JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

BERTRAND GAMBIER

Surfaces admettant plusieurs réseaux conjugués coniques

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 19, nº 1-4 (1940), p. 63-82.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1940_9_19_1-4_63_0>

Surfaces admettant plusieurs réseaux conjugués coniques;

Par Bertrand GAMBIER.

---

1. Introduction. — Sophus Lie, Poincaré, Darboux ont donné successivement des méthodes différentes pour déterminer *les surfaces qui admettent non seulement un réseau de translation, mais deux ou* ∞^1. Ces méthodes ne s'appliquent pas au problème qui généralise le précédent d'une façon évidente : *surfaces admettant non seulement un réseau conjugué conique, mais au moins deux* (le maximum est ∞^4 et se trouve réalisé par les quadriques) : le long de chaque courbe conique, il y a un cône circonscrit à la surface. J'ai imaginé une méthode, élémentaire et presque évidente, qui résout (théoriquement) le problème; cette méthode s'applique aux surfaces de Lie, de sorte que, pour en éprouver l'efficacité, je l'ai appliquée à ces surfaces (*Annales de l'École Normale*, 3e série, LV, 1938, p. 83-118); je vais en prouver encore mieux l'efficacité, en l'appliquant à un exemple différent qui m'a été suggéré par le professeur F. Engel, de Giessen, et qui a été traité par lui par une autre méthode que celle de ce travail (*Rendiconti di Palermo*, LIX, 1935, p. 165-184). Un réseau de translation est un réseau conique pour lequel les sommets des cônes circonscrits sont répartis sur deux courbes planes, toutes deux situées dans le plan de l'infini. Le professeur Friedrich Engel a proposé d'appeler *réseau de translation au sens élargi* un réseau conique pour lequel les sommets des cônes circonscrits sont répartis sur *deux courbes planes d'un même plan, d'ailleurs quelconque;* il faut alors spécifier avec soin le plan relatif à ce réseau.

On peut donc chercher *deux réseaux de translation simultanés, relatifs à deux plans différents :* M. Engel a déterminé une solution particulière de ce problème précis et nous la retrouverons à notre tour.

2. Exposé de la méthode. — La surface est définie en coordonnées homogènes par les expressions

$$X_1 + Y_1, \quad X_2 + Y_2, \quad X_3 + Y_3, \quad X_4 + Y_4, \tag{1}$$

où les X_i dépendent de l'argument x, et les Y_i de y.

Le point $\left(\frac{dX_1}{dx_0}, \frac{dX_2}{dx_0}, \frac{dX_3}{dx_0}, \frac{dX_4}{dx_0}\right)$ est le sommet du cône circonscrit le long de la courbe $x = x_0$ et chaque génératrice de ce cône est tangente à une courbe $y = \text{const}$. Les 4 coordonnées homogènes (z_1, z_2, z_3, z_4) du point courant de la surface ([1]) sont donc solutions de l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = 0$. Un nouveau réseau conjugué conique de la même surface, s'il existe, fournit de nouvelles coordonnées homogènes Z, liées aux précédentes par la relation $z = \rho Z$ (où ρ est une fonction convenablement choisie), et s'exprimant sous la forme

$$U_1 + V_1, \quad U_2 + V_2, \quad U_3 + V_3, \quad U_4 + V_4, \tag{2}$$

où les U_i dépendent du paramètre u, les V_i de v.

L'équation $\frac{\partial^2 Z}{\partial u\, \partial v} = 0$, satisfaite par les Z_i, devient, si l'on revient à z et aux paramètres x, y, une équation

$$A r + B t + C p + D q + E z + \lambda s = 0 \tag{3}$$

$\left(p = \frac{\partial z}{\partial x}, \ r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ \cdots\right)$ vérifiée en même temps que $s = 0$ par les 4 coordonnées z. Le problème est donc ramené à résoudre les deux questions suivantes :

1° Déterminer A, B, C, D, E de façon que le système

$$s = 0, \qquad A r + B t + C p + D q + E z = 0 \tag{4}$$

([1]) Le lecteur voudra bien se rappeler que x, y, u, v sont des paramètres curvilignes, que (z_1, z_2, z_3, z_4), ou simplement, z désignent des coordonnées. Quelques lecteurs de mon Mémoire déjà cité avaient interprété x, y comme des coordonnées cartésiennes et u, v comme des paramètres curvilignes.

admette une solution à quatre paramètres constants $\Sigma a_i(X_i + Y_i)$, où les X_i et Y_i sont donnés; la solution est immédiate : on peut prendre pour A, B, C, D, E les coefficients de α, β, γ, δ, ε dans le développement du déterminant d'ordre 5

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon \\ X''_1 & Y''_1 & X'_1 & Y'_1 & X_1+Y_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots \\ X''_4 & Y''_4 & X'_4 & Y'_4 & X_4+Y_4 \end{vmatrix}.$$

Chacune de ces expressions A, ..., E est donc de la forme $\Sigma\xi\eta$ où les ξ dépendent de x, les η de y.

2° Particulariser les X_i et Y_i de sorte que l'équation

$$(6)\qquad Ar + Bt + Cp + Dq + Ez + s\lambda(x, y) = 0,$$

où λ est une fonction convenable de x, y, puisse, par le changement de fonction $z = \rho Z$ et de variables (u, v étant les nouvelles variables indépendantes), recevoir la forme

$$(7)\qquad \frac{\partial^2 Z}{\partial u\,\partial v} = 0.$$

On trouve sans difficulté que les inconnnes λ, ρ, u, v *au nombre de quatre* doivent vérifier les *cinq* équations

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} & A\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \lambda\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + B\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 0, \\ & A\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \lambda\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + B\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = 0, \\ & A\rho\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda\rho\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + B\rho\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x}\left(2A\frac{\partial\rho}{\partial x} + \lambda\frac{\partial\rho}{\partial y} + C\rho\right) \\ & \qquad\qquad + \frac{\partial u}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial\rho}{\partial x} + 2B\frac{\partial\rho}{\partial y} + D\rho\right) = 0, \\ & A\rho\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \lambda\rho\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + \dots = 0, \\ & A\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2\rho}{\partial y^2} + C\frac{\partial\rho}{\partial x} + D\frac{\partial\rho}{\partial y} + E\rho + \lambda\frac{\partial^2\rho}{\partial x\,\partial y} = 0. \end{aligned}\right.$$

