

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

JULIEN KRAVTCHENKO

**Sur le problème de représentation conforme de Helmholtz;
théorie des sillages et des proues; (fin)**

Journal de mathématiques pures et appliquées 9^e série, tome 20 (1941), p. 235-303.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1941_9_20_235_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Sur le problème de représentation conforme de Helmholtz;
théorie des sillages et des proues;*

PAR JULIEN KRAVTCHENKO.

(fin).

CHAPITRE IV.

Unicité des solutions du problème de Helmholtz.

30. GÉNÉRALITÉS. OBJET DU CHAPITRE. — Au cours du précédent chapitre nous avons établi l'existence d'au moins une solution pour le problème du sillage et de la proue posé relativement à la configuration des parois rigides, définie dans le plan z au moyen des éléments $\Psi(l)$, α , β , d_1 et d_2 . Dans ce chapitre, nous nous proposons de discuter le nombre de ces solutions et, en particulier, à signaler quelques cas où la solution est unique. Malheureusement, les résultats acquis dans cet ordre d'idées sont loin d'avoir la généralité de nos théorèmes d'existence; les modes de démonstration des théorèmes d'unicité reposent essentiellement sur quelques hypothèses supplémentaires de régularité et de forme [existence de la dérivée $\Psi'(l)$ höldérienne, convexité ou symétrie de l'obstacle, etc.] dont les méthodes employées ne permettent guère de se passer⁽¹⁴⁸⁾.

Signalons aussi que notre discussion d'unicité nous a permis de

⁽¹⁴⁸⁾ Signalons, toutefois, les résultats annoncés par M. Lavrentieff dans une Note récente des *C. R. de l'Acad. de l'U. R. S. S.* Les énoncés de M. Lavrentieff ne semblent concerner que le cas symétrique du problème du sillage. Les hypothèses que cet auteur fait sur la nature de l'obstacle ont été énumérées dans le renvoi en bas de la page 7.

dégager quelques propriétés géométriques des régimes de Helmholtz relatifs à certaines configurations remarquables des éléments rigides (*cf.* §§ 34, 35). Parmi ces propriétés, citons la suivante : la distance d_1 de l'obstacle à la paroi est une fonction croissante du débit ψ_1 correspondant lorsque l'obstacle (symétrique ou convexe) reste fixe.

Le plan général des recherches qui suivent est dû en gros à M. Leray ⁽¹⁴⁹⁾.

Dans les premiers paragraphes de ce Chapitre, nous introduisons les hypothèses complémentaires de régularité de l'obstacle qui légitiment la différentiation (au sens de M. Fréchet) des équations de M. Villat.

Nous réduisons ensuite la discussion de l'équation aux variations ainsi obtenue à un problème aux limites du type envisagé par M. Weinstein, et nous indiquons, en utilisant des raisonnements de M. Friedrichs, des cas où ce problème ne possède d'autres solutions que zéro ⁽¹⁵⁰⁾. Les méthodes de M. Leray permettent alors de conclure.

31. NATURE DE L'OBSTACLE. DIFFÉRENTIATION DES ÉQUATIONS DE M. VILLAT.

— Au cours de ce chapitre nous admettrons que les conditions imposées à l'obstacle au paragraphe 23 sont remplies; de plus, la fonction $\Psi'(l)$ sera assujettie à vérifier la condition de Hölder

$$|\Psi'(l) - \Psi'(l_1)| \leq \text{const.} |l - l_1|^\mu \quad \text{pour } \alpha \leq l \leq l_1 \leq \beta,$$

d'exposant μ supérieur à $\frac{1}{2}$ ⁽¹⁵¹⁾. Nous introduirons l'espace linéaire, normé et complet $H_\mu(l)$, qui se composera de l'ensemble des fonctions $\omega(l)$ définies sur un intervalle fini et vérifiant dans tout cet

⁽¹⁴⁹⁾ En particulier, les quatre derniers paragraphes de ce chapitre suivent de très près l'exposition de M. Leray.

⁽¹⁵⁰⁾ Pour cette partie de mon travail, je me suis servi de quelques résultats de M. Jacob.

⁽¹⁵¹⁾ L'utilité de cette restriction apparaîtra au cours de ce paragraphe; notons, toutefois, que la discussion d'unicité du problème du sillage ne nécessite pas une hypothèse aussi stricte; nous n'avons introduit celle-ci que pour unifier notre exposé.

intervalle une condition de Hölder d'exposant μ . Par norme $\|\varpi(l)\|_\mu$ de $\varpi(l)$ dans $H_\mu(l)$, nous entendons la grandeur

$$(4.1) \quad \|\varpi(l)\|_\mu = \text{Max } |\varpi(l)| + C,$$

C étant la plus petite constante vérifiant l'inégalité

$$|\varpi(l) - \varpi(l_1)| \leq C |l - l_1|^\mu.$$

D'après ce qui précède, $\Psi'(l)$ est un élément de l'espace $H_\mu(l)$. Nous désignerons par $E(\alpha, \beta, l, \mu)$ l'espace abstrait constitué par des fonctions $\Psi(l)$ dont les dérivées $\Psi'(l)$ soient des éléments de $H_\mu(l)$. Nous appellerons C_Ψ et $C_{\Psi'}$ les plus petites constantes telles que

$$|\Psi(l) - \Psi(l_1)| \leq C_\Psi |l - l_1|^\mu, \quad |\Psi'(l) - \Psi'(l_1)| \leq C_{\Psi'} |l - l_1|^\mu,$$

et nous nommerons norme $\|\Psi(l)\|_{l,\mu}$ de $\Psi(l)$ dans $E(\alpha, \beta, l, \mu)$ la grandeur

$$\|\Psi(l)\|_{l,\mu} = \{ \text{Maximum de } |\Psi(l)| \text{ dans l'intervalle } (\alpha, \beta) + C_\Psi \} \\ + \{ \text{Maximum de } |\Psi'(l)| \text{ dans l'intervalle } (\alpha, \beta) + C_{\Psi'} \}.$$

Dès lors, il est clair que l'espace $E(\alpha, \beta, l, \mu)$ est linéaire, complet et normé au sens de M. Banach. Nous allons montrer que moyennant les hypothèses faites, les fonctionnelles des problèmes du sillage et de la proue peuvent être différenciées au sens de M. Fréchet toutes les fois que $(a + 1)$ et $(b - 1)$ sont distinctes de zéro.

Problème du sillage. — Au cours de ce paragraphe $l(s)$, a , b ne désigneront plus nécessairement les inconnues du problème du sillage posé pour la configuration du plan z définie au moyen des éléments $\Psi(l)$, α , β , d_1 et d_2 ; la fonction $l(s)$ sera un élément quelconque de l'espace $E(0, \pi, s)$ — (ce qui implique, rappelons-le, l'existence de la dérivée $\frac{dl(s)}{ds}$ vérifiant une condition $\mathcal{L}_n(s)$ dans tout l'intervalle $0 \leq s \leq \pi$) — et ne sera donc pas nécessairement croissante dans son intervalle de définition; a et b seront deux paramètres assujettis à vérifier les inégalités

$$a + 1 < 0, \quad b - 1 > 0,$$

moyennant lesquelles les fonctions elliptiques considérées par M. Villat

et construites à partir des demi-périodes ω_1 et ω_3 correspondantes [cf. (1.6)] ne seront pas dégénérées; les symboles tels que

$$\frac{\partial p[\omega_1 u, \omega_1, \omega_3]}{\partial \omega_1}, \quad \frac{\partial p[\omega_1 u, \omega_1, \omega_3]}{\partial \omega_3},$$

par exemple, auront un sens.

Soient alors deux systèmes voisins d'éléments

$$\begin{aligned} \Psi(l), \quad \alpha, \quad \beta, \quad l(s), \quad a, \quad b, \quad d_1, \quad d_2, \\ \Psi^*(l), \quad \alpha^*, \quad \beta^*, \quad l^*(s), \quad a^*, \quad b^*, \quad d_1^*, \quad d_2^*. \end{aligned}$$

Nous nous proposons de comparer les deux configurations dans le plan z que les formules de M. Villat font correspondre à chacun d'eux; pour abrégier les écritures, nous poserons (¹⁵²)

$$(4.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta l(s) = l^*(s) - l(s), \quad \delta a = a^* - a, \quad \delta b = b^* - b, \\ \Delta \Psi(l) = \Psi^*(l) - \Psi(l), \quad \Delta \Psi'(l) = \Psi'^*(l) - \Psi'(l), \\ \Delta \alpha = \alpha^* - \alpha, \quad \Delta \beta = \beta^* - \beta, \quad \Delta d_1 = d_1^* - d_1, \quad \Delta d_2 = d_2^* - d_2. \end{array} \right.$$

Dans ces conditions $\Psi[l(s)]$ subit au point $Z = e^{is}$ une variation [puisque la fonction $\Psi(l)$ et son argument $l(s)$ varient], dont la partie principale (¹⁵³) est donnée par la formule

$$(4.3) \quad \delta \Psi[l(s)] = \Delta \Psi[l(s)] + \Psi'[l(s)] \delta l(s).$$

De ces définitions, il résulte que $\Delta \Psi(l)$ est un élément de l'espace $E(\alpha, \beta, l, \mu)$, puisque cette fonction est égale à la différence de deux éléments de cet espace. D'autre part, les fonctions $l(s)$ envi-

(¹⁵²) Le symbole Δ est réservé de façon exclusive aux variations subies par les éléments du plan du mouvement, c'est-à-dire par les éléments connus à l'avance; les quantités telles que $\Delta \Psi(l)$, $\Delta \alpha$, $\Delta \beta$, etc., joueront dans la suite le rôle des variables indépendantes; au contraire, la variation $\delta l(s)$, par exemple, correspondant à deux configurations voisines données du plan z sera, dans le paragraphe suivant, considérée comme inconnue a priori. Au cours du paragraphe suivant, $\delta l(s)$ ne désignera d'ailleurs plus la différence $l^*(s) - l(s)$, mais seulement sa partie principale.

(¹⁵³) Relativement aux éléments $\Delta \Psi(l)$ et $\delta l(s)$.

sagées appartenant à l'espace $E(0, \pi, s)$ ⁽¹⁵⁴⁾, $\delta l(s)$ seront donc aussi un élément de cet espace [cf. (4.2)]. Il suit de là que $\Delta \Psi[l(s)]$ et $\Delta \Psi'[l(s)]$ envisagées comme fonctions de s , vérifieront les conditions de Hölder d'exposant μ ; cela montre que $\Psi'[l(s)]\delta l(s)$, et donc, d'après (4.3), $\delta \Psi[l(s)]$, sont des éléments de l'espace $H_\mu(s)$ dans tout l'intervalle $0 \leq s \leq \pi$. En se reportant aux définitions des normes dans les espaces $H_\mu(s)$, $E(0, \pi, s)$ et $E(\alpha, \beta, l, \mu)$ et en notant que

$$\|\Delta \Psi'(l)\|_\mu \leq \|\Delta \Psi(l)\|_{1,\mu},$$

on établira aisément l'inégalité

$$(4.3') \quad \|\delta \Psi[l(s)]\|_\mu \leq \{\|\delta l(s)\| + \|\Delta \Psi(l)\|_{1,\mu}\}.$$

Remarque. — En vue de la différentiation des équations du problème de la proue, il est essentiel de noter que les résultats qui précèdent, et qui concernent la correspondance entre les plans z et Z , peuvent être appliqués à la correspondance $z = z(t)$. La fonction $l(t)$ qu'on envisagerait alors serait un élément de l'espace $E(-1, 1, t)$; il s'ensuivrait que $\delta \Psi[l(t)]$ vérifierait une condition de Hölder d'exposant μ dans tout l'intervalle $-1 \leq t \leq 1$. On aurait notamment

$$(4.3'') \quad |\delta \Psi[l(t)] - \delta \Psi[l(-1)]| \leq \text{const. } |1+t|^\mu \leq \text{const. } s^{2\mu},$$

puisque, d'après (1.10'), la fonction $t(Z) + 1$ présente pour $Z = 1$ un zéro double.

Grâce à l'introduction de $l(t)$, on peut donc établir que pour $s = 0$ ou $s = \pi$, $\delta \Psi[l(s)]$ vérifie une condition de Hölder relative à s et d'exposant 2μ .

Ceci posé, nous allons évaluer les parties principales des accroissements subis par tous les éléments (paramètres et fonctions) qui interviennent dans les formules de M. Villat.

L'équation (1.24), différentiée, définit la constante δs_0 ,

$$(4.4) \quad \pi \delta s_0 = \int_0^\pi \delta \Psi[l(s)] ds.$$

égale à la partie principale de $(s_0^* - s_0)$.

⁽¹⁵⁴⁾ On pourrait même affirmer que $\frac{d^2 l(s)}{ds^2}$ existe, puisque $\Psi'(l)$ vérifie une condition de Hölder (cf. § 22); nous n'aurons pas à utiliser cette propriété.

Des relations (1.6), (1.6'), (1.8), (1.8'), on tirera les expressions de $\delta\omega_1$, $\delta\omega_3$, $\delta\gamma$, δq et δs_1 , en fonction de δa et δb , expressions qu'il est inutile de former explicitement. Dès lors, la partie principale $\delta\Omega(Z)$ de l'accroissement $\Omega^*(Z) - \Omega(Z)$ subi par la fonction $\Omega(Z)$, définie par (1.23) ou (1.51), est donnée, en un point Z fixe, par la formule

$$(4.5) \quad \delta\Omega(Z) = \frac{i\omega_1}{\pi^2} \int_0^\pi \delta\Psi[l(s)] \left[\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} s\right) + \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{\pi} s\right) \right] ds \\ - \frac{i\omega_1}{\pi} \left[\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} s_0\right) + \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{\pi} s_0\right) \right] \delta s_0 \\ - \frac{i\delta \log q}{8\pi^4} \int_0^\pi \Phi(s) \left\{ \frac{d}{d(\nu + \nu_1)} \left[\frac{\theta''(\nu + \nu_1)}{\theta(\nu + \nu_1)} \right] \right. \\ \left. + \frac{d}{d(\nu - \nu_1)} \left[\frac{\theta''(\nu - \nu_1)}{\theta(\nu - \nu_1)} \right] \right\} ds,$$

où $\Phi(s)$ désigne la fonction associée à $\Psi[l(s)]$ (cf. § 12), $\theta(\nu)$ la fonction $\theta(\nu, q)$ de Jacobi, ν et ν_1 les quantités $\frac{\log Z}{2i\pi}$ et $\frac{s}{2\pi}$.

L'interprétation de ce résultat, dont le lecteur trouvera plus loin la justification, est la suivante :

1° L'ensemble de deux premiers termes du second membre de (4.5) définit une fonction $F(Z)$ analytique dans la couronne $C(q \leq |Z| < 1)$, régulière partout sauf pour $Z = Z_0$ et $Z = \bar{Z}_0$ ($Z_0 = e^{is_0}$, $\bar{Z}_0 = e^{-is_0}$) et dont la partie réelle, nulle sur $|Z| = q$, est égale à $\delta\Psi[l(s)]$ sur $|Z| = 1$.

2° Le troisième terme du second membre de (4.5) représente une fonction $F_1(Z)$, analytique dans C , dont la partie réelle, nulle sur $|Z| = 1$, est égale à $-\frac{dT(qe^{is})}{ds} \frac{\delta q}{q}$ pour $Z = qe^{is}$. [$T(qe^{is})$ étant la partie imaginaire de $\Omega(Z) = \Theta(X, Y) + iT(X, Y)$ sur $|Z| = q$.]

Enfin $F(Z)$ et $F_1(Z)$ sont toutes deux réelles pour Z réel. L'ensemble de ces conditions suffit pour déterminer sans ambiguïté chacune des fonctions $F(Z)$ et $F_1(Z)$ et, par suite, la fonction $\delta\Omega(Z)$.

Pour établir les résultats qui précèdent, nous partirons de l'expression (1.51) de $\Omega(Z)$, valable pour $q \leq |Z| < 1$; en différentiant (1.51)

on trouve

$$\begin{aligned}
 (4.6) \quad \delta \Omega(Z) = & \frac{i}{2\pi^2} \int_0^\pi \delta \Psi[l(s)] \left[\frac{\theta'(\nu - \nu_1)}{\theta(\nu - \nu_1)} + \frac{\theta'(\nu + \nu_1)}{\theta(\nu + \nu_1)} \right] ds \\
 & + \frac{i \delta \log q}{2\pi^2} \int_0^\pi \Psi[l(s)] \left\{ \frac{\theta(\nu - \nu_1) \frac{\partial^2 \theta(\nu - \nu_1)}{\partial \nu \partial \log q} - \theta'(\nu - \nu_1) \frac{\partial \theta(\nu - \nu_1)}{\partial \log q}}{\theta^2(\nu - \nu_1)} \right. \\
 & \left. + \frac{\theta(\nu + \nu_1) \frac{\partial^2 \theta(\nu + \nu_1)}{\partial \nu \partial \log q} - \theta'(\nu + \nu_1) \frac{\partial \theta(\nu + \nu_1)}{\partial \log q}}{\theta^2(\nu + \nu_1)} \right\} ds \\
 & + i \delta \log q \left\{ \frac{\partial \theta(\nu - \nu_0)}{\partial \log q} - \frac{\partial \theta(\nu + \nu_0)}{\partial \log q} \right\} - \frac{i}{2\pi} \left\{ \frac{\theta'(\nu + \nu_0)}{\theta(\nu + \nu_0)} + \frac{\theta'(\nu - \nu_0)}{\theta(\nu - \nu_0)} \right\} \delta s_0,
 \end{aligned}$$

relation où l'on a posé encore

$$\nu = \frac{\log Z}{2i\pi}, \quad \nu_1 = \frac{s}{2\pi}, \quad \nu_0 = \frac{s_0}{2\pi}.$$

Or, la fonction $\theta(\nu, q)$ vérifie, comme il est bien connu, l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial^2 \theta(\nu, q)}{\partial \nu^2} = -4\pi^2 \frac{\partial \theta}{\partial \log q},$$

dont on tire

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \nu \partial \log q} = -\frac{1}{4\pi^2} \theta''(\nu).$$

Ces deux relations permettent de remplacer les dérivées de $\theta(\nu, q)$ relativement à q par les dérivées de cette fonction relativement à ν ; la somme des second et troisième termes de (4.6) peut donc s'écrire

$$\begin{aligned}
 & -i \frac{\delta \log q}{8\pi^4} \int_0^\pi \Psi[l(s)] \left\{ \frac{d}{d(\nu - \nu_1)} \left[\frac{\theta''(\nu - \nu_1)}{\theta(\nu - \nu_1)} \right] + \frac{d}{d(\nu + \nu_1)} \left[\frac{\theta''(\nu + \nu_1)}{\theta(\nu + \nu_1)} \right] \right\} ds \\
 & - \frac{i \delta \log q}{4\pi^2} \left[\frac{\theta''(\nu - \nu_0)}{\theta(\nu - \nu_0)} - \frac{\theta''(\nu + \nu_0)}{\theta(\nu + \nu_0)} \right],
 \end{aligned}$$

ou encore, en passant à la fonction $\Phi(s)$ au moyen des relations

$$\begin{aligned}
 \Phi(s) &= \Psi[l(s)] & \text{pour } s_0 \leq s \leq \pi, \\
 \Phi(s) &= \Psi[l(s)] - \pi & \text{pour } 0 \leq s \leq s_0,
 \end{aligned}$$

établies au paragraphe 12,

$$(4.7) \quad F_1(Z) = -\frac{i\delta \log q}{8\pi^4} \int_0^\pi \Phi(s) \left\{ \frac{d}{d(\nu - \nu_1)} \left[\frac{\theta''(\nu - \nu_1)}{\theta(\nu - \nu_1)} \right] + \frac{d}{d(\nu + \nu_1)} \left[\frac{\theta''(\nu + \nu_1)}{\theta(\nu + \nu_1)} \right] \right\} ds.$$

Cette expression est identique au dernier terme $F_1(Z)$ de la formule (4.5). Dans (4.7) nous pouvons substituer aux fonctions $\theta(\nu, q)$, les fonctions ζu et $p u$ (avec $u = 2\omega_1 \nu$, $u_1 = 2\omega_1 \nu_1$, $u_0 = 2\omega_1 \nu_0$) de Weierstrass. On a, en effet,

$$u - \frac{\eta_1}{\omega_1} u = \frac{1}{2\omega_1} \frac{\theta'(\nu)}{\theta(\nu)}, \quad -\left(p u + \frac{\eta_1}{\omega_1}\right) = \frac{1}{4\omega_1^2} \frac{d}{d\nu} \frac{\theta'(\nu)}{\theta(\nu)}.$$

On en tire successivement

$$\frac{\theta''(\nu)}{\theta(\nu)} = 4\omega_1^2 \left[\left(\zeta u - \frac{\eta_1}{\omega_1} u\right)^2 - p u - \frac{\eta_1}{\omega_1} \right],$$

$$\frac{d}{d\nu} \left[\frac{\theta''(\nu)}{\theta(\nu)} \right] = -8\omega_1^3 \left[2\left(\zeta u - \frac{\eta_1}{\omega_1} u\right) \left(p u + \frac{\eta_1}{\omega_1}\right) + p' u \right]$$

en sorte qu'il vient finalement

$$(4.7') \quad F_1(Z) = \frac{i\omega_1^3}{\pi^4} \delta \log q \int_0^\pi \Phi(s) \times \left\{ 2 \left[\zeta(u + u_1) - \frac{\eta_1}{\omega_1}(u + u_1) \right] \left[p(u + u_1) + \frac{\eta_1}{\omega_1} \right] + 2 \left[\zeta(u - u_1) - \frac{\eta_1}{\omega_1}(u - u_1) \right] \left[p(u - u_1) + \frac{\eta_1}{\omega_1} \right] + p'(u + u_1) + p'(u - u_1) \right\} ds.$$

Pour achever l'identification de (4.5) et de (4.6), il suffira de transformer la somme des premier et dernier termes de (4.6) en y substituant à $\frac{\theta'(\nu)}{\theta(\nu)}$ son expression en ζu (rappelée ci-dessus) et en se servant de l'équation (4.4). Ainsi, la formule (4.5) est complètement vérifiée. Pour abrégé, nous poserons

$$(4.8) \quad F(Z) = \frac{i\omega_1}{\pi^2} \int_0^\pi \delta \Psi[l(s)] [\zeta(u - u_1) + \zeta(u + u_1)] ds - \frac{i\omega_1}{\pi} [\zeta(u - u_0) + \zeta(u + u_0)] \delta s_0.$$

D'après sa définition même, $F(Z)$ est une fonction analytique, régulière pour $q \leq |Z| < 1$ et uniforme dans la couronne C ; si, en effet,

l'argument de Z varie de 2π , l'intégrale de (4.8) s'accroît de la quantité

$$\frac{4\eta_1\omega_1 i}{\pi^2} \int_0^\pi \delta\Psi[l(s)] ds$$

[car $\zeta(u + 2\omega_1) = \zeta u + 2\eta_1$] égale précisément, en vertu de (4.4), à l'accroissement — changé de signe — du terme fini de cette formule.

