

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

LUCIEN HIBBERT

**Réseau  $\log R = \text{const.}$ ,  $V = \text{const.}$ , des fonctions entières**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 9<sup>e</sup> série*, tome 19, n° 1-4 (1940), p. 395-409.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1940\\_9\\_19\\_1-4\\_395\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1940_9_19_1-4_395_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Réseau  $\log R = \text{const.}$ ,  $V = \text{const.}$ , des fonctions entières;*

**PAR LUCIEN HIBBERT.**

**1. PROPRIÉTÉS DES COURBES  $R$ , OU COURBES D'ÉGAL MODULE (1).** — Soit  $f(z)$  la fonction déduite d'une fonction entière en ramenant en  $A$  à distance finie, le point singulier essentiel :  $R = |f(z)|$ ;  $V = \arg f(z)$ .

*En un point ordinaire  $a$ ; sens positif, sens négatif sur  $R_a$ .* — En  $a$ , on trouve une et une seule branche de  $R = |f(z)|$ , ou de  $R_a = |f(a)|$ , qui passe par  $a$ . Sur cette branche, il existe un sens  $V$  croissant. *Ce sens  $V$  croissant, nous l'appelons le sens positif* sur  $R_a$ , tandis que *le sens  $V$  décroissant est le sens négatif*. Pour un observateur debout sur  $R$  et regardant dans le sens positif, les courbes  $R > R_a$  sont à droite et les courbes  $R < R_a$  sont à gauche.

*En un zéro de  $f(z)$ .* — Les zéros  $a_i$  de  $f(z)$ , en dehors de  $A$ , sont des points centres des courbes  $R$ . Si le zéro est d'ordre  $n$ ,  $V$  varie  $2n\pi$  sur  $R$  dans le voisinage du zéro.

*En un point  $j$ .* — Les points  $j$  sont les zéros de  $f'(z)$ , en dehors de  $A$ . Le point  $j$  est d'ordre  $(q-1)$ , si  $j$  est zéro d'ordre  $(q-1)$  de  $f'(z)$ .

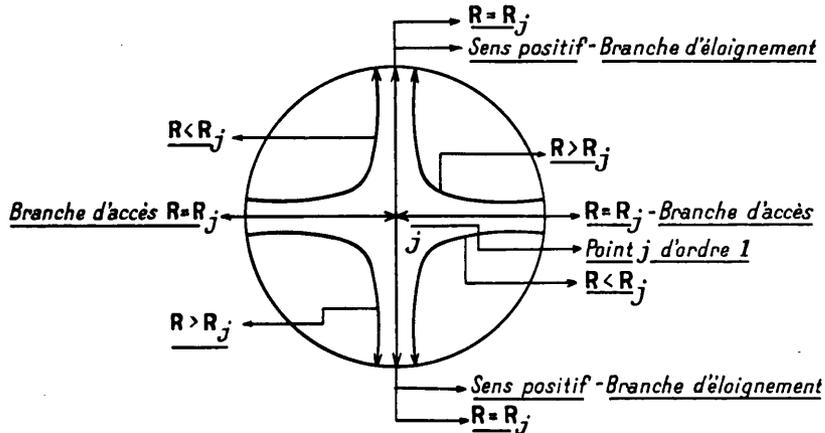
Par un point  $j$  d'ordre  $(q-1)$ , il passe  $2q$  branches de  $R_j = |f(j)|$ , formant au voisinage de  $j$  une étoile régulière.

---

(1) *C. R. Acad. Sc.*, 205, 1937, p. 1121; Lucien HIBBERT, *Thèse*, Chap. I, p. 4; Chap. IV, p. 63. Gauthier-Villars, Paris, 1938.

La figure représente un point  $j$  d'ordre 1.

Fig. 1.



*Branches d'accès.* — Les branches d'accès,  $R = R_j$ , sont les branches sur lesquelles le sens positif ou sens  $V$  croissant amène en  $j$ , à la gauche d'une branche d'accès  $R < R_j$ , et à sa droite  $R > R_j$ .

*Branches d'éloignement.* — Les branches d'éloignement  $R = R_j$  amènent en  $j$  dans le sens négatif ou sens  $V$  décroissant. A la droite d'une branche d'éloignement parcourue dans le sens négatif  $R < R_j$ , et à sa gauche  $R > R_j$ .

*Parcours positif  $R$  droit ou gauche.* — Si, arrivé en  $j$  sur  $R = R_j$  on veut garder la continuité du faisceau  $R > R_j$  à droite, on passera en  $j$  de la branche d'accès à la branche d'éloignement à droite. C'est le parcours positif droit.

Si, au contraire, on veut maintenir la continuité du faisceau  $R < R_j$ , on passera en  $j$  à la branche d'éloignement à gauche. C'est le parcours positif gauche.

*Parcours négatif droit ou gauche.* — De même le parcours négatif est droit pour la continuité de  $R < R_j$ , et gauche pour  $R > R_j$ .