En général il n'existe pas de solution, de sorte qu'une surface admettant *un réseau conique n'en admet en général qu'un : d'ailleurs une surface quelconque n'admet, en général, aucun réseau conique.*

Nous allons éliminer très simplement u, v qui figurent d'une façon symétrique (on se rappellera que $\lambda^2 - 4AB$ doit être différent de zéro); posons

$$(9) \qquad \frac{\lambda}{A} = -(h+k), \qquad \frac{B}{A} = hk, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = h\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = k\frac{\partial v}{\partial y}.$$

On a aussitôt comme conséquence des deux dernières équations (9)

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (h+k)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + hk\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial h}{\partial x} - k\frac{\partial h}{\partial y}\right), \\ &\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - (h+k)\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + hk\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial v}{\partial y}\left(\frac{\partial k}{\partial x} - h\frac{\partial k}{\partial y}\right). \end{aligned} \right.$$

On ajoute les équations (8) de rang 3 et 4, ce qui fait intervenir simplement hk et $h+k$; on les ajoute encore, mais en les multipliant au préalable par $\frac{1}{h^2 k}$ et $\frac{1}{hk^2}$ respectivement, ce qui fait intervenir $\frac{1}{h} + \frac{1}{k}$ et $\frac{1}{hk}$. *On a ainsi, au lieu de* (8), *les trois équations nécessaires et suffisantes, entre* λ *et* ρ

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\lambda}{A}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{B}{A}\right) + \frac{\lambda}{A}\left(\frac{\lambda}{\rho A}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{C}{A}\right) - \frac{4B}{A}\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{2D}{A} = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\lambda}{B}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{A}{B}\right) + \frac{\lambda}{B}\left(\frac{\lambda}{\rho B}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{D}{B}\right) - \frac{4A}{B}\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{2C}{B} = 0, \\ &A\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} + C\frac{\partial \rho}{\partial x} + D\frac{\partial \rho}{\partial y} + E\rho + \lambda\frac{\partial^2 \rho}{\partial x\,\partial y} = 0, \end{aligned} \right.$$

et u, v sont les intégrales premières de l'équation

$$(11') \qquad A\,dy^2 - \lambda\,dx\,dy + B\,dx^2 = 0.$$

3. Cas précis des surfaces de Lie. — Le cas des surfaces de Lie est caractérisé par $\rho = 1$, comme cela résulte des recherches mêmes de Lie, qui a montré que 4 équations

$$(12) \qquad X_i + Y_i = U_i + V_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

ne peuvent se réduire à 2 équations seulement que si l'on a, avec des constantes non toutes nulles

$$(13)\qquad \Sigma a_i X_i = \frac{1}{2}, \qquad \Sigma a_i Y_i = \frac{1}{2}, \qquad \Sigma a_i U_i = \frac{1}{2}, \qquad \Sigma a_i V_i = \frac{1}{2},$$

de la sorte la surface (z_1, z_2, z_3, z_4) étant remplacée par la transformée homographique $(z_1, z_2, z_3, \Sigma a_i z_i)$ ou $(z_1, z_2, z_3, 1)$, si nous regardons la face $z_4 = 0$ du tétraèdre de référence comme représentant le plan de l'infini, nous avons une surface qui a deux réseaux de translation (au sens ordinaire). On suppose donc

$$X_4 + Y_4 \equiv U_4 + V_4 \equiv 1, \qquad E = 0, \qquad \rho = 1,$$

et il reste le système de deux équations

$$(14)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\lambda}{A}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{B}{A}\right) + \frac{C}{A}\left(\frac{\lambda}{A}\right) - \frac{2D}{A} = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\lambda}{B}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{A}{B}\right) + \frac{D}{B}\left(\frac{\lambda}{B}\right) - \frac{2C}{B} = 0. \end{aligned} \right.$$

J'ai discuté ce système complètement et retrouvé tous les résultats de Lie; je n'y reviens pas ici; les pages 85-90 et 102-105 de mon Mémoire déjà cité contiennent la démonstration de tous les résultats trouvés autrement par Sophus Lie.

Ici, pour rassurer les lecteurs qui se rappellent que les surfaces de Lie dépendent de 18 paramètres (14 pour la quartique plane générale, 1 paramètre d'homothétie, 3 paramètres pour une translation), je dois expliquer pourquoi j'emploie le total de 17 paramètres seulement : les coordonnées du point courant ont été prises sous la forme plus avantageuse pour notre étude

$$\int X_1\,dx + \int Y_1\,dy, \quad \int X_2\,dx + \int Y_2\,dy, \quad x + y, \quad 1,$$

et le problème *analytique* revient à déterminer X_1, X_2 en fonction de x (Y_1, Y_2 s'obtenant en remplaçant dans X_1 ou X_2 la variable x par y). La détermination de X_1, X_2 en fonction de x fait intervenir 17 constantes arbitraires, dont une est accolée additivement à x; on a ensuite, pour obtenir *géométriquement* la surface, à calculer $\int X_1\,dx + Y_1\,dy$, $\int X_2\,dx + Y_2\,dy$, ce qui introduit *deux* paramètres nouveaux : $17+2=19$; mais, dans la somme $x+y$, les deux constantes associées respectivement à x ou y ne figurent plus que par leur somme, de sorte qu'un paramètre disparaît : $19-1=18$, et l'on voit qu'il n'y a aucune contradiction.