Nous allons maintenant indiquer les conditions aux limites qui déterminent la partie réelle de $F(Z)$ dans la demi-couronne d .

1° La partie réelle de $F(Z)$ est nulle pour $Z = qe^{is}$. L'expression (4.8) de $F(Z)$ est, en effet, valable pour $|Z| = q$. Faisons donc $Z = qe^{is}$ dans cette formule et utilisons la relation

$$(4.9) \quad \zeta(u + \omega_3) = \zeta u + \frac{1}{2} \frac{p'u}{pu - e_3} + \eta_3$$

(cf. VII, T. M.); η_3 étant une imaginaire pure, ζu , pu et $p'u$ étant réels pour u réel, la partie réelle de $F(z)$ le long de $|Z| = q$ se réduit à

$$\frac{2\eta_3\omega_1 i}{\pi^2} \int_0^\pi \delta\Psi[l(s)] ds - \frac{2\eta_3\omega_1 i}{\pi} \delta s_0,$$

quantité égale à zéro en vertu de (4.4).

2° La fonction $F(Z)$ est réelle pour Z réel. Cela résulte de la formule d'addition de la fonction ζu

$$i[\zeta(u + u_1)] + \zeta(u - u_1) = \frac{ip'u}{pu - pu_1} + 2i\zeta u$$

(cf. CIII, T. M.). Pour Z réel et positif, par exemple, $u = \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z$ est une imaginaire pure; $u_1 = \frac{\omega_1}{\pi} s$ est réel; le second membre de la formule précédente est réel, puisque $ip'u$ et $i\zeta u$ sont réels. Notons que la contribution de $2\zeta u$ dans (4.8) est nulle en vertu de (4.4).

3° La partie réelle de $F(Z)$ au point $Z = e^{is}$ est égale à $\delta\Psi[l(s)]$. Cela résulte du fait que le second terme de (4.8) est imaginaire pour $Z = e^{is}$ et de la formule (1.15) de M. Villat qui résout le problème de Dirichlet dans un anneau. Il s'ensuit que la partie imagi-

naire de la fonction

$$F(Z) + \frac{i\omega_1}{\pi} \left[\zeta \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} s_0 \right) + \zeta \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{\pi} s_0 \right) \right] \delta s_0$$

est égale, pour $Z = e^{is}$, à

$$\int_0^\pi \{ \delta \Psi[l(s')] - \delta \Psi[l(s)] \} \left\{ \zeta \left[\frac{\omega_1}{\pi} (s - s') \right] + \zeta \left[\frac{\omega_1}{\pi} (s + s') \right] \right\} ds' \\ + \frac{2\eta_1 \omega_1}{\pi^2} s \delta \Psi[l(s)].$$

D'après le théorème de Fatou et Priwaloff (*cf.* § 11) cette expression est un élément de l'espace $H_\mu(s)$, puisque $\delta \Psi[l(s)]$ appartient à cet espace.

Il résulte de ce qui précède que la fonction $F(Z)$, définie dans d , est prolongeable à travers l'axe réel; elle est donc complètement définie dans C par la donnée de l'élément $\delta \Psi[l(s)]$, pour une solution donnée du problème de Helmholtz.

Nous allons maintenant étudier les conditions limites que vérifie dans d la fonction $F_1(Z)$, définie par (4. 7').

1° La partie réelle de $F_1(Z)$ est nulle pour $Z = e^{i\epsilon}$. Telle quelle, l'expression (4. 7) n'est pas valable pour $Z = e^{i\epsilon}$, puisque, alors $u = u_1$ pour $s = s_1$ et l'élément différentiel de (4. 7') devient infini pour cette valeur de l'argument s . Comme la quantité $[2\zeta u p u + p'u]$ est régulière pour $u = 0$, l'expression (4. 7') de $F_1(Z)$ se scinde en deux parties; la première $F_2(Z)$,

$$F_2(Z) = - \frac{2i\omega_1^2 \eta_1}{\pi^4} \delta \log q \int_0^\pi \Phi(s) [(u - u_1) p(u - u_1) + (u + u_1) p(u + u_1) \\ - \zeta(u - u_1) - \zeta(u + u_1)] ds,$$

n'a pas de sens pour $Z = e^{i\epsilon}$; l'élément différentiel de la seconde, qu'il est inutile d'écrire, est fini et réel pour $Z = e^{i\epsilon}$, en sorte que sa contribution à la partie réelle de $F_1(Z)$ est nulle à cause du facteur i de (4. 7').

Pour étudier les valeurs frontières de $F_2(Z)$, nous nous servons de l'artifice classique (*cf.* § 10) et nous écrivons le second membre

de (4.9) en y supposant d'abord $|Z| \neq 1$,

$$(4.10) \quad F_2(Z) = -i \frac{2\omega_1^2 \eta_1}{\pi^4} \delta \log q \int_0^\pi [\Phi(s) - \Phi(\varepsilon)] \\ \times [(u - u_1) p(u - u_1) + (u + u_1) p(u + u_1) \\ - \zeta(u - u_1) - \zeta(u + u_1)] ds \\ - i \frac{2\omega_1^2 \eta_1}{\pi^4} \Phi(\varepsilon) \delta \log q \int_0^\pi \\ \times [(u - u_1) p(u - u_1) + (u + u_1) p(u + u_1) \\ - \zeta(u - u_1) - \zeta(u + u_1)] ds.$$

Comme $du_1 = \frac{\omega_1}{\pi} ds$, le deuxième terme de (4.10) s'intègre sans difficulté grâce à la formule

$$\int (u - u_1) p(u - u_1) du_1 = (u - u_1) \zeta(u - u_1) + \int \zeta(u - u_1) du_1$$

et celle qu'on en déduit en changeant u_1 en $-u_1$; on trouve aussi que pour $Z = e^{i\varepsilon}$ sa contribution à $F_2(Z)$, égale à

$$-i \frac{2\omega_1^2 \eta_1}{\pi^3} \Phi(\varepsilon) \delta \log q \left\{ \left(\frac{\varepsilon}{\pi} - 1 \right) \zeta \left[\omega_1 \left(\frac{\varepsilon}{\pi} - 1 \right) \right] - \left(\frac{\varepsilon}{\pi} + 1 \right) \zeta \left[\omega_1 \left(\frac{\varepsilon}{\pi} + 1 \right) \right] \right\},$$

est purement imaginaire. Quant au premier terme de (4.10), observons que le facteur entre accolades qui figure dans son élément différentiel est réel pour $Z = e^{i\varepsilon}$ et présente un pôle de premier ordre seulement lorsque $\varepsilon = s$; l'intégrale correspondante a donc un sens, puisque $\Phi(s)$ appartient à l'espace $\mathcal{L}_n(s)$ pour $s_0 \leq s \leq \pi$ et $0 \leq s \leq s_0$ et est réelle; le terme considéré est donc, pour $Z = e^{i\varepsilon}$ ($\varepsilon \neq s_0$), imaginaire pure.

C. Q. F. D.

2° La fonction $F_1(Z)$ est réelle pour Z réel. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier ce point, évident a priori. Il suffit de s'appuyer sur les formules d'addition pour les fonctions ζu et pu .

3° La partie réelle de $F_1(Z)$ est égale à $-\frac{dT(q e^{is})}{ds} \frac{\delta q}{q}$ pour $Z = q e^{is}$.

En effet, l'expression (4.7') de $F_1(Z)$ a un sens pour $Z = q e^{i\varepsilon}$. La formule (cf. VII, T.M.)

$$\zeta(u - u_1) = \zeta \left[\frac{\omega_1}{\pi} (\varepsilon - s) + \omega_3 \right] = \zeta \left[\frac{\omega_1}{\pi} (\varepsilon - s) \right] + \eta_3 + \frac{1}{2} \frac{p' \left[\frac{\omega_1}{\pi} (\varepsilon - s) \right]}{p \left[\frac{\omega_1}{\pi} (\varepsilon - s) \right] - e_3}$$

montre que les quantités $p(u + u_1)$, $p(u - u_1)$, $p'(u - u_1)$, $p'(u + u_1)$ sont réelles le long de $|Z| = q$ (155), la partie imaginaire de $\zeta(u - u_1)$ étant égale à η_3 . Dans ces conditions, la partie réelle de l'expression (4.7') de $F_1(Z)$ sera donnée, pour $Z = q e^{i\varepsilon}$, par la formule

$$(4.11) \quad \operatorname{Re} F_1(Z) = 2i \left(\eta_3 - \frac{\eta_1 \omega_3}{\omega_1} \right) \frac{\omega_1^3}{\pi^3} \delta \log q \int_0^\pi \Phi(s) \\ \times \left\{ p \left[\frac{\omega_1}{\pi} (\varepsilon - s) + \omega_3 \right] + p \left[\frac{\omega_1}{\pi} (\varepsilon + s) + \omega_3 \right] \right\} ds,$$

en remarquant que la contribution des termes constants de l'accolade (4.7') est nulle en vertu de (1.16). Or, la relation de Legendre (X_6 T.M.) donne

$$\eta_3 - \frac{\eta_1 \omega_3}{\omega_1} = - \frac{\pi i}{2 \omega_1},$$

ce qui permet d'identifier le second membre de (4.11) avec la quantité $-\frac{d\Gamma(q e^{i\varepsilon})}{d\varepsilon} \delta \log q$ calculée directement, à partir de (1.15).

C. Q. F. D.

Nous écrirons

$$(4.12) \quad \delta \Omega(Z) = \delta \Omega_1(Z) - \frac{i \omega_1}{\pi} \left[\zeta \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} s_0 \right) + \zeta \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{\pi} s_0 \right) \right] \delta s_0.$$

D'après ce que nous avons vu, $\delta \Omega_1(Z)$ vérifiera le long de $|Z| = 1$ une condition de Hölder d'exposant μ , puisque sa partie réelle, égale à $\delta \Psi[l(s)]$ pour $|Z| = 1$, vérifie aussi une telle condition. Il s'ensuit qu'au point $Z = Z_0 = e^{is_0}$ on a le développement limité

$$(4.12') \quad \delta \Omega(Z) = \frac{Z_0 \delta s_0}{Z - Z_0} + \dots$$

où le symbole \dots désigne une fonction de Z hölderienne, nulle pour $Z = Z_0$.

Remarque. — L'expression (4.6), et, par suite, (4.5), de $\delta \Omega(Z)$ ne dépend de a , b , δa et δb que par l'intermédiaire de $q(a, b)$ et de $\delta q(a, b)$; d'après ce que nous avons vu au paragraphe 14 la

(155) On se rappellera que, pour $Z = q e^{i\varepsilon}$, on a

$$u = \frac{\omega_1}{\pi} s + \omega_3.$$

fonction $q(a, b)$ se comporte régulièrement lorsque l'un des paramètres a et b (ou les deux à la fois) augmentent indéfiniment; la formule (4.6) restera donc valable au cours de cette transformation. Nous allons maintenant étudier la partie principale de l'accroissement $f^*(Z) - f(Z)$, égale à la différentielle $\delta f(Z)$ calculée en un point Z fixe. Nous avons, en différentiant (1.4), la relation

$$(4.13) \quad \delta f(Z) = -\frac{\delta\psi_2}{\pi} \log(t-a) - \frac{\delta\psi_1}{\pi} \log(t-b) + \frac{\psi_2}{\pi} \frac{\delta a}{(t-a)} \\ + \frac{\psi_1}{\pi} \frac{\delta b}{t-b} - \frac{\psi_1 + \psi_2}{\pi} \frac{t-t_0}{(t-a)(t-b)} \delta t(Z) + \delta D + i \delta\psi_1,$$

dans laquelle les logarithmes interviennent avec les déterminations choisies au paragraphe 9, et le symbole $\delta t(Z)$ désigne la différentielle de la fonction $t(Z)$ [cf. (1.9)] prise en un point Z fixe.

Pour évaluer $\delta t(Z)$ nous utiliserons la formule ⁽¹⁵⁶⁾

$$(4.14) \quad \delta p u = \frac{1}{16\pi^2\omega_1^2} \frac{d^2}{d\nu^2} \left[\frac{\theta'(\nu)}{\theta(\nu)} \right] \delta \log q - \left[2 p u + \frac{\eta_1}{\omega_1} \right] \frac{\delta\omega_1}{\omega_1} - \frac{\delta\eta_1}{\omega_1} + 2\omega_1 p' u \delta\nu$$

(où le premier membre représente la variation subie en un point u fixe) et celle qu'on en déduit en la dérivant par rapport à u ; suivant l'usage, u et ν sont reliés par la relation $u = 2\omega_1\nu$. Nous poserons

$$(4.14') \quad \delta p u = \delta p_1 u + 2\omega_1 p' u \delta\nu.$$

D'après cela, le symbole $\delta p_1 u$ représente la variation subie par $p(2\omega_1\nu)$ en un point ν fixe. On aurait, avec les mêmes notations, une formule analogue pour $\delta p' u$.

⁽¹⁵⁶⁾ Le lecteur vérifiera sans peine la formule du texte en différentiant la relation

$$p(2\omega_1\nu, \omega_1, \omega_3) = p(u, \omega_1, \omega_3) = -\frac{\eta_1}{\omega_1} - \frac{1}{4\omega_1^2} \frac{d}{d\nu} \frac{\theta'(\nu)}{\theta(\nu)}$$

dans laquelle ν reste fixe; on utilisera l'équation

$$\frac{d^2\theta}{d\nu^2} = -4\pi^2 \frac{\partial\theta}{\partial \log q},$$

et l'on introduira dans l'expression de la dérivée un terme additif en $\delta\nu$ pour tenir compte de la variation subie par la fonction $\nu = \frac{u}{2\omega_1} = \nu(Z, \omega_2, \omega_3, \gamma)$ en un point Z fixe.

Dans ces conditions, la formule (4.10), dans laquelle on pose [cf. (4.7)]

$$(4.14'') \quad u = \omega_1 + \omega_3 - \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \quad v = \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2} - \frac{\gamma}{4\omega_1} - \frac{1}{2i\pi} \log Z$$

donne, après différentiation

$$(4.15) \quad \delta t(Z) = \frac{\delta a + \delta b}{4} + \frac{1}{2} \frac{\delta p'_1 u - \delta p'_1 \gamma}{p u - p \gamma} - \frac{1}{2} \frac{(p' u - p' \gamma)}{(p u - p \gamma)^2} (\delta p_1 u - \delta p_1 \gamma) \\ + \frac{dt}{du} 2\omega_1 \delta v + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{p' u - p' \gamma}{p u - p \gamma} \right) \omega_1 \delta \gamma.$$

De l'ensemble des formules (4.13), (4.14') et (4.14'') et (4.15), résultent les conséquences suivantes que, presque toujours, nous pourrions vérifier directement.

1° La fonction $\delta f(Z)$ est analytique et régulière sur le cercle $Z = e^{is}$; $\delta f(e^{is})$ est d'ailleurs réelle; ce résultat est évident *a priori* puisque $f(e^{is})$ est une fonction réelle de s .

Au point $Z = Z_0 = e^{is_0}$, nous avons le développement limité

$$(4.16) \quad \delta f(Z) = - \left(\frac{d^2 f}{dZ^2} \right)_{Z=Z_0} (Z - Z_0) \delta Z_0 + \dots,$$

formule où le symbole \dots désigne une fonction analytique présentant pour $Z = Z_0$ un zéro d'ordre 2 au moins. Pour justifier directement (4.16), il suffira de différencier la relation (2.11) que l'on peut encore écrire

$$(4.16') \quad f(Z) = \frac{(Z - Z_0)^2}{1.2} \left(\frac{d^2 f}{dZ^2} \right)_{Z=Z_0}.$$

2° La fonction $f(Z)$ est régulière le long des segments $(-1, -q)$, $(q, 1)$ de l'axe des X , les points $Z = \pm q$ exceptés; dans les voisinages de ces points on a

$$(4.17) \quad \delta f(Z) = - \frac{2\psi_1}{\pi} \frac{\delta q}{(Z+q)} - \frac{2\delta\psi_1}{\pi} \log(Z+q) + \text{série entière en } (Z+q),$$

$$(4.17') \quad \delta f(Z) = + \frac{2\psi_2}{\pi} \frac{\delta q}{(Z-q)} - \frac{2\delta\psi_2}{\pi} \log(Z-q) + \text{série entière en } (Z-q).$$

Ces développements limités peuvent se justifier directement en différenciant (2.9).

3° La partie imaginaire $I \delta f(Z)$ de $\delta f(Z)$ est égale à

$$(4.18) \left\{ \begin{array}{l} I \delta f(Z) = \delta\psi_1 + \frac{df(e^{is})}{ds} \delta \log q \quad \text{le long de l'arc } s_1 \leq s \leq \pi \text{ du cercle } Z = qe^{is}, \\ \text{et à} \\ I \delta f(Z) = -\delta\psi_2 + \frac{df(e^{is})}{ds} \delta \log q \quad \text{le long de l'arc } 0 \leq s \leq s_1 \text{ du cercle } Z = qe^{is}. \end{array} \right.$$

La présence des constantes additives $\delta\psi_1$ et $\delta\psi_2$ dans les formules (4.18) se justifie par la simple inspection de l'expression (4.13) de δf , compte tenu des déterminations choisies pour les logarithmes de $(t-a)$ et de $(t-b)$ qui y figurent (cf. §9). Quant au terme variable de (4.12), il ne peut provenir que de la partie imaginaire du terme

$$-\frac{\psi_1 + \psi_2}{\pi} \frac{t - t_0}{(t-a)(t-b)} \delta t(Z) = \frac{df}{dt} \delta t(Z)$$

de (4.13) [cf. (4.10)] puisque t est réel pour $Z = qe^{is}$ et que la constante δD est réelle. Tout revient donc à établir l'égalité

$$(4.19) \quad \frac{df(qe^{is})}{dt(qe^{is})} \text{Imag. } \delta t(qe^{is}) = \frac{df(qe^{is})}{ds} \frac{\delta q}{q}.$$

Or, l'argument u est réel pour $Z = qe^{is}$ [cf. (4.14')]; il s'ensuit que les différentielles $\delta p, u$ et $\delta p', u$ correspondantes sont aussi réelles, ainsi que $\delta p, \gamma$ et $\delta p', \gamma$ [cf. par exemple (4.6')].

La contribution à $I \delta t(qe^{is})$ ne peut donc provenir que du terme $\frac{dt}{du} 2\omega_1 \delta v$ de (4.15), égal pour $Z = qe^{is}$ à [cf. (4.14'')]

$$\frac{dt}{ds} \frac{ds}{dZ} \frac{dZ}{du} 2\omega_1 \delta v = -2\omega_1 \frac{dt(qe^{is})}{ds} \frac{\pi}{\omega_1} \left(\frac{\delta \tau}{4} - \frac{1}{2} \delta \gamma \right).$$

On en tire la relation, valable pour $Z = qe^{is}$,

$$I \frac{dt}{du} 2\omega_1 \delta v = \frac{dt(qe^{is})}{ds} \delta(i\pi\tau) = \frac{dt(qe^{is})}{ds} \frac{\delta q}{q}$$

qui justifie (4.19) et par suite (4.18).

4° La fonction $\delta f(Z)$ n'est pas régulière pour $Z_1 = qe^{is}$ (cf. le §9); dans le voisinage de ce point, on peut écrire

$$(4.20) \quad \delta f(Z) = -\frac{\psi_1 + \psi_2}{\pi} \frac{\delta Z_1}{Z - Z_1} + \frac{\delta\psi_1 + \delta\psi_2}{\pi} \log(Z - Z_1) + \dots$$

Pour vérifier directement (4.20), il suffit d'observer que les points

$t = \infty$ et $Z = Z_1$ se correspondant, on a, dans le voisinage de $Z = Z_1$, d'après (1.4),

$$f = -\frac{\psi_1 + \psi_2}{\pi} \log t(Z) + \dots,$$

tandis que (1.9) et (1.10') permettent d'écrire

$$t(Z) = \frac{-\frac{i\pi}{4\omega_1} Z_1}{Z - Z_1} + \dots$$

On a donc, en définitive, le développement limité

$$f(Z) = \frac{\psi_1 + \psi_2}{\pi} \log(Z - Z_1) + \dots$$

qui, différentié, conduit à la relation (3.18).

En résumé, $\delta f(Z)$ est une fonction analytique de Z , définie dans le domaine d ; $\delta f(Z)$ est régulière en chaque point intérieur de d et sur ses frontières, exception faite des points $Z = \pm q$ et $Z = Z_1$.

Remarque. — Les expressions (4.13) et (4.15) de $\delta f(Z)$ et $\delta t(Z)$ font intervenir explicitement les paramètres $\delta\psi_1$, $\delta\psi_2$, δa et δb ; telles quelles, ces formules ne sont donc valables que si ψ_1 et ψ_2 , a et b restent finis; nous laissons au lecteur le soin de lever cette indétermination apparente en utilisant les transformations du paragraphe 14.

Dans la suite nous aurons encore à nous servir de la différentielle $\frac{d\delta f(Z)}{dZ}$.

Il serait aisé d'en former l'expression explicite en dérivant par rapport à Z les formules (4.13), (4.14) et (4.15); mais nous nous contenterons de signaler les propriétés suivantes de $d\delta f(Z)$, faciles à vérifier directement.

1° $\frac{d\delta f(Z)}{d(Z)}$ est une fonction analytique de Z , réelle le long des frontières de la demi-couronne d , le demi-cercle $|Z| = q$ excepté. Elle est régulière pour $Z = e^{is}$; elle n'est pas holomorphe pour $Z = Z_1$, et $Z = \pm q$.

2° $\frac{d\delta f(Z)}{dZ}$ est régulière pour chacun des segments $-1 \leq X < -q$, $q < X \leq 1$, les points $Z = \pm q$ exceptés. Dans le voisinage de ces points

on a, en différentiant (3. 17') et (3. 17),

$$(4.21) \quad \frac{d \delta f(Z)}{dZ} = \frac{2\psi_1}{\pi} \frac{\delta q}{(Z+q)^2} - \frac{2\delta\psi_1}{\pi} \frac{1}{Z+q} + \dots,$$

$$(4.21') \quad \frac{d \delta f(Z)}{dZ} = -\frac{2\psi_2}{\pi} \frac{\delta q}{(Z-q)^2} - \frac{2\delta\psi_2}{\pi} \frac{1}{Z-q} + \dots$$

3° $\frac{d \delta f(Z)}{dZ}$ est régulière le long du cercle $Z = q e^{is}$, les points $Z = \pm q$ [cf. (4.21) et (4.21')] et $Z = Z_1$ exceptés; en ce dernier point, on a le développement limité

$$\frac{d \delta f(Z)}{dZ} = \frac{\psi_1 + \psi_2}{\pi} \frac{\delta Z_1}{(Z - Z_1)^2} + \frac{\delta\psi_1 + \delta\psi_2}{\pi} \frac{1}{Z - Z_1} + \dots$$

qu'on retrouve directement en différentiant (4.20).

