JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ARNAUD DENJOY

Sur les séries de Taylor admettant leur cercle de convergence comme coupure

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 19, nº 1-4 (1940), p. 45-49.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1940_9_19_1-4_45_0>

Sur les séries de Taylor admettant leur cercle de convergence comme coupure;

PAR ARNAUD DENJOY

(Paris).

Parmi la foule d'idées neuves que M. Borel a introduites dans l'Analyse, une des plus curieuses est que, si les coefficients d'une série de Taylor sont choisis successivement chacun indépendamment de ceux qui le précèdent, le cercle de convergence supposé de rayon positif fini, est très généralement une coupure pour la fonction analytique égale à la série à l'intérieur du cercle.

Ainsi, les séries de Taylor à rayon de convergence fini non nul et dont les coefficients ne sont pas liés entre eux par des lois très particulières, admettent leur cercle de convergence comme coupure.

Je voudrais donner des exemples très simples de séries de Taylor à coefficients tous réels non négatifs, dépendant d'une infinité de paramètres, et dont la somme possède son cercle de convergence comme coupure. Par contre, les coefficients de cette série sont les carrés des modules des coefficients d'une autre série prolongeable uniformément dans tout le plan et n'ayant pour singularité qu'un ensemble parfait de mesure nulle.

Ces sortes de séries et d'autres analogues se rattachent à certaines classes d'ensembles parfaits dont j'ai publié la définition et les propriétés en 1920 (1).

P étant un ensemble parfait linéaire, j'appelle *segment isolant* de P,

(1) *Comptes rendus du Congrès International des Mathématiciens*, Strasbourg, 1920. *Academia dei Lincei*, 1920.

tout segment séparant deux intervalles contigus (finis ou infinis). Nous disons que P *possède le caractère* (A) *si tout segment isolant de* P *est au moins aussi long que le plus petit des deux intervalles contigus qui le bordent.*

L'ensemble des distances de tous les couples de points d'un ensemble parfait présentant le caractère (A) *est un segment continu* (égal à la longueur du segment mineur contenant l'ensemble parfait).

L'ensemble parfait classique de Cantor, obtenu en retranchant d'un segment l'intervalle occupant son tiers médian, et en répétant l'opération sur chacun des deux segments subsistant, et ainsi indéfiniment, l'ensemble parfait résidu de ces opérations possède le caractère (A). D'un certain point de vue cet ensemble est minimum, car il serait impossible d'agrandir si peu que ce fût un de ses intervalles contigus sans que l'ensemble cessât de présenter le caractère (A). Cet exemple montre en même temps qu'un ensemble parfait peut posséder le caractère (A) et être de mesure nulle.

Soient P et Q deux ensembles parfaits linéaires possédant le caractère (A) et tels en outre que le plus grand intervalle contigu de chacun d'eux soit moindre que le segment minimum contenant l'autre. Soient a, $b(a < b)$ et c, $d(c < d)$ les extrémités de P et de Q respectivement. *Si x décrit* P, *et si y décrit* Q, *l'ensemble des différences $y - x$ forme le segment continu $c - b$ à $d - a$.*

Il suffit de prendre pour Q l'homothétique de P par rapport à un point de l'axe des x avec le rapport $-\alpha$, pour voir que, quel que soit α inférieur en valeur absolue au rapport du segment ab à l'intervalle contigu maximum de P (ce rapport vaut au moins 3), l'ensemble $x + \alpha y$, où x et y décrivent l'un et l'autre P, est un segment continu de longueur $(b - a)(1 + |\alpha|)$.

En particulier, *si* P *possède le caractère* (A), *les milieux des segments limités par deux points quelconques de* P *forment le segment continu joignant les extrémités de* P.

Considérons une fonction $f(z)$ analytique, holomorphe à l'origine, le cercle d'holomorphie C ayant ce point pour centre étant $|z| = 1$. Soit

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots$$

le développement de cette fonction dans C. Supposons que les singularités de la série du second membre sur C forment un ensemble parfait P dont les points ont pour arguments θ les éléments d'un ensemble parfait linéaire p présentant le caractère (A) et ayant pour extrémités zéro et π (généralement, p prolongé par translation égale à 2π n'admet pas d'intervalle contigu supérieur à π).

Considérons la série

$$F(z) = \sum c_n \bar{c}_n z^n,$$

$\bar{t}$ désignant suivant l'usage la conjuguée de la quantité complexe t. La série donnant $F(z)$ a elle aussi pour cercle de convergence C.

Les singularités de la série $\sum \bar{c}_n z^n = \bar{f}(z)$ forment l'ensemble $\bar{P}$ symétrique de P par rapport à l'axe réel. Les arguments des points de $\bar{P}$ forment l'ensemble des nombres $-\theta$, θ décrivant p. D'après un théorème classique de M. Hadamard, étendu par M. Borel, les singularités $F(z)$ sont toutes dans l'ensemble des nombres $e^{i(\theta'-\theta)}$, θ et θ' décrivant l'un et l'autre p. Or, p étant de classe (A) et son diamètre étant π, l'ensemble $\theta'-\theta$ couvre le segment $-\pi, \pi$. Donc on peut s'attendre à ce que tout le cercle C soit singulier pour la fonction $F(z)$.

Cependant, le théorème de M. Hadamard n'entraînant pas que *tous* les points $e^{i(\theta'-\theta)}$ soient nécessairement des singularités pour $F(z)$, il est bon de s'assurer par un exemple que la fonction $F(z)$ peut effectivement admettre C comme coupure.