4. Réseau conique et réseau de translation. — La dernière équation (11) ne détermine pas λ en fonction de ρ, si ρ est une solution du système (4), c'est-à-dire si l'on a, avec certaines constantes,

$$\rho = a_1(X_1+Y_1)+a_2(X_2+Y_2)+a_3(X_3+Y_3)+a_4(X_4+Y_4).$$

Dans ce cas, nous remplaçons encore la surface par la transformée homographique

$$z_1, \quad z_2, \quad z_3, \quad a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3 + a_4 z_4,$$

de sorte qu'avec un changement de notations, nous aurons une surface admettant, si λ existe, deux représentations

$$(15) \qquad \begin{cases} X_1+Y_1, & X_2+Y_2, & X_3+Y_3, & X_4+Y_4 \\ U_1+V_1, & U_2+V_2, & U_3+V_3, & 1 \end{cases} \qquad \rho = X_4+Y_4.$$

Le premier réseau est conique, le second est réseau de translation (accidentellement, puisque ρ n'est pas constant, le premier réseau pourrait être de translation, mais pour un plan distinct de celui qui est donné par le second réseau). Les équations (11) se réduisent aux deux premières : λ est inconnu et ρ est remplacé par X_4+Y_4. On a donc deux équations de la forme

$$(16) \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial x} = H\lambda^2+K\lambda+L, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial y} = H_1\lambda^2+K_1\lambda+L$$

et, en égalant les deux valeurs de $\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\,\partial y}$, nous avons une équation

$$(17) \qquad P\lambda^2+Q\lambda+R=0.$$

Si cette équation est identique en λ, c'est-à-dire si les fonctions X_i, Y_i sont telles que P, Q, R s'annulent pour x, y quelconque, il y a une infinité de réseaux de translation relatifs au plan $z_4=0$, *la surface est une surface de Sophus Lie à ∞^1 réseaux conjugués avec cette particularité qu'elle admet en plus des ∞^1 réseaux de Lie un (ou* *plusieurs) réseaux coniques. Ce cas peut se présenter; chaque quadrique est en effet ∞^1 fois surface de translation relativement à un plan tangent quelconque (ce qui fait un total de ∞^3 réseaux de translation) et possède ∞^4 réseaux coniques proprement dits.*

Si P, Q, R ne sont pas identiquement nuls l'équation (17) définit deux valeurs de λ, et il peut se faire que l'une d'elles, ou même toutes deux, satisfassent aux équations (16) : nous donnons plus loin (exemple de M. Engel) des exemples de l'un et l'autre type.

En tous cas, soit dans le cas d'intégrabilité illimitée, soit dans le cas d'intégrabilité limitée, on trouve (exactement comme dans le cas précédent, surfaces de Sophus Lie) une série d'équations de conditions, de la forme $\Sigma\xi\eta = 0$, où les ξ s'expriment au moyen des X_i et de leurs dérivées sous forme de polynomes entiers à coefficients numériques, et de même pour les η au moyen des Y_i; on sait discuter ces équations et en trouver toutes les solutions : *théoriquement* du moins, car, *pratiquement*, les calculs sont fort longs. Mais l'essentiel est d'avoir trouvé quelques exemples simples qui prouvent l'existence effective de surfaces de ce type; d'autre part, d'après la forme même des équations différentielles trouvées entre les X_i d'une part, entre les Y_i de l'autre, on voit que les *surfaces obtenues quand on a un réseau conique et un réseau de translation sont analytiques ainsi que la courbe lieu des sommets des cônes circonscrits;* cela tient à ce que les équations entre X_1, X_2, X_3, X_4 sont en nombre au moins égal à 3; d'autre part nous constaterons, sur les exemples donnés plus loin, que cette fois *les courbes décrites par les sommets des cônes circonscrits ne sont plus nécessairement algébriques;* cette circonstance explique pourquoi la recherche actuelle est beaucoup plus difficile que celle des surfaces de Sophus Lie : *nous n'avons plus le secours si précieux du théorème d'Abel.*

Nous devons signaler une difficulté se présentant quand on écrit $\rho = X_4 + Y_4$, plutôt que $\rho = \Sigma a_i(X_i + Y_i)$, où les a_i seraient des constantes indéterminées : c'est que nous faisons jouer un rôle spécial au plan relatif au réseau de translation cherché; si donc, en dehors du réseau (conique proprement dit ou de translation) supposé existant *a priori*, il y a deux réseaux de translation, relatifs chacun à un plan différent, nous ne trouverons, en écrivant $\rho = X_4 + Y_4$, qu'un réseau et le problème précis de trouver des surfaces qui auraient plusieurs réseaux de translation, chaque réseau correspondant à un plan différent ne se trouve pas résolu dans son ensemble; il faudra donc, pour ce problème signalé à l'instant, laisser $\rho = \Sigma a_i(X_i + Y_i)$.

5. Réseaux coniques. — Cette fois, que le premier réseau soit conique proprement dit ou de translation, la fonction ρ donne une dérivée seconde $\frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial y}$ non nulle et la troisième équation (11) fournit λ au moyen de A, B, ..., E et ρ; remplaçant λ par la valeur en jeu, les deux premières équations (11) sont nécessaires et suffisantes; ce sont deux équations du troisième ordre en ρ. Écrivons-les sous la forme

$$(e) \qquad e \equiv \frac{\partial \lambda}{\partial x} - H\lambda^2 - K\lambda - L = 0,$$

$$(f) \qquad f \equiv \frac{\partial \lambda}{\partial y} - H_1\lambda^2 - K_1\lambda - L_1 = 0,$$

$$\lambda = -\frac{A\rho_{xx} + B\rho_{yy} + C\rho_x + D\rho_y + E\rho}{\rho_{xy}}.$$

On a

$$(18) \qquad \left\{ \begin{aligned} & H = -\frac{1}{A}(\log\rho)_y, \qquad K = \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{C}{A}, \\ & L = 2D + 4B(\log\rho)_y - A\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{B}{A}\right), \\ & H_1 = -\frac{1}{B}(\log\rho)_x, \qquad K_1 = \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial y} - \frac{D}{A}, \\ & L_1 = 2C + 4A(\log\rho)_x - B\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{A}{B}\right). \end{aligned} \right.$$

Les fonctions K, K_1 ne dépendent pas de ρ, mais H, H_1, L, L_1 font intervenir ρ et ses dérivées du premier ordre.