Remarque. — Il serait aisé de vérifier que les différentielles $\delta \Omega(Z)$, $\delta f(Z)$, $\frac{d \delta f(Z)}{dZ}$ relatives aux cas du courant fluide limité par la seule paroi μ_1 ou au courant illimité, s'obtiendraient en effectuant sur les formules obtenues au cours de ce paragraphe le passage à la limite utilisé au paragraphe 14. Lorsque μ_2 s'éloigne indéfiniment, μ_1 restant à distance finie, Z_1 tend, on l'a vu, vers $+q$; les relations (1.43) et (1.50) montrent qu'à la limite $f(Z)$ possédera pour $Z = q$ un pôle d'ordre 2; dans le voisinage de ce point, on aura

$$(4.22) \quad f = -A \frac{\pi^2 q^2}{\omega_1^2} \frac{1}{(Z-q)^2} + \frac{2\psi_1}{\pi} \log(Z-q) + \dots,$$

en sorte qu'en dérivant il vient

$$(4.22') \quad df = -2A \frac{\pi^2 q^2}{\omega_1^2} \frac{\delta q}{(Z-q)^3} - \frac{\pi^2}{(Z-q)^2} \delta \left(A \frac{q^2}{\omega_1^2} \right) - \frac{2\psi_1}{\pi} \frac{\delta q}{Z-q} + \frac{2\delta\psi_1}{\pi} \log(Z-q) + \dots$$

Nous sommes maintenant en mesure de montrer que la transformation fonctionnelle $V[l(s), \Psi(l), \alpha, \beta, a, b]$ définie par (3.36) possède une différentielle au sens de M. Fréchet. On tire, en effet, de (3.36), en tenant compte de (1.33''),

$$(4.23) \quad \frac{d \delta L(s)}{ds} = e^{-T_0(e^{is})} \left[\frac{d \delta f(e^{is})}{ds} - \frac{df(e^{is})}{ds} \delta T(e^{is}) \right] \frac{\sigma \frac{\omega_1}{\pi} (s + s_0)}{\sigma \frac{\omega_1}{\pi} (s - s_0)},$$

le premier membre désignant la partie principale de l'accroissement $\frac{dL^*(s)}{ds} - \frac{dL(s)}{ds}$ que $\frac{dL(s)}{ds}$ subit en un point $Z = e^{is}$ fixe. Le deuxième facteur du second membre de (4.23) s'annule pour $s = s_0$; d'après (4.12) il se présente, en effet, sous forme de la somme de la quantité

$$\frac{df}{ds} \left\{ \frac{\omega_1}{\pi} \zeta \left[\frac{\omega_1}{\pi} (s + s_0) \right] \delta s_0 - \delta T_1(e^{is}) \right\}$$

[qui possède un zéro simple pour $s = s_0$ en vertu de (2.11) et de la continuité hölderienne de $\delta T_1(e^{is})$] et de la quantité

$$\frac{d \delta f(e^{is})}{ds} + \frac{\omega_1}{\pi} \frac{df}{ds} \zeta \left[\frac{\omega_1}{\pi} (s - s_0) \right] \delta s_0,$$

qui s'annule comme $s - s_0$ pour $s = s_0$ en vertu de (2.11) et (4.16).

Il suit de là que l'expression (4.23) de $\frac{d \delta L(s)}{ds}$ est régulière pour $s = s_0$ malgré la discontinuité du facteur $\frac{1}{\sigma \left[\frac{\omega_1}{\pi} (s - s_0) \right]}$ pour cette valeur

de s , et vérifie une condition de Hölder d'exposant μ pour $0 \leq s \leq \pi$.

La relation (4.23) définit la fonction $\delta L(s)$, à une constante additive près; pour déterminer celle-ci, nous utiliserons l'une ou l'autre des équations donnant α ou β [cf. l'égalité (3.19) et les précédentes] qui fournissent, après différentiation, les conditions

$$(4.24) \quad \begin{cases} \delta L(0) = \Delta\alpha, \\ \delta L(\pi) = \Delta\beta. \end{cases}$$

Les deux fonctions $\delta L(s)$ que l'on détermine ainsi sont identiques entre elles; en effet, en différentiant (3.19), on obtient la relation

$$(4.24') \quad (\Delta\beta - \Delta\alpha) = \int_0^\pi e^{-T_0(e^{is})} \left[\frac{d \delta f(e^{is})}{ds} - \frac{df(e^{is})}{ds} \delta(e^{is}) \right] \frac{\sigma \left[\frac{\omega_1}{\pi} (s + s_0) \right]}{\sigma \left[\frac{\omega_2}{\pi} (s - s_0) \right]} ds$$

qui exprime la compatibilité de (4.23) et de chacune des équations (4.24).

Nous ferons remarquer que les parties principales $\delta\psi_1$ et $\delta\psi_2$ des accroissements $\psi_1^* - \psi_1$ et $\psi_2^* - \psi_2$ de ψ_1 et ψ_2 interviennent dans les formules (4.23), (4.24) et (4.24') par l'intermédiaire de $d \delta f(e^{is})$, c'est-à-dire par l'intermédiaire de $(\delta\psi_1 + \delta\psi_2)$ seulement; on s'en assure aisément en dérivant par rapport à Z l'expression (4.11)

de $\delta f(Z)$. A cet égard la relation (4.24') peut être considérée comme équation de définition de $\delta\psi_1 + \delta\psi_2$; résolue par rapport à cette différentielle, (4.24') en fournira une expression linéaire et homogène relativement à $\delta\Psi[l(s)]$, $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$, δa , δb et δs_0 .

Ces résultats entraînent les conséquences suivantes :

1° la fonction $\delta L(s)$ est définie à partir des éléments $\Psi'(l)$, α , β , $l(s)$, a , b et de leurs accroissements $\Delta\Psi'(l)$, $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$, $\delta l(s)$, δa et δb [cf. (4.2)]; nous pouvons donc poser

$$(4.24a) \quad \delta L(s) = W[l(s), \Psi'(l), \alpha, \beta, a, b, \delta l(s), \Delta\Psi'(l), \Delta\alpha, \Delta\beta, \delta a, \delta b];$$

2° la transformation fonctionnelle W ainsi définie est complètement continue par rapport à tous ses arguments et est, de plus, linéaire et homogène par rapport aux six derniers d'entre eux;

3° la transformation W fournit des fonctions $\delta L(s)$ appartenant à l'espace $E(0, \pi, s, \mu)$.

Observons que $\delta l(s)$ n'intervient pas dans W que par l'intermédiaire de $\delta\Psi[l(s)]$; d'après (4.3) W ne dépendra pas de $\delta l(s)$ lorsque $\Psi'(l)$ est nul, c'est-à-dire dans le cas d'un obstacle rectiligne.

Nous nous proposons maintenant de montrer que la transformation W définie par l'équation (4.24 a) est la différentielle, au sens de M. Fréchet, de la transformation V définie par (3.36).

Pour abréger l'exposition des calculs qui suivent, nous conviendrons de représenter par K des fonctions bornées des caractéristiques géométriques de deux configurations voisines que nous envisageons. Posons [cf. (4.2)]

$$(4.25) \quad \gamma(h, s) = \Psi''[l(s) + h \delta l(s)] - \Psi''[l(s)].$$

Comme $\gamma(h, s)$ peut encore s'écrire

$$\gamma(h, s) = \Psi''[l(s) + h \delta l(s)] - \Psi''[l(s)] + \Psi''[l(s)] - \Psi''[l(s)],$$

il vient, d'après (4.1) et (4.2) et pour $|h|$ borné,

$$|\gamma(h, s)| \leq K \{ |\delta l(s)|^\mu + |\Delta\Psi''[l(s)]| \},$$

donc, *a fortiori*, μ étant inférieur à 1⁽¹⁵⁷⁾,

$$(4.26) \quad |\gamma(h, s)| \leq K \{ |\delta l(s)|^\mu + |\Delta\Psi''[l(s)]|^\mu \} \leq K \{ |\delta l(s)| + |\Delta\Psi''[l(s)]| \}^\mu,$$

(157) La dernière inégalité s'obtient en remarquant que, pour $|x| < 1$, on peut

La première de ces inégalités donne

$$(4.27) \quad |\gamma(h, s) - \gamma(h, s')| \leq K \{ \|\delta l(s)\| + \|\Delta \Psi[l(s)]\|_{1,\mu} \}^\mu$$

puisque, d'après les définitions mêmes des normes dans les espaces $E(o, \pi, s)$ — dont $\delta l(s)$ est un élément — et $E(\alpha, \beta, l, \mu)$ auquel appartient $\Delta \Psi(l)$, on peut écrire

$$\left| \|\delta l(s)\|^\mu - \|\delta l(s')\|^\mu \right| \leq 2 \|\delta l(s)\|^\mu$$

et

$$\left| \|\Delta \Psi[l(s)]\|^\mu - \|\Delta \Psi[l(s')]\|^\mu \right| \leq 2 \|\Delta \Psi[l(s)]\|_{1,\mu}^\mu.$$

D'un autre côté, $\gamma(h, s)$, envisagé comme fonction de s , se présente sous forme de différence de deux fonctions hölderiennes; on a, en effet, d'après (4.1) et (4.2),

$$\begin{aligned} & |\gamma(h, s) - \gamma(h, s')| \\ &= \left| \left\{ \Psi'^*[l(s') + h \delta l(s')] - \Psi'^*[l(s) + h \delta l(s)] \right\} - \left\{ \Psi'[l(s')] - \Psi'[l(s)] \right\} \right| \\ &\leq \left| \text{const.} \cdot |l(s) - l(s') + h \delta l(s) - h \delta l(s')|^\mu - \text{const.} \cdot |l(s) - l(s')|^\mu \right|, \end{aligned}$$

d'où

$$(4.28) \quad |\gamma(h, s) - \gamma(h, s')| \leq \text{const.} \cdot |s - s'|^\mu$$

puisque les fonctions $l(s)$ et $\delta l(s)$ vérifient chacune une condition de Lipschitz.

Appelons alors ρ une constante positive inférieure à 1; pour des raisons qui apparaîtront plus tard nous la choisirons de manière que $\rho > \frac{1}{2\mu}$. Les inégalités (4.27) et (4.28) permettent d'écrire

$$(4.29) \quad |\gamma(h, s) - \gamma(h, s')| \leq K \{ \|\delta l(s)\| + \|\Delta \Psi[l(s)]\|_{1,\mu} \}^{\mu(1-\rho)} |s - s'|^{\mu\rho}.$$

Cela posé, on tire de (4.25)

$$(4.30) \quad \delta^2 \Psi[l(s)] = \Psi^*[l'(s)] - \Psi[l(s)] - \delta \Psi[l(s)] = \delta l(s) \int_0^1 \gamma(h, s) dh.$$

choisir une constante bornée telle que

$$|1 + x^\mu| \leq \text{const.} \cdot |1 + x|^\mu.$$

Notons que les symboles K des deuxième et troisième termes de l'inégalité peuvent n'avoir pas la même valeur.

En remplaçant $[\gamma(h, s)]$ par sa majorante (4.26), on déduit de (4.30)

$$\begin{aligned}
 (4.31) \quad |\delta^2 \Psi[l(s)]| &\leq \|\delta l(s)\| \int_0^1 |\gamma(h, s)| dh \\
 &\leq K \|\delta l(s)\| \left\{ \|\delta l(s)\| + \|\Delta \Psi[l(s)]\|_{1,\mu} \right\}^\mu \\
 &\leq K \left\{ \|\delta l(s)\| + \|\Delta \Psi[l(s)]\|_{1,\mu} \right\}^{1+\mu} \\
 &\leq K \left\{ \|\delta l(s)\| + \|\Delta \Psi[l(s)]\|_{1,\mu} \right\}^{1+\mu(1-\rho)}
 \end{aligned}$$

puisque $1 - \rho$ est positif.

De plus, (4.30) donne

$$\begin{aligned}
 &|\delta^2 \Psi[l(s)] - \delta^2 \Psi[l(s')]| \\
 &\leq \|\delta l(s)\| \int_0^1 |\gamma(h, s) - \gamma(h, s')| dh + \text{Max} |\gamma(h, s)| \cdot |\delta l(s) - \delta l(s')|.
 \end{aligned}$$

Comme $\delta l(s)$ vérifie une condition de Lipschitz, l'inégalité précédente entraîne, en tenant compte de (4.26) et (4.29),

$$(4.32) \quad |\delta^2 \Psi[l(s)] - \delta^2 \Psi[l(s')]| \leq K \left\{ \|\delta l(s)\| + \|\Delta \Psi[l(s)]\|_{1,\mu} \right\}^{1+\mu(1-\rho)} |s - s'|^{\mu\rho}.$$

Les inégalités (4.31) et (4.32) expriment que $\delta^2 \Psi[l(s)]$ constitue un élément de l'espace $H_\mu(s)$ (cf. le début de ce paragraphe); on peut donc les condenser en une seule en écrivant

$$(4.33) \quad \|\delta^2 \Psi[l(s)]\|_\mu \leq K \left\{ \|\delta l(s)\| + \|\Delta \Psi[l(s)]\|_{1,\mu} \right\}^{1+\mu(1-\rho)}.$$

Considérons alors une fonction $\omega(s)$ définie par la relation

$$(4.34) \quad \omega(s) = \int_0^\pi \frac{\Psi[l(s)] - \Psi[l(s')]}{(s - s')} K(s, s') ds',$$

dans laquelle $K(s, s')$ désigne une fonction analytique, régulière de ses arguments; d'après le théorème de Fatou et Priwaloff $\omega(s)$ est un élément de $H_\mu(s)$. Nous avons, en appelant $\delta\omega(s)$ la partie principale de l'accroissement $\omega^*(s) - \omega(s)$ que subit $\omega(s)$ lorsque $\Psi[l(s)]$ s'accroît de $\Psi^*[l(s)] - \Psi[l(s)]$:

$$\omega^*(s) - \omega(s) - \delta\omega(s) = \int_0^\pi \frac{\delta^2 \Psi[l(s)] - \delta^2 \Psi[l(s')]}{s - s'} K(s, s') ds'.$$

D'après (4.32) ou (4.33), le second membre de cette relation est un élément de $H_\mu(s)$ vérifiant l'inégalité

$$(4.34') \quad \|\omega^*(s) - \omega(s) - \delta\omega(s)\|_\mu \leq K \left\{ \|\delta l(s)\| + \|\Delta\Psi[l(s)]\|_{1,\mu} \right\}^{1+\mu(1-\rho)}.$$

Ce résultat général acquis, revenons aux équations du problème du sillage. On tire de (1.24) et (4.4), eu égard à (4.31) ou à (4.33),

$$(4.35) \quad |s_0^* - s_0 - \delta\delta_0| \leq K \left\{ \|\delta l(s)\| + \|\Delta\Psi[l(s)]\|_{1,\mu} \right\}^{1+\mu(1-\rho)}.$$

Or, en combinant (1.33''), (4.12), (4.23), (4.24') et (4.33), on trouvera, pour les parties principales de $L^*(s) - L(s) - \delta L(s)$ et $\frac{d[L^*(s) - L(s) - \delta L(s)]}{ds}$, des expressions de la forme

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi K \frac{\delta^2 \Psi[l(s)] - \delta^2 \Psi[l(s')]}{s - s'} ds' + \delta a \int_0^\pi K_1 \frac{\delta \Psi[l(s)] - \delta \Psi[l(s')]}{s - s'} ds' \\ & + \delta b \int_0^\pi K_2 \frac{\delta \Psi[l(s)] - \delta \Psi[l(s')]}{s - s'} ds' \\ & + \Delta \alpha \int_0^\pi K_1' \frac{\delta \Psi[l(s)] - \delta \Psi[l(s')]}{s - s'} ds \\ & + \Delta \beta \int_0^\pi K_2' \frac{\delta \Psi[l(s)] - \delta \Psi[l(s')]}{s - s'} ds \\ & + K_2 \delta a^2 + K_3 \delta b^2 + K_4 \Delta \alpha \delta b + K_5 \Delta \beta \Delta b + \dots, \end{aligned}$$

où K_1, K_2 , etc. désignent des fonctions de s et s' qui seront, en outre, des fonctionnelles continues des éléments $\Psi(\alpha), l(s), a, b, \alpha$ et β (lorsque ceux-ci sont assujettis aux restrictions du paragraphe 25, précisées au début de ce paragraphe) qu'il est inutile d'expliciter.

La première intégrale qui figure dans cette expression est du type (4.34); d'après (4.32) elle constitue un élément de $H_\mu(s)$ dont la norme vérifie l'inégalité (4.33). D'après (4.3'), la somme des normes du second et du troisième terme est inférieur à

$$K [|\delta a| + |\delta b|] \left\{ \|\delta l(s)\| + \|\Delta\Psi[l(s)]\|_{1,\mu} \right\}.$$

Il en résulte, l'exposant $1 + \mu(1 - \rho)$ étant inférieur à 2, que les normes de chaque terme de l'expression ci-dessus sont, au plus, égales à

$$K \left\{ \|\delta l(s)\| + \|\Delta\Psi[l(s)]\|_{1,\mu} + |\Delta\alpha| + |\Delta\beta| + |\delta a| + |\delta b| \right\}^{1+\mu(1-\rho)}$$

de sorte, qu'en définitive,

$$\begin{aligned} & \text{Max. } |L^*(s) - L(s) - \delta L(s)| + \text{Max. } \left| \frac{d[L^*(s) - L(s) - \delta L(s)]}{ds} \right| \\ & \leq K \left\{ \|\delta l(s)\| + \|\Delta \Psi[l(s)]\|_{1,\mu} + |\Delta \alpha| + |\Delta \beta| + |\delta a| + |\delta b| \right\}^{1+\mu(1-\rho)}. \end{aligned}$$

Cette inégalité exprime que la fonction $[L^*(s) - L(s) - \delta L(s)]$ constitue un élément de $E(o, \pi, s)$; elle montre, de plus, que

$$\begin{aligned} & \lim \|L^*(s) - L(s) - \delta L(s)\| \\ & \left\{ \|\delta l(s)\| + \|\Delta \Psi[l(s)]\|_{1,\mu} + |\Delta \alpha| + |\Delta \beta| + |\delta a| + |\delta b| \right\}^{-1} = 0, \end{aligned}$$

lorsque $l^*(s)$, $\Psi^*(l)$, α^* , β^* , a^* et b^* tendent respectivement vers $l(s)$, $\Psi(l)$, α , β , a et b . En se reportant aux équations de définition (3.36) de V , (4.24'') de W et (4.2) de $\delta l(s)$, $\Delta \Psi(l)$, etc., il en résulte que la transformation W est, au sens de M. Fréchet, la différentielle de la transformation V (158).

Remarque. — Les conclusions précédentes subsistent encore lorsqu'on remplace $l(s)$ par la fonction $l(t)$; cette remarque nous sera bientôt utile.

Lorsque l'un des paramètres a ou b (ou les deux à la fois) augmente indéfiniment, les inégalités précédentes cessent d'être valables. Mais il suffirait de retoucher légèrement notre exposition pour établir

(158) Rappelons la définition de la différentielle au sens de M. Fréchet. Étant donné un espace linéaire, normé, complet E , envisageons une transformation $x' = F(x)$ opérant dans cet espace. Nous dirons que $F(x)$ possède au point $x = a$ une différentielle de M. Fréchet si l'on peut écrire

$$F(x) = F(a) + dF(x - a) + R(x - a)$$

où la transformation $dF(x - a)$ est linéaire et homogène par rapport à son argument et où la transformation $R(x - a)$ vérifie la condition

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\|R(x - a)\|}{\|x - a\|} = 0.$$

Revenant à la transformation W , nous avons déjà noté qu'elle est linéaire et homogène par rapport aux arguments $\delta l(s)$, $\Delta \Psi[l(s)]$, δa , δb , $\Delta \alpha$ et $\Delta \beta$; l'inégalité du texte permet alors de conclure.

l'existence et la continuité complète de W pour $a = -\infty$ (ou $b = \infty$). On peut, du reste, vérifier rapidement ce point essentiel au moyen du raisonnement direct que voici.

D'après la définition même de V , on peut écrire, en utilisant la variable auxiliaire $t(Z)$,

$$L(t) = \frac{\psi_1 + \psi_2}{\pi |a| b} \int_{-1}^{t(e^{i\pi})} e^{-T(t')} \frac{t' - t_0}{\left(1 - \frac{t'}{a}\right) \left(1 - \frac{t'}{b}\right)} dt' \quad [-1 \leq t' \leq t(e^{i\pi})],$$

formule dans laquelle le facteur $\psi_1 + \psi_2$ a été défini au moyen de l'équation (3.19). On a vu que :

- 1° le quotient $\frac{\psi_1 + \psi_2}{|a| b}$ est une fonction bornée des paramètres α et β lorsque ceux-ci sont bornés ;
- 2° la fonction $T(t')$ est hölderienne pour $-1 \leq t' \leq 1$ sauf pour $t' = t_0$;
- 3° $\delta T(t')$ est hölderienne dans le même intervalle et présente pour $t' = t_0$ un pôle simple ;
- 4° $\delta t(e^{is})$ est une fonction analytique de s pour $0 \leq s \leq \pi$;
- 5° les résultats précédents subsistent pour $a = -\infty$, ou pour $b = \infty$ ou pour $a = -\infty$ et $b = \infty$.

De l'ensemble de ces faits, on entraîne l'existence et la continuité de $\delta L(s)$ pour les valeurs infinies de a et de b . C. Q. F. D.

Pour achever, il nous reste à différentier les fonctionnelles $D_i[l(s), \Psi(l), \alpha, \beta, a, b]$, $i = 1, 2$ [cf. le paragraphe 23 et notamment (3.21)].

On trouve, pour la partie principale Δ_2 de $D_2^* - D_1$, l'expression

$$(4.36) \quad \Delta_2 \{ l(s), \Psi[l(s)], \alpha, \beta, a, b, \delta l(s), \Delta \Psi(l), \Delta \alpha, \Delta \beta, \delta a, \delta b \} \\ = - \int_1^{\eta} [\cos \Omega(X, 0) \delta \Omega(X, 0) d f(X, 0) + \sin \Omega(X, 0) d \delta f(X, 0)] \\ + \frac{2\psi_2}{\pi} \Omega'(q) \delta q + \delta \psi_2$$

en utilisant (2.9) et les développements limités

$$\Omega(Z) = \Omega'(q)(Z - q) + \dots \quad \text{et} \quad \delta \Omega(Z) = -\Omega'(q) \delta q + \dots$$

valables dans le voisinage de $Z = q$. On vérifie aisément que l'élément

différentiel de l'intégrale (4.36) est fini pour $Z = q$; d'après (3.21') et (2.9) la partie principale de cet élément est égale, en effet, à

$$\delta\Omega(X, o) df(X, o) + \Omega(X, o) d\delta f(X, o) = -\frac{2\Omega'(q)}{\pi} \delta\psi_2 + \dots$$

On trouverait, pour la partie principale Δ_1 de $D_1^* - D_1$, une expression tout analogue.

