis par S et une sur-

(1) *C. R. Acad. Sc.*, t. 208, 1939, p. 1963.

face S_1 applicable sur S) *en réseaux conjugués de la surface déformée* Σ.

J'ai montré, dans la Note citée, que S, S_1 et Σ doivent faire partie d'une suite à un paramètre de surfaces applicables avec réseau conjugué géodésique persistant. D'une façon précise, si l'on exclut le cas où S et S_1 sont *deux surfaces symétriques arbitraires,* Σ étant confondue avec S_1, la solution complète du problème est fournie par trois surfaces de Voss S, S_1, Σ faisant partie d'une même famille à un paramètre de surfaces de Voss applicables avec réseau conjugué géodésique persistant, deux des trois surfaces pouvant être choisies arbitrairement dans la famille, la troisième étant alors déterminée.

Le point de vue duquel le résultat précédent permet de regarder les surfaces de Voss se prête, comme on le verra, avec la plus grande facilité, à l'introduction des surfaces *adjointes* définies plus haut. Ces surfaces ont été considérées pour la première fois par M. A. Demoulin (¹), puis par M. Eisenhart (²), et enfin par M. B. Gambier (³) qui a fait des surfaces adjointes le point de départ d'une théorie approfondie des surfaces de Voss; M. Gambier a, de plus, résumé tous les résultats, connus en 1931 sur les surfaces de Voss-Guichard, dans une étude insérée aux *Annales de l'École Normale*, 48, 1931, p. 359-396.

1. Réseaux conjugués persistants. — Nous commencerons par rappeler brièvement le mode d'obtention des réseaux conjugués persistants, auxquels M. Finikoff a récemment consacré un fascicule du *Mémorial des Sciences Mathématiques* (⁴) dont nous utiliserons ici toutes les notations.

Il s'agit de trouver les éléments linéaires

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \tag{1}$$

admettant des surfaces représentatives sur lesquelles les courbes (u, v) forment un réseau conjugué.

(¹) *C. R. Acad. Sc.*, **133**, 1901, p. 986; **140**, 1905, p. 1226 et 1572.
(²) *Trans. Amer. Math. Soc.*, **8**, 1907, p. 113-134.
(³) *Acta. math.*, **51**, 1927, p. 83-151.
(⁴) *Mém. des Sc. math.*, fasc. **96**, 1939.

L'une quelconque S de ces surfaces sera déterminée intrinsèquement par sa deuxième forme

(2) $\quad D\,du^2 + D''\,dv^2 \quad$ [$D' = 0$, le réseau (u, v) étant conjugué]

et, pour que S existe, il faudra que l'on puisse déterminer les deux fonctions

$$\delta = \frac{D}{\sqrt{EG - F^2}}, \qquad \delta'' = \frac{D''}{\sqrt{EG - F^2}},$$

vérifiant les équations de Gauss-Codazzi

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \delta}{\partial v} &= -\begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} \delta - \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \delta'', \\ \frac{\partial \delta''}{\partial u} &= -\begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} \delta - \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} \delta'', \\ \delta\delta'' &= K, \end{aligned} \right.$$

où les symboles $\{\ \}$ et K (courbure) se rapportent à (1) : pour éviter tout malentendu au lecteur qui se reporterait au traité de Darboux, nous croyons utile de rappeler que les lettres D, D′, D″ du traité de Darboux représentent les coefficients primitivement imaginés par Gauss, mais que les géomètres ont reconnu opportun de modifier ce choix, tout en conservant les symboles D, D′, D″ pour les nouveaux coefficients, de façon à écrire schématiquement $D\ (\text{définif}) = \dfrac{D\ (\text{Gauss})}{\sqrt{EG - F^2}}$ et formules semblables pour D′ et D″, de façon à avoir

$$-S\,dc\,dx = D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2.$$

Le Mémoire des *Acta* de M. Gambier emploie la notation de Gauss et Darboux; notre Mémoire emploie la notation définitive.