Suivant la méthode générale, on doit adjoindre aux équations $e = 0$, $f = 0$ les équations dérivées successives; or bien que les équations $e_x = 0$, $e_y = 0$, $f_x = 0$, $f_y = 0$ soient en nombre 4 et contiennent les 5 dérivées d'ordre 4 de ρ, *ces 5 dérivées peuvent être éliminées entre ces 4 équations*, si l'on a soin d'écrire

$$e_y \equiv \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial y} - H_y\lambda^2 - K_y\lambda - L_y - 2(H\lambda + K)(H_1\lambda^2 + K_1\lambda + L_1),$$

$$f_x \equiv \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial y} - H_{1x}\lambda^2 - K_{1y}\lambda - L_{1y} - 2(H_1\lambda + K_1)(H\lambda^2 + K\lambda + L),$$

En retranchant, on a l'équation

$$(g)\qquad g \equiv P\lambda^2 + Q\lambda + R = 0,$$

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} P &\equiv \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial H_1}{\partial x} + HK_1 - KH_1, \\ Q &\equiv \frac{\partial K}{\partial y} - \frac{\partial K_1}{\partial x} + 2(HL_1 - H_1L), \\ R &\equiv \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial L_1}{\partial x} + KL_1 - K_1L. \end{aligned}\right.$$

L'équation $g = 0$ *ne contient même les dérivées de* ρ *que jusqu'à l'ordre* 2. Les équations $e = 0$, $f = 0$, $\frac{\partial g}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$ ne contiennent les dérivées de ρ que jusqu'à l'ordre 3, et les dérivées d'ordre 3 figurent *linéairement*. On écrira, bien entendu,

$$\begin{aligned} g_x &\equiv P_x\lambda^2 + Q_x\lambda + R_x + (2P\lambda + Q)(H\lambda^2 + K\lambda + L), \\ g_y &\equiv P_y\lambda^2 + Q_y\lambda + R_y + (2P\lambda + Q)(H_1\lambda^2 + K_1\lambda + L_1), \end{aligned}$$

et les équations $e = 0$, $f = 0$, $\frac{\partial g}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$ sont, en n'écrivant explicitement que les termes d'ordre 3,

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} &A\rho_{xy}\rho_{xxx} - (A\rho_{xx} + B\rho_{yy})\rho_{xxy} + B\rho_{xy}\,\rho_{xyy} + \ldots = 0, \\ &A\rho_{xy}\,\rho_{xxy} + (A\rho_{xx} + B\rho_{yy})\rho_{xyy} + B\rho_{xy}\rho_{yyy} + \ldots = 0, \\ &A\,\rho_{xxx} - B\,\rho_{xyy} + \ldots = 0, \\ &-A\,\rho_{xxy} + B\,\rho_{yyy} + \ldots = 0. \end{aligned}\right.$$

Les dérivées d'ordre 3 sont donc déterminées d'une façon unique au moyen de ρ, $\frac{\partial \rho}{\partial x}$, $\frac{\partial \rho}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 \rho}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2}$ (et des fonctions A, B, ..., E et leurs dérivées) si le déterminant de ces équations linéaires

$$(21)\qquad \delta \equiv (A\rho_{xx} + B\rho_{yy})^2 - 4AB\rho_{xy}^2$$

n'est pas identiquement nul en x, y.

Si donc on suppose $\delta \neq 0$, comme l'équation $g = 0$ établit une relation entre ρ, $\frac{\partial \rho}{\partial x}$, $\ldots$, $\frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2}$, il ne peut y avoir, dans la solution générale éventuelle ρ que cinq arbitraires au plus; d'ailleurs ρ et $a\rho$, où a est une constante arbitraire, donnent le même réseau conique

(u, v), *donc une surface ne peut avoir que ∞^4 réseaux coniques au plus : les quadriques fournissent d'ailleurs ce maximum.* Les conditions de compatibilité à trouver encore s'obtiennent toujours en dérivant $e=0$, $f=0$ et ramenant chaque équation obtenue au dégré 2 ou à un degré inférieur. A ce propos remarquons que les 4 équations

$$(22) \qquad e_x = 0, \quad e_y = 0, \quad f_x = 0, \quad f_y = 0$$

ont été remplacées par

$$(23) \qquad e_x = 0, \quad e_y = 0, \quad g \equiv e_y - f_x = 0, \quad f_y = 0.$$

Donc, la dérivation d'ordre p donne $(p+1)$ équations provenant de e, l'équation $\frac{\partial^p}{\partial y^p}(f) = 0$, et les p équations obtenues en dérivant g un total de $(p-1)$ fois. Au bout d'un nombre fini d'opérations, on sait ou bien trouver les conditions de compatibilité précises et le nombre d'arbitraires de la solution générale ρ ou bien reconnaître si le problème n'a pas de solution. En tous cas les conditions de compatibilité sont toutes de la forme $\Sigma\xi\eta = 0$, où, comme au numéro précédent, les ξ (ou les η) sont des polynomes entiers à coefficients numériques entre les X_i et leurs dérivées jusqu'à un ordre fini (ou entre les Y_i et leurs dérivées). On sait discuter et résoudre ces équations.

Comme plus haut, *les courbes décrites par les sommets des cônes circonscrits sont analytiques, dès que la surface contient au moins deux réseaux.*

Le cas $\delta = 0$, s'il peut exister, se traite de même; d'abord $\delta = 0$ est une nouvelle équation d'ordre 2 pour ρ; en vertu de $\delta = 0$, l'élimination des dérivées ρ_{xxx}, ρ_{xxy}, ρ_{xyy}, ρ_{yyy} peut se faire entre les 4 équations (20), et il reste une nouvelle équation d'ordre 2; on a ainsi 3 équations d'ordre 2 (l'une étant $g=0$); les seules arbitraires sont ρ, $\frac{\partial\rho}{\partial x}$, $\frac{\partial\rho}{\partial y}$ (au plus) et, pour la raison indiquée plus haut, un réseau de cette espèce ne peut dépendre que de deux paramètres au plus.