Nous n'explicitons pas l'expression (4.36) de Δ_2 en y remplaçant $\delta\Omega$, df et $d\delta f$ par leurs valeurs (4.5) et (4.13). Nous nous contenterons de faire remarquer que cette opération permettrait de définir Δ_2 comme une fonctionnelle complètement continue des arguments $l(s)$, $\Psi(l)$, α , β , $\delta l(s)$, $\Delta\Psi(l)$, $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$, δa et δb , linéaire et homogène par rapport aux six derniers d'entre eux. Les raisonnements développés à propos de la transformation W , raisonnements qui se simplifient du fait de l'analyticité de $\delta\Omega(Z)$ pour Z réel, permettraient d'établir que la transformation Δ_2 définie par (4.36) est la différentielle, au sens de M. Fréchet, de la transformation D_2 , toutes les fois que le paramètre a est fini; on a vu, en effet, que moyennant cette hypothèse ψ_2 et, par suite $\delta\psi_2$, sont finis (cf. § 27); δb , d'autre part, n'intervient dans δD_2 que par l'intermédiaire de df et $d\delta f$, expressions qui sont régulières pour $a = -\infty$.

Problème de la proue. — D'après ce que nous avons vu au paragraphe 23, le problème de la proue fait intervenir, outre V , D_1 et D_2 , les fonctionnelles P_1 et P_2 que nous allons maintenant différentier.

Il vient, en différentiant (4.51'), et en tenant compte de l'équation

$$\frac{d^2 \theta(\nu, q)}{d\nu^2} = -4\pi^2 \frac{d\theta(\nu, q)}{d \log q}$$

que vérifie $\theta(\nu, q)$,

$$\begin{aligned} (4.37) \quad \delta\Omega'(1) &= \frac{1}{2\pi^3} \int_0^\pi \{ \delta\Psi[l(o)] - \delta\Psi[l(s)] \} \frac{\theta'^2 - \theta\theta''}{\theta^3} ds \\ &+ \frac{\delta \log q}{4\pi^3} \frac{\theta(\nu_0) \theta'''(\nu_0) - \theta'(\nu_0) \theta''(\nu_0)}{\theta^2(\nu_0)} \\ &- \frac{\delta \log q}{8\pi^3} \int_0^\pi \{ \Psi[l(o)] - \Psi[l(s)] \} \frac{[2\theta\theta'\theta''' + \theta\theta''^2 - \theta^2\theta^{(iv)} - 2\theta'^2\theta'']}{\theta^5} ds \\ &- \frac{1}{2\pi^2} \frac{\theta(\nu_0) \theta''(\nu_0) - \theta'^2(\nu_0)}{\theta^2(\nu_0)} \delta s_0. \end{aligned}$$

Dans cette formule les symboles θ , θ' , etc. désignent les fonctions $\theta(\nu, q)$ et leurs dérivées par rapport à la variable $\nu = \frac{s}{2\pi}$ et où l'on a posé $\nu_0 = \frac{s_0}{2\pi}$.

La première intégrale du second membre de (4.37) a un sens; en effet, son élément différentiel se comporte comme $s^{2\mu-2}$ dans le voisinage de $s=0$, puisque $\theta\left(\frac{s}{2\pi}\right)$ y possède un zéro d'ordre deux, alors que $\delta\Psi[l(s)]$ y vérifie l'inégalité (4.3''); or, μ étant par hypothèse une constante comprise entre $\frac{1}{2}$ et 1, $2-2\mu$ est inférieur à 1; cela justifie notre assertion ⁽¹⁵⁹⁾.

Un raisonnement analogue au précédent s'applique aussi à la dernière intégrale du second membre de (4.37); dans le voisinage de $s=0$ le premier facteur de son élément différentiel se comporte comme s^2 — puisque $\Psi[l(s)]$ est lipschitzienne et que, d'autre part, $\frac{dl(s)}{ds}$ s'annule pour $s=0$ (cf. § 13, remarque finale) — et le second comme s^{-2} puisque son numérateur y possède un zéro simple [la fonction $\theta(\nu)$ étant impaire].

Nous laisserons au lecteur le soin de vérifier en détail que $\delta\Omega'(1)$ définie par (4.37) est la différentielle au sens de M. Fréchet de $\Omega'(1)$; il suffira de former l'expression

$$|\Omega'(1) - \Omega'(1) - \delta\Omega'(1)| \{ \|\delta l(s)\| + \|\Delta\Psi[l(s)]\|_{1,\mu} + |\delta q| \}^{-1},$$

en utilisant les raisonnements développés pour W et de montrer qu'elle tend vers zéro avec

$$|\delta l(s)|, \|\Delta\Psi[l(s)]\|_{1,\mu}, |\delta a|, |\delta b|.$$

Nous nous contenterons de le vérifier pour le terme de $\delta^2\Omega'(1)$ qui, d'après (4.30) et (4.37), s'écrit

$$\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \left\{ \delta^2\Psi[l(0)] - \delta^2\Psi[l(s)] \right\} \frac{\theta'^2 - \theta\theta''}{\theta^2} ds.$$

⁽¹⁵⁹⁾ C'est ici qu'apparaît la nécessité des restrictions que nous avons dû imposer à l'obstacle dès le début de ce Chapitre et qu'il ne semble pas possible d'écarter sans que la formule (4.37) cesse d'avoir un sens. Or, les raisonnements de M. Leray, dont nous allons nous servir dans la discussion d'unicité, reposent essentiellement sur l'hypothèse d'existence de $\delta\Omega'(-1)$ et de $\delta\Omega'(1)$.

Or, $\delta^2 \Psi(s)$ vérifie l'inégalité (4.32) dans laquelle, comme on l'a fait remarquer, on peut remplacer la variable s par t ; compte tenu de (4.3''), il en résulte que le module du terme envisagé est inférieur à

$$K \left\{ \|\delta l(s)\| + \|\Delta \Psi[l(s)]\|_{1,\mu} \right\}^{1+\mu(1-\rho)} \left| \int_0^\pi \frac{ds}{s^{2(1-\mu\rho)}} \right|,$$

c'est-à-dire, *a fortiori*, à

$$K \left\{ \|\delta l(s)\| + \|\Delta \Psi[l(s)]\|_{1,\mu} + |\delta q| \right\}^{1+\mu(1-\rho)}$$

puisque l'intégrale du second membre est bornée en vertu du choix même de ρ ; on a, en effet, $2\mu\rho \geq 1$. Cette remarque justifie notre assertion.

Nous laissons également au lecteur le soin de vérifier que l'expression (4.37) de $\delta \Omega'(1)$ peut aussi s'obtenir en dérivant par rapport à Z l'expression (4.5) de $\delta \Omega(Z)$, après avoir rendu celle-ci valable jusqu'à la frontière $|Z|=1$ du domaine d .

Nous remarquerons enfin, que la formule (4.37) est valable pour $a = -\infty$ et $b = \infty$; la fonctionnelle $\delta \Omega'(1)$ ne dépend, en effet, de ces paramètres que par l'intermédiaire de $q(a, b)$. L'ensemble des conclusions qui précèdent s'étend sans difficulté à $\delta \Omega'(-1)$.

Remarque. — Au cours de ce paragraphe, nous avons considéré deux symboles de différentiation $\frac{d}{dZ}$ et δ ; il importe de noter qu'ils sont permutables; cela résulte sans difficulté de leur définition même. En particulier, on a

$$\frac{d \delta f(Z)}{dZ} = \delta \frac{df(Z)}{dZ}; \quad \delta \frac{d\Omega}{dZ} = \frac{d}{dZ} \delta \Omega(Z),$$

relations que nous avons déjà utilisées au cours de ce Chapitre.

32. ÉQUATIONS AUX VARIATIONS DU PROBLÈME DU SILLAGE. PROBLÈME D'UNICITÉ. — Considérons dans le plan z une configuration des parois rigides définies au moyen des éléments $\Psi(l), \alpha, \beta, d_1$ et d_2 ; nous avons vu (c.f. § 28) qu'il existe au moins un élément $x = x\left[l(s), \frac{1}{a+1}, \frac{1}{b-1}\right]$ de l'espace $E(0, \pi, s, a, b)$ vérifiant les équations (3.37) du problème du sillage posé pour cette configuration. Les fonctionnelles qui figurent aux seconds membres de (3.37) possèdent (c.f. § 31) les

différentielles de Fréchet puisque $\Psi(l)$ est un élément de $E(\alpha, \beta, l, \mu)$; le système des équations aux variations de (3.37), ou de l'équation unique équivalente (3.38), s'écrira, d'après (4.24') et (4.36),

$$(4.38) \left\{ \begin{array}{l} \delta l(s) = W[l(s), \Psi(l), \alpha, \beta, a, b, \delta l(s), \Delta \Psi(l), \Delta \alpha, \Delta \beta, \delta a, \delta b], \\ \delta \left(\frac{1}{b-1} \right) = \delta \left(\frac{1}{b-1} \right) + \frac{1}{\nu} \{ \Delta d_1 - \Delta_1[l(s), \Psi(l), \alpha, \beta, a, b, \delta l(s), \Delta \Psi(l), \Delta \alpha, \Delta \beta, \delta a, \delta b] \}, \\ \delta \left(\frac{1}{a+1} \right) = \delta \left(\frac{1}{a+1} \right) + \frac{1}{\nu} \{ \Delta d_2 - \Delta_2[l(s), \Psi(l), \alpha, \beta, a, b, \delta l(s), \Delta \Psi(l), \Delta \alpha, \Delta \beta, \delta a, \delta b] \}, \end{array} \right.$$

où $l(s)$, a , b désignent, répétons-le, les solutions de (3.37), $\Delta \Psi(l)$, $\Delta \alpha$, $\Delta \beta$, Δd_1 et Δd_2 les variations des données et dont les éléments $\delta l(s)$, δa et δb sont les inconnues (¹⁶⁰).

Afin de conserver au système (4.38) un sens pour les valeurs infinies de d_1 , d_2 , a et b , nous le transcrivons sous la forme équivalente

$$(4.38') \left\{ \begin{array}{l} \delta l(s) = W, \\ \delta \left(\frac{1}{b-1} \right) = \delta \left(\frac{1}{b-1} \right) + \nu \left(\frac{\Delta d_1}{d_1^2} - \frac{\Delta_1}{D_1^2} \right) \\ \delta \left(\frac{1}{a+1} \right) = \delta \left(\frac{1}{a+1} \right) + \nu \left(\frac{\Delta d_2}{d_2^2} - \frac{\Delta_2}{D_2^2} \right), \end{array} \right.$$

où nous avons omis, pour abrégé, d'explicitier les arguments des fonctionnelles du second membre. Pareillement, aux inconnues δa et δb et aux paramètres d_1 et d_2 , nous substituerons les éléments $\frac{\delta a}{(a+1)^2}$, $\frac{\delta b}{(b+1)^2}$, $\frac{1}{d_1}$ et $\frac{1}{d_2}$ respectivement. Les facteurs $\frac{\delta a}{a+1}$, $\frac{\delta b}{b-1}$ étant numériques, l'ensemble des inconnues $\delta l(s)$, $\frac{\delta a}{(a+1)^2}$ et $\frac{\delta b}{(b-1)^2}$ peut être considéré comme un élément

$$\delta x = \delta x \left[\delta l(s), \frac{\delta a}{(a+1)^2}, \frac{\delta b}{(b-1)^2} \right],$$

(¹⁶⁰) Précisons, pour éviter toute confusion, que les définitions des éléments $\Delta \Psi(l)$, $\Delta \alpha$, $\Delta \beta$, Δd_1 et Δd_2 , utilisées dans le texte, coïncident avec celles données par le système (4.2); ces éléments sont donc *donnés* lorsqu'on déforme la configuration des éléments rigides d'une manière connue. Dans ce cas, les éléments $l(s)$, a , b correspondants subissent des accroissements $l^*(s) - l(s)$, $a^* - a$, $b^* - b$ dont les parties principales $\delta l(s)$, δa , δb sont définies par (4.38); cela montre que les inconnues du système (4.38) sont des différentielles équivalentes, mais non identiques, aux différentielles définies par (4.2).

de l'espace $E(o, \pi, s, a, b)$. Dans ces conditions, les fonctionnelles qui figurent aux seconds membres des équations du système (4.38), seront, compte tenu de ce que nous avons vu au précédent paragraphe, linéaires par rapport aux arguments $\Delta\Psi(l)$, $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$, $\Delta\left(\frac{1}{d_1}\right)$, $\Delta\left(\frac{1}{d_2}\right)$, et aussi par rapport aux nouvelles inconnues $\frac{\delta a}{(a+1)^2}$, $\frac{\delta b}{(b-1)^2}$; l'ensemble de ces fonctionnelles définit donc une transformation opérant dans l'espace $E(o, \pi, s, a, b)$, complètement continue relativement à tous ses arguments et notamment à l'argument

$$\delta x = \delta x \left[\delta l(s), \frac{\delta a}{(a+1)^2}, \frac{\delta b}{(b-1)^2} \right],$$

y compris pour les valeurs infinies des paramètres a , b , d , et d_1 . Il suit de là que le système (4.38') est équivalent à une équation unique du type de Fredholm

$$(4.39) \quad \delta x = d\mathcal{F} \left[\delta x, x, \Psi(l), \alpha, \beta, \frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}, \Delta\Psi(l), \Delta\alpha, \Delta\beta, \Delta\left(\frac{1}{d_1}\right), \Delta\left(\frac{1}{d_2}\right) \right],$$

où le symbole $d\mathcal{F}$ désigne une fonctionnelle linéaire en δx ; d'après ce que nous avons vu, $d\mathcal{F}(\delta x, x)$ peut alors être envisagée comme la différentielle de Fréchet de la transformation $\mathcal{F}(x)$ figurant au second membre de (3.38).

Cela étant, supposons que l'équation (4.39) admette une solution unique; la théorie des équations fonctionnelles de MM. Leray et Schauder permet alors d'énoncer les résultats suivants ⁽¹⁶¹⁾ (*cf.* pour les notations le paragraphe 28) :

1° l'élément $x = x \left[l(s), \frac{1}{a+1}, \frac{1}{b-1} \right]$ de $E(o, \pi, s, a, b)$ est une solution *isolée* du système (3.37), où de l'équation équivalente (3.38) dont (4.39) est l'équation aux variations; à l'intérieur de ω l'équa-

⁽¹⁶¹⁾ Nous allons rappeler brièvement le sens de certaines locutions dont nous aurons à faire usage. En reprenant les notations du paragraphe 28, nous appellerons E un espace abstrait, linéaire, normé complet; ω un ensemble ouvert, borné de E et ω' la frontière de ω ; a et x des points intérieurs de ω ;

tion (3.38) ne peut donc avoir qu'un nombre fini de solutions $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$;

2° lorsque les accroissements $\Delta\Psi(l), \Delta\alpha, \Delta\beta, \Delta\left(\frac{1}{d_1}\right), \Delta\left(\frac{1}{d_2}\right)$ sont petits en valeur absolue, il existe au moins une solution

$$x^* = x^* \left[l^*(s), \frac{1}{(a^* + 1)}, \frac{1}{b^* - 1} \right]$$

$F(x)$ une transformation complètement continue, définie sur E et qui fournit des éléments de E .

Cela étant, posons

$$y = \Phi(x) = x - F(x).$$

L'élément a étant une solution de l'équation $y = 0$, on aura

$$a - F(a) = \Phi(a) = 0.$$

Admettons alors qu'il existe un nombre positif, non nul, ρ jouissant de la propriété suivante : $x = a$ est la seule solution de l'équation fonctionnelle

$$\Phi(x) = 0,$$

intérieure à l'hypersphère

$$\|x - a\| \leq \rho.$$

Nous dirons, dans ce cas, que $x = a$ est une solution *isolée* de l'équation considérée. Soit alors l'hypersphère $S(\theta)$ définie, dans E , par l'équation

$$\|x - a\| \leq \theta\rho \quad (0 \leq \theta \leq 1);$$

l'hypothèse précédente étant remplie, le degré $d = d[\Phi, S(\theta), 0]$ (cf. § 28) existera et sera indépendant de θ ; en passant à la limite $\theta \rightarrow 0$, nous appellerons indice topologique $i[\Phi, a]$ de $\Phi(x)$ au point a le nombre entier i ainsi défini; il est essentiel de noter que cette définition de $i[\Phi, a]$ perd toute signification lorsque la solution $x = a$ de $\Phi(x) = 0$ n'est pas isolée.

Supposons maintenant que l'équation $\Phi(x) = 0$ n'admette dans ω qu'un nombre fini de solutions isolées $x = a_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$) intérieures à ω (donc étrangère à sa frontière ω'); dans ce cas, on peut définir n entiers tels que $i[\Phi, a_j]$; on démontre ensuite la relation

$$d[\Phi, \omega, 0] = \sum_{j=1}^n i[\Phi, a_j].$$

L'égalité précédente fait donc connaître une relation entre les $i[\Phi, a_j]$, d'une

du problème du sillage posé pour la configuration des parois rigides (voisine de la configuration initiale) définie par

$$\Psi^*(l) = \Psi(l) + \Delta \Psi(l), \quad \alpha^* = \alpha + \Delta\alpha, \quad \beta^* = \beta + \Delta\beta,$$

$$\frac{1}{d_1^*} = \frac{1}{d_1} + \Delta\left(\frac{1}{d_1}\right), \quad \frac{1}{d_2^*} = \frac{1}{d_1} + \Delta\left(\frac{1}{d_1}\right),$$

qui est voisine de $x = x\left[l(s), \frac{1}{a+1}, \frac{1}{b-1}\right]$; il y a plus : la solution δx

part, et le nombre $d[x - F(x), \omega, 0]$, égal à l'indice total des solutions de l'équation fonctionnelle

(I)
$$x = F(x),$$

sur l'ensemble ω (cf. § 28), d'autre part.

Un critère d'unicité résulte de cette remarque. Admettons que l'on ait réussi, à établir *a priori* et relativement à l'équation (I) les propriétés suivantes :

- 1° L'équation (I) n'admet dans ω qu'un nombre fini de solutions isolées a_j ($j = 1, 2, \dots, n$). On peut donc définir l'indice $i[\Phi, a_j]$ de chacune d'elles.
- 2° L'indice $i(\Phi, a_j)$, de chacune de ces solutions vaut $+1$.
- 3° L'indice total d des solutions de l'équation (I) dans ω est égal à $+1$.

Le théorème rappelé ci-dessus permet dès lors d'écrire

$$d = \sum_{j=1}^n i[\Phi, a_j] = n = 1.$$

Cette égalité entraîne $j = 1$; elle exprime donc que l'équation (I) ne possède dans ω qu'une seule solution.

Du point de vue de la discussion d'unicité, il y a donc grand intérêt à savoir former des conditions suffisantes pour qu'une solution éventuelle $x = a$ (intérieure à ω) de l'équation (I) soit isolée et, dans l'affirmative, à savoir déterminer l'indice $i[\Phi, a]$ d'une telle solution. Dans cet ordre d'idée nous utiliserons le résultat suivant, établi par MM. Leray et Schauder à la suite des travaux de M. F. Riesz.

Si la transformation $F(x)$ admet dans le voisinage de la solution $x = a$ de (I) une différentielle de Fréchet $dF(x - a)$ (celle-ci étant, rappelons-le, une fonctionnelle linéaire et homogène), complètement continue et telle que la seule solution de l'équation linéaire auxiliaire [(équation aux variations de (I))]

(II)
$$(x - a) - dF(x - a) = 0,$$

soit $x = a$, on peut affirmer : 1° que la solution $x = a$ de (I) est isolée, ce qui

de (4.39) est la partie principale de la différence $(x^* - x)$ de x avec l'une quelconque de ces solutions voisines;

3° l'indice topologique $i[\delta x - d\mathcal{F}(\delta x, x), \delta x]$ de la solution δx de (4.39), supposée unique, est égal à celui de la solution x de (3.38) correspondante;

4° l'indice total $d[x - \mathcal{F}(x), \omega, 0]$ des solutions de (3.38) dans ω est égal à la somme des indices de chacune de ces solutions x_i ; d'après l'alinéa précédent, on peut en déduire

$$(4.40) \quad d[x - \mathcal{F}(x), \omega, 0] = \sum_1^n i[x - \mathcal{F}(x), x_i] = \sum_1^n i[\delta x - d\mathcal{F}(\delta x, x_i), \delta x].$$

Or, le premier membre de cette relation est égal à $+1$ (cf. § 28).

Dès lors, les critères d'unicité pour l'équation (3.38) résulteront de la confrontation de deux points suivants :

a. Former les catégories d'obstacles auxquels s'appliquent l'ensemble des résultats précédents. D'après ce que nous avons vu, la théorie de MM. Leray et Schauder sera valable pour un obstacle donné lorsque l'équation aux variations (4.39) correspondante ne

entraîne l'existence de l'indice $i[\Phi, a]$; 2° que l'indice $i[\Phi, a]$ est égal à l'indice en a de la transformation *linéaire* $x - a - dF(x - a)$ au point considéré a .

Supposons, dès lors, que $dF(x)$ existe en chaque point de ω et y vérifie les conditions de régularité que l'énoncé précédent lui impose. D'après la première partie de ce théorème, toutes les solutions de (I), intérieures à ω , sont dans ce cas isolées; elles sont donc en nombre fini; sinon elles admettraient dans ω au moins un point d'accumulation (le raisonnement de Bolzano-Weierstrass reste, en effet, valable dans un espace complet) et l'une, au moins, d'entre elles ne serait pas isolée, contrairement à l'hypothèse. D'un autre côté, la deuxième partie de l'énoncé nous permet de réduire la détermination de l'indice $i[\Phi, a]$ d'une solution éventuelle $x = a$ de (I) à la détermination de l'indice $x = a$ d'une transformation linéaire, plus simple, que la transformation donnée. Ainsi, dans le cas envisagé [existence et régularité de $dF(x)$ sur ω] le problème d'unicité revient à discuter le nombre des solutions de l'équation aux variations (II), de montrer que $x = a$ en est l'unique solution et à en déterminer enfin l'indice.

Ces remarques justifient les raisonnements du texte.

possède qu'une seule solution. L'alinéa 2° permet de donner à ce critère d'applicabilité une forme plus pratique. Les solutions éventuelles δx de l'équation linéaire (4.39) varient, en effet, continûment lorsque les variations $\Delta \Psi(l)$, $\Delta \alpha$, $\Delta \beta$, Δd_1 et Δd_2 des données tendent vers zéro.

L'indice de la solution δx de (4.39) reste constant au cours de cette transformation des données. Il suffira, dès lors, de vérifier que l'équation homogène en δx

$$(4.41) \quad \delta x = d\mathcal{F} \left[\delta x, x, \Psi(l), \alpha, \beta, \frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}, 0, 0, 0, 0, 0 \right],$$

n'a pas d'autre solution que $\delta x = 0$.

b. Déterminer l'indice $i[\delta x - d\mathcal{F}(\delta x, x), 0]$ d'une solution éventuelle de l'équation (4.39) correspondante à un obstacle de l'espèce visée au précédent alinéa.