*Cassures  $R$  en  $j$ .* — Les parcours positifs droits ou gauches, négatifs droits ou gauches sont des chemins qui en  $j$  admettent deux

demi-tangentes non dans le prolongement l'une de l'autre; ces chemins subissent une cassure en  $j$ . Les deux portions de chemin, séparées par le point  $j$ , sont les éléments ou les branches de la cassure.

*Nombre des branches d'accès et d'éloignement en  $j$ .* — En un point  $j$  d'ordre  $(q - 1)$ , on distingue  $q$  branches d'accès et  $q$  branches d'éloignement. Chaque branche d'accès est encadrée de deux branches d'éloignement et réciproquement.

*Parcours positif droit ou gauche d'une branche de courbe  $R$ .* — Soit  $a$  un point ordinaire de  $f(z)$ ; à partir de  $a$ , parcourons la branche de  $R_a$ , qui passe par  $a$ , dans le sens positif droit. On peut faire trois hypothèses.

1° *On revient en  $a$  après avoir décrit une boucle fermée ne contenant pas  $A$ .* — Les courbes  $R < R_a$  sont nécessairement à l'intérieur de la boucle; sinon la fonction analytique  $\log R$ , qui ne peut atteindre l'infini positif qu'en  $A$ , admettrait un maximum dans la boucle, ce qui est impossible. Le nombre des zéros de  $f(z)$  dans la boucle est égal au quotient par  $2\pi$  de la variation positive de  $V$  sur la boucle, c'est-à-dire que  $V$  croît d'autant de fois  $2\pi$  qu'il y a de zéros de  $f(z)$  dans la boucle.

2° *On revient en  $a$  après avoir décrit une boucle fermée contenant  $A$  dans le domaine qu'elle délimite.* — À l'extérieur de la boucle, on doit avoir  $R < R_a$ , puisqu'en effet  $R = |f(z)|$  ne peut devenir infini qu'au point  $A$ .

3° *Le parcours positif droit aboutit en  $A$ .* — Appelons  $l_1$  la branche de courbe qui à partir de  $a$  conduit en  $A$ ; et effectuons de  $a$ , comme point de départ, le parcours négatif gauche qui correspond au parcours positif droit, soit  $l_2$  le chemin décrit. Le chemin  $l_2$  poursuivi ne peut pas atteindre le chemin  $l_1$  à droite; le point de rencontre serait un point  $j$ , et en un tel point,  $l_1$  étant parcouru à droite, aucun élément de  $R = R_a$  ne peut s'insérer entre la branche d'accès à  $j$  et la branche d'éloignement qui la continue.

Supposons que  $l_2$  atteigne  $l_1$  à gauche. Le point de rencontre est un

point  $j$ . Les deux chemins  $l_1$  et  $l_2$  quitteront le point  $j$  sans coïncider, sinon le sens positif sur  $l_1$  serait le sens négatif sur  $l_2$ .

Le chemin  $l_2$  ne pouvant coïncider avec  $l_1$ , et ne pouvant s'enrouler asymptotiquement autour d'un point distinct de  $A$ , aboutit lui aussi nécessairement en  $A$ .

Si, au lieu de l'hypothèse du parcours positif droit, on avait fait l'hypothèse du parcours positif gauche aboutissant en  $A$ , on aurait trouvé que le parcours négatif droit qui lui correspond aboutit également en  $A$ .

**THÉORÈME I.** — *Toute branche de  $R$ , parcourue dans le sens positif à droite ou à gauche revient au point de départ ou aboutit en  $A$ .*

**THÉORÈME II.** — *Toute branche de  $R$  qui, parcourue positivement à droite (gauche), conduit en  $A$ , conduit également en  $A$ , parcourue négativement à gauche (droite).*

**2. PROPRIÉTÉS DES COURBES  $V$ , OU COURBES D'ÉGAL ARGUMENT,  $V = \arg f(z)$  (1).** — *En un point ordinaire  $a$ ; sens positif, sens négatif sur  $V_a$ . — On trouve une seule branche de  $V = V_a$ , passant par ce point. Sur cette branche de  $V_a$  le sens  $R$  croissant est le sens positif; le sens  $R$  décroissant le sens négatif.*

Pour un observateur debout en  $a$ , et regardant la branche de  $V = V_a$  passant par  $a$  dans le sens positif, les courbes  $V < V_a$  sont à droite; et les courbes  $V > V_a$  sont à gauche.

*En un zéro de  $f(z)$ .* — Les zéros de  $f(z)$ , différents de  $A$ , sont des points nœuds pour les courbes  $V$ . Si le zéro  $a_i$  est d'ordre  $q$ , les courbes  $V$  forment  $q$  pinceaux montants d'origine  $a_i$ ,  $V$  variant dans chaque pinceau de  $0$  à  $2\pi$ , quand on tourne autour de  $a_i$  dans le sens positif.