En introduisant une fonction auxiliaire t, la troisième équation (3) montre que l'on peut poser

$$\delta = \sqrt{K}\,t, \qquad \delta'' = \sqrt{K}\,\frac{1}{t},$$

et alors les deux premières équations s'écrivent

$$(4) \qquad \frac{\partial \log t}{\partial u} = b_1 t^2 + a, \qquad -\frac{\partial \log t}{\partial v} = \frac{b}{t^2} + a_1,$$

où l'on a

$$(5)\qquad \begin{cases} b = \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}, & b_1 = \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}, \\ a = \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \log K}{\partial u}, \\ a_1 = \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \log K}{\partial v}. \end{cases}$$

La condition d'intégrabilité du système (4) est

$$(6)\qquad t^2(b_{1_v} - 2a_1 b_1) + a_v + a_{1_u} - 4bb_1 + \frac{1}{t^2}(b_u - 2ab) = 0.$$

Toute solution t de (6) vérifiant (4) détermine, intrinsèquement, une surface d'élément linéaire (1) sur laquelle le réseau (u, v) est conjugué.

$-t$, qui vérifie (6) et (4) dans les mêmes conditions que t, définit une surface, symétrique de la précédente, admettant aussi (u, v) comme réseau conjugué. Ce cas évident d'isométrie est d'ailleurs le seul (avec celui obtenu avec deux surfaces égales) pour lequel tout réseau conjugué de l'une des deux surfaces a pour homologue, sur l'autre, un réseau conjugué. Nous le signalons parce qu'il lui correspond, comme nous le verrons plus loin, une solution moins évidente du problème général qui fait l'objet de ce Mémoire.

Les couples de surfaces applicables distinctes (non symétriques) s'obtiennent avec deux solutions essentiellement distinctes de (6) vérifiant (4).

Si (6) est identiquement vérifiée, le système (4) est complètement intégrable, et fournit ∞^1 surfaces applicables réalisant une déformation avec réseau conjugué (u, v) persistant.

Il suffit d'ailleurs que le réseau (u, v) soit conjugué sur trois surfaces distinctes d'élément linéaires (1), pour que la condition d'intégrabilité (6) soit identiquement vérifiée, et pour que, par suite, ces trois surfaces soient trois configurations d'une même surface se déformant avec réseau conjugué (u, v) persistant.

2. Réseaux cinématiquement conjugués. — S et S_1 étant deux surfaces applicables, si l'on suppose S fixe, et si l'on fait *rouler* S_1 sur S, de façon que les deux surfaces soient constamment en contact par deux points homologues dans l'application (M et M_1), le contact réalisant en outre la coïncidence des tangentes aux différentes courbes homologues issues de M et M_1, on définit un mouvement de S_1 (roulement de S_1 sur S), qui est à deux paramètres, sauf dans le cas particulier où S et S_1 sont deux surfaces réglées applicables avec correspondance des génératrices rectilignes, auquel cas le mouvement n'est qu'à un seul paramètre.

Plaçons-nous dans le cas général. Tout mouvement à un paramètre inclus dans le mouvement à deux paramètres constitué par le roulement de S_1 sur S est, à chaque instant, une rotation autour d'un axe Mt (axe instantané de rotation) issu du point de contact de S et de S_1 et situé dans le plan tangent commun.

La direction Mt' du plan tangent commun, dans laquelle se déplace le point M sur S au cours de la rotation instantanée précédente, est dite *cinématiquement conjuguée* à Mt. La relation entre Mt et Mt' est réciproque : si l'axe instantané de rotation est Mt', la direction cinématiquement conjuguée est Mt. Mt et Mt' sont *deux directions cinématiquement conjuguées de* S.

En chaque point M de S, les directions cinématiquement conjuguées forment une involution définie par l'équation

$$(D - D_1)\, du\, \delta u + (D' - D'_1)(du\, \delta v + dv\, \delta u) + (D'' - D''_1)\, dv\, \delta v = 0, \tag{7}$$

où $D, D', \ldots, D''_1$ sont les coefficients des deuxièmes formes fondamentales de S et S_1, et où (du, dv), $(\delta u, \delta v)$ se rapportent à des déplacements suivant deux directions cinématiquement conjuguées.