Supposons que cet indice soit égal à $+1$; l'équation (4.40) prouve qu'alors $n=1$, puisque son premier membre vaut $+1$; cela veut dire que l'équation (3.38) n'admet qu'une seule solution; nous avons donc bien un critère d'unicité.

Nous allons, maintenant, traiter les problèmes posés par les alinéas a et b.

Problème de M. Weinstein. — Nous nous proposons, en utilisant une idée dont M. Weinstein s'est servi avec grand succès dans ses travaux sur les jets liquides, de ramener l'étude de l'équation (4.39) à celle d'un problème mixte aux limites de la théorie des fonctions harmoniques.

Reprenons les deux groupes d'éléments voisins du plan z définies par (4.2). Nous rappellerons que les symboles $\delta \Omega(Z)$ et $\delta f(Z)$, définis par (4.5), (4.13) et (4.15) désignent les parties principales des variations que subissent $\Omega(Z)$ et $f(Z)$ en un point fixe Z du plan de la demi-couronne d . Il en résulte que la partie principale $\delta z(Z)$ de la variation que subit en ce point la fonction $z(Z)$ s'obtient en différentiant (4.14); il vient

$$(4.42) \quad \frac{d \delta z(Z)}{dz} = i \delta \Omega(Z) + \frac{d \delta f(Z)}{df(Z)}.$$

Cela étant, posons ⁽¹⁶²⁾

$$(4.43) \quad \gamma(Z) = \alpha + i\beta = \delta f(Z) - \frac{df}{dz} \delta z(Z),$$

La fonction $\gamma(Z)$ ainsi définie fournit, en fonction de Z , la partie principale de la variation qui subit le potentiel complexe f en un point fixe z du plan du mouvement. Pour le vérifier, il suffit de différencier la fonction $f = f[z(Z)]$; il vient

$$\delta f(Z) = \gamma + \frac{df}{dz} \delta z(Z).$$

En éliminant δz entre (4.42) et (4.43) on trouve la relation entre γ , $\delta\Omega$ et δf

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{dz}{df} (\gamma - \delta f) \right] + \frac{d\delta f}{df} = -i \delta\Omega;$$

compte tenu de (1.14), cette relation s'écrit

$$(4.44) \quad \frac{d\gamma}{df} + i \frac{d\Omega}{df} (\gamma - \delta f) = -i \delta\Omega,$$

en regardant f comme variable indépendante, ou encore

$$(4.44') \quad \frac{d\gamma}{dZ} + i \frac{d\Omega}{dZ} (\gamma - \delta f) = -i \delta\Omega \frac{df}{dZ},$$

en multipliant les deux membres de (3.44) par $\frac{df}{dZ}$, ou encore, sous forme finie ou la variable indépendante n'est pas mise en évidence,

$$(4.45) \quad \gamma = ie^{-i\Omega} \left\{ \int e^{i\Omega} [\delta f d\Omega - \delta\Omega df] \right\}.$$

Ces différentes formules prouvent que $\gamma(Z)$ est une fonction analytique et régulière de Z pour $q \leq |Z| < 1$ sauf, peut-être, pour $Z = Z_1$, $Z = \pm q$. D'autre part, les fonctions $\delta\Omega(e^{is})$ et $\frac{d\Omega(e^{is})}{ds}$ étant hólde-

⁽¹⁶²⁾ Nous avons respecté les notations de M. Weinstein, mais nous devons mettre le lecteur en garde contre la confusion possible entre les fonctions α et β définies par (4.43), d'une part, et les paramètres α et β , abscisses curvilignes des extrémités B et C de l'obstacle, d'autre part.

riennes pour $0 < s < s_0$, $s_0 < s < \pi$, il en résulte que les coefficients de l'équation linéaire (4.44') le sont aussi tout le long du cercle $|Z| = 1$, sauf, peut-être pour $Z = Z_0$; par suite, la solution $\gamma(Z)$ de (4.44') est aussi h"olderienne, en m"eme temps que sa d"eriv"ee $\frac{d\gamma(Z)}{dZ}$, pour $q \leq Z \leq 1$ sauf, peut-être pour $Z = Z_0$, $Z = \pm 1$, $Z = \pm q$ et $Z = Z_1$.

Nous nous proposons maintenant de faire conna"tre les conditions limites que v"erifie la fonction analytique $\gamma(Z)$ [cf. (4.43)], d"efinie dans d lorsque les accroissements $\Delta \Psi(l)$, $\Delta \alpha$, $\Delta \beta$, $\Delta\left(\frac{1}{d_1}\right)$ et $\Delta\left(\frac{1}{d_2}\right)$ sont suppos"es donn"es; nous verrons : 1° que ces conditions fronti"eres d"eterminent $\gamma(Z)$; 2° que la d"etermination de $\gamma(Z)$ "a partir de ces donn"ees "equivaut "a la r"esolution de l"equation (4.39).

1° Conditions le long du cercle $Z = e^{is}$ ($0 \leq s \leq \pi$). — "Eliminons $T_0(e^{is})$ entre (1.33'') et la premi"ere "equation (4.38), il vient, compte tenu des "equations de d"efinition (4.23) et (4.24') de W

$$\frac{d \delta l(s)}{d l(s)} = \frac{d \delta f(e^{is})}{d f(e^{is})} - \delta T(e^{is}).$$

Cela permet d'"ecrire, en utilisant la d"efinition m"eme de $\delta \Omega(Z)$ et la formule (4.3),

$$\delta \Omega(e^{is}) = \Psi'(l) \delta l + \Delta \Psi(l) + i \frac{d \delta f}{d f} - i \frac{d \delta l}{d l}.$$

Portons la valeur de $\delta \Omega(e^{is})$ ainsi obtenue dans (4.42) et servons-nous de la relation

$$dz = e^{i\Psi} dl,$$

valable le long de l'obstacle; il vient, en int"egrant,

$$\delta z(e^{is}) = \int e^{i\Psi} (i \delta l d\Psi + d \delta l) + i \int e^{i\Psi} \Delta \Psi(l) dl$$

ou encore

$$\delta z(e^{is}) = e^{i\Psi} \delta l + \Delta z(l),$$

en d"esignant par $\Delta z(l)$ la variation qui subit l'affixe $z(l)$ du point de l'obstacle d'abscisse curviligne l . La constante d'int"egration a "et"e choisie ici de mani"ere que δz s'annule avec δl et $\Delta z(l)$; γ , δz et $\delta \Omega$ se correspondront alors biunivoquement.

Portons maintenant la valeur de $\delta z(e^{is})$ ainsi obtenue dans (4.43)

et tenons compte des égalités

$$\Omega(e^{is}) = \Psi - \pi + iT \quad \text{pour } 0 \leq s \leq s_0$$

et

$$\Omega(e^{is}) = \Psi + iT \quad \text{pour } s_0 \leq s \leq \pi;$$

on obtient la relation suivante, valable le long de l'obstacle

$$(4.46) \quad \gamma(e^{is}) = j e^{\tau(e^{is})} \delta l(s) - e^{-i\Omega(e^{is})} \Delta z(l) + \delta f \quad \left(j = \begin{cases} +1 & \text{pour } 0 \leq s \leq s_0 \\ -1 & \text{pour } s_0 \leq s \leq \pi \end{cases} \right).$$

Comme $\delta f(e^{is})$ est réel, on en tire, en séparant le réel de l'imaginaire dans la formule précédente et en tenant compte de (4.43),

$$(4.46') \quad \beta(e^{is}) = -\text{Imag.} [e^{-i\Omega(e^{is})} \Delta z(l)].$$

Ainsi, la fonction harmonique β prend des valeurs connues le long de $Z = e^{is}$, lorsque l'obstacle subit une variation donnée.

2° *Étude du voisinage du point $Z = 1$.* — Nous venons de voir que la fonction $\gamma(Z)$ est hölderienne dans le voisinage du point $Z = 1$; d'après (4.46) on peut donc écrire le développement limité

$$(4.47) \quad \gamma - \delta f = \Delta \alpha + e^{-i\Psi(\alpha)} \Delta z(\alpha) + \varepsilon(Z - 1),$$

où $\varepsilon(Z - 1)$ désigne une fonction hölderienne, nulle avec $(Z - 1)$.

Nous nous proposons d'approfondir l'étude de $\gamma(f)$ dans le voisinage considéré; à cet effet portons la valeur de $\gamma - \delta f$ ainsi obtenue dans (4.44'); $\frac{df}{dZ}$ étant nul pour $Z = 1$ [cf. (1.10')], il vient

$$\frac{d\gamma}{dZ} = -i\Omega'(1) [\Delta \alpha + e^{-i\Psi(\alpha)} \Delta z(\alpha)] + \varepsilon(Z - 1),$$

le premier membre désignant encore une fonction hölderienne. Comme

$$\left[\frac{d \delta f(Z)}{dZ} \right]_{Z=1} = 0$$

[ceci en vertu de l'égalité $\left(\frac{df}{dZ} \right)_{Z=1} = 0$] la relation précédente permet de former pour le premier membre de (4.47) le développement limité

$$\begin{aligned} \gamma(Z) - \delta f(Z) &= \gamma(1) - \delta f(1) + \left[\left(\frac{d\gamma}{dZ} \right)_{Z=1} + \varepsilon(Z - 1) \right] (Z - 1) \\ &= [\Delta \alpha + e^{-i\Psi(\alpha)} \Delta z(\alpha)] \{ 1 - i\Omega'(1) (Z - 1) [1 + \varepsilon(Z - 1)] \}. \end{aligned}$$

D'un autre côté, la fonction $\delta\Omega(Z)$ est hölderienne et de partie principale réelle dans le voisinage du point $Z=1$; on peut donc y écrire

$$\delta\Omega(Z) = \Psi'(\alpha)\Delta\alpha + \Delta\Psi(\alpha) + \varepsilon(Z-1).$$

Portons alors dans la formule (4.44) les valeurs de $(\gamma - \delta f)$ et de $\delta\Omega(Z)$ que nous venons de trouver et remplaçons-y $\frac{d\Omega}{df}$ par son développement limité (1.36), il vient ⁽¹⁶³⁾

$$(4.48) \quad \frac{d\gamma}{df} = [\Delta\alpha + e^{-i\Psi(\alpha)}\Delta z(\alpha)] \left\{ i\Psi'(\alpha) - \frac{i\Omega'(1)}{2N} \frac{Z+1}{Z-1} - \frac{[\Omega'(1)]^2}{2N} (Z+1) \right\} - i[\Psi'(\alpha)\Delta\alpha + \Delta\Psi(\alpha)] + \varepsilon(Z-1).$$

C'est la relation que nous voulions établir; pour $Z=-1$ on obtiendrait, évidemment, un développement tout analogue.

3° *Étude du voisinage du point $Z=Z_0$.* — Les développements (2.10) — où α doit être pris égal à $\frac{1}{2}$ puisque l'obstacle étudié est à tangente continue — (4.12'), (4.16) et (4.16') permettent d'écrire l'égalité

$$(4.49) \quad \frac{d\Omega}{dZ} \delta f - \frac{df}{dZ} \delta\Omega = \varepsilon(Z-Z_0),$$

où $\varepsilon(Z-Z_0)$ a la même signification qu'au précédent alinéa. D'un autre côté, il vient, d'après (1.23) et (1.27),

$$e^{i\Omega(Z)} = \frac{K(Z)}{Z-Z_0},$$

la fonction $K(Z)$ étant hölderienne pour $Z=Z_0$; en combinant ces deux résultats avec (4.49), on voit que

$$\int e^{i\Omega(Z)} [\delta f d\Omega - \delta\Omega df] = \int \frac{\varepsilon(Z-Z_0)}{Z-Z_0} K(Z) dZ;$$

d'après le théorème de Fatou et Priwaloff le second membre appartient à l'espace $H_\mu(Z)$ pour $Z=Z_0$ puisque la fonction $\varepsilon(Z-Z_0)$ appar-

⁽¹⁶³⁾ Dans la formule (1.36) le terme complémentaire $\gamma_{n-1}(Z-1)$ doit être remplacé par une fonction $\varepsilon(Z-1)$; cela résulte, en effet, des hypothèses de régularité faites au début de ce paragraphe.

tient à cet espace et qu'elle est nulle pour $Z = Z_0$. Or, le premier membre de l'égalité précédente est égal à $-i e^{i\Omega} \gamma$ [cf. (4.45)]; il en résulte que la fonction $\gamma(Z)(Z - Z_0)^{-1}$ et, par suite, $\gamma(Z) \frac{d\Omega}{dZ}$ [cf. (2.10)] sont hölderiennes dans le voisinage de $Z = Z_0$.

Cela étant, observons que l'équation (4.44') peut s'écrire

$$\frac{d\gamma}{dZ} = i \left(\delta f \frac{d\Omega}{dZ} - \delta\Omega \frac{df}{dZ} \right) - i\gamma \frac{d\Omega}{dZ}.$$

D'après ce que nous venons de voir, chacun des termes du second membre de l'égalité précédente est hölderien [cf. (4.49)] pour $Z = Z_0$; il s'ensuit que $\frac{d\gamma(Z)}{dZ}$ vérifie dans le voisinage du point de bifurcation une condition de Hölder; la dérivée $\frac{d\gamma(e^{is})}{ds}$ y existe donc et appartient à l'espace $H_\mu(s)$.

Remarquons enfin que la quantité $\gamma(e^{is_0})$ est nulle; cela résulte, en effet, de ce que $T(e^{is_0}) = -\infty$ et $\delta f(e^{is_0}) = 0$ [cf. (4.16)]; l'équation de définition (4.46) de $\gamma(e^{is_0})$ permet enfin de conclure.

4° Conditions le long de l'axe réel $Y = 0$ du plan Z . — On a vu que les fonctions $\frac{d\Omega}{df}$, $\delta\Omega$ et δf sont holomorphes et réelles pour Z réel, sauf pour $Z = \pm 1$, $Z = \pm q$; $\gamma(X, 0)$ est donc holomorphe pour $-1 < X < -q$ et $q < X < 1$. Cela étant, séparons le réel de l'imaginaire dans (4.44); en tenant compte de (4.43), on obtient la relation

$$\frac{d\alpha}{df} = \beta \frac{d\Omega}{df} = \frac{d\Theta}{df} \beta,$$

valable sur les portions rectilignes de la frontière du domaine d .

Désignons alors par \vec{n} la normale à cette frontière orientée vers l'intérieur de d et utilisons les relations classiques entre les dérivées des fonctions harmoniques conjuguées prises suivant deux directions orthogonales; l'égalité précédente se transforme alors en la condition

$$(4.50) \quad \frac{1}{\beta} \frac{d\beta}{dn} = \frac{dT}{dn} \quad \text{pour} \quad \begin{cases} -1 < X < -q, \\ q < X < 1. \end{cases}$$

5° Conditions le long du demi-cercle $Z = qe^{is}$ ($0 \leq s \leq \pi$). — Nous

avons vu que les fonctions δf , $\frac{d\Omega}{df}$ et $\delta\Omega$ sont holomorphes pour $|Z| = q$ sauf pour $Z = \pm q$ et $Z = Z_1$; γ est donc holomorphe sur la portion considérée de la frontière, les voisinages de ces points, peut-être, exceptés. Séparons alors le réel de l'imaginaire dans l'équation (4.44') supposée écrite avec la variable $s(Z = q e^{is})$, il vient

$$\frac{d\beta(q e^{is})}{ds} - \frac{dT(q e^{is})}{ds} [\beta(q e^{is}) - \delta\psi(q e^{is})] = -\delta\Theta(q e^{is}) \frac{df}{ds}(q e^{is}),$$

après avoir posé

$$\delta f = \delta\varphi + i\delta\psi, \quad \delta\Omega = \delta\Theta + i\delta T.$$

En remplaçant dans l'égalité précédente $\delta\Theta(q e^{is})$ et $\delta\psi(q e^{is})$ par leurs valeurs tirées de (4.5) et (4.18) $\left[\delta\Theta(q e^{is}) = -\frac{dT(q e^{is})}{ds} \frac{\delta q}{q} \right]$, on obtient l'équation différentielle linéaire

$$\begin{aligned} \frac{d\beta(q e^{is})}{ds} - \frac{dT(q e^{is})}{ds} [\beta(q e^{is}) - \delta\psi_1] &= 0 \quad \text{pour } s_1 < s < \pi, \\ \frac{d\beta(q e^{is})}{ds} - \frac{dT(q e^{is})}{ds} [\beta(q e^{is}) + \delta\psi_2] &= 0 \quad \text{pour } 0 < s < s_1, \end{aligned}$$

qui définit $\beta(q e^{is})$; en intégrant, on trouve

$$(4.51) \quad \begin{cases} \beta(q e^{is}) = \delta\psi_1 - k_1 e^{T(q e^{is})} & \text{pour } s_1 < s < \pi, \\ \beta(q e^{is}) = -\delta\psi_2 - k_2 e^{T(q e^{is})} & \text{pour } 0 < s < s_1, \end{cases}$$

où k_1 et k_2 désignent des constantes réelles dont nous allons préciser les valeurs.

6° *Voisinages des points $Z = \mp q$.* — Portons dans (4.45) le développement (4.17) ainsi que les suivants :

$$\Omega(Z) = \Omega'(-q)(Z+q) + \dots, \quad \delta\Omega(Z) = \Omega'(-q)\delta q + \dots,$$

il vient

$$\gamma(Z) = \frac{2\delta\psi_1}{i\pi} \Omega'(-q) \int \log(Z+q) dZ + \text{const.} + \text{série entière en } (Z+q).$$

Cela montre que $\gamma(Z)$ est continue dans le voisinage du point $Z = -q$ (ou $Z = q$); en particulier, les valeurs de $\beta(X, Y)$ calculées le long de $Y = 0$ et le long de $|Z| = q$ tendront vers une limite

commune lorsqu'on atteint le point $Z = -q$, en suivant l'un ou l'autre de ces chemins. Or, d'une part, on a, d'après (4.51),

$$\lim_{s \rightarrow \pi} \beta(q e^{is}) = \delta\psi_1 - k_1$$

et, d'autre part, on trouve, en séparant le réel de l'imaginaire dans la formule (4.43), où l'on a posé au préalable $Z = X(-1 < X < q)$,

$$\lim_{X \rightarrow -q} \beta(X, 0) = -\delta\gamma_1.$$

Le symbole $\delta\gamma_1$ désigne la variation subie par le paramètre γ_1 défini par (1.33').

En égalant les deux expressions de $\beta(-q, 0)$ ainsi obtenues, on aboutit à la condition

$$k_1 = \delta\psi_1 + \delta\gamma_1$$

ou encore, en tenant compte de (1.33), (3.21) et (4.36),

$$(4.52) \quad k_1 = \Delta d_1 = \Delta_1.$$

D'une manière toute analogue, on trouverait

$$(4.52') \quad k_2 = -\Delta d_2.$$

7° *Voisinage du point $Z = Z_1$.* — Les fonctions $\Omega'(Z)$ et $\delta\Omega(Z)$ sont holomorphes pour $Z = Z_1$; par contre les fonctions $\frac{df(Z)}{dZ}$ et $\delta f(Z)$ possèdent en ce point un pôle simple [cf. (4.20)]; la formule (4.45) montre alors que $\gamma(Z)$ présente, pour $Z = Z_1$, une singularité logarithmique

$$(4.53) \quad \gamma(Z) = -\frac{i(\psi_1 + \psi_2)}{\pi} [\Omega'(Z_1) \delta Z_1 + \delta\Omega(Z_1)] \log(Z - Z_1) \\ + \text{fonction continue.}$$

La nature de la discontinuité de $\beta(q e^{is})$ pour $s = s_1$ [cf. (4.51), (4.52) et (4.52')] laissait d'ailleurs prévoir ce résultat.

Remarque. — Les conclusions précédentes doivent être légèrement modifiées lorsque l'une des parois, μ_2 pour fixer les idées, s'éloigne à l'infini. Dans ce cas (cf. §§ 14 et 27) le paramètre s_1 se réduit à zéro; Z_1 se confond avec q et le point $Z = q$ devient un point singulier de $\gamma(Z)$. Portons alors, dans (4.45), les développements (4.22),

(4.22') et les suivants :

$$\Omega(Z) = \Omega'(q)(Z - q) + \dots, \quad \delta \Omega(Z) = -\Omega'(q) \delta q + \dots$$

On trouvera ainsi, en désignant par a_1 et a_2 des constantes qu'il est inutile d'expliciter,

$$(4.53') \quad \gamma(Z) = \frac{a_1}{(Z - q)} + a_2 \log(Z - q) + \text{fonction continue.}$$

En résumé, les calculs précédents conduisent à la conclusion suivante : envisageons, dans le plan z , deux configurations voisines caractérisées respectivement au moyen des éléments $\Psi(l)$, α , β , d_1 , d_2 et $\Psi^*(l)$, α^* , β^* , d_1^* , d_2^* ; soient

$$x = x \left[l(s), \frac{1}{a+1}, \frac{1}{b-1} \right], \quad x^* = x^* \left[l^*(s), \frac{1}{a^*-1}, \frac{1}{b^*-1} \right],$$

les solutions voisines des problèmes du sillage correspondants, δx la partie principale de $x^* - x$, solution de l'équation (4.39) [cf. aussi (4.2)]; la donnée de ces éléments suffit à déterminer complètement la fonction analytique $\gamma(Z)$ et réciproquement, la donnée de $\Psi(l)$, α , β , d_1 , d_2 , $\Delta\Psi(l)$, $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$, Δd_1 , Δd_2 de x et de $\gamma(Z)$ détermine la solution δx de (4.39). La première partie de cette affirmation est évidente, puisque les seconds membres des équations de définition (4.43) et (4.45) de γ sont définis justement à partir de $\Psi(l)$, α , β , d_1 , d_2 , de leurs accroissements, de x et de δx . Réciproquement, donnons-nous $\Psi(l)$, α , β , d_1 , d_2 , leurs accroissements respectifs, l'élément $x = x \left[l(s), \frac{1}{a+1}, \frac{1}{b-1} \right]$ et la fonction $\gamma(Z)$. L'équation (4.46) permet d'exprimer $\delta l(s)$ sous forme de fonction linéaire de γ , $\frac{\delta a}{(a+1)^2}$ et $\frac{\delta b}{(b-1)^2}$. Portons alors la valeur de $\delta l(s)$ ainsi obtenue dans (4.51); le second membre de cette formule sera linéaire relativement à $\frac{\delta a}{(a+1)^2}$ et $\frac{\delta b}{(b-1)^2}$ (164); d'après (4.52) et (4.52') il en sera de même des constantes k_1 et k_2 .

(164) Rappelons, en effet, que les paramètres tels que $\delta\psi_1$, $\delta\psi_2$, qui figurent au second membre de (4.46), supposé explicité, s'expriment sous forme linéaire et homogène de $\frac{\delta a}{(a+1)^2}$ et $\frac{\delta b}{(b-1)^2}$.

