

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

GEORGES VALIRON

**Division en feuillettes de la surfaces de Riemann définie par  $w = \frac{e^z-1}{z} + h$**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 9<sup>e</sup> série*, tome 19, n° 1-4 (1940), p. 339-358.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1940\\_9\\_19\\_1-4\\_339\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1940_9_19_1-4_339_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Division en feuillets de la surface de Riemann**définie par  $w = \frac{e^z - 1}{z} + h$ ;***PAR GEORGES VALIRON.**

Étant donnée une fonction entière *d'ordre fini*,  $w = f(z)$ , la division du plan des  $z$  en domaines d'univalence pour  $f(z)$ , limités par des courbes d'argument constant, ou, ce qui est équivalent, la division de la surface de Riemann décrite par  $w = f(z)$  en feuillets simples limités par des demi-droites  $\arg w = \text{const.}$ , est obtenue par un procédé dont le principe est dû à M. Iversen (<sup>1</sup>). On considère les branches de la fonction inverse  $z = \varphi(w)$  qui sont holomorphes à l'origine  $w = 0$ , on les prolonge radialement, les étoiles d'holomorphie ainsi définies constituent un premier système de feuillets. Pour une branche qui admet  $w = 0$  pour point critique algébrique, on la décompose en branches uniformes au voisinage de l'origine en coupant le long d'un rayon, et l'on prolonge radialement les éléments obtenus; on obtient un deuxième système de feuillets. A chacun des feuillets obtenus correspond dans le plan des  $z$  un domaine d'univalence; si ces domaines, leurs frontières et les points limites de ces frontières couvrent tout le plan, la division est achevée. Dans le cas contraire, les domaines restants correspondent à des domaines angulaires de la surface de Riemann (angles d'ouverture finie ou infinie); on fait le partage de ces angles en marquant une coupure le long d'un rayon

(<sup>1</sup>) Thèse : *Recherches sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes*, Helsingfors, 1914.

$\arg w = \text{const.}$ , on obtient un troisième système de feuillets. Ces feuillets du troisième système ne se présentent que si  $w = 0$  est point critique transcendant; si ce point est *directement critique*, il est directement critique de *première espèce* <sup>(1)</sup>, il lui correspond une infinité de feuillets d'ouverture  $2\pi$ ; si  $w = 0$  est *directement et indirectement critique*, il peut exister des feuillets d'ouverture moindre que  $2\pi$ , il leur correspond dans le plan des  $z$  des *domaines incomplets d'univalence*. Un domaine d'univalence obtenu à partir des deux premières espèces de feuillets est complet, mais il peut être singulier; un domaine est *singulier* si les valeurs  $w = f(z)$  lorsque  $z$  parcourt le domaine et sa frontière ne recouvrent pas une ligne; la frontière du feuillet riemannien correspondant n'est pas entièrement accessible, *elle contient nécessairement un point critique transcendant qui est directement et indirectement critique* <sup>(2)</sup>. À côté de ces anomalies relatives aux feuillets <sup>(3)</sup> peuvent se présenter des anomalies dans leur jonction. Supposons que  $w_0 \neq 0$  soit un point critique direct et indirect, qu'il n'y ait pas d'autre point critique sur la demi-droite (du plan simple) joignant  $w_0$  à l'origine, et supposons que lorsque  $w$  tend vers  $w_0$  de telle façon que  $|w| > |w_0|$ ,  $\arg w = \arg w_0$ , une branche de  $z = \varphi(w)$  tende vers l'infini. Le point  $z$  décrira une ligne allant de l'infini à l'infini. Il peut exister plusieurs lignes de ce genre et diverses circonstances semblent possibles, la plus simple est sans doute la suivante : les points de la ligne en question sont points limites des frontières d'une suite infinie de domaines d'univalence; on ne peut pas joindre par un chemin continu un point d'un domaine d'univalence situé d'un côté de la ligne à un point d'un domaine situé de l'autre côté sans traverser une infinité de domaines d'univalence. Nous dirons que la division du plan en domaines d'univalence est *impropre*. Une telle

<sup>(1)</sup> Voir VALIRON, *Bulletin des Sciences math.*, t. 63, 1939, p. 132.