Les rayons doubles de l'involution (7) sont distincts, et enveloppent deux familles de courbes à un paramètre de S (ou de S_1) constituant ce qu'on appelle le *réseau caractéristique* du couple $[S, S_1]$; ce réseau caractéristique est défini par l'équation

$$(D - D_1)\, du^2 + 2(D' - D'_1)\, du\, dv + (D'' - D''_1)\, dv^2 = 0. \tag{8}$$

Si l'on rapproche l'équation (8) de l'équation des asymptotiques de S

$$D\, du^2 + 2D'\, du\, dv + D''\, dv^2 = 0, \tag{9}$$

on constate que les deux involutions sont identiques, et que par suite les réseaux cinématiquement conjugués de S sont conjugués au sens de Dupin, si l'on a

$$\frac{D_1}{D} = \frac{D'_1}{D'} = \frac{D''_1}{D''},$$

d'où l'on déduit, soit

$$D = D_1, \qquad D' = D'_1, \qquad D'' = D''_1,$$

soit

$$D = -D_1, \qquad D' = -D'_1, \qquad D'' = -D''_1.$$

Dans le premier cas l'involution (8) n'existe plus (les deux surfaces S, S_1 sont égales et il n'y a plus de roulement possible); dans le deuxième cas S et S_1 sont *symétriques* (par rapport à un plan).

En général, il n'existe qu'un seul réseau, à la fois cinématiquement conjugué et conjugué au sens de Dupin sur S et S_1. Ce réseau s'obtient en annulant le Jacobien des deux formes (8), (9), et l'on constate aussitôt que c'est le réseau conjugué conservé dans l'application des deux surfaces S, S_1.

Nous ferons observer, avant de terminer ces préliminaires, que le cas d'exception présenté par deux surfaces S, S_1 symétriques fournit la solution particulière signalée dans l'Introduction, du problème de la transformation des réseaux cinématiquement conjugués en réseaux conjugués : l'isométrie transformant S en S_1 transforme évidemment les réseaux cinématiquement conjugués de [S, S_1] en réseaux conjugués de S_1.

3. Nous arrivons maintenant à la solution générale du problème de la détermination des triples de surfaces applicables distinctes (deux des surfaces ne sont ni égales ni symétriques) S, S_1, Σ, tels que l'application fasse correspondre les réseaux conjugués de Σ aux réseaux cinématiquement conjugués de S (définis par le roulement de S_1 sur S).

Supposons trouvées deux surfaces S et S_1 d'un même triple [S, S_1, Σ]. Rapportons S et S_1 à leur réseau conjugué commun (u, v), qui est aussi (*voir* le n° **2**) cinématiquement conjugué sur S et S_1.

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

étant l'élément linéaire commun à S, S_1, Σ, et

$$D\ du^2 + D''\ dv^2,$$
$$D_1\, du^2 + D''_1\, dv^2$$

les deuxièmes formes fondamentales de S, S_1, les réseaux cinématiquement conjugués sur S, S_1 sont définis par l'involution dont les rayons doubles sont donnés par l'équations (8), qui s'écrit ici

$$(10) \qquad (D - D_1)\, du^2 + (D'' - D''_1)\, dv^2 = 0,$$

et qui définit le réseau caractéristique de S et S_1.

Si Σ est la surface qu'il faut adjoindre à S et S_1 pour avoir une solution du problème étudié, les rayons doubles de l'involution des directions cinématiquement conjuguées sur S et S_1 et ceux de l'involution des directions conjuguées de Σ (directions asymptotiques) devront se correspondre, et cette condition est nécessaire et suffisante pour que le triple de surfaces [S, S_1, Σ] fournisse une solution du problème.

La remarque simple suivante fournit une première limitation du choix à faire pour S, S′ Σ.