Ainsi, les seconds membres des équations (4.51) sont des fonctions linéaires des différentielles $\frac{\delta a}{(a+1)^2}$ et $\frac{\delta b}{(b-1)^2}$ dont les coefficients sont connus; comme par hypothèse, $\beta(qe^{is})$ est donné, on obtient, en faisant $s = \pi$ dans la première et $s = 0$ dans la seconde des équations (4.51) un système résoluble de deux équations linéaires à deux inconnues $\frac{\delta a}{(a+1)^2}$ et $\frac{\delta b}{(b-1)^2}$. Les valeurs de ces deux différentielles ayant été ainsi déterminées en fonction de $\Psi(l)$, α , β , d_1 , d_2 , des accroissements respectifs de ces éléments et de x , la condition (4.46) fera connaître $\delta l(s)$ en fonction des mêmes éléments. La résolution de l'équation aux variations (4.39) équivaut donc bien à la détermination de la fonction analytique $\gamma(Z)$ de M. Weinstein.

Cela posé, résumons les conditions frontières imposées à la fonction $\gamma(Z)$ définie dans la demi-couronne d et holomorphe dans son intérieur ⁽¹⁶⁵⁾ :

1° $\gamma(e^{is})$ et $\frac{d\gamma(e^{is})}{ds}$ existent et vérifient une condition de Hölder; on a

$$\gamma(e^{is_0}) = 0;$$

d'après (4.46') la partie imaginaire $\beta(e^{is})$ de $\gamma(e^{is})$ est une donnée;

2° $\frac{d\gamma}{df}$, envisagée comme fonction de Z , possède un pôle simple aux points $Z = \pm 1$; dans le voisinage de chacun de ces points on peut écrire [cf. (4.48)] les développements respectifs

$$\frac{d\gamma}{df} = m \frac{Z-1}{Z+1} + m' + \varepsilon(Z-1), \quad \frac{d\gamma}{df} = n \frac{Z+1}{Z-1} + n' + \varepsilon(Z-1),$$

dans lesquels les symboles m , m' , n et n' désignent des constantes complexes données;

3° le long de l'axe réel $Y = 0$, $\beta(X, 0)$ vérifie la condition (4.50);

⁽¹⁶⁵⁾ Rappelons que nous considérerons comme donnés les éléments $\Psi(l)$, α , β , d_1 , d_2 et leurs accroissements respectifs; il en résulte que toutes les fonctionnelles explicites de ces éléments doivent être regardées comme connues. Nous regarderons aussi comme déterminé l'élément x qui est solution du problème du sillage posé pour la configuration donnée.

4° la fonction $\gamma(qe^{is})$ est analytique, régulière dans chacun des intervalles $0 < s < s_1$, $s_1 < s < \pi$, extrémités exclues; sur chacun d'eux elle est définie à une constante additive près, *a priori* inconnue (égale à $-\delta\psi_2$ sur le premier intervalle, à $\delta\psi_1$ sur le second); $\gamma(Z)$ est continue pour $Z = \pm q$ lorsque les distances d_1 et d_2 sont finies; $\gamma(Z)$ présente pour $Z = Z_1$ une singularité logarithmique tant que $Z_1 \neq \pm q$ [c'est-à-dire tant que $d_1, d_2 \neq \infty$, cf. (4.53)]; toutefois le coefficient du logarithme est une constante *a priori* inconnue. La formule (4.54) précise la singularité de $\gamma(Z)$ lorsque $d_2 = \infty$; enfin, le cas $d_1 = d_2 = \infty$ a été déjà traité par M. Leray.

Nous appellerons *problème de M. Weinstein* le problème qui consiste à déterminer la fonction $\gamma(Z)$ assujettie à vérifier l'ensemble des conditions précédentes.

Remarque. — Dans le cas du problème du sillage symétrique la fonction β , nulle le long de la portion de l'axe des Y intérieure à d , prendrait, par définition, des valeurs opposées aux points symétriques relativement à cet axe.

33. LEMME DE M. K. FRIEDRICHS. — Pour discuter le problème de M. Weinstein, nous aurons besoin d'un lemme très important, dû à M. Friedrichs, que nous allons faire connaître.

Envisageons la solution $x = x\left[l(s), \frac{1}{a+1}, \frac{1}{b-1}\right]$ d'un problème du sillage posé pour les données $\Psi(l), \alpha, \beta, d_1$ et d_2 ; nous dirons que cette solution vérifie l'hypothèse de M. Friedrichs lorsque, dans la couronne d correspondante, on peut définir une fonction $B(X, Y)$ assujettie à vérifier les conditions suivantes :

- 1° $B(X, Y)$ est positive dans son domaine de définition;
- 2° $B(X, Y)$ possède dans son domaine de définition les dérivées partielles de premier ordre höldériennes dans d et le long de ses frontières;
- 3° $B(X, Y)$ est surharmonique dans son domaine de définition; cela veut dire qu'en tout point intérieur de ce domaine on a

$$\frac{\partial^2 B}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial Y^2} \leq 0;$$

4° Le long des segments $1 \leq X \leq -q$ et $q \leq X \leq 1$ de l'axe $Y = 0$, on a

$$\frac{1}{B} \frac{dB}{dn} = \frac{dT}{dn},$$

relation où $T(X, Y)$ est la fonction de M. Villat construite à partir des éléments $\Psi(l), l(s), a$ et b .

Remarque. — Dans le cas du problème symétrique du sillage le domaine de définition de $B(X, Y)$ se réduit à la moitié $X \geq 0, Y \geq 0$ de la demi-couronne d ; $B(X, Y)$ vérifiera la relation (4.50) le long du segment $q \leq X \leq 1$ seulement.

Nous allons indiquer les catégories des profils qui vérifient l'hypothèse de M. Friedrichs. Pour cela notons que la fonction $\beta(X, Y)$ de M. Weinstein, correspondante à une déformation quelconque de la configuration des éléments rigides, satisfait à toutes les conditions imposées à $B(X, Y)$ à l'exception de la première ⁽¹⁶⁶⁾. Dès lors, on pourra prendre $B = \beta$ toutes les fois que l'on saura définir une variation des données de manière que la fonction $\beta(X, Y)$ correspondante soit positive dans son domaine de définition et régulière pour $Z = Z_1, Z = \pm q$. Or, faisons en particulier, subir à l'ensemble obstacle-parois une translation $\Delta z = \text{const}$. Il est clair que les équations aux variations des équations de M. Villat correspondantes admettent les solutions évidentes

$$\delta \Omega(Z) = 0, \quad \delta f(Z) = 0.$$

D'après (4.45) la fonction $\gamma(Z)$ correspondante sera égale à $e^{-i\Omega(Z)}$ à un facteur constant près; ce dernier se détermine au moyen de (4.46); on a donc

$$(4.54) \quad \gamma(Z) = -e^{-i\Omega(Z)} \Delta z.$$

La fonction $\gamma(Z)$ ainsi définie sera régulière pour $Z = Z_1$ et pour $Z = \pm q$.

Cela posé, envisageons le cas du problème symétrique; d'après ce que nous avons vu au paragraphe 28, il existe au moins une solution

⁽¹⁶⁶⁾ Rappelons, toutefois, que β est, en général, discontinue au point $Z = Z_1$, où B doit être régulière et que les dérivées de β ne sont pas, en général, régulières pour $Z = \pm q$.

symétrique; celle-ci vérifie l'inégalité

$$-\pi \leq \Theta(X, Y) \leq 0 \quad \text{pour} \quad \begin{cases} X \geq 0, \\ Y \geq 0. \end{cases}$$

Donnons alors à Δz une valeur réelle et négative; (4.54) montre que

$$\beta(X, Y) = e^T \sin \Theta \Delta z \geq 0 \quad \text{pour} \quad \begin{cases} X \geq 0, \\ Y \geq 0. \end{cases}$$

Ainsi les solutions du problème symétrique du sillage vérifient toujours l'hypothèse de Friedrichs.

Passons à l'examen du cas général. D'après les résultats du précédent paragraphe, $\gamma(Z)$ est continue dans le voisinage du point $Z = e^{i\alpha_0}$ et nulle en ce point; c'est ce qu'on vérifie directement sur (4.54) en remarquant que $T(e^{i\alpha_0}) = -\infty$. Toutefois la fonction $\arg \gamma(Z)$ subit en ce point une discontinuité égale à π ; elle varie entre les valeurs extrêmes

$$\arg \Delta z - \Psi[l(s_0)] \quad \text{et} \quad \arg \Delta z - \Psi[l(s_0)] + \pi.$$

Il s'ensuit que, dans le voisinage de $Z = Z_0$, $\arg \gamma(Z)$ ne pourra être compris entre 0 et π que si $\arg \Delta z = \Psi[l(s_0)]$; pour que β soit positive dans d , il sera donc nécessaire de prendre

$$\Delta z = -|\Delta z| e^{i\Psi[l(s_0)]},$$

ce qui revient à faire subir à l'ensemble des éléments rigides une translation parallèle à la tangente à l'obstacle au point de bifurcation. D'après (4.54), on a alors

$$(4.55) \quad \beta(X, Y) = e^T |\Delta z| \sin \{ \Psi[l(s_0)] - \Theta(X, Y) \}.$$

La fonction $\beta(X, Y)$ ne peut donc être positive dans d que moyennant la double inégalité

$$0 \leq \Psi[l(s_0)] - \Theta(X, Y) \leq \pi,$$

qui sera satisfaite si

$$(4.56) \quad 0 \leq \Psi[l(s_0)] - \Phi(s) \leq \pi,$$

puisque $\Theta(X, Y)$ atteint ses maximum et minimum sur $|Z| = 1$. Or, les inégalités (4.56) sont sûrement satisfaites si l'obstacle vérifie la

condition suivante :

$$(4.57) \quad \Psi[l(s_0)] - \Psi[l(s)] \geq 0 \quad \text{pour } s - s_0 \geq 0$$

(dans laquelle les signes supérieurs et inférieurs se correspondent respectivement), car $\Psi[l(s)]$ est compris entre 0 et π .

Dans ce cas on peut donc prendre encore $B(X, Y) = \beta(X, Y)$. Une difficulté se présente toutefois. Le cas symétrique excepté, la position du point de bifurcation sur l'obstacle est *a priori* inconnue; il sera donc impossible de décider, en général, si l'obstacle donné vérifie ou non la condition précédente; mais celle-ci est sûrement satisfaite lorsque $\Psi(l)$ est une fonction décroissante de l , c'est-à-dire lorsque l'obstacle est convexe vers le courant. Nous pouvons donc énoncer : *les obstacles convexes vérifient l'hypothèse de Friedrichs.*

Remarque. — Les inégalités (4.55) sont, au contraire, toujours en défaut lorsque

$$(4.57') \quad \Psi[l(s_0)] - \Psi[l(s)] \geq 0 \quad \text{pour } s - s_0 \leq 0.$$

Dans ce cas, en effet, on a

$$\begin{aligned} \Psi[l(s_0)] - \Phi[l(s)] &< 0 && \text{pour } s_0 \leq s \leq \pi, \\ \Psi[l(s_0)] - \Phi(s) = \Psi[l(s_0)] - \Psi[l(s)] + \pi &> \pi && \text{pour } 0 \leq s \leq s_0, \end{aligned}$$

Cela montre que la fonction β est négative le long de l'arc de $|Z| = 1$ appartenant à d . De plus, β change sûrement de signe à l'intérieur de d , puisque $\beta(\pm q, 0)$ est positive d'après (4.55) et l'égalité $\Theta(\pm q, 0) = 0$ alors que $\gamma(Z)$ est, d'après (4.54) holomorphe dans le voisinage des points $Z = \pm q$. En particulier, la condition (4.57') est sûrement vérifiée lorsque l'obstacle est concave vers le courant; dans ce cas l'hypothèse de Friedrichs n'est pas satisfaite.

Donnons-nous alors une configuration des éléments rigides vérifiant l'hypothèse de Friedrichs; considérons une solution $\beta(X, Y)$ du problème de M. Weinstein correspondant à une déformation quelconque des données [nous excluons, toutefois, le cas où β serait proportionnelle à la fonction $B(X, Y)$ dont nous avons postulé l'existence]; nous appellerons Δ tout domaine d'un seul tenant en lesquels les lignes d'équation $\beta(X, Y) = 0$ décomposent la demi-couronne d ;

d'après cela, la frontière Δ' d'un domaine Δ pourra comprendre, outre des lignes $\beta = 0$, des portions de la frontière de d . Cela étant, on a le résultat suivant :

LEMME DE M. FRIEDRICHs. — *Toute frontière Δ' qui ne comprend aucun arc des cercles $|Z| = 1$ et $|Z| = q$ le long duquel β serait différente de zéro, contient nécessairement le point $Z = Z_1$; dans ce cas, $\gamma(Z)$ ne peut pas être holomorphe en ce point ⁽¹⁶⁷⁾.*

La démonstration repose sur l'inégalité

$$(4.58) \quad I = \int_C \left[\beta \frac{d\beta}{dn} - \frac{\beta^2}{\beta_0} \frac{d\beta_0}{dn} \right] ds \geq 0,$$

dans laquelle C désigne un contour d'intégration fermé et rectifiable, β une fonction harmonique *quelconque*, régulière à l'intérieur de C et dérivable le long de C , β_0 une fonction surharmonique et positive quelconque définie à l'intérieur de C ; le quotient $\frac{\beta^2}{\beta_0}$ est supposé borné dans C ; l'égalité ne peut avoir lieu que si β et β_0 sont proportionnels. Pour établir (4.58), il suffit de transformer le premier membre en l'intégrale double étendue à l'intérieur de C ; moyennant les hypothèses faites, cette transformation sera légitime; il vient

$$I = \iint \left[\left(\frac{\partial \beta}{\partial X} - \frac{\beta}{\beta_0} \frac{\partial \beta_0}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial Y} - \frac{\beta}{\beta_0} \frac{\partial \beta_0}{\partial Y} \right)^2 - \frac{\beta^2}{\beta_0} \left(\frac{\partial^2 \beta_0}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \beta_0}{\partial Y^2} \right) \right] dX dY.$$

Les deux premiers termes du crochet qui figurent sous le signe \iint sont manifestement positifs; ils ne s'annulent que si β et β_0 sont proportionnels; enfin le terme

$$- \frac{\beta^2}{\beta_0} \left(\frac{\partial^2 \beta_0}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \beta_0}{\partial Y^2} \right),$$

est positif puisque β_0 est surharmonique et positive; ce terme est nul

⁽¹⁶⁷⁾ Cela veut dire, lorsque les parois μ_1 et μ_2 sont toutes les deux à distance finie et lorsque les hypothèses de l'énoncé sont vérifiées, que la différentielle $\Omega'(Z_1) \partial Z_1 + \partial \Omega'(Z_1)$ ne peut être nulle [*cf.* l'équation (4.53)]; si μ_2 est rejeté à l'infini, les constantes a_1 et a_2 ne peuvent pas être nulles toutes les deux [*cf.* (4.53')].

si β est proportionnelle à β_0 , c'est-à-dire si β_0 est une fonction harmonique; cela démontre l'inégalité (4.58). Ceci étant, raisonnons par l'absurde et supposons que le lemme de Friedrichs soit en défaut; il existerait alors un domaine Δ le long de la frontière Δ' duquel la fonction β de M. Weinstein serait régulière et nulle — à moins que Δ' ne contienne des portions de l'axe $Y = 0$. Soit la fonction B correspondante à la configuration donnée dont nous avons admis l'existence; comme les fonctions $B \pm \beta$ sont surharmoniques et comme, par hypothèse, β ne change pas de signe dans Δ , nous pouvons poser

$$\beta_0 = B + \beta \quad \text{si } \beta > 0 \text{ dans } \Delta$$

ou

$$\beta_0 = B - \beta \quad \text{si } \beta < 0 \text{ dans } \Delta.$$

Grâce à ce choix de β_0 , on a

$$\left| \frac{\beta}{\beta_0} \right| \leq 1.$$

la formule (4.58) s'applique donc au domaine Δ puisque les fonctions β et $\frac{\beta^2}{\beta_0}$ sont régulières dans Δ et bornées sur Δ' en même temps que les dérivées $\frac{d\beta}{dn}$ et $\frac{d\beta_0}{dn}$. Dans ces conditions la contribution au premier membre de (4.58) des portions de Δ' le long desquelles $\beta = 0$ est nulle. Il en est de même du restant éventuel de la frontière Δ' , constituée par des segments de l'axe des X ; en effet, nous avons, en chaque point de cet axe,

$$\frac{dB}{dn} = \frac{d\beta}{dn} = \frac{dB \pm d\beta}{B \pm \beta} = \frac{d\beta_0}{dn}$$

[cf. l'équation (4.50) et la 4^e condition imposée à B]; cela montre que l'élément différentiel de (4.58) est nul le long de $Y = 0$.

Ainsi l'intégrale (4.58) est nulle lorsqu'on prend pour contour d'intégration C une frontière Δ' de l'espèce visée par l'énoncé. L'une des deux conséquences suivantes en résulte : 1^o ou bien β et β_0 (c'est-à-dire β et B) sont proportionnels; 2^o ou bien Δ' atteint le point $Z = Z_1$,

où β ne doit pas être régulière, auquel cas l'emploi de la formule (4.58) devient illégitime ⁽¹⁶⁸⁾. C. Q. F. D.

34. UNE PROPRIÉTÉ DES CONFIGURATIONS VÉRIFIANT L'HYPOTHÈSE DE M. FRIEDRICH. — Considérons une configuration vérifiant l'hypothèse de Friedrichs. Modifions-la infiniment peu en laissant l'obstacle invariable de forme et de position (ce qui se traduit par les conditions : $\Delta\psi(l) \equiv 0$, $\Delta z(l) \equiv 0$, $\Delta\alpha = \Delta\beta = 0$) et en faisant subir aux parois (supposées d'abord situées à des distances finies) les translations Δd_1 et Δd_2 dont l'une au moins n'est pas nulle. Nous nous proposons d'étudier certaines propriétés de la solution β du problème correspondant de Weinstein :

- 1° D'après (4.46') $\beta(X, Y) = 0$ le long de $|Z| = 1$.
- 2° D'après (4.48) la dérivée $\frac{d\gamma}{df}$ est nulle pour $Z = \pm 1$.
- 3° D'après (4.51) et (4.52), on a

$$\begin{aligned} \beta(q e^{is}) &= \partial\psi_1 - \Delta d_1 e^{T(qe^{is})} && \text{pour } s_1 \leq s \leq \pi, \\ \beta(q e^{is}) &= -\partial\psi_2 + \Delta d_2 e^{T(qe^{is})} && \text{pour } 0 \leq s \leq s_1. \end{aligned}$$

Les alinéas 1° et 2° prouvent que les points $Z = \pm 1$ sont les origines des lignes d'équations $\beta(X, Y) = \beta(1, 0) = 0$ intérieurs au domaine d .

En effet, la correspondance $z = z(f)$ permet de définir la fonction $\gamma(f)$ dans le domaine F (cf. la figure 2) qui possède dans le voisinage du point $f = \varphi_2$ une tangente continue. L'emploi du théorème de M. Magnier devient alors légitime; des relations

$$\gamma(\varphi_1) = \left(\frac{d\gamma}{df} \right)_{f=\varphi_1} = 0,$$

on peut donc conclure que $\beta(\varphi, \psi)$ prend des valeurs de signes opposés dans le voisinage $\psi \leq 0$ du point $f = \varphi_2$; cela veut dire qu'une ligne d'équation $\beta = 0$ est issue de ce point vers l'intérieur de F . Il en résulte que le point $Z = 1$ (image de φ_2) est commun aux frontières

⁽¹⁶⁸⁾ Dans le cas du problème symétrique les raisonnements sont les mêmes, sauf qu'il y a lieu de remplacer le domaine d par la demi-couronne circulaire $|Z| = 1$, $X \geq 0$, $Y \geq 0$; β est nulle le long du segment $(q, 1)$ de OY ; on a, de plus, $Z_1 = iq$.

de deux domaines Δ définis au paragraphe 33; cela justifie notre assertion. Aucune des lignes $\beta = 0$ issues de $Z = \pm 1$ ne peut aboutir à un point $Z = e^{i\theta}$; sinon elle formerait avec l'arc correspondant de ce cercle $|Z| = 1$ un domaine sur la frontière duquel la fonction harmonique β (régulière à l'intérieur) serait nulle et continue, donc nulle dans tout le domaine d ; or ceci est contredit par les équations (4.51) et (4.52); $\beta(qe^{i\theta})$ est variable sur $|Z| = q$ puisque les variations Δd_1 et Δd_2 ne sont pas nulles toutes les deux.

D'autre part, en vertu du lemme Friedrichs, aucune des lignes $\beta = 0$ issues de $Z = \pm 1$ ne peut atteindre l'axe des X ; elles ne peuvent donc aboutir qu'à des points du cercle $|Z| = q$. Cela étant, donnons-nous une configuration symétrique et déplaçons les parois, sans modifier toutefois l'obstacle, de manière que $\Delta d_1 = \Delta d_2$. Dans ce cas l'hypothèse de Friedrichs est satisfaite; de plus les conditions frontières imposées à β seront symétriques par rapport à l'axe $Y = 0$ (si l'on se borne aux solutions symétriques dont nous avons établi l'existence); on aura, en particulier : $\partial\psi_1 = \partial\psi_2$; $Z_1 = iq$. Les lignes $\beta = 0$, issues des points $Z = \pm 1$ ne peuvent aboutir au point $Z = iq$ ⁽¹⁶⁹⁾; elles atteignent donc les points $Z = qe^{i\theta}$ et $Z = qe^{i(\pi-\theta)}$ où β est régulière; cela exige que la fonction β y soit nulle, c'est-à-dire que l'on ait en ce point (cf. l'alinéa 3°)

$$\partial\psi_1 = \partial\psi_2 = \Delta d_1 e^{T(qe^{i\theta})} = \Delta d_2 e^{T(qe^{i\theta})}.$$

Cela montre que les accroissements $\partial\psi_1$ et Δd_1 sont de même signe. Il y a plus; d'après les théorèmes I et II du paragraphe 17 $T(qe^{i\theta})$ est négatif; on en tire

$$|\partial\psi_1| < |\Delta d_1|.$$

Or, nous avons vu que

$$\Delta d_1 = \partial\psi_1 + \delta y_1$$

[cf. la démonstration de la formule (4.52)]. Nous pouvons donc énoncer :

Si l'on déforme une configuration symétrique de manière que

⁽¹⁶⁹⁾ En ce point, en effet, la fonction γ présente une singularité logarithmique [cf. (4.53)]: d'après le théorème de M. Magnier, $Z = iq$ peut être l'origine d'une seule ligne d'équation $\beta = 0$ au plus.

l'obstacle demeure invariable de forme et de position alors que les parois μ_1 et μ_2 subissent des translations égales et de sens contraires ($\Delta d_1 = \Delta d_2$), les accroissements correspondants des paramètres $\delta\psi_1$ et $\delta\gamma_1$ (donc des paramètres $\delta\psi_2$ et $\delta\gamma_2$) sont du signe de Δd_1 (de Δd_2).