Les quadriques possèdent ∞^4 réseaux coniques conjugués, qui sont doublement de Kœnigs : on coupe la quadrique par un faisceau de plans d'axe D et par le faisceau dont l'axe est la droite D′ conjuguée de D. En ramenant la quadrique à une sphère par homographie, on voit qu'il n'y a pas d'autres réseaux conjugués coniques sur une quadrique. Si D est tangente à la quadrique, D′ est tangente aussi et au même point que D : le réseau obtenu est donc de translation pour le plan tangent en jeu; il y a ∞^2 plans tangents, dont chacun donne ∞^1 réseaux de cette nature : *au total* ∞^3 *réseaux de translation parmi les* ∞^4 *réseaux coniques*.

Le géomètre russe J. Blank a étudié *les surfaces qui admettent deux réseaux conjugués doublement de Kœnigs, les axes du premier réseau étant côtés opposés d'un quadrilatère gauche, et les axes du second étant les deux autres côtés de ce quadrilatère; les diagonales sont alors axes d'un troisième réseau doublement de Kœnigs;* le tétraèdre ainsi obtenu étant tétraèdre de référence, on trouve cinq types de surfaces

1° $$x^k + y^k + z^k + t^k = 0,$$

2° $$x^\alpha y^\beta = z^\gamma t^\delta, \qquad \alpha + \beta = \gamma + \delta,$$

3° $$x^k + y^k + z t^{k-1} + t^k = 0,$$

4° $$e^{\frac{z}{t}} = \left(\frac{x}{t}\right)^m \left(\frac{y}{t}\right)^n,$$

5° $$(x^2 + y^2)\, e^{\mu \operatorname{arc\,tang} \frac{t}{z}} = (z^2 + t^2)\, e^{\lambda \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}}.$$

On remarque que le 5ᵉ type peut être écrit

$$(x + iy)^{1 - \frac{\lambda}{2i}} (x - iy)^{1 + \frac{\lambda}{2i}} = (z + it)^{1 - \frac{\mu}{2i}} (z - it)^{1 + \frac{\mu}{2i}},$$

ce qui est un cas particulier de 2°.

6. Étude d'un cas particulier. — Le cas, que le professeur Engel a étudié, correspond à *la double représentation paramétrique*

$$(24) \qquad \left\{ \begin{array}{cccc} x & y & X + Y & 1 \\ 1 & U + V & U_1 + V_1 & U_2 + V_2 \end{array} \right.$$

(*deux réseaux de translation pour deux plans différents,* $x = 0$ *pour le second,* $t = 0$ *pour le premier; le premier réseau est constitué de courbes planes dont l'une est dans le plan relatif au second réseau de translation*).

La première représentation conduit au système simultané

$$(25) \qquad s = 0, \qquad Y'' r - X'' t = 0.$$

Avec les notations déjà employées, ρ est égal à x, tandis que u, v sont les intégrales premières de

$$(26) \qquad Y'' dy^2 - \lambda\, dx\, dy - X''\, dx^2 = 0,$$

où λ doit vérifier le système

$$(27) \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\lambda}{Y''}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{X''}{Y''}\right) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\lambda}{X''}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Y''}{X''}\right) - \frac{4Y''}{xX''} - \frac{\lambda^2}{xX''^2} = 0.$$

On a ici la bonne chance que *la première équation puisse s'intégrer, ce qui simplifie notablement la discussion.* On a

$$(28) \qquad \lambda = \eta - X' \frac{Y'''}{Y''},$$

où η est une fonction inconnue de y; la seconde équation (27) devient donc l'équation [1] unique à discuter :

$$(29) \quad \eta^2 - 2\eta \frac{Y'''}{Y''} X' + \frac{Y'''^2}{Y''^2} X'^2 - \eta' x X'' + x X' X'' \left(\frac{Y'''}{Y''}\right)' + Y''(xX''' + 4X'') = 0.$$

C'est une équation $\Sigma\xi\eta = 0$ de la forme annoncée, à 6 termes; elle entraîne p équations linéaires entre les ξ et $6 - p$ entre les η. Nous remarquerons que ni X'', ni Y'' ne doivent être nulles; en effet, si l'on avait $X \equiv ax + b$, la surface $(x, y, ax + b + Y, 1)$ serait homographiquement équivalente à $(x, y, Y, 1)$, cône ou cylindre, et l'une des familles d'un réseau conjugué est toujours formée de génératrices; on écarte donc ce cas; de même Y'' ne peut être nul. Donc, les 6 fonctions ξ, à savoir

$$(30) \qquad 1, \quad X', \quad X'^2, \quad xX'', \quad xX'X'', \quad xX''' + 4X'',$$

sont telles que 1, X', X'^2 ne sont liées par aucune relation linéaire (sinon X' serait constant, et X'' nul). Si 1, X', X'^2 étaient les seules quantités ξ indépendantes, le quotient des deux trinomes en X',

---

[1] Le Professeur Engel arrive, par une autre méthode, à cette même équation, où η se trouve remplacé par $(-Y''Y_1)$, Y_1 étant une fonction de y.

auxquels on pourrait égaler xX'' et $(xX'')X'$, donnerait une équation

$$X' = (a + bX' + cX'^2) : (a_1 + b_1 X' + c_1 X'^2),$$

et l'on retomberait sur X' constant; *donc, il y a au moins 4 fonctions ξ indépendantes;* elles ne peuvent être indépendantes toutes les six, sinon Y'' serait nul; donc, 4 ou 5 fonctions ξ sont indépendantes, *autrement dit, les 6 fonctions η vérifient 4 ou 5 relations linéaires :* il y en a 2 ou 1 seulement que l'on peut prendre pour variables linéairement indépendantes; *donc, 3 d'entre elles, quel que soit le choix opéré, sont liées par une relation linéaire;* prenons, par exemple,

$$\eta^2, \quad \eta\frac{Y'''}{Y''}, \quad \left(\frac{Y'''}{Y''}\right)^2. \tag{31}$$

On a donc ou bien $Y''' = 0$, ou bien $\eta = a\frac{Y'''}{Y''}$, où a est une constante nulle ou non.