*En un point  $j$  d'ordre  $(q - 1)$ .* — Le point  $j$ ,  $j \neq A$ , est zéro d'ordre  $(q - 1)$  de  $f'(z)$ . On trouve pour le sens  $R$  croissant ou sens positif,

---

(1) *C. R. Acad. Sc.*, t. 205, 1937, p. 1121; LUCIEN HIBBERT, *Thèse*, Chap. I, p. 9; Chap. IV, p. 63. Gauthier-Villars, Paris, 1938.

$q$  branches d'accès alternant avec  $q$  branches d'éloignement, formant autour de  $j$  et dans son voisinage une étoile régulière à  $2q$  branches.

*Parcours positif V droit ou gauche.* — Arrivé en  $j$  en suivant  $V = V_j$  dans le sens positif pour conserver la continuité à droite des courbes  $V < V_j$ , on prendra la branche d'éloignement à droite. C'est le parcours positif droit.

Le parcours positif gauche conserve la continuité des courbes  $V > V_j$ , en faisant suivre la branche d'accès à  $j$  de la branche d'éloignement à gauche.

*Parcours négatif V droit ou gauche.* — C'est le parcours dans le sens  $V$  décroissant, en prenant en tout point  $j$  la branche à droite, dans le parcours droit, la branche à gauche dans le parcours gauche.

*Cassures V.* — Tout parcours  $V$  admet, en un point  $j$ , deux demitangentes distinctes; le parcours subit donc une cassure en  $j$ . Les deux morceaux de parcours séparés par le point  $j$  forment les deux branches ou éléments de la cassure.

*Parcours positif droit ou gauche d'une branche de courbe V.* — Soit  $a$  un point ordinaire de  $f(z)$ ; suivons la branche de  $V = V_a$ , qui passe par  $a$  dans le sens positif à gauche ou à droite. Dans les deux cas, on n'est jamais arrêté et l'on arrive en  $A$  avec :  $\infty \geq R > R_a$ .

*Parcours négatif droit ou gauche.* — Le parcours négatif conduit, soit à un zéro de  $f(z)$ , soit au point  $A$  avec :  $0 \leq R < R_a$ .

**THÉORÈME III.** — *Le parcours positif droit ou gauche V conduit toujours en A, avec  $0 < R \leq \infty$ . Le parcours négatif droit ou gauche conduit soit en A, avec  $\infty > R \geq 0$ , soit en  $a_i$  avec  $f(a_i) = 0$ .*

**3. ÉTUDE DES FAISCEAUX DE COURBES R.** — Soit  $a$  un point ordinaire de  $f(z)$ ; suivons jusqu'en  $A$  dans le sens positif gauche la branche de  $V = V_a$ , qui passe par  $a$ .

Sur cette branche de  $V = V_a$ , marquons un segment  $\overrightarrow{bc}$ ,  $R_b < R_c$ . Traçons les courbes ou les branches de courbes  $R$  en infinité non

dénombrable déterminées par  $\vec{bc}$ ; et suivons-les dans le sens positif d'abord à droite et ensuite à gauche. Deux cas peuvent se présenter.

*Premier cas.* — Toutes les courbes  $R_{\vec{bc}}$  se ferment sans passer par A. C'est donc que toutes ces courbes sont complètes; et sur l'une quelconque d'entre elles, parcourue dans le sens positif, la variation de V est un nombre entier fini de fois  $2\pi$ .

*Deuxième cas.* — Une des courbes parcourues se ferme en A. C'est-à-dire que, parcourue positivement à droite et négativement à gauche, ou positivement à gauche et négativement à droite, la courbe conduit au point A des deux côtés; soit  $R = R_d$ , cette branche de courbe.

Dans la boucle B, formée par  $R = R_d$ , considérons un segment  $\vec{ef}$  de  $V = V_a$ ; toutes les courbes du faisceau déterminé par  $\vec{ef}$  parcourues dans le sens positif droit ou gauche, et dans le sens négatif droit ou gauche conduisent au point A. En effet, elles ne peuvent se fermer à l'intérieur de la boucle B, en retournant au point de départ sur  $\vec{ef}$  sans rencontrer  $\vec{dA}$  en un point autre que ce point de départ. Or sur  $\vec{dA}$ , R prend une fois et une seule chaque valeur de R, comprise entre  $R_d$  et  $R_A$ ,  $R_A > R_d$ . Pour se fermer, ces branches de R,  $R > R_d$  devraient sortir de la boucle, c'est impossible.