Envisageons maintenant une configuration dissymétrique vérifiant l'hypothèse de Friedrichs; modifions-la infiniment peu de manière que

$$\Delta\Psi[l(s)] \equiv 0; \quad \Delta z(l) \equiv 0; \quad \Delta\alpha = \Delta\beta = 0; \quad \Delta d_1 = 0; \quad \Delta d_2 \neq 0.$$

Cela revient à laisser l'obstacle invariable de forme et de position, de laisser la paroi μ_1 fixe et à imprimer à la paroi μ_2 une translation Δd_2 dans le sens Oy . Étudions la solution β du problème de M. Weinstein correspondant. Seules les conditions frontières le long de $|Z| = q$ changent par rapport au précédent alinéa; nous avons en l'espèce

$$\begin{aligned} \beta(qe^{is}) &= \delta\psi_1 && \text{pour } s_1 \leq s \leq \pi \\ \beta(qe^{is}) &= -\delta\psi_2 + \Delta d_2 e^{T(qe^{is})} && \text{pour } 0 \leq s \leq s_1. \end{aligned}$$

Chacune des lignes d'équation $\beta = 0$, issues des points $Z = \pm 1$, aboutit nécessairement à un point $Z = qe^{i\varepsilon}$; soient ε_1 et ε_2 les arguments des extrémités de ces lignes. Les raisonnements développés à propos du cas symétrique prouvent que les quantités ε_1 et ε_2 ne peuvent être égales et que l'une d'elle, ε_1 , par exemple, est égale à s_1 . Je dis qu'alors ε_2 est nécessairement inférieur à s_1 . Sinon, en effet, la fonction β serait continue pour $Z = qe^{i\varepsilon_2}$, $\varepsilon_2 \neq s_1$, et par suite nulle en ce point; cela entraîne, eu égard aux conditions frontières imposées à β et à l'hypothèse $s_1 < \varepsilon_2$,

$$\delta\psi_1 = 0.$$

La fonction β serait donc nulle sur tout l'arc $\varepsilon_2 \leq s \leq \pi$ de $|Z| = q$; d'après le lemme de Friedrichs, cela exige que le domaine Δ attenant à cet arc, atteigne le point $Z = Z_1$; comme on ne peut avoir $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, notre assertion se trouve justifiée.

Il suit de là que $\beta(qe^{is})$ s'annule dans l'intervalle $0 \leq s \leq s_1$; cela veut

dire que $\partial\psi_2 - \Delta d_2 e^{T(qe^{is})}$ possède un zéro dans l'intervalle considéré. Le raisonnement s'achève alors comme au précédent alinéa et nous pouvons conclure :

Si l'on déforme une configuration vérifiant l'hypothèse de Friedrichs de manière que l'obstacle et l'une des parois demeurent invariables de forme et de position alors que la deuxième paroi, μ_2 (ou μ_1), pour fixer les idées, subit une translation égale à Δd_2 (ou à Δd_1), les accroissements correspondants des paramètres $\partial\psi_2$ et ∂y_2 (ou $\partial\psi_1$ et ∂y_1) sont du signe de Δd_2 .

Cet énoncé s'applique, en particulier, au cas de l'obstacle convexe placé dans un canal de largeur finie ⁽¹⁷⁰⁾.

Ne supposons plus que la configuration soit symétrique, mais admettons toujours qu'elle vérifie l'hypothèse de Friedrichs; je dis que si l'obstacle demeure invariable de forme et de position, les égalités $\Delta d_1 = \Delta d_2 = 0$ entraînent $\beta \equiv 0$ (donc, en particulier, $\partial\psi_1 = 0$ et $\partial\psi_2 = 0$).

⁽¹⁷⁰⁾ Ce théorème a déjà été établi dans les cas particuliers suivants : obstacle symétrique concave vers le courant (M. Weinstein); obstacle circulaire convexe (M. Jacob). Les méthodes de ces auteurs sont sans rapport avec celles du texte.

Voici comment on adapte le raisonnement au cas du courant de largeur infinie. Considérons un obstacle vérifiant l'hypothèse de Friedrichs placé dans un courant limité par une seule paroi plane μ_1 , par exemple, μ_2 étant supposée rejetée à l'infini. Laissons l'obstacle invariable de forme et de position et imprimons à μ_1 une translation Δd_1 ; nous allons étudier la solution du problème de Weinstein correspondant. Dans ce cas, $\partial\psi_1 - \Delta d_1 e^{T(qe^{is})} = \beta(qe^{is})$ pour $0 \leq s \leq \pi$; le point Z_1 est confondu avec $Z = q$ et la fonction $\gamma(Z)$ peut y posséder, outre une singularité logarithmique, un pôle de premier ordre [cf. (4.53')]. D'après le théorème de M. Magnier une seule des lignes d'équation $\beta = 0$, issue de $Z = \pm 1$, peut atteindre $Z = q$; d'après le lemme de Friedrichs, une ligne $\beta = 0$ doit aboutir nécessairement à un point $|Z| = q$ en lequel β soit continue. Le raisonnement s'achève, dès lors, comme dans le texte; il prouve en outre que $\beta \equiv 0$ si $\Delta d_1 = 0$ (cf. la démonstration de ce fait dans le cas où la distance d_2 est finie). Les résultats ci-dessus s'appliquent, en particulier, au cas d'un obstacle convexe vers le courant, placé en fluide indéfini limité par une seule paroi plane.

D'après l'alinéa 3°, en effet, nous avons, dans le cas actuel,

$$(4.59) \quad \beta(qe^{is}) = \begin{cases} \delta\psi_1 & \text{pour } s_1 < s \leq \pi, \\ -\delta\psi_2 & \text{pour } 0 \leq s < s_1. \end{cases}$$

Nous noterons encore $Z = qe^{i\varepsilon_1}$ et $Z = qe^{i\varepsilon_2}$ les affixes des points auxquels aboutissent les lignes d'équation $\beta = 0$ issues de $Z = \pm 1$. Si l'on a $s_1 \neq \varepsilon_1$, la fonction β est continue pour $Z = qe^{i\varepsilon_1}$; elle est donc nulle en ce point puisqu'une ligne $\beta = 0$ y aboutit; d'après (4.59) cela exige que l'un, au moins, des accroissements $\delta\psi_1$ ou $\delta\psi_2$ soit nul. Ainsi, β est nulle le long de l'un, au moins, des arcs $0 \leq s < s_1$ ou $s_1 < s \leq \pi$ du cercle $|Z| = q$; d'après le lemme de Friedrichs, le domaine Δ , dont cet arc fait partie, doit atteindre le point $Z = Z_1$; cela entraîne $\varepsilon_1 = s_1$. D'une manière toute semblable on établirait l'égalité $\varepsilon_2 = s_1$; cela montre que le point $Z = Z_1$ est l'origine de deux lignes d'équation $\beta = 0$. Or, le théorème de M. Magnier prouve qu'une telle disposition des lignes $\beta = 0$ dans le voisinage de $Z = Z_1$ est incompatible avec l'existence d'une singularité logarithmique en ce point; [cf. (4.43)]. La contradiction à laquelle nous venons d'aboutir ne peut être levée que si $\beta \equiv 0$. C. Q. F. D.

Ainsi, le problème de M. Weinstein n'admet pas de solutions autres que $\beta \equiv 0$ lorsqu'il est posé pour une configuration vérifiant l'hypothèse de Friedrichs et lorsque les variations des données $\Delta\Psi(l)$, $\Delta z(l)$, $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$, $\Delta\left(\frac{1}{d_1}\right)$ et $\Delta\left(\frac{1}{d_2}\right)$ sont identiquement nulles. D'après les résultats du paragraphe 32 cela revient à dire que l'équation aux variations (4.41) admet la seule solution $\delta x = 0$; par suite l'équation (4.39) possède une seule solution lorsqu'elle est posée pour un obstacle vérifiant l'hypothèse de Friedrichs.

Ce théorème, fondamental dans notre discussion d'unicité, constitue une extension d'un résultat analogue obtenu par M. Leray dans le cas du fluide illimité ⁽¹⁷¹⁾; d'après ce que nous avons vu au

⁽¹⁷¹⁾ Signalons, toutefois, que ce théorème avait déjà été établi par M. Weinstein dans le cas de l'obstacle symétrique concave et de courbure suffisamment faible et étendu depuis aux obstacles concaves symétriques de plus en plus généraux par MM. Hamel, Weyl et Friedrichs.

paragraphe 31, il permet d'appliquer les critères d'unicité de MM. Leray et Schauder à l'équation (4.39). Il nous reste maintenant, pour pouvoir conclure, à préciser les indices topologiques des solutions éventuelles de celle-ci.

35. DÉTERMINATION DE L'INDICE TOPOLOGIQUE DES SOLUTIONS DE L'ÉQUATION AUX VARIATIONS DU PROBLÈME DU SILLAGE. THÉORÈMES D'UNICITÉ. — L'étude de l'indice de l'équation (4.39) que nous allons entreprendre repose sur la propriété d'invariance qu'exprime l'énoncé suivant :

Reprenons l'équation (3.34')

$$x = F(x, k)$$

et supposons encore qu'elle satisfait à toutes les conditions énumérées au début du paragraphe 28; supposons maintenant, en plus, que pour toute valeur de k , appartenant à l'intervalle $0 \leq k \leq 1$, cette équation admette l'unique solution $x = x(k)$; dans ce cas, l'indice topologique $i[x - F(x, k), x(k)]$ de celle-ci est indépendant de k . Dès lors, admettons que l'on ait réussi à construire une équation

$$(4.60) \quad \delta x = d\mathcal{F}(\delta x, x, k),$$

vérifiant toutes les hypothèses de l'énoncé précédent et qui se réduise, pour $k=1$, à l'équation (4.39) ⁽¹⁷²⁾ et pour $k=0$ à une équation dont la solution ait un indice connu; celui-ci sera alors égal, d'après le théorème d'invariance, à l'indice de la solution de (4.39).

Voici comment nous procéderons pour construire l'équation (4.60). Étant donné une configuration $\Psi(l)$, α , β , d_1 et d_2 , envisageons la solution $x = x\left[l(s), \frac{1}{a+1}, \frac{1}{b-1}\right]$ du problème du sillage correspondant, $\Phi(s)$ et $\Omega(Z)$ les fonctions de M. Villat et de M. Levi-Civita correspondantes. Nous associons à cette configuration un sillage

⁽¹⁷²⁾ L'équation (4.39) est supposée correspondre à une configuration assujettie à vérifier l'hypothèse de Friedrichs; d'après les résultats du paragraphe précédent, ce fait assure l'unicité de la solution de (4.39) et par suite l'existence de l'indice topologique de celle-ci.

auxiliaire (dont les éléments seront marqués de l'indice 1) tel que

$$a = a^1, \quad b = b^1, \quad s_0 = s_0^1.$$

Pour vérifier cette dernière condition, il suffira de prendre, et c'est le choix que nous ferons, un obstacle rectiligne d'inclinaison $\Psi^1(l^1) = s_0$ [cf. l'équation (1.24)]; les paramètres ψ_1^1 et ψ_2^1 pourront être quelconques; on peut prendre $\psi_1^1 = \psi_1$; $\psi_2^1 = \psi_2$. Cela étant, considérons la configuration $C(k)$ dépendant du paramètre k ($0 \leq k \leq 1$), construite à partir des éléments de M. Villat

$$\Phi(s, k) = k\Phi(s) + (1-k)\Phi^1(s), \quad a, \quad b, \quad \psi_1 \quad \text{et} \quad \psi_2$$

et qui se réduit pour $k=1$ à la configuration donnée $C(1)$ et pour $k=0$ à la configuration auxiliaire $C(0)$ que nous avons associée à $C(1)$. D'après les formules (1.6) et (1.15) on a

$$(4.61) \quad \Omega(Z, k) = k\Omega(Z) + (1-k)\Omega^1(Z).$$

Je dis maintenant que si $C(0)$ et $C(1)$ vérifient toutes les deux l'hypothèse de Friedrichs ⁽¹⁷³⁾, $C(k)$ la vérifie aussi pour toute valeur de k , $0 \leq k \leq 1$. Soient, en effet, $B_1(Z)$ et $B(Z)$ les fonctions de Friedrichs de $C(0)$ et de $C(1)$ respectivement; nous allons vérifier que l'on peut prendre pour la fonction $B(Z, k)$ de $C(k)$

$$B(Z, k) = B^k(Z) B_1^{(1-k)}(Z).$$

Il est clair d'abord que la fonction $B(Z, k)$ est réelle et positive.

Nous allons établir que cette fonction est surharmonique. Pour cela, observons que les expressions

$$\frac{1}{[B(Z)]^a} \quad \text{et} \quad \frac{1}{[B_1(Z)]^a} \quad (a > 0),$$

ont toujours un sens, puisque $B(Z)$ et $B_1(Z)$ ne s'annulent pas, par hypothèse, dans le domaine d ; il en résulte que les dérivées partielles de deux premiers ordres de $B(Z, k)$ existent et sont continues à l'intérieur de d , puisque les dérivées de $B(Z)$ et $B_1(Z)$ le sont. Ceci posé,

⁽¹⁷³⁾ Il en est bien ainsi en ce qui concerne $C(0)$ si l'on choisit, comme nous l'avons fait, pour obstacle correspondant un profil rectiligne.

un calcul facile conduit à la relation

$$\begin{aligned} \Delta B(Z, k) = & k B^{k-1} B_1^{1-k} \Delta B + (1-k) B^k B_1^{-k} \Delta B_1 + k(k-1) B^{k-2} B_1^{-(1+k)} \\ & \times \left\{ B_1^2 \left[\left(\frac{\partial B}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial Y} \right)^2 \right] \right. \\ & \left. - 2 B B_1 \left(\frac{\partial B}{\partial X} \frac{\partial B_1}{\partial X} + \frac{\partial B}{\partial Y} \frac{\partial B_1}{\partial Y} \right) + B^2 \left[\left(\frac{\partial B_1}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial B_1}{\partial Y} \right)^2 \right] \right\}. \end{aligned}$$

Les deux premiers termes du second membre sont évidemment négatifs, puisque, par hypothèse, les fonctions B et B_1 sont surharmoniques. D'autre part, le facteur $k(k-1)$ n'est pas positif, puisque

$$0 \leq k \leq 1.$$

Tout revient, dès lors, à prouver que l'accolade qui figure au second membre est positive; or, cette accolade est une forme quadratique en B, B_1 ; son discriminant, égal à

$$-\left(\frac{\partial B}{\partial X} \frac{\partial B_1}{\partial Y} - \frac{\partial B}{\partial Y} \frac{\partial B_1}{\partial X} \right)^2,$$

est négatif; la forme est donc définie négative tant que les fonctions B et B_1 ne se réduisent pas à des constantes. Cela montre que la fonction $B(Z, k)$ est bien surharmonique.

Enfin on a, en dérivant logarithmiquement l'équation de définition de $B(Z, k)$ (le long des segments $-1 \leq X \leq -q$ et $q \leq X \leq 1$ de l'axe $Y = 0$) et en tenant compte de (4.61),

$$\frac{1}{B(Z, k)} \frac{dB(Z, k)}{dn} = k \frac{1}{B} \frac{dB}{dn} + (1-k) \frac{1}{B_1} \frac{dB_1}{dn} = k \frac{d\Gamma}{dn} + (1-k) \frac{d\Gamma_1}{dn} = \frac{dT(X, Y, k)}{dn}.$$

Cela achève de justifier notre assertion.

Dans ces conditions, le résultat final du précédent paragraphe s'applique à $C(k)$; nous pouvons donc affirmer que l'équation aux variations (4.39), posée relativement à la configuration $C(k)$, possède une seule solution, quel que soit k , $0 \leq k \leq 1$; cette équation, dépendant continûment du paramètre k , est du type (4.60); par suite, l'indice de la solution de (4.39) supposée écrite pour $C(1)$ est égal à l'indice de la solution de cette équation supposée écrite pour $C(0)$, c'est-à-dire pour un obstacle rectiligne placé dans un canal à bords rectilignes. Or,

dans ce cas, la première équation du système (4.38'), équivalente à l'équation unique (4.39), est indépendante de $\partial l(s)$ (cf. § 51); l'indice cherché ne change pas si l'on déforme la configuration de manière à éloigner à l'infini les deux parois μ_1 et μ_2 ; à la limite, en fluide illimité, l'équation (4.39) ne dépendra pas de ∂x , ce qui veut dire que l'indice de la solution de l'équation (4.39) posée pour la configuration donnée est aussi égal à $+1$. Nous pouvons conclure :

L'indice topologique d'une solution de l'équation aux variations (4.39) supposée écrite pour une configuration vérifiant l'hypothèse de Friedrichs est égal à $+1$.

Les résultats rappelés au paragraphe 52 permettent d'en déduire successivement les énoncés suivants :

L'indice topologique d'une solution de l'équation (3.37), c'est-à-dire de l'équation du problème du sillage, posée pour une configuration vérifiant l'hypothèse de Friedrichs est égal à $+1$.

Le problème du sillage posé pour une configuration vérifiant l'hypothèse de Friedrichs possède une seule solution.

A l'heure actuelle, on connaît deux espèces de configurations auxquelles s'appliquent les énoncés qui précèdent : les configurations symétriques (obstacle symétrique placé symétriquement dans un canal) et les configurations (symétriques ou dissymétriques) avec obstacle convexe vers le courant (y compris le cas du fluide limité par une seule paroi plane).

56. PROBLÈME DE M. WEINSTEIN POSÉ POUR UN SILLAGE EN PROUE. — Considérons la solution d'un problème du sillage. Nous nous proposons de discuter le problème de M. Weinstein correspondant au cas suivant :

- 1° La configuration donnée vérifie l'hypothèse de Friedrichs.
- 2° L'une des lignes libres, la ligne libre λ_2 , pour fixer les idées, présente à l'extrémité inférieure de l'obstacle un détachement en proue.

3° La déformation de la configuration est caractérisée par les données suivantes :

$$\Delta \Psi(l) = 0, \quad \Delta z(l) = 0, \quad \Delta \left(\frac{1}{d_1} \right) = \Delta \left(\frac{1}{d_2} \right) = 0, \quad \Delta \beta = 0, \quad \Delta \alpha \neq 0.$$

Cela revient à prolonger tangentiellement l'obstacle ⁽¹⁷⁴⁾ d'un arc infiniment petit $\Delta \alpha$ et à laisser invariables les autres données. Dans ces conditions, la dérivée $\frac{d\gamma}{df}$ est nulle au point $Z = 1$ puisque la quantité $\Omega'(1)$ est nulle [cf. (4.48)]. Dès lors, les conditions frontières imposées à β sont identiques à celles qu'on obtiendrait en faisant $\Delta \alpha = 0$. Il s'ensuit que le problème de Weinstein, que nous avons envisagé, ne possède d'autres solutions que $\beta \equiv 0$. Aussi la fonction $\gamma(Z)$ correspondante est constante dans d ; elle est donc identiquement nulle puisqu'elle vaut zéro au point $Z = e^{i\theta_0}$ (cf. § 32) où elle est continue. D'après (4.44), il vient alors

$$\delta \Omega(Z) = \frac{d\Omega}{df} \delta f(Z),$$

le second membre de cette relation ayant un sens pour $Z = 1$ puisque la quantité $\Omega'(1)$ est nulle [cf. (1.36)]. En différentiant l'égalité précédente et en se rappelant que les opérations δ et $\frac{d}{dZ}$ sont permutable, on trouve

$$\delta \Omega'(Z) - \frac{d\Omega}{df} \delta \frac{df(Z)}{dZ} = \frac{d}{dZ} \left(\frac{d\Omega}{df} \right) \delta f(Z).$$

Le premier membre de cette relation a encore un sens pour $Z = 1$ (cf. § 31), où nous avons établi l'existence de la différentielle $\delta \Omega'(1)$; il en est par suite de même du second membre. Or, d'après (4.46), on peut écrire

$$\delta f(1) + \Delta \alpha = 0$$

et l'on a, par ailleurs,

$$\delta \left\{ \left[\frac{df(Z)}{dZ} \right]_{Z=1} \right\} = 0,$$

⁽¹⁷⁴⁾ Avec une courbure nécessairement finie puisque nous nous bornons aux profils le long desquels $\Psi'(l)$ est continue. Nous ne nous préoccupons pas pour le moment de la validité physique de cette configuration (cf. § 13).

puisque en vertu de (1.10') la quantité $\left[\frac{df(Z)}{dZ} \right]_{z=1}$ est nulle. En portant ces résultats dans la formule précédente, on établit le résultat fondamental suivant

$$(4.62) \quad \delta \Omega'(1) = - \left\{ \frac{d}{dZ} \left[\frac{d\Omega}{df} \right] \right\}_{z=1} \Delta\alpha = -c'_2 \Delta\alpha,$$

en reprenant la notation déjà utilisée au paragraphe 15 [cf. (1.37)].

Le raisonnement précédent montre, en outre, que l'on a, en même temps,

$$(4.62') \quad \delta \Omega'(-1) = 0,$$

toutes les fois que la ligne λ_1 présente aussi un détachement en poue.

37. THÉORÈMES D'UNICITÉ POUR LE PROBLÈME DE LA PROUE. — L'égalité (4.62) va nous permettre de faire connaître quelques cas où le problème de la poue possède une seule solution.

I. Cas de la configuration symétrique. — Considérons un obstacle symétrique placé symétriquement dans un canal. Nous prendrons le milieu O de l'obstacle pour origine des arcs. Nous appellerons P_1 (ou P_2) le point de la moitié supérieure (inférieure) de l'obstacle d'abscisse p_1 (ou p_2); on pose $p_1 = -p_2$ et l'on a $0 \leq p_1 \leq \frac{\beta - \alpha}{2}$. Posons-nous le problème symétrique du sillage pour la configuration symétrique formée par les parois μ_1 et μ_2 et l'obstacle $\widehat{P_2 P_1}$ (contenu, de par sa définition même, dans l'arc donné \widehat{BC}); d'après le paragraphe 35 ce problème n'admet qu'une seule solution symétrique $x \left[l(s), \frac{1}{a+1}, \frac{-1}{a+1} \right]$ qui variera continûment avec p_1 ; il en résulte qu'à chaque valeur de p_1 , il correspond une valeur et une seule de la quantité ⁽¹⁷⁵⁾ $P_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \Omega'(1)$ que nous noterons

$$P_2 = P_2(p_1),$$

⁽¹⁷⁵⁾ Cf. la formule (C) du paragraphe 13; on se rappellera que, dans le cas symétrique, $s_0 = \frac{\pi}{2}$.

la fonction du second membre étant continue. Représentons alors dans un système d'axes rectangulaires p_1, P_2 les variations de P_2 en fonction de p_1 . A chaque intersection de la courbe $P_2(p_1)$ avec l'axe des p_1 correspondra une solution du problème de la proue posée pour l'obstacle \widehat{BC} donné (solution dont nous aurons à discuter la validité); aux racines de l'équation $P_2(p_1) = 0$, il y aura lieu d'adjoindre $p_1 = \frac{\beta - \alpha}{2}$ si la quantité $P_2\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right)$ est négative (cf. § 25). Or, d'après l'équation (A) du paragraphe 15, on a, compte tenu des changements de notations ⁽¹⁷⁶⁾

$$P_2(0) = \frac{\sqrt{2}\omega_1}{\pi} \left\{ \eta_1 \frac{\Psi\left[\iota\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right)\right]}{\pi} - \zeta\left(\frac{\omega_1}{2}\right) \right\} < 0$$

Cela montre que le problème symétrique de la proue posé pour la configuration donnée admet au moins une solution. Si, en effet, $P_2\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right) \leq 0$, la solution symétrique du problème du sillage posé pour l'obstacle \widehat{BC} résout le problème de la proue posé relativement à cet obstacle. Si, au contraire, $P_2\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right) \geq 0$ la fonction continue $P_2(p_1)$ admet au moins un zéro dans l'intervalle $\frac{\beta - \alpha}{2} \geq p_1 \geq 0$; à chacun de ces zéros correspondant une solution du problème de la proue.