7. Première solution. — Considérons le premier cas $Y''' = 0$, $Y'' = a$, où a est constant et non nul. L'équation (29) devient

$$\eta^2 - \eta' xX'' + a(xX''' + 4X'') = 0 \tag{32}$$

En dérivant deux fois en x et y, on a

$$(\eta')'(xX'')' = 0.$$

L'hypothèse $xX'' = b$, où b est constant, donne

$$xX''' + 4X'' = (xX'')' + 3X'' = \frac{3b}{x} \qquad \text{et} \qquad \eta^2 - b\eta' + \frac{3ab}{x} = 0,$$

égalité impossible, puisque $\frac{3ab}{x}$ devrait être constant; donc c'est η' qui est une constante b,

$$\eta = by + c \qquad \text{et} \qquad (by + c)^2 - bxX'' + a(xX''' + 4X'') = 0;$$

les deux quantités $bxX'' - a(xX''' + 4X'')$ et $(by + c)^2$ sont donc égales à une même constante, de sorte que $b = 0$, $\eta = c$, $xX''' + 4X'' = -\frac{c^2}{a}$,

$\left(X'' + \frac{c^2}{4a}\right)x^4 = d$, où d est une nouvelle constante, nulle ou non. On a ainsi

$$(33)\quad X = \frac{d}{6x^2} - \frac{c^2}{8a}x^2 + ex + f, \qquad Y = \frac{ay^2}{2} + a_1 y + a_2, \qquad \lambda = c; \qquad a \neq 0.$$

Une transformation homographique simple permet de réduire au type

$$(\mathrm{I})\quad z = \frac{d}{6x^2} - \frac{bx^2}{8} + \frac{a}{2}y^2, \qquad X = \frac{d}{6x^2} - \frac{bx^2}{8}, \qquad Y = \frac{ay^2}{2}, \qquad \lambda^2 = ab,$$

(la valeur de λ est obtenue en écrivant que, dans X, le coefficient de $\frac{-x^2}{8}$ est $\frac{\lambda^2}{a}$; *la fonction λ a donc deux valeurs si $b \neq 0$, une seule si b est nulle*). Le cas $d = 0$ donne une quadrique, solution évidente que nous pouvons écarter. L'homographie annoncée permet de supposer $d = 1$, $a = 1$; pour la commodité des calculs, on peut supposer $b = \beta^2$; u, v sont intégrales de $\left(dy - \frac{\varepsilon\beta}{2}dx\right)^2 - \frac{dx^2}{x^4} = 0$; nous posons donc ($\varepsilon = \pm 1$)

$$(34)\qquad y - \frac{\varepsilon\beta}{2} - \frac{1}{x} = u, \qquad y - \frac{\varepsilon\beta}{2} + \frac{1}{x} = v,$$

et l'on trouve sans peine les deux représentations

$$(\mathrm{I})\qquad \left|\begin{array}{c|c|c|c} x & y & \dfrac{1}{6x^2} - \dfrac{\beta^2 x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} & 1 \\ \hline 1 & \dfrac{v^2 - u^2 + 2\varepsilon\beta}{4} & \dfrac{v^3 - u^3 + 3\varepsilon\beta(v+u)}{12} & \dfrac{v-u}{2} \end{array}\right|.$$

En reportant, dans la seconde représentation, la coordonnée 1 à la droite, on a une surface de translation au sens ordinaire

$$(35)\quad \xi = \frac{v^2 - u^2 + 2\varepsilon\beta}{4}, \qquad \eta = \frac{v^3 - u^3 + 3\varepsilon\beta(v+u)}{12}, \qquad \zeta = \frac{v-u}{2},$$

qui possède deux réseaux de translation si $\beta \neq 0$; le cône directeur des tangentes aux courbes $v = \text{const.}$, pour la surface (35), a pour équation $2yz = x^2 - \varepsilon\beta z^2$, et le cône analogue pour les courbes $u =$ const. est $2yz = x^2 + \varepsilon\beta z^2$.

Ces deux cônes sont surosculateurs le long de leur génératrice commune $x = z = 0$; ils s'échangent si ε est remplacé par $-\varepsilon$ (du moins pour $\beta \neq 0$). Pour $\beta = 0$, il n'y a plus qu'un réseau avec le cône directeur $x^2 - 2yz = 0$, de sorte qu'une transformation homographique donnerait une surface minima possédant, outre le réseau de longueur nulle, un réseau conjugué doublement de Kœnigs.

Cet exemple montre l'intérêt du problème consistant à trouver toutes les surfaces de Sophus Lie (à 2 ou ∞^1 réseaux de translation) possédant un autre réseau conjugué conique (ou encore de translation).

8. Seconde solution. — Nous reprenons la discussion; Y''' est supposée non nulle, Y'' est variable, $\eta = a\frac{Y'''}{Y''}$, où a est constant, nul ou non. L'équation (29) s'écrit

$$\left(\frac{Y'''}{Y''}\right)^2 (X' - a)^2 + xX''(X' - a)\left(\frac{Y'''}{Y''}\right)' + Y''(xX''' + 4X'') = 0. \tag{36}$$

Remplacer X par $ax + X_1$ et z par $ax + z_1$ revient à une transformation homographique simple, de sorte que, sans restreindre, on peut supposer $a = 0$, $\eta = 0$, $\lambda = -X'\frac{Y'''}{Y''}$. On a donc

$$\left(\frac{Y'''}{Y''}\right)^2 X'^2 + xX'X''\left(\frac{Y'''}{Y''}\right)' + Y''(xX''' + 4X'') = 0. \tag{37}$$

Supposons d'abord que les trois fonctions $\left(\frac{Y'''}{Y''}\right)^2$, $\left(\frac{Y'''}{Y''}\right)'$, Y'' *soient liées par une seule relation à coefficients constants*

$$bY'' + c\left(\frac{Y'''}{Y''}\right)' + d\left(\frac{Y'''}{Y''}\right)^2 = 0, \tag{38}$$

et, par suite, que l'on ait

$$\frac{xX''' + 4X''}{b} = \frac{xX'X''}{c} = \frac{X'^2}{d}. \tag{39}$$

La constante d n'est pas nulle, c non plus; *deux cas se séparent suivant que b est nul ou non.*