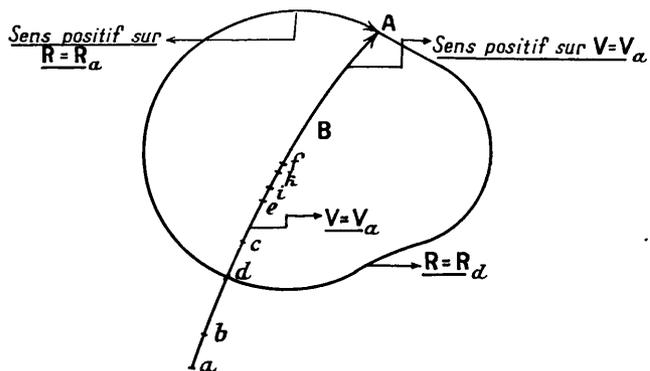
Nous obtenons ainsi un faisceau de base  $\vec{ef}$ , tel que toutes les courbes R de ce faisceau dans le sens positif ou dans le sens négatif conduisent en A.

*Zones d'enclave R de sommet j.* — Soit une courbe  $R_h$  du faisceau qui, parcourue dans le sens positif, conduit en un point j. A partir de ce point j, parcourons-la d'abord à droite et ensuite à gauche. Deux possibilités se présentent.

1° *Première hypothèse (fig. 3).* — On obtient plusieurs zones d'enclave de sommet j, constituées par des boucles fermées dans lesquelles  $R < R_h$ . Ces zones d'enclave sont en nombre fini; et de j,

il finit par se détacher une branche de  $R_h$ , qui va en A. Cette branche

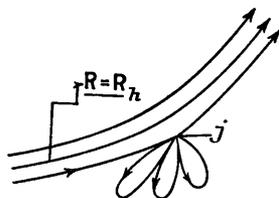
Fig. 2.



peut coïncider avec la branche d'éloignement à gauche, de la branche d'accès de  $R_h$  en  $j$ .

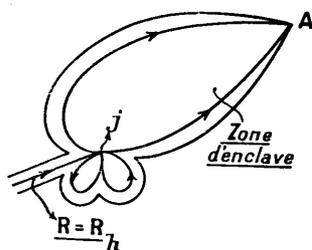
2° Deuxième hypothèse (fig. 4). — Les deux chemins  $R_h$ , à droite et

Fig. 3.



à gauche, à partir de  $j$ , ne coïncident plus. Ils aboutissent séparément en A et forment une zone d'enclave de sommet  $j$  se fermant en A.

Fig. 4.



Parcourons le segment  $\vec{ef}$  de  $V_a$  et marquons dans le sens  $R$  croissant

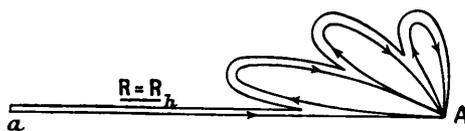
toutes les courbes  $R$  qui passent par un point  $j$  et qui par conséquent donnent des zones d'enclave de sommet  $j$ . Chacune de ces courbes  $R$  admet un parcours positif droit distinct du parcours positif gauche.

Appelons sur  $\vec{ef} : g_1, g_2, \dots, g_n$ , les points origines de parcours positifs  $R$  passant un point  $j$ . Si les points  $g_1, g_2, \dots, g_n$  sont en nombre fini, ils divisent le faisceau de base  $\vec{ef}$  en un nombre fini de faisceaux de parcours positifs  $R$  sans points  $j$ . Si, au contraire, l'ensemble  $E(g_1, g_2, \dots, g_n)$  est infini, il admet sur  $\vec{ef}$  un ensemble dérivé, et le faisceau de base  $\vec{ef}$  n'est plus divisible en nombre fini de faisceaux de parcours  $R$  sans points  $j$ , il rentre dans les faisceaux du type  $f_v(\vec{R}, \vec{ef})$ , que nous étudierons dans un Mémoire ultérieur <sup>(1)</sup>.

*Faisceaux de courbes  $R$  sans points  $j$ .* — Soit  $f_{ik}$  l'un de ces faisceaux de base  $\vec{ik}$ . Toute branche de courbe  $R$  du faisceau pourra être parcourue jusqu'en  $A$  dans le sens positif ou dans le sens négatif, sans que l'on ait à prendre à droite ou à gauche.

Mais si  $R_p$  est une des courbes du faisceau  $\vec{ik}$ , il se peut qu'en faisant tendre  $R$  vers  $R_p$ , par les valeurs plus grandes ou plus petites que  $R_p$ , les courbes  $R$  du faisceau admettent une courbe limite distincte de  $R_p$ . En effet, une courbe  $R_p$  du faisceau peut conduire en  $A$ , en repartir et y retourner un certain nombre de fois; dans ce cas-là une des deux courbes contiguës à  $R_p$ , ou les deux seront distinctes de  $R_p$  <sup>(2)</sup>.

Fig. 5.



La courbe  $R_p$  forme ainsi un certain nombre de boucles fermées de sommet  $A$ .

<sup>(1)</sup> Sur les faisceaux  $f_v(\vec{R}, \vec{bc})$  et  $f_v(\vec{V}, \vec{bc})$ , voir *Comptes rendus*, 209, 1939, p. 287, 718 et 783.