Le réseau conjugué (u, v) commun à S et S_1 étant cinématiquement conjugué sur S et S_1, il lui correspondra, sur Σ, un réseau conjugué. Le réseau (u, v) est donc *conjugué à la fois sur les trois surfaces applicables distinctes* S, S_1, Σ; il en résulte, comme nous l'avons rappelé au numéro **1**, que S, S_1 et Σ *sont trois configurations particulières d'une surface susceptible d'une déformation à un paramètre avec réseau conjugué persistant.* C'est donc parmi les ∞^1 surfaces d'une même suite de surfaces applicables avec réseau conjugué (u, v) persistant qu'il faut rechercher les triples [S, S_1, Σ].

Envisageons une telle suite. Chacune des ∞^1 surfaces qui la constituent est définie intrinsèquement, en dehors de son ds^2, par les coefficients D, D″ de sa deuxième forme fondamentale qui, si l'on pose comme on l'a fait au numéro **1**

$$\delta = \frac{D}{\sqrt{EG - F^2}} = \sqrt{K}\, t, \qquad \delta'' = \frac{D''}{\sqrt{EG - F^2}} = \sqrt{K}\, \frac{1}{t},$$

sont donnés par le système (4) du numéro **1**, par hypothèse complètement intégrable. Soient t, t_1, τ trois solutions distinctes du système (4) correspondant à trois surfaces distinctes S, S_1, Σ. Exprimons que les trois surfaces S, S_1, Σ fournissent une solution de notre problème, en écrivant que l'involution des directions cinématiquement conjuguées sur S, S_1 et celle des directions conjuguées sur Σ se correspondent dans l'application de S (ou S_1) sur Σ. Il suffit d'exprimer que les rayons doubles des deux involutions se correspondent, c'est-à-dire que l'on a (Δ, Δ″ désignant les coefficients de la deuxième forme fondamentale de Σ)

$$\frac{D - D_1}{\Delta} = \frac{D'' - D''_1}{\Delta''}. \tag{11}$$

(11) donne aussitôt entre t, t_1 et τ la relation

$$\tau^2 + t t_1 = 0. \tag{12}$$

Les triples de surfaces S, S., Σ fournissant des solutions du problème que nous étudions doivent donc satisfaire aux deux conditions suivantes :

1° Les trois surfaces S, S_1, Σ doivent appartenir à une même suite de surfaces applicables avec réseau conjugué persistant.

2° Les fonctions t, t_1, τ qui les définissent dans la suite doivent être liées par la relation (12).

Nous allons voir que la deuxième condition n'est pas compatible avec une déformation continue *quelconque* à réseau conjugué persistant, et rechercher, parmi ces déformations, celles qui donnent trois configurations distinctes S, S_1, Σ fournissant effectivement une solution du problème.

Posons, conformément à (12),

$$t = \alpha\tau, \qquad t_1 = -\frac{1}{\alpha}\tau,$$

α étant une certaine fonction des variables u et v, et cherchons à déterminer α, pour que, τ vérifiant le système (4), t et t_1 le vérifient aussi.

On a, par hypothèse,

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \log\tau}{\partial u} &= b_1\tau^2 + a, \\ \frac{\partial \log\tau}{\partial v} &= -\frac{b}{\tau^2} - a_1. \end{aligned}\right. \tag{13}$$

Écrivons que le système précédent reste vérifié lorsqu'on remplace τ par $\alpha\tau$ et par $-\frac{1}{\alpha}\tau$; nous obtenons successivement

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \log\alpha}{\partial u}+\dfrac{\partial \log\tau}{\partial u}=b_1\alpha^2\tau^2+a, \\ \dfrac{\partial \log\alpha}{\partial v}+\dfrac{\partial \log\tau}{\partial v}=-\dfrac{b_1}{\alpha^2\tau^2}-a_1; \end{cases}$$

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \log\alpha}{\partial u}-\dfrac{\partial \log\tau}{\partial u}=-b_1\dfrac{\tau^2}{\alpha^2}-a, \\ \dfrac{\partial \log\alpha}{\partial v}-\dfrac{\partial \log\tau}{\partial v}=b\dfrac{\alpha^2}{\tau^2}+a_1. \end{cases}$$