Prenons $b=0$. Nous avons le droit de prendre $d=1$; on doit résoudre $xX'''+4X''=0$, $X'=xX'':c$; la première donne $X''=e:x^4$; la seconde, en conséquence, donne $X'=e:cx^3$, mais alors une dérivation donne $-3e:cx^4=e:x^4$, d'où $c=-3$. Le reste est aisé; par une transformation homographique, on peut supposer

$$X=\frac{2}{3x^2},\qquad Y=\frac{1}{2y},\qquad \lambda=\frac{-4}{x^3y},\tag{40}$$

et u, v sont intégrales premières de l'équation

$$\left(2\frac{dx}{x^3}+\frac{dy}{y^2}\right)^2-4\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y}\right)\frac{dx^2}{x^4}=0.\tag{41}$$

On pose donc

$$\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y}}+\frac{1}{x}=2u,\qquad -\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y}}+\frac{1}{x}=2v,\tag{42}$$

et l'on a la double représentation

(II_1)

x	y	$\frac{2}{3x^2}+\frac{1}{2y}$	1
1	$-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{u}\right)$	$\frac{2}{3}(u^3+v^3)$	$u+v$

Le lieu des sommets des cônes circonscrits le long des courbes $u=$ const. ou $v=$ const. est une seule et même conique, de sorte que par homographie on peut obtenir de nouveau une surface minima possédant un réseau conjugué doublement de Kœnigs.

Supposons maintenant $b\neq 0$; prenons $d=1$; on a

$$\frac{X''}{X'}=\frac{c}{x},\qquad X'=ex^c,\qquad X''=ecx^{c-1},\qquad X'''=ec(c-1)x^{c-2}.$$

En égalant dans (39) les rapports extrêmes, on a

$$\left\{\begin{array}{l} c=-1,\qquad be=-2,\qquad X=e\mathrm{L}x+f\qquad (e\neq 0,\ b\neq 0),\\ bY''-\left(\dfrac{Y'''}{Y''}\right)'+\left(\dfrac{Y'''}{Y''}\right)^2=0,\qquad \lambda=-X'\dfrac{Y'''}{Y''}=-\dfrac{e}{x}\dfrac{Y'''}{Y''}.\end{array}\right.\tag{43}$$

L'équation en Y, considérée comme équation du second ordre en Y'' s'intègre par les méthodes classiques, mais la forme du résultat montre (*a posteriori*) qu'il y a avantage (*a priori*) à poser $Y'' = \frac{1}{Y_1}$, d'où

$$(44)\quad Y_1'' = -b, \qquad Y_1 = -\frac{b}{2}[(y-y_0)^2 - b_1], \qquad \lambda = -\frac{e}{x}\,\frac{2(y-y_0)}{b_1-(y-y_0)^2}.$$

En nous débarrassant, par homographie, des constantes superflues, nous aurons donc

$$(\Pi_2)\quad z = -2Lx + Y, \qquad X = -2Lx, \qquad Y'' = \frac{2}{a^2-y^2}, \qquad \lambda = \frac{4y}{x(a^2-y^2)}.$$

Les fonctions u, v sont intégrales premières de

$$(45)\qquad \left(dy - \frac{y}{x}\,dx\right)^2 - a^2\frac{dx^2}{x^2} = 0,$$

de sorte que la constante a n'est pas nulle; on a le droit de prendre $a = 1$, grâce à une homographie. On a donc

$$(46)\quad Y' = L\frac{y+1}{y-1}, \qquad Y = [(y+1)L(y+1) - (y-1)L(y-1)].$$

On a ainsi la double représentation paramétrique

$$(\Pi_2)\quad \left\|\begin{array}{c|c|c|c} x & y & -2Lx + [(y+1)L(y+1) - (y-1)L(y-1)] & 1 \\ \hline 1 & u+v & 2(u-v)L2 + 2(uLu - vLv) & u-v \end{array}\right\|.$$

Comme on a

$$y + 1 = 2ux, \qquad y - 1 = 2vx,$$

les courbes $u =$ const. *ou* $v =$ const. *sont planes*, leurs plans pivotant autour des droites du plan $x = 0$, définies par $y + a = 0$, $y - a = 0$; elles forment un réseau doublement de Kœnigs d'axes concourants; *d'ailleurs le réseau* $x =$ const., $y =$ const. *est aussi formé de courbes planes*, formant un réseau doublement de Kœnigs, les axes du réseau étant ($x = 0$, $t = 0$) et ($y = 0$, $t = 0$); les 4 axes forment trois droites concourantes du plan $x = 0$ et une droite non située dans le plan $x = 0$, mais passant par le point de concours des trois premières. On constate sans peine que l'équation de la surface peut s'écrire

$$\frac{z}{x}=\frac{y+t}{x}\mathrm{L}\left(\frac{y+t}{x}\right)-\frac{y-t}{x}\mathrm{L}\left(\frac{y-t}{x}\right), \tag{47}$$

de sorte qu'en posant

$$\frac{z}{x}=\zeta, \qquad \frac{y+t}{x}=\xi, \qquad \frac{y-t}{x}=\eta \tag{48}$$

on a l'équation élégante

$$\zeta=\xi\log\xi-\eta\log\eta. \tag{49}$$

Avec les axes $\omega\xi\eta\zeta$, la surface (49) est de translation au sens ordinaire, avec un réseau formé de courbes planes dans des plans parallèles; le réseau de Kœnigs $x=$ const., $y=$ const. est défini alors par $\xi-\eta=$ const. et $(\xi+\eta):(\xi-\eta)=$ const., de sorte que l'une des séries de courbes du réseau se trouvent dans des plans parallèles. Le professeur F. Engel avait traité directement ce cas, tout en montrant qu'il rentre dans le cas particulier étudié systématiquement dans ce travail.