<sup>(2)</sup> C'est-à-dire de la portion de  $\vec{R}_p$  qui va de  $\vec{ik}$  en  $A$ .

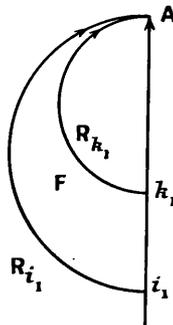
*Cassure R en A.* — La branche de  $R = R_p$  présente en A un certain nombre de branches distinctes passant par A elle se casse en A les éléments de  $R_p$  en A sont les branches de la cassure.

*Zones d'enclave R de sommet A.* — Ce sont les domaines renfermés dans les boucles formées par  $R_p$  en A.

Mais toute circonférence de centre A ne peut être rencontrée que par un nombre fini de branches distinctes de  $R = R_p$ , sinon sur cette circonférence il y aurait un point  $j$  d'ordre infini, ce qui est impossible. Par conséquent toute circonférence de centre A doit rencontrer un nombre fini de zones d'enclave, appartenant à une même courbe  $R = R_p$ . Et l'on en conclut que les courbes R du faisceau  $\vec{ik}$ , qui présentent des cassures en A, sont en infinité dénombrable au plus.

Appelons  $l_1, l_2, \dots, l_n$  les points de  $\vec{ik}$  origines de parcours positifs R donnant des zones d'enclave de sommet A. Si l'ensemble  $E(l_1, l_2, \dots, l_n)$  est fini, le faisceau  $f(\vec{R}, \vec{ik})$  se subdivise en un

Fig. 6.



nombre fini de faisceaux compacts que nous appelons  $f_k$ . Si, au contraire, l'ensemble  $E(l_1, l_2, \dots, l_n)$  est infini, il admet sur  $\vec{ik}$  un ensemble dérivé, le faisceau  $f(\vec{R}, \vec{ik})$  n'est plus divisible en faisceaux  $f_k$ , il rentre dans la catégorie des faisceaux  $f_v(\vec{R}, \vec{ik})$ .

Soit  $f_k$  de base  $\vec{i_1 k_1}$ , les courbes  $R_{i_1}$  et  $R_{k_1}$  qui limitent ce faisceau sont parcourues l'une à droite et l'autre gauche, les zones d'enclave

en  $A$  sont à droite pour le parcours  $R_i$  et à gauche pour  $R_k$ . Les faisceaux  $f_k$  existent, aucun d'eux ne se réduit à une seule courbe; et tous ils couvrent une aire non nulle. Quand  $R$  croit de  $R_i$  à  $R_k$ , la branche de  $R$  déterminée par le segment  $\overrightarrow{i_1 k_1}$  de  $V_a$ , balaie le domaine  $f_k$ .

Dans  $f_k$ ,  $f(z)$  est holomorphe et borné tant à l'intérieur que sur les côtés  $R_i$  et  $R_k$ , et sauf peut-être en  $A$ ; nous pouvons donc appliquer à  $f(z)$ , dans  $f_k$  et sur son contour, le théorème de Lindelöf <sup>(1)</sup>.

« Supposons que la fonction monogène  $f(z)$  soit régulière dans un domaine  $T$  admettant comme contour une ligne simple fermée  $S$ , et qu'elle est continue sur ce contour, excepté peut-être en un certain point  $a$ .

Soient  $S_1$  et  $S_2$  les portions de  $S$  limitées par le point  $a$  et un autre point quelconque  $P$  de ce contour.

Si la fonction  $f(z)$  tend vers une même limite  $\omega$  lorsque  $z$  tend vers  $a$  suivant  $S_1$  ou  $S_2$ , et si elle est bornée dans  $T$ , elle tendra vers  $\omega$  lorsque  $z$  tend vers  $a$  dans ce domaine, et sera donc continue encore pour  $z = a$ .

Si, au contraire, la fonction  $f(z)$  tend sur  $S_1$  et  $S_2$  vers des limites distinctes lorsque  $z$  tend vers  $a$ , elle ne saurait être bornée dans le domaine  $T$ .

Le domaine  $T$  est ici le domaine  $f_k$ . Une extension du théorème de Lindelöf montre que, si sur  $R_i$  ou  $R_k$ ,  $V$  tendait vers une limite  $V_1$ ,  $f(z)$  borné dans  $f_k$  tendrait vers la même limite  $R_i e^{iV_1}$  dans tout le faisceau  $f_k$  <sup>(2)</sup>, ce qui est impossible.  $V$  est nécessairement indéterminé sur  $R_i$  et  $R_k$  ainsi que sur toute courbe  $R$  du faisceau  $\overrightarrow{i_1 k_1}$ ; c'est-à-dire que dans le sens positif  $V$  augmente d'une infinité de fois  $2\pi$ , et dans le sens négatif diminue d'une infinité de fois  $2\pi$ .