Occupons-nous maintenant de la validité des solutions du problème de la proue dont nous venons d'établir l'existence. Au paragraphe 13

⁽¹⁷⁶⁾ La dernière inégalité du texte résulte du fait que la fonction $\zeta \frac{\omega_1}{\pi} s$ est décroissante dans l'intervalle $0 \leq s \leq \pi$ et que la quantité $\frac{\Psi\left[\iota\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right)\right]}{\pi}$ est inférieur à l'unité. On se rappellera aussi que [cf. CVI₂TM]

$$\zeta\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = \frac{2\pi}{\omega_1} \sum_1^{\infty} \frac{q^{2\nu}}{1 + q^{4\nu}} > 0$$

et que

$$\eta_1 = \zeta(\omega_1).$$

nous avons vu que l'inégalité (1.42)

$$c'_2 > 0$$

constitue une condition nécessaire de validité locale; or, d'après (4.62) et (4.62'), cette inégalité exprime [en remplaçant dans (4.62) $\Delta\alpha$ par $-\Delta p_1$] que la pente $\frac{\partial P_2}{\partial p_1}$ de la courbe P_2 en un point d'intersection avec l'axe des p_1 est positive; au contraire, aux points communs à P_2 et à Op_1 , en lesquels $\frac{\partial P_2}{\partial p_1} < 0$ correspondront des solutions inacceptables du problème de la proue (¹⁷⁷). Considérons alors le cas d'un obstacle symétrique en accolade; pour de telles configurations, la quantité c'_2 est nécessairement positive lorsque la ligne libre λ_2 présente un détachement en proue [cf. (2.12)]; il s'ensuit que la pente $\frac{\partial P_2}{\partial p_1}$ de P_2 sera positive en les points où $P_2(p_1) = 0$ [cf. (4.62)]. Cela montre que l'équation $P_2 = 0$ ne peut avoir qu'une seule solution; il suffit de se rappeler que la fonction $P_2(p_1)$ est continue, et que, d'autre part, elle ne fait correspondre qu'une seule valeur de P_2 à toute valeur de la variable. Nous pouvons dès lors conclure (¹⁷⁸):

Le problème symétrique de la proue posé pour un obstacle symétrique en accolade, placé symétriquement dans un canal, possède une seule solution; d'après le théorème du paragraphe 18 cette solution est nécessairement acceptable.

II. *Cas de l'obstacle circulaire convexe vers le courant.* — Pour pouvoir appliquer le lemme de Friedrichs à des obstacles non symétriques nous sommes obligé (dans l'état actuel de la théorie) de les supposer convexes vers le courant. Le théorème du paragraphe 18 justifie d'autre part l'intérêt qu'il y a à se limiter aux profils en accolade; dans ce cas chacun des arcs \widehat{OC}_1 et \widehat{B}_1O (cf. la figure 8)

(¹⁷⁷) Dans le cas du fluide indéfini, M. Leray, en partant des formules de M. Villat, a construit un obstacle symétrique auquel correspondent trois solutions, au moins, du problème de la proue, certaines d'entre elles pouvant être inacceptables.

(¹⁷⁸) Dans le cas de l'obstacle circulaire convexe ce résultat avait été établi par M. Jacob avant les travaux de M. Leray.

doit être réduit à l'unique point O en lequel le profil doit posséder une tangente continue. Or, étant donné une configuration dissymétrique, le point de bifurcation O a une position *a priori* inconnue; il s'ensuit que les résultats des paragraphes 18, 33 et 35 ne pourront s'appliquer simultanément *a priori* que si le profil donné \widehat{BC} vérifie la condition suivante : quel que soit le point O, intérieur à \widehat{BC} , la courbure des arcs \widehat{BO} et \widehat{OC} n'est pas croissante lorsqu'on se déplace sur chacun d'eux de B ou de C vers O; il est clair que le profil constitué par un arc de cercle est le seul à jouir de cette propriété. Supposons donc notre obstacle circulaire et admettons, pour plus de simplicité, que son rayon est égal à 1; dans ce cas, il sera défini par l'équation intrinsèque

$$(4.63) \quad \Psi(l) = \pi - l \quad (0 \leq \alpha \leq l \leq \beta \leq \pi).$$

Les parois μ_1 et μ_2 sont à des distances quelconques de ses extrémités B et C (en particulier l'une d'elles, ou les deux à la fois, peuvent être à des distances infinies); nous supposerons que les valeurs de d_1 et de d_2 sont fixées une fois pour toutes ⁽¹⁷⁹⁾; dans ces conditions, la configuration des éléments rigides est entièrement déterminée par le couple des paramètres (α, β) vérifiant les inégalités

$$0 \leq \alpha \leq \beta \leq \pi;$$

⁽¹⁷⁹⁾ Nous supposerons de plus que les distances d_1 et d_2 sont assez grandes pour que le demi-cercle

$$\Psi(l) = \pi - l \quad (0 \leq l \leq \pi)$$

soit tout entier intérieur au canal. Lorsque cette hypothèse n'est pas vérifiée, le raisonnement se simplifie (*cf.* la fin de ce paragraphe).

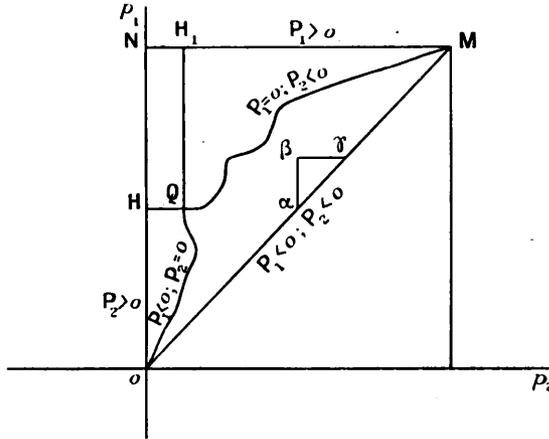
Notons que le demi-cercle ne rentre pas dans la catégorie des obstacles visés par l'énoncé du paragraphe 23; en effet, dans le cas envisagé nous avons

$$\Psi[l(0)] = \pi, \quad \Psi[l(\pi)] = 0,$$

en sorte $\frac{dl(s)}{ds}$ ne vérifie pas une condition $\mathcal{L}_n(s)$ ($n > 1$) pour $s = 0$ ou $s = \pi$; les raisonnements du paragraphe 28 tombent alors en défaut. Toutefois, les raisonnements exposés par M. Leray dans son *Mémoire des Commentarii Mathematici Helvetici* permettent encore de tourner cette difficulté et d'établir tous les théorèmes d'existence et de validité dont nous aurons à faire usage au cours de cet alinéa.

d'après le théorème du paragraphe 35 le problème correspondant du sillage admet une solution et une seule. Nous pouvons donc caractériser celle-ci par le point de coordonnées α, β intérieur au triangle OMN dont les sommets

Fig. 12.



M et N ont pour coordonnées respectives (π, π) et $(0, \pi)$. Tous les obstacles $\widehat{P_2 P_1}$ intérieurs à l'obstacle BC donné, et, par suite, les sillages qui leur correspondent, seront caractérisés par un point (p_2, p_1) intérieur au triangle $\alpha\beta\gamma$. Nous aurons donc discuté le problème de la proue posé pour \widehat{BC} si nous savons déterminer les signes des quantités $\Omega'(1)$ et $\Omega'(-1)$ ou encore, ce qui revient au même, les signes des quantités P_2 et P_1 , fonctions de p_1 et de p_2 [pour la signification de p_1 et p_2 (cf. § 23)]; nous écrivons donc

$$P_2 = P_2(p_1, p_2), \quad P_1 = P_1(p_1, p_2).$$

Or, considérons un point (p_2, p_1) tel que

$$P_2(p_1, p_2) = 0, \quad P_1(p_1, p_2) < 0.$$

L'arc correspondant $\widehat{P_1 P_2}$ étant en accolade, la condition (2. 12) de M. Leray est satisfaite; (4. 62) montre que l'on a, dans ce cas,

$$(4. 64) \quad P_2(p_1, p_2 + \delta p_2) \delta p_2 < 0.$$

Au contraire, si en un point (p_2, p_1) on a

$$P_2(p_1, p_2) < 0, \quad P_1(p_1, p_2) = 0,$$

on aurait, en un point $(p_2 + \hat{\partial}p_2, p_1)$ infiniment voisin,

$$(4.65) \quad P_1(p_1 + \hat{\partial}p_1, p_2) \hat{\partial}p_1 > 0.$$

Le même raisonnement prouve qu'en un point $(p_2 + \hat{\partial}p_2, p_1 + \hat{\partial}p_1)$ voisin du point (p_2, p_1) en lequel on aurait $P_1 = P_2 = 0$, on a les inégalités

$$P_1(p_1 + \hat{\partial}p_1, p_2 + \hat{\partial}p_2) \hat{\partial}p_1 > 0, \quad P_2(p_1 + \hat{\partial}p_1, p_2 + \hat{\partial}p_2) \hat{\partial}p_2 < 0.$$

Les fonctions P_1 et P_2 étant continues⁽¹⁸⁰⁾ dans OMN, il suit de là que les points du triangle OMN, dont les coordonnées vérifient le système $P_1 = P_2 = 0$, sont isolés et, par suite, en nombre fini.

D'après (4.64) et (4.65) chacun d'eux est commun à un arc de courbe d'équation $P_1 = 0$, le long de laquelle $P_2 < 0$, qui y possède une tangente horizontale et à un arc de courbe $P_2 = 0$, le long de laquelle $P_1 < 0$, qui y possède une tangente verticale⁽¹⁸¹⁾.

Cela posé, désignons par Δ tout domaine appartenant à OMN à l'intérieur duquel on aurait

$$P_1(p_1, p_2) < 0, \quad P_2(p_1, p_2) < 0.$$

Nous appellerons Δ' la frontière de Δ et nous l'orienterons dans le sens des rotations positives. Je dis, d'abord, qu'il existe au moins un domaine Δ . En effet, d'après (4.63), $\Psi(l)$ atteint ses maximum et minimum pour $l = \alpha$ et $l = \beta$ respectivement; la nature des détachements en ces points est connue. Nous pouvons, dès lors, écrire

$$\begin{aligned} P_2(p_1, 0) &> 0 & (0 \leq p_1 \leq \pi), \\ P_1(\pi, p_2) &> 0 & (0 \leq p_2 \leq \pi) \end{aligned}$$

⁽¹⁸⁰⁾ Cf. les formules (C) et (C') de la remarque finale du paragraphe 13. Nous introduisons ces quantités à la place de $\Omega'(1)$ et $\Omega'(-1)$ pour assurer un sens à nos formules en les points M et O. Pour $\alpha = \beta = \pi$ par exemple, l'obstacle se réduit à un segment infiniment petit horizontal; $\Omega'(1)$ et $\Omega'(-1)$ sont alors infinies alors que les expressions de P_2 et P_1 correspondantes ont encore un sens.

⁽¹⁸¹⁾ La forme des expressions des différentielles $\delta\Omega(-1)$ et $\delta\Omega(1)$ montre que les dérivées partielles $\frac{\partial P_2}{\partial p_1}$ et $\frac{\partial P_1}{\partial p_2}$ existent dans tout le triangle OMN; les relations (4.62) et (4.62') prouvent que les dérivées $\frac{\partial P_1}{\partial p_1}$ et $\frac{\partial P_2}{\partial p_2}$ existent le long des lignes d'équation $P_1 = 0$ et $P_2 = 0$ respectivement. Nous pouvons donc affirmer que ces lignes possèdent des tangentes en chacun de leurs points.

et puis, si l'on fait $p_1 = p_2$,

$$\frac{P_1(p_1, p_1)}{\cos \frac{s_0}{2}} = -\frac{2\omega_1}{\pi} \left\{ \eta_1 \left[1 + \frac{\Psi(p_1)}{\pi} \right] - \zeta \left(\frac{\omega_1}{\pi} s_0 + \omega_1 \right) \right\} < 0,$$

$$\frac{P_2(p_1, p_1)}{\sin \frac{s_0}{2}} = \frac{2\omega_1}{\pi} \left[\eta_1 \frac{\Psi(p_1)}{\pi} - \zeta \left(\frac{\omega_1}{\pi} s_0 \right) \right] < 0,$$

car il vient [cf. (1. 14)] ⁽¹⁸²⁾

$$0 \leq \Psi(t) = \Psi(p_1) = \Psi(p_2) = s_0 \leq \pi.$$

Les fonctions $P_1(p_1, p_2)$ et $P_2(p_1, p_2)$ étant continues dans le triangle OMN, il existe un domaine Δ attenant au côté OM du triangle OMN et dont la frontière Δ' contient le segment OM.

Je dis maintenant que le domaine Δ dont nous venons d'établir l'existence est unique. Étudions, en effet, la portion Δ'' de la frontière Δ' de Δ (supposé quelconque) qui soit intérieure au triangle OMN. Cette portion se compose : 1° d'arcs L_1 , d'équation $P_1 = 0$ le long desquels on aura : $P_2 < 0$; 2° d'arcs L_2 , d'équation $P_2 = 0$ le long desquels on aura : $P_1 < 0$; 3° de points en nombre fini, communs à un arc L_1 et à un arc L_2 .

a. La portion Δ'' ne peut se réduire à une courbe L_1 (ou L_2). En effet, aucun arc L_1 ne peut joindre deux points différents du contour du triangle OMN, les valeurs de P_1 étant différentes de zéro le long de ce contour, le point M excepté. Il s'ensuit que si Δ'' se réduisait à L_1 , on aurait dû avoir $\Delta' \equiv \Delta''$; Δ'' serait une courbe fermée, intérieure au triangle OMN (le point M éventuellement excepté), admettant en chacun de ses points une tangente. L'intersection de Δ'' avec les droites d'équation $p_2 = \varepsilon$ (convenablement choisies) se composerait de deux points au moins; appelons alors ε, η celui d'entre eux dont l'ordonnée η soit minima; le point $\varepsilon, \eta + \delta\eta$ serait alors intérieur à Δ si l'on prend $\delta\eta$ positif et assez petit; nous aurions

$$P_1(\varepsilon, \eta) = 0$$

⁽¹⁸²⁾ On se reportera au renvoi ⁽¹⁷⁶⁾ pour la démonstration des inégalités du texte.

et

$$P_1(\varepsilon, \eta + \delta\eta) \delta\eta < 0$$

Or, cette inégalité est contredite par (4.65). La ligne L_1 (ou L_2) ne peut donc avoir de tangente verticale (ou horizontale). Nous pouvons, dès lors, affirmer que chaque Δ'' (et, par suite chaque Δ') contient au moins un arc L_1 et au moins un arc L_2 ; cela montre que chaque Δ' contient un point Q au moins.

b. La portion Δ'' ne peut contenir qu'un point Q . L'alinéa *a* établit l'existence d'au moins un point Q [de coordonnées (q_2, q_1)] sur la portion Δ'' considérée. Les conditions $P_1 = 0, P_2 < 0$ valables le long de L_1 et les conditions $P_2 = 0, P_1 < 0$, combinées avec les inégalités (4.64) et (4.64') prouvent qu'en ce point les arcs L_1 et L_2 se croisent de manière que la portion de Δ attenante à Q contienne l'angle $p_1 \leq q_1; p_2 \geq q_2$; c'est cette disposition qu'indique la figure 12. Il s'ensuit (et compte tenu de la façon dont Δ' a été orientée), que chaque point Q sera l'*extrémité* de l'arc L_1 qui y aboutit et l'*origine* de l'arc L_2 issu de ce point. Or, ceci n'est possible que si chaque portion Δ'' ne contient qu'un seul point Q .

c. Toute frontière Δ' atteint les deux points O et M . Sinon, en effet, Δ' serait ou bien complètement intérieure au triangle OMN , ou bien contiendrait l'unique point M (ou O) de son contour. Dans l'un comme dans l'autre cas, Δ' contiendrait au moins un arc L_1 et au moins un arc L_2 , l'un de ces arcs étant complètement intérieur à OMN ; il s'ensuivrait que Δ' posséderait deux points Q , ce qui, d'après l'alinéa *b* est impossible.

d. Toute frontière Δ' ne contient qu'un seul arc \widehat{MQO} intérieur au triangle OMN . D'après les alinéas *b* et *c*, Δ' contient au moins un arc \widehat{MQN} composé de l'arc \widehat{MQ} et de l'arc \widehat{QM} ; d'après l'alinéa *b*, le sens positif sur chaque arc \widehat{MQO} est MO ; or, cela n'est possible que si Δ ne contient qu'un seul arc de cette espèce.

De l'alinéa *d*, il résulte bien que le domaine Δ contigu au segment MO est l'unique domaine Δ . C. Q. F. D.

En résumé, l'arc \widehat{OQM} partage le triangle OMN en deux régions.

A l'intérieur du triangle mixtiligne OMQ et sur son côté rectiligne OM , nous avons

$$P_1 < 0, \quad P_2 < 0.$$

Le long du côté curviligne MQ (arc L_1), on peut écrire

$$P_1 = 0, \quad P_2 < 0$$

et, le long du côté curviligne \widehat{QO} (arc L_2), on a

$$P_2 = 0, \quad P_1 < 0.$$

Dans aucun point de OMN extérieur au domaine OMQ (domaine Δ) on ne peut avoir

$$P_1 \leq 0,$$

$$P_2 \leq 0.$$

Il n'existe qu'un seul point Q dont les coordonnées vérifient le système $P_1 = P_2 = 0$.

Cela étant, abaissons de M les perpendiculaires MH et MH_1 sur ON et MN respectivement. Le triangle OMQ n'empiète pas sur le rectangle $MHNH_1$, ainsi construit; il suffit de rappeler, en effet, que l'arc $\widehat{QO} = L_2$ (ou l'arc $\widehat{MQ} = L_1$) ne possède pas de tangente parallèle à Op_2 (ou à Op_1) [cf. l'alinéa a]. L'ensemble des résultats qui précèdent se lit sur la figure 12.

Nous sommes maintenant en mesure de discuter les solutions du système

$$(4.66) \quad \begin{cases} P_1(p_1, p_2) \leq 0, \\ P_2(p_1, p_2) \leq 0, \end{cases}$$

intérieur au triangle $\alpha\beta\gamma$. Plusieurs cas sont à distinguer.

1° Le sommet γ , est intérieur au triangle mixtiligne OMQ . Nous avons alors

$$P_1(\beta, \alpha) < 0, \quad P_2(\beta, \alpha) < 0.$$

Le système $p_1 = \beta, p_2 = \alpha$ constitue donc une solution du problème de la proue. Cette solution est unique. En effet, le point Q est extérieur au triangle $\alpha\beta\gamma$; l'un des points de détachement, au moins, doit être confondu avec l'extrémité de l'obstacle; nous devons donc

prendre ou $p_1 = \beta$, $p_2 = p_2$ ou $p_2 = \alpha$, $p_1 = p_1$. Or, en un point $(p_1 = \beta, p_2 = p_2)$ commun à l'arc \widehat{MQ} et au côté $\beta\gamma$, nous avons (de par la définition de $L_2 = \widehat{MQ}$)

$$P_1(\beta, p_2) = 0, \quad P_2(\beta, p_2) < 0.$$

Comme $p_2 < \alpha$, les coordonnées du point envisagé ne résolvent pas le problème de la proue; on écartera de même les points communs à L_1 et à $\alpha\gamma$. C. Q. F. D.

2° Le sommet γ est intérieur au triangle mixtiligne OQH . Le point γ est, dans ce cas, extérieur au domaine Δ ; ses coordonnées α, β ne vérifient plus le système (4.66). Le point Q , d'autre part, est extérieur à $\alpha\beta\gamma$; on doit avoir encore

$$p_1 = \beta \quad \text{ou} \quad p_2 = \alpha.$$

Une discussion analogue à celle de l'alinéa 1 montre que l'hypothèse $p_2 = \alpha$ est à écarter. Au contraire, les coordonnées $p_1 = \beta$, $p_2 = p_2$ d'un point commun à $\beta\gamma$ et à L_2 vérifient le système

$$P_1(\beta, p_2) < 0, \quad P_2(\beta, p_2) = 0,$$

Comme, dans ce cas, $p_2 > \alpha$, le point considéré est une solution du problème de la proue posé pour l'obstacle donné. Et cette solution est encore unique, puisque l'intersection de \widehat{OQ} avec une droite d'équation $p_1 = \text{const.}$ se réduit à un point unique. Les conclusions précédentes subsistent si γ fait partie de l'arc \widehat{OQ} .

3° Le point γ est intérieur au triangle mixtiligne QMH_1 . Une discussion analogue à la précédente montre que, dans ce cas, le problème admet encore une solution, et une seule dont l'image est à l'intersection de l'arc \widehat{MQ} avec la droite d'équation $p_2 = \alpha$. Les conclusions subsistent si le point γ est situé sur l'arc \widehat{QM} .

4° Le point γ est intérieur au rectangle $MHNH_1$, ou situé sur le périmètre de celui-ci. Le point Q est alors, ou intérieur au triangle $\alpha\beta\gamma$, ou situé sur son pourtour. Une discussion analogue

aux précédentes montre que, dans ce cas, le problème admet une seule solution dont l'image est confondue avec le point Q.

Nous pouvons donc conclure :

Le problème de la proue, posé par un arc de cercle situé dans un canal à bords rectilignes (ceux-ci étant à distance finie ou non) admet une seule solution lorsque le demi-cercle d'équation (4.63), dont l'obstacle donné fait partie, est intérieur au domaine du fluide.

L'extension de ce résultat au cas général est immédiate; les raisonnements qui précèdent ne sont pas, en gros, à modifier. Toutefois, l'existence des points du triangle ONM dont les coordonnées vérifient les inégalités (ou l'une d'elles) $P_1 > 0$, $P_2 > 0$, n'est plus certaine *a priori*, puisque la fonction $\Psi(s)$ ne devient ni nulle, ni égale à π ; en particulier, le domaine Δ peut recouvrir tout le triangle OMN; cela permet de simplifier la discussion.