Les premières équations (14) et (15) peuvent s'écrire, compte tenu de la première équation (13),

$$\frac{\partial \log\alpha}{\partial u}=b_1\tau^2(\alpha^2-1),$$
$$\frac{\partial \log\alpha}{\partial u}=b_1\tau^2\left(1-\frac{1}{\alpha^2}\right),$$

et exigent, comme l'on voit, que l'on ait soit

$$\alpha^2=1,$$

soit

$$b_1=0.$$

De même, les deuxièmes équations (14) et (15), compte tenu de la deuxième équation (13), montrent que l'on a, soit

$$\alpha^2=1,$$

soit

$$b=0.$$

Le cas $\alpha^2=1$ correspond à la solution, déjà signalée, pour laquelle S et S_1 sont deux surfaces quelconques symétriques, Σ étant confondue avec S ou S_1. Ce cas écarté on a donc nécessairement

$$(16)\qquad b=\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\}=0, \qquad b_1=\left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\}=0,$$

et par suite

$$\frac{\partial \log \alpha}{\partial u} = \frac{\partial \log \alpha}{\partial v} = 0. \tag{17}$$

Les équations (16) expriment, comme il est bien connu, que le réseau conjugué persistant (u, v) est un réseau *formé de géodésiques* (réseau de Voss), et les équations (17) expriment que α est une constante arbitraire.

La solution générale du problème envisagé est donc fournie par les surfaces de Voss, qui reçoivent, de ce fait, la nouvelle définition géométrique suivante :

Ce sont les surfaces S *susceptibles d'une déformation (non réduite à une symétrie) transformant les réseaux cinématiquement conjugués de* S *(définis par* S *et une surface* S_1 *applicable sur* S*) en réseau conjugué (au sens de Dupin) de la surface déformée* Σ.

S, S_1 et Σ sont trois configurations d'une même surface de Voss se déformant sur le réseau conjugué géodésique comme base. Deux des trois surfaces peuvent être choisies arbitrairement dans la suite des ∞^1 déformées, la troisième est alors définie intrinsèquement (à une symétrie éventuelle près) par la relation (12) qui lie les paramètres t, t_1, τ définissant S, S_1, Σ.

4. Surfaces adjointes. — Envisageons une famille quelconque (S) de ∞^1 surfaces de Voss applicables avec réseau conjugué géodésique persistant. Soit Σ une surface quelconque de la famille; Σ est définie par une certaine solution τ du système (13) relatif à la famille considérée. Toute autre surface S de la famille est caractérisée par un nombre α (réel ou imaginaire) définissant, à partir de τ, la solution correspondante $t = \alpha\tau$ du système (13).

Si l'on fait correspondre à Σ le point d'abscisse *un* d'un axe $x'Ox$, on définit une correspondance biunivoque entre la famille (S) et la droite $x'x$, chaque surface S de (S) étant représentée, sur $x'x$, par le point dont l'abscisse est le nombre α correspondant, deux points symétriques par rapport à O donnant d'ailleurs deux surfaces symétriques.

La relation $\tau^2 + tt_1 = 0$, définissant à partir de Σ les couples de surfaces $S(t = \alpha\tau)$, $S_1\left(t_1 = -\frac{1}{\alpha}\tau\right)$ tels que les réseaux cinématiquement conjugués de S, S_1 correspondent aux réseaux conjugués de Σ, montre que les points s, s_1 de $x'x$ relatifs à S et S_1 se correspondent dans une involution dont les éléments doubles sont les points a, a_1 d'abscisses $\pm i$. Si, dès lors, on convient de dire que deux surfaces d'une même famille (S) de surfaces de Voss, applicables avec réseau conjugué géodésique persistant, se correspondent dans une involution, lorsqu'il en est ainsi pour leurs images sur $x'x$, on voit que les différents couples de surfaces S, S_1 qui, associées à Σ, fournissent une solution $[S, S_1, \Sigma]$ du problème qui nous occupe, sont répartis *suivant les couples d'éléments homologues d'une involution dont les éléments doubles sont les surfaces (symétriques) a et a_1 correspondant à $t = \pm i\tau$.*

Nous nous trouvons ainsi conduits à associer, à toute surface Σ d'une famille quelconque de Voss, les deux surfaces (symétriques) A et A_1 d'images a et a_1 que l'étude précédente lui attache. Il est facile de voir que A et A_1 sont les surfaces de Voss *adjointes* de Σ, au sens qui a été précisé dans l'Introduction.