L'ensemble non dénombrable des courbes  $R$ , qui ne passent pas par les points  $j$ , et qui ne présentent pas une cassure en  $A$ , comprend les courbes  $R$  qui se ferment sans passer par  $A$ , et sur lesquelles  $V$  croît

<sup>(1)</sup> ERNST LINDELÖF, *Sur un principe général de l'analyse* (*Acta Societatis Scientiarum Fennicæ*. t. XLVI, n° 4, Helsingfors, 1915).

<sup>(2)</sup> Voir PAUL MONTEL, *Leçons sur les familles normales*, Chap. VII, 20, p. 190, Paris, 1927.

$2k\pi$  dans le sens positif,  $k$  entier positif, et les courbes  $R$  des faisceaux  $f_k$ . Sur ces dernières courbes, à partir d'un point  $V = 0$ ,  $V$  croît dans le sens positif d'une infinité de fois  $2\pi$ , et dans le sens négatif décroît d'une infinité de fois  $2\pi$ .

Ces courbes sont des courbes complètes. Les courbes  $R$  qui passent par les points  $j$ , celles qui donnent des cassures en  $A$  et celles des faisceaux  $f_v$  ne sont pas toujours complètes, ce qui veut dire qu'une branche n'est pas divisible en une infinité dénombrable de segments  $[0, 2\pi]$  juxtaposés.

THÉORÈME IV. — *Les courbes  $R$  des faisceaux  $f_k$  des fonctions entières sont toutes complètes.*

4. ÉTUDE DES FAISCEAUX DE COURBES  $V$ . — Considérons un faisceau  $f_{bc}^{\rightarrow}$  de courbes  $V$  ayant comme base un segment  $\vec{bc}$  de parcours positif droit  $R$ . Nous allons examiner le faisceau  $f_{bc}^{\rightarrow}$  dans le sens positif d'abord et dans le sens négatif ensuite.

*Étude du faisceau  $f_{bc}^{\rightarrow}$  de base  $\vec{bc}$  dans le sens positif.* — Le faisceau  $f_{bc}^{\rightarrow}$  occupe un domaine d'un seul tenant et toute courbe  $V$  du faisceau, soit par le parcours positif droit, soit par le parcours positif gauche, peut être suivie jusqu'au point  $A$ , où elle aboutit avec  $R_{bc}^{\rightarrow} < R \leq \infty$ .

*Zones d'enclave  $V$  de sommet  $j$ .* — Soit  $V = V_j$  une branche de courbe  $V$  de  $f_{bc}^{\rightarrow}$ , passant par un point  $j$ . Parcourons  $V_j$  dans le sens positif; à partir du premier point  $j$  rencontré, le parcours se fait à gauche ou à droite. Le parcours gauche conserve la continuité des courbes  $V > V_j$ , tandis que le parcours droit celle des courbes  $V < V_j$ .

À partir du premier point  $j$  rencontré, les deux parcours à droite et à gauche se séparent, pour ne se rencontrer à nouveau qu'au point  $A$ , en formant une zone d'enclave  $V$  de sommet  $j$ .

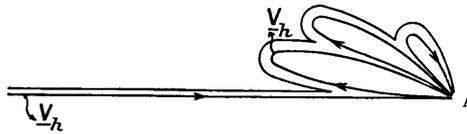
Appelons encore  $g_1, g_2, \dots, g_n$  les points de  $\vec{bc}$  origines de parcours positifs  $V$ , si l'ensemble  $E(g_1, g_2, \dots, g_n)$  est infini, il admet un ensemble dérivé sur  $bc$  et le faisceau  $f(\vec{V}, \vec{bc})$  est un faisceau  $f_v(\vec{V}, \vec{bc})$ . Si au contraire l'ensemble  $E(g_1, g_2, \dots, g_n)$  est fini,  $f(\vec{V}, \vec{bc})$  se

subdivise en un nombre fini de faisceaux sans points  $j$ . Soit  $f_i$  (1) l'un de ces faisceaux de base  $\vec{b}_i \vec{c}_i$  sur  $R_{\vec{c}_i}$ .

Le faisceau  $f_i$  lui-même n'est pas nécessairement compact. Une courbe  $V_h$  du faisceau, parcourue jusqu'en  $A$ , n'est pas toujours limite des courbes  $V$  du même faisceau quand on fait tendre  $V$  vers  $V_h$ , par les valeurs plus grandes ou plus petites que  $V_h$ .

*Zones d'enclave en  $V$  en  $A$  (fig. 7).* — La courbe  $V_h$ , après avoir

Fig. 7.



atteint  $A$ , peut en repartir et y retourner un certain nombre de fois. Ce nombre de fois est fini ou infini dénombrable. En effet, sur toute circonférence de centre  $A$  et de rayon aussi petit que l'on veut, on ne doit rencontrer qu'un nombre fini de branches distinctes  $V_h$ . Sinon sur la circonférence, il y aurait un point  $j$  d'ordre infini, ce qui est impossible.