9. Troisième et dernière solution. — Nous revenons à l'équation (37), et supposons cette fois que $\left(\frac{\mathrm{Y}'''}{\mathrm{Y}''}\right)^2$, $\left(\frac{\mathrm{Y}'''}{\mathrm{Y}''}\right)'$, Y'' soient liées par deux relations linéaires; autrement dit, puisque Y'' et Y''' sont supposées nulles, on a

$$\frac{\left(\frac{\mathrm{Y}'''}{\mathrm{Y}''}\right)^2}{b}=\frac{\left(\frac{\mathrm{Y}'''}{\mathrm{Y}''}\right)'}{c}=\frac{\mathrm{Y}''}{1}, \qquad b\mathrm{X}'^2+cx\mathrm{X}'\mathrm{X}''+x\mathrm{X}'''+4\mathrm{X}''=0 \tag{50}$$

avec deux constantes b, c $(b\neq 0)$. On voit aisément que l'on a

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{\mathrm{Y}'''}{\mathrm{Y}''}=c\mathrm{Y}'+d, \qquad \mathrm{Y}'''=c\mathrm{Y}'\mathrm{Y}''+d\mathrm{Y}'', \qquad \mathrm{Y}''=\frac{c}{2}\mathrm{Y}'^2+d\mathrm{Y}'+e,\\ \qquad (c\mathrm{Y}'+d)^2=b\left(\frac{c}{2}\mathrm{Y}'^2+d\mathrm{Y}'+e\right),\end{array}\right. \tag{51}$$

et comme Y' n'est pas une constante, la dernière équation écrite est une identité, de sorte que $b=2c$ et $2c\mathrm{Y}''=(c\mathrm{Y}'+d)^2$, d'où l'on déduit ($c \neq 0$)

$$
(52) \qquad \left\{ \begin{array}{l} cY + dy + d_1 = -2L(y - y_0), \\ 2cX'^2 + cxX'X'' + xX''' + 4X'' = 0. \end{array} \right.
$$

La dernière équation s'écrit

$$
x(X''' + cX''X') + 4\left(X'' + \frac{c}{2}X'^2\right) = 0.
$$

Elle donne donc avec une nouvelle constante

$$
(53) \qquad X'' + \frac{c}{2}X'^2 = \frac{f}{x^4},
$$

de sorte que, si l'on introduit une nouvelle inconnue ξ définie par

$$
(54) \qquad X' = \frac{2}{c}\left(\frac{1}{x} - \frac{\xi}{x^2}\right),
$$

nous obtenons

$$
(55) \qquad \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{x^2}\left(\xi^2 - \frac{cf}{2}\right), \qquad \lambda = -X'\frac{Y'''}{Y''} = \frac{4}{c}\left(\frac{1}{x} - \frac{\xi}{x^2}\right)\frac{1}{y - y_0}.
$$

Il y a deux cas à distinguer suivant que ξ est constant ou non.

Dans le premier cas, ξ est une constante ξ_0, et en supprimant, par homographie, des constantes sans intérêt, on peut prendre

$$
X = Lx + \frac{\xi_0}{x}, \qquad Y = -Ly, \qquad \lambda = \frac{2}{y}\left(\frac{1}{x} - \frac{\xi_0}{x^2}\right),
$$

et les courbes (u, v) sont les intégrales de l'équation

$$
(56) \qquad \left[\frac{dy}{y} - \left(\frac{1}{x} - \frac{\xi_0}{x^2}\right)dx\right]^2 - \frac{\xi_0^2}{x^4}\,dx^2 = 0,
$$

de sorte que ξ_0 ne doit pas être nulle; une homographie permet donc de prendre $\xi_0 = 1$, et l'on a, sans difficulté,

$$
(57) \quad u = Ly - Lx, \qquad v = Ly - Lx - \frac{2}{x}, \qquad x = \frac{2}{u - v}, \qquad \frac{y}{x} = e^u.
$$

On a ainsi la double représentation

(III_1)

x	y	$Lx + \frac{1}{x} - Ly$	1
1	e^u	$\frac{v^2 - u^2}{4}$	$\frac{u - v}{2}$

.

Les sommets des cônes circonscrits sont, pour le réseau (u, v) répartis sur les deux courbes

$$\left(0,\ e^u,\ -\frac{u}{2},\ 1\right), \qquad (0,\ 0,\ v,\ -1)$$

dont la première est transcendante, et cette circonstance est importante pour la théorie générale des réseaux coniques, comme nous l'avons fait remarquer déjà.

Le second cas de cette dernière solution correspond à

$$(58) \qquad \frac{d\xi}{\xi^2 - a^2} = \frac{dx}{x}, \qquad \frac{1}{x} = \frac{1}{2a} \mathrm{L} \frac{\xi + a}{\xi - a}, \qquad \xi = a \left(\frac{e^{\frac{a}{x}} + e^{-\frac{a}{x}}}{e^{\frac{a}{x}} - e^{-\frac{a}{x}}} \right)$$

et (u, v) sont intégrales de l'équation

$$(59) \qquad \left[\frac{dy}{y} - \left(\frac{1}{x} - \frac{\xi}{x^2}\right) dx\right]^2 - \frac{a^2\, dx^2}{x^4} = 0,$$

donc a est encore non nul; on peut, par homographie, supposer $a = 1$ et nous pourrons prendre

$$(60) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{L}y - \mathrm{L}x - \mathrm{L}\left(e^{\frac{2}{x}} - 1\right) = \mathrm{L}u, \qquad \mathrm{L}y - \mathrm{L}x - \mathrm{L}\left(1 - e^{-\frac{2}{x}}\right) = \mathrm{L}v, \\ \qquad \dfrac{v}{u} = e^{\frac{2}{x}}, \qquad \dfrac{2}{x} = \mathrm{L}v - \mathrm{L}u, \qquad \dfrac{y}{x} = v - u. \end{array} \right.$$

On a ainsi la double représentation

(III_2)

x	y	$\mathrm{L}x + \mathrm{L}\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}\right) - \mathrm{L}y$	1
1	$v - u$	$\dfrac{(\mathrm{L}u)^2 - (\mathrm{L}v)^2}{4}$	$\dfrac{\mathrm{L}v - \mathrm{L}u}{2}$

Les sommets des cônes circonscrits, pour le second réseau, sont répartis sur les courbes transcendantes

$$\left(0,\ -1,\ \frac{2\mathrm{L}u}{u},\ -\frac{1}{2u}\right), \quad \left(0,\ 1,\ \frac{-2\mathrm{L}v}{v},\ \frac{1}{2v}\right).$$