Si, en effet, D et D″, Δ et Δ'' désignent les coefficients des deuxièmes formes fondamentales de Σ et A, on a

$$D = \sqrt{K}\sqrt{EG - F^2}\,\tau, \qquad D'' = \sqrt{K}\sqrt{EG - F^2}\,\frac{1}{\tau},$$

$$\Delta = \sqrt{K}\sqrt{EG - F^2}\,i\tau, \qquad \Delta'' = -\sqrt{K}\sqrt{EG - F^2}\,\frac{i}{\tau},$$

d'où

$$\Delta = iD, \qquad \Delta'' = -iD'',$$

et par suite

$$D\Delta'' + D''\Delta = 0,$$

relation qui prouve que les asymptotiques de l'une quelconque des deux surfaces Σ, A correspondent à un réseau conjugué de l'autre, et que, par suite, Σ et A (ou A_1) *sont deux surfaces adjointes* (1).

(1) Nous n'entrerons pas ici dans les détails relatifs à la réalité des surfaces et des réseaux asymptotiques et conjugués en jeu, pour lesquels on pourra se reporter au mémoire des *Acta mathematica* de M. Gambier cité plus haut.

En définitive, la solution générale du problème envisagé (la détermination des triples des surfaces S, S_1, Σ) peut être présentée de la façon suivante :

Donnons-nous arbitrairement, une famille (S) de surfaces de Voss applicables avec réseau conjugué géodésique persistant. Soient Σ une surface arbitraire de la famille, A et A_1 ses adjointes. *Si* S, S_1 *sont deux surfaces de* (S) *conjuguées dans l'involution ayant pour éléments doubles les deux surfaces adjointes* A *et* A_1, *la solution générale du problème est fournie par le triple* $[S, S_1, \Sigma]$.

On voit que, pour une famille S donnée, cette solution générale dépend de deux paramètres : le paramètre qui fixe Σ (et par suite A et A_1), et celui qui fixe l'une des deux surfaces S ou S_1.

3. Déformations avec conservation des réseaux cinématiquement conjugués. — Soient S_1, S_2, S_3, S_4 quatre surfaces applicables distinctes. Il existe, en général, *un seul* réseau cinématiquement conjugué sur S_1, S_2 correspondant, dans l'application, à un réseau de même espèce sur S_3, S_4, et l'on peut se poser le problème de la recherche des quadruples de surfaces applicables $[S_1, S_2, S_3, S_4]$ jouissant de la propriété que *tous les réseaux cinématiquement conjugués se correspondent sur les deux couples* S_1, S_2 *et* S_3, S_4.

Laissant ici de côté le problème général ci-dessus, qui fera l'objet d'une étude ultérieure, nous allons voir comment, sans sortir du champ des surfaces de Voss, on peut en obtenir une infinité de solutions.

Il est tout d'abord évident que si l'on envisage, dans une famille quelconque de Voss, l'involution ayant pour éléments doubles les deux surfaces (symétriques) A et A_1 adjointes d'une même surface Σ arbitrairement choisie dans la famille, deux couples quelconques de surfaces conjuguées dans cette involution $[S_1, S_2]$ et $[S_3, S_4]$, fournissent une solution $[S_1, S_2, S_3, S_4]$ du problème actuel. En effet, les réseaux cinématiquement conjugués de $[S_1, S_2]$ d'une part et de $[S_3, S_4]$ d'autre part, correspondant, d'après le numéro **4**, aux réseaux conjugués de Σ, se correspondent entre-eux.