Les boucles fermées décrites par  $V_h$ , et se fermant en  $A$ , sont les zones d'enclaves  $V$  de sommet  $A$ . Ces zones d'enclave pour une courbe  $V$  ou pour l'ensemble des courbes  $V$  sont en infinité dénombrable au plus.

*Cassures  $V$  en  $A$ .* — Les différentes branches de  $V_h$ , partant de  $A$  pour former les zones d'enclave  $V$  de sommet  $A$ , sont les branches de la cassure de  $V_h$  en  $A$ .

Le faisceau  $f_i$  peut être un faisceau  $f_v$ , dont nous réservons l'étude à un autre Mémoire; on peut subdiviser un nombre fini de faisceaux  $f_k$  entièrement compacts (2).

Appliquons aux faisceaux  $f_k$ , le théorème de Lindelöf, comme cela

(1) Le faisceau couvre toujours un domaine d'aire non nulle, pour les mêmes raisons déjà invoquées dans le cas des faisceaux  $f_{ik}$  de courbes  $R$ .

(2) Les faisceaux ainsi obtenus couvrent chacun un domaine d'aire non nulle, le raisonnement pour le prouver est le même que celui fait dans le cas des faisceaux  $f_k$  de courbes  $R$ .

a été fait pour les faisceaux compacts de courbes R. Nous trouvons que sur toutes les courbes intérieures au faisceau, et sur les deux courbes frontières, on doit arriver en A avec  $R = \infty$ .

THÉORÈME V. — *Toute courbe V d'un faisceau  $f_k$  dans le sens positif conduit en A avec  $R = \infty$ .*

*Étude du faisceau  $f_{bc}^{\rightarrow}$  de la base  $bc^{\rightarrow}$  dans le sens négatif.* — Précisons d'abord les notations  $\vec{R} \equiv$  parcours positif R;  $\vec{R}_{md} \equiv$  parcours positif droit à partir du point m;  $\vec{R}_{mg} \equiv$  parcours positif gauche à partir de m;  $\vec{V} \equiv$  parcours positif V, et l'on définit de la même façon que pour R,  $\vec{V}_{md}$  et  $\vec{V}_{mg}$ . Le parcours négatif R est  $\overleftarrow{R}$ ;  $\overleftarrow{R}_{md} \equiv$  parcours négatif droit R;  $\overleftarrow{R}_{mg} \equiv$  parcours négatif gauche R;  $\overleftarrow{V} \equiv$  parcours négatif V; on en déduit  $\overleftarrow{V}_{md}$  et  $\overleftarrow{V}_{mg}$ .

Ces parcours se groupent en faisceaux et l'on trouve  $f[\vec{R}, \vec{bc}] \equiv$  faisceau de parcours positifs R de base  $\vec{bc}$ ;  $f[\overleftarrow{R}, \overleftarrow{bc}] \equiv$  faisceau de parcours négatifs R de base  $\overleftarrow{bc}$ ; dans le premier cas  $\vec{bc}$  est un arc de parcours positif gauche V, tandis que dans le second cas  $\overleftarrow{bc}$  est un arc de parcours positif droit V. De même les courbes V donnent :  $f[\vec{V}, \vec{bc}] \equiv$  faisceau de parcours positifs V provenant de  $\vec{bc}$ , arc de parcours positif droit R; et  $f[\overleftarrow{V}, \overleftarrow{bc}] \equiv$  faisceau de parcours négatifs V de base  $\overleftarrow{bc}$ , où  $\overleftarrow{bc}$  est un élément de parcours positif gauche R.

Nous avons déjà considéré les faisceaux  $f[\vec{R}, \vec{bc}]$ ,  $f[\overleftarrow{R}, \overleftarrow{bc}]$  et  $f[\vec{V}, \vec{bc}]$ , nous allons maintenant nous occuper des faisceaux  $f[\overleftarrow{V}, \overleftarrow{bc}]$ . Soit m un point  $\overleftarrow{bc}$ , le parcours négatif  $\overleftarrow{V}_m$  dans  $f[\overleftarrow{V}, \overleftarrow{bc}]$  peut présenter l'une des configurations suivantes : 1°  $\overleftarrow{V}_m$  conduit au point  $R = 0$ , sans rencontrer ni un point j, ni le point A; 2°  $\overleftarrow{V}_m$  rencontre un point j; à partir de ce point, il se subdivise en  $\overleftarrow{V}_{md}$  et  $\overleftarrow{V}_{mg}$ , qui conduisent en  $R = 0$ , sans rencontrer A; 3°  $\overleftarrow{V}_m$  conduit en A