A cet effet, soient $a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots$ une suite de points partout denses sur P, et θ_m l'argument de a_m, entre zéro et π. On peut choisir successivement les θ_m de façon qu'entre un nombre quelconque d'entre eux et 2π n'existe aucune relation linéaire à coefficients entiers. Pour cela on décompose p en une infinité de portions p_m telles que chaque point de p appartienne à une infinité d'entre elles, le diamètre de p_m tendant en outre vers zéro quand m croît. De la même manière qu'on décompose le segment $0, 1$ en une infinité de segments $\frac{q}{2^r}, \frac{q+1}{2^r}$ ($q \geqq 0$ et $r > 0$ entiers). Chacun des p_m est non dénombrable. Sur p_1 on choisit θ_1 incommensurable avec π. Sur p_2, on choisit θ_2 étranger à l'ensemble dénombrable $\alpha_0\pi + \alpha_1\theta_1$, α_0 et α_1 étant deux nombres rationnels quelconques. Et ainsi de proche en proche; θ_m sur p_m est distinct des combinaisons linéaires à coefficients rationnels de $\pi, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{m-1}$.

En particulier on sera assuré que toutes les différences $\theta_r - \theta_s$ seront deux à deux différentes, si les couples correspondants (r, s) ne sont pas identiques (et si $r \neq s$).

D'autre part, les θ_m sont partout denses sur p. Par suite les différences $\theta_r - \theta_s$ sont partout denses sur le segment $-\pi, +\pi$.

Soit maintenant une suite A_m de nombres tous non nuls et tels que $\sum |A_m|$ soit fini. Posons

$$f(z) = \sum \frac{A_m}{a_m - z}.$$

D'après un théorème bien connu de Poincaré, $f(z)$ devient infini sur chaque rayon issu de C aboutissant en l'un des a_m, en sorte que $f(z)$ est singulier en tout point de P. D'ailleurs, tout point étranger à P étant à distance minimum positive des a_m, $f(z)$ est holomorphe en un tel point. $f(z)$ est donc analytique uniforme dans tout le plan, son ensemble de singularités étant P. P peut être *de mesure linéaire nulle* (*a fortiori* totalement discontinu), et c'est là, évidemment, le cas le plus intéressant. Calculons $F(z)$. D'après

$$c_n = \sum_m A_m a_m^{-n-1}$$

on trouve

$$|c_n|^2 = c_n \bar{c}_n = \sum A_r \bar{A}_s (a_r \bar{a}_s)^{-n-1},$$

et

$$F(z) = \sum |c_n|^2 z^n = \sum \frac{A_r \bar{A}_s}{a_r \bar{a}_s - z},$$

La série $\sum A_r \bar{A}_s$ est absolument convergente puisque,

$$\sum |A_r \bar{A}_s| = \left(\sum |A_m|\right)^2 < \infty.$$

D'autre part, nous avons observé que tous les nombres $a_r \bar{a}_s = e^{i(\theta_r - \theta_s)}$ sont deux à deux distincts (sauf si $r = s$). Les A_m étant tous non nuls, les résidus des pôles formels $a_r \bar{a}_s$ de $F(z)$ sont tous non nuls, même celui du pôle 1, dont le résidu est $\sum |A_m|^2$. Finalement, sur tout rayon de C aboutissant à un quelconque des $a_r\bar{a}_s$, $F(z)$ devient infini. Les points $a_r\bar{a}_s$ étant partout denses sur C, *ce cercle est une coupure pour* $F(z)$.

Les sommes $\theta_r + \theta_s$ étant partout denses sur le segment $0, 2\pi$, on voit encore que la série $\sum c_n^2 z^n$ admet le cercle C comme coupure. De même,

$$F_{k,h}(z) = \sum_n c_n^k \bar{c}_n^h z^n = \sum \frac{A_{r_1} A_{r_2} \ldots A_{r_k} \bar{A}_{s_1} \ldots \bar{A}_{s_h}}{a_{r_1} a_{r_2} \ldots a_{r_k} \bar{a}_{s_1} \ldots \bar{a}_{s_h} - z}$$

$$(k \geqq 0,\ h \geqq 0,\ k + h \geqq 2),$$

admet C pour coupure. Car, les points $\beta = a_{r_1} a_{r_2} \ldots a_{r_k} \bar{a}_{s_1} \ldots \bar{a}_{s_h}$ sont deux à deux distincts, du moins si l'on exclut les groupements d'indices r_i, s_j comprenant au moins un r_i égal à un s_j. Bien entendu, si deux ou plusieurs r_i sont égaux entre eux, ou deux ou plusieurs s_j, les termes correspondants comptent dans $F(z)$ avec le coefficient qu'a β dans la somme développée

$$\left(\sum a_r\right)^k \left(\sum \bar{a}_s\right)^h.$$

Soit $\nu_n = ln + q\ (q > 0,\ l \geqq 2)$ une suite d'indices en progression arithmétique de raison au moins égale à 2.

Considérons la série $\sum c_{\nu_n} z^n$

$$\sum c_{\nu_n} z^n = \sum_n \sum_m A_m a_m^{-nl-q-1} z^n = \sum \frac{A_m a_m^{l-q-1}}{a_m^l - z}.$$

Les points a_m^l sont deux à deux distincts sur C, puisqu'il n'existe aucune relation à coefficients rationnels non nuls entre un nombre fini de θ_m et π. Les arguments $l\theta_m$ des points a_m^l sont tels que les points $l(\theta_r - \theta_s)$ sont partout denses sur l'intervalle $-l\pi$, $+l\pi$, et les nombres $l(\theta_r - \theta_s) + 2k\pi$ sont deux à deux distincts (si $r \neq s$) quels que soient les entiers r, s, k. Donc, la série

$$\sum |c_{\nu_n}|^2 z^n$$

admet encore son cercle de convergence comme coupure, quelle que soit la progression arithmétique ν_n.