Mais, nous allons voir de plus que, dans une famille de Voss, il n'existe pas d'autres solutions que celles qui viennent d'être signalées.

Représentons, comme nous l'avons fait précédemment, la famille de Voss envisagée, sur un axe $x'x$, le point d'abscisse *un* correspondant à une surface $\Sigma(\tau)$ arbitrairement choisie dans la famille. Soient S_1, S_2, S_3, S_4 quatre surfaces distinctes de la famille, définies, à partir de la fonction τ qui correspond à Σ, par les fonctions $\alpha_1\tau$, $\alpha_2\tau$, $\alpha_3\tau$, $\alpha_4\tau$, de sorte que les images de S_1, S_2, S_3, S_4 sur $x'x$ sont les points s_1, s_2, s_3, s_n d'abscisses respectives α_1, α_2, α_3, α_4. Exprimons que le quadruple $[S_1, S_2, S_3, S_4]$ fournit une solution du problème envisagé, en écrivant que les réseaux caractéristiques de (S_1, S_2) et de (S_3, S_4) se correspondent dans l'application. Ces deux réseaux sont définis par les deux équations

$$(D_1 - D_2)\,du^2 + (D''_1 - D''_2)\,dv^2 = 0,$$
$$(D_3 - D_4)\,du^2 + (D''_3 - D''_4)\,dv^2 = 0,$$

où D_i, D''_i sont les coefficients de la deuxième forme fondamentale de S_i.

Les deux réseaux se correspondent si l'on a

$$\frac{D_1 - D_2}{D_3 - D_4} = \frac{D''_1 - D''_2}{D''_3 - D''_4},$$

c'est-à-dire si

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_3 - \alpha_4} = \frac{\dfrac{1}{\alpha_1} - \dfrac{1}{\alpha_2}}{\dfrac{1}{\alpha_3} - \dfrac{1}{\alpha_4}},$$

d'où l'on déduit

$$\alpha_1\alpha_2 = \alpha_3\alpha_4. \tag{18}$$

(18) exprime la condition nécessaire et suffisante pour que l'on puisse, par une déformation simultanée de S_1, S_2, transformer les réseaux cinématiquement conjugués de S_1, S_2 en ceux de S_3, S_4.

Si l'on désigne par m^2 la valeur commune (arbitraire) de $\alpha_1\alpha_2$ et $\alpha_3\alpha_4$, et si l'on considère, sur $x'x$, les points a et a_1 d'abscisses m et $-m$ (images de deux surfaces symétriques quelconques A et A_1 de la famille envisagée), on constate que les images du couple (S_1, S_2), de même que celles du couple (S_3, S_4), sont conjuguées dans l'involution de points doubles a et a_1. On voit ainsi que, pour avoir la solution la plus générale du problème envisagé dans les éléments appartiennent à une même famille de Voss, *il suffit de choisir les quatre surfaces* S_1, S_2, S_3, S_4 *de façon que les deux couples* (S_1, S_2), (S_3, S_4) *soient deux couples d'éléments conjugués dans une involution admettant pour éléments doubles deux surfaces symétriques arbitraires de la famille.*

Si l'on observe que deux surfaces symétriques arbitraires d'une même famille de Voss peuvent toujours être considérées comme les adjointes d'une certaine surface Σ de la même famille, on constate que la solution générale que l'on vient d'obtenir n'est autre que la solution particulière dont nous avons reconnu *a priori* l'existence.

Il est à remarquer que si l'on fait varier le paramètre qui fixe, dans une famille de Voss, un couple de surfaces (S_1, S_2) conjuguées dans une involution ayant pour éléments doubles deux surfaces symétriques de la famille, on réalise une déformation à un paramètre de deux surfaces applicables *au cours de laquelle tous les réseaux cinématiquement conjugués de ces deux surfaces restent cinématiquement conjugués*. Il serait sans doute intéressant d'étudier le problème général de la recherche des couples de surfaces applicables susceptibles d'une déformation simultanée continue avec permanence de tous les réseaux cinématiquement conjugués sur les deux surfaces du couple.