<sup>(2)</sup> VALIRON, *loc. cit.*

<sup>(3)</sup> Il peut exister des feuillets non singuliers dont la frontière contient cependant une infinité de points critiques algébriques. Voir VALIRON, *Comptes rendus*, t. 208, 1939, p. 711. Dans l'énoncé qui termine cette Note, il convient d'ajouter que les courbes argument  $w = \text{const.}$ , que l'on considère à partir d'une transversale module  $w = \text{const.}$ , sont bornées à cette transversale et prises dans le sens des modules croissants.

division ne peut provenir que de la présence d'un *point directement et indirectement critique*, placé comme il a été indiqué.

L'introduction d'une classification doit s'appuyer sur des exemples montrant que les classes ne sont pas vides. Un exemple des trois circonstances signalées ci-dessus est fourni par la fonction

$$w = \frac{e^z - 1}{z} + h.$$

Dans sa Thèse citée ci-dessus, M. Iversen a étudié le cas  $h = 0$ , il a montré qu'il existe un domaine imcomplet d'univalence; toutefois la méthode qu'il a employée pour déterminer la ramification de la surface de Riemann ne me semblant pas entièrement probante pour les raisons que j'indique au n° 3, je reviendrai sur ce point. Lorsque  $h = -1$ , j'ai déjà démontré (*Bulletin des Sciences mathématiques*, loc. cit.) qu'il existe un domaine singulier, je compléterai ce résultat en étudiant la ramification de la surface. Enfin, pour  $h = 1$ , je montrerai qu'il y a division impropre (il n'y a plus de domaine singulier, contrairement à ce que j'avais annoncé dans la dernière phrase de l'article qui vient d'être cité).

Dans les trois cas, l'étude de la ramification de la surface de Riemann est faite en s'appuyant sur ce que, les points critiques algébriques étant tous simples et d'arguments différents, il leur correspond dans le plan des  $z$  des points  $z_n$  qui sont l'origine de quatre lignes  $\Gamma_n, \Gamma'_n, \gamma_n, \gamma'_n$ ; sur deux de ces lignes  $\gamma_n, \gamma'_n$ , le module de  $w$  décroît et tend vers zéro, sur les deux autres  $\Gamma_n, \Gamma'_n$  le module croît indéfiniment. La détermination directe des propriétés de ces lignes semblant compliquée, on a étudié le comportement de l'argument de  $w$  sur certaines droites, ce qui a permis de limiter le nombre des points de passage des lignes  $\Gamma$  et  $\gamma$ .

$$\text{I. — Cas de } w = f_1(z) = \frac{e^z - 1}{z}.$$

1. La fonction inverse  $z = \varphi_1(w)$  de  $f_1(z)$  admet pour points critiques algébriques les images  $W_n$  des nombres  $w_n$  donnés par

$$e^{z_n}(z_n - 1) + 1 = 0, \quad w_n = e^{z_n} = \frac{1}{1 - z_n}, \quad z_n \neq 0.$$

Comme  $f_1''(z_n) \neq 0$ , chaque point  $W_n$  n'échange que deux branches, n'appartient qu'à deux feuillets <sup>(1)</sup>. Posant  $z = x + iy$ , on voit que les points  $A_n$  d'affixes  $z_n$  sont sur les courbes

$$(1) \quad e^{-x} \cos y = 1 - x,$$

$$(2) \quad e^{-x} \sin y = y,$$

donc sur la courbe d'équation

$$(3) \quad y^2 = e^{-2x} - (x - 1)^2.$$

De l'étude des variations de  $y^2$  on déduit la forme de cette courbe qui comprend deux arcs infinis,  $L, L'$ , symétriques par rapport à  $Ox$  et situés dans le demi-plan  $x \leq 0$ ; et une petite boucle  $b$  située dans le demi-plan  $x \geq 0$ . Ces courbes sont tracées dans la figure 1. Sur la boucle  $b$ , on a  $|y| < 1$ . La courbe  $L$  est au-dessus de sa tangente en  $O$  puisque