sans rencontrer de point  $j$ ,  $A$  n'est pas point de cassure pour lui et il s'arrête en  $A$ ; 4°  $\vec{V}_m$  conduit en  $A$  sans rencontrer de point  $j$ ;  $A$  est point de cassure pour lui soit à droite, soit à gauche, soit des deux côtés à la fois; à partir de  $A$ ,  $\vec{V}_m$  peut se comporter de différentes manières :  $a$ .  $\vec{V}_m$  quitte  $A$  suivant une branche unique pour aller en  $R = 0$  en dehors de  $A$ ;  $b$ .  $\vec{V}_m$  décrit un nombre fini de boucles fermées en  $A$  avant d'aller en  $R = 0$  distinct de  $A$ ;  $c$ .  $\vec{V}_m$  décrit un nombre fini ou infini de boucles fermées avant de s'arrêter en  $A$ ; 5°  $\vec{V}_m$  rencontre un point  $j$ ,  $\vec{V}_{md}$  et  $\vec{V}_{mg}$  admettent  $A$  comme point de cassure, et l'on retrouve les configurations du troisième cas et du quatrième cas définis plus haut.

A ces différents types de parcours  $\vec{V}_m$ , correspondent diverses variétés de faisceaux  $f[\vec{V}, \vec{bc}]$  : 1° Tout parcours  $\vec{V}$  aboutit en  $R = 0$  distinct de  $A$ ; le faisceau  $f[\vec{V}, \vec{bc}]$  se décompose en un nombre fini de faisceaux  $f_k[\vec{V}, \vec{bc}]$ ; 2° Tout parcours  $\vec{V}_m$  aboutit en  $R = 0$  distinct de  $A$ ; mais les  $R = 0$  du faisceau admettent  $A$  comme point limite;  $\vec{V}_{bd}$  ou  $\vec{V}_{cg}$ , ou les deux vont en  $A$  et s'arrêtent en  $A$ ; le faisceau est un faisceau  $f_v[\vec{V}, \vec{bc}]$  (1); 3°  $\vec{V}_{bd}$  ou  $\vec{V}_{cg}$  ou les deux à la fois vont en  $A$ , le quittent soit immédiatement, soit après un nombre fini de boucles fermées en  $A$  pour aller en  $R = 0$  distinct de  $A$ , et de plus tout parcours  $\vec{V}_m$  de  $f[\vec{V}, \vec{bc}]$  aboutit en un  $R = 0$  distinct de  $A$ ; le faisceau se décompose dans ce cas en un nombre fini de faisceaux  $f_k[\vec{V}, \vec{bc}]$ ; 4°  $\vec{V}_{bd}$  ou  $\vec{V}_{cg}$  ou les deux à la fois s'arrêtent en  $A$ , tout  $\vec{V}_m$  du faisceau va en un  $R = 0$  distinct de  $A$ , et l'ensemble de ces  $R = 0$  admet  $A$  comme point limite; le faisceau est un faisceau  $f_v[\vec{V}, \vec{bc}]$ ; 5°  $\vec{V}_{bd}$ ,  $\vec{V}_{cg}$ , et tous les  $\vec{V}_m$  vont en  $A$  et s'y arrêtent soit directement, soit indirectement après un nombre fini ou infini de boucles fermées;

---

(1) *Comptes rendus*, 209, 1939, p. 287, 718 et 783.

soit  $E(g)$ , l'ensemble des points  $g_1, g_2, \dots, g_n$ , de  $\vec{bc}$ , origines de parcours  $\overleftarrow{V}_{gi}$  qui rencontrent un point  $j$ , ou admettent  $A$  comme point de cassure, ou admettent les deux à la fois; si  $E(g)$  est fini,  $f[\overleftarrow{V}, \vec{bc}]$  se subdivise en un nombre fini de  $f_k[\overleftarrow{V}, \vec{bc}]$ ; si au contraire  $E(g)$  est infini, le faisceau est un faisceau  $f_v[\overleftarrow{V}, \vec{bc}]$ .

Les faisceaux  $f_k[\overleftarrow{V}, \vec{bc}]$  sont comme tous les faisceaux  $f_k$ , compacts et sans zones d'enclave; on peut leur appliquer le théorème de Lindelöf ou le théorème de Montel, et l'on trouve :

**THÉORÈME VI.** — *Dans tout faisceau  $f_k[\overleftarrow{V}, \vec{bc}]$ , tout parcours  $\overleftarrow{V}_m$  du faisceau conduit au sommet du faisceau avec  $R = 0$ .*

**5. CONCLUSION.** — Nous avons étudié dans le présent travail les faisceaux  $f_k$ , nous réservons à un prochain Mémoire l'étude complète des faisceaux  $f_v$  (1). Cette double étude faite, notre effort se portera sur les domaines d'univalence des fonctions entières, et nous serons alors en mesure de caractériser la structure du réseau  $\log R = \text{const}$ ,  $V = \text{const}$ . de la fonction entière la plus générale dans le voisinage du point singulier essentiel, ou en d'autres termes de caractériser la structure du point singulier essentiel de toute fonction entière de genre fini ou infini.

---

(1) Voir *Comptes rendus*, 209, 1939, p. 287, 718, 783, et 210, 1940, p. 35.