$$e^{-2x} - (1 - x)^2 = x^2 + \frac{1}{6}(-2x)^3 + \dots > x^2, \quad x < 0.$$

Supposons  $y > 0$ ; l'équation (2) montre que  $\sin y > 0$ , donc

$$2n\pi < y < 2n\pi + \pi, \quad n \text{ entier positif ou nul}$$

[l'équation (2) n'est pas vérifiée sur la boucle puisque  $y > \sin y$ ]. Alors dans (1),  $1 - x > 0$ , donc les points  $A_n$  sont sur la courbe  $L''$  définie par (1), avec  $0 < y < \frac{\pi}{2}$ , et sur les courbes qui s'en déduisent par les translations  $2in\pi$ . Sur  $L''$ ,  $y$  décroît de  $\frac{\pi}{2}$  à zéro lorsque  $x$  croît de  $-\infty$  à zéro.  $L''$  est tangente à  $L$  en  $O$ , mais est au-dessous de la tangente, car, pour  $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ , la condition  $y < -x$  équivaut à

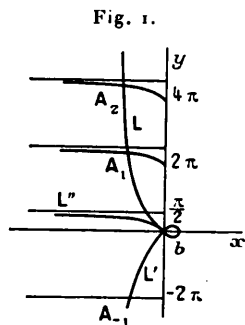
$$e^x(1 - x) > \cos x,$$

qui est bien vérifiée. On voit qu'il existe un point solution de (1), (2) dans chaque bande

$$2\pi n < y < 2(n+1)\pi, \quad n \text{ entier positif.}$$

<sup>(1)</sup> Les propriétés indiquées dans ce n° 1 sont données, à des détails près, dans la *Thèse* de M. IVERSEN.

Nous appellerons  $A_n$  ce point, et  $z_n$  son affixe;  $A_{-n}$  désignera le symétrique de  $A_n$  par rapport à  $Ox$ ,  $z_{-n}$  son affixe. On a l'aspect de la figure 1.



Si l'on pose

$$u = |w|, \quad w = u e^{i\nu}, \quad w_n = u_n e^{i\nu_n}, \quad z_n = x_n + i y_n,$$

on a

$$w_n = \frac{1}{1 - z_n} = e^{z_n}.$$

Eu égard à la forme de  $L$ , on devra prendre

$$\nu_n = y_n - 2n\pi,$$

et vu la forme de  $L''$ , on trouve que, lorsque  $n$  croît de 1 à l'infini,  $\nu_n$  croît à partir d'une valeur positive et tend vers  $\frac{\pi}{2}$ . On a aussi

$$u_n = e^{x_n},$$

$u_n$  décroît et tend vers zéro lorsque  $n$  croît indéfiniment.

Les zéros de  $f_1(z)$  sont les points  $H_n$ , d'affixes  $z'_n = 2ni\pi$ ,  $n$  entier non nul.

Pour  $z = x$  réel,

$$w = \frac{e^x - 1}{x}$$

croît de zéro à  $+\infty$  lorsque  $x$  croît de  $-\infty$  à  $+\infty$ .

Lorsque le point d'affixe  $z$  s'éloigne indéfiniment,  $w$  tend vers zéro si  $x$  reste inférieur à un nombre fixe arbitrairement donné, et même dans des conditions plus larges qu'il est inutile de préciser. Si le

chemin va à l'infini de façon que  $x$  tende vers  $+\infty$  et que  $|y|$  reste borné,  $u$  tend vers l'infini.

2. Pour

$$z = x + 2i\pi n, \quad n \text{ entier positif,}$$

on a

$$w = \frac{e^x - 1}{z}$$

donc, si  $x \neq 0$ ,

$$\nu = \arg \frac{1}{z} + k\pi;$$

il s'ensuit que  $\nu$ , qui est nul pour  $x = -\infty$ , croît de 0 à  $\frac{\pi}{2}$  lorsque  $x$  croît de  $-\infty$  à 0. Comme on passe alors par un zéro simple,  $\nu$  passe à la valeur  $-\frac{\pi}{2}$ , puis croît de cette valeur à zéro lorsque  $x$  croît de zéro à  $+\infty$ .

Sur la droite  $x = 0$ ,

$$w = \frac{\sin y + i(1 - \cos y)}{y},$$

$$\text{tang } \nu = \text{tang } \frac{y}{2}, \quad \nu = \frac{y}{2} + k\pi.$$

Compte tenu des résultats précédents, on voit que, lorsque  $y$  croît de  $2n\pi$  à  $2(n+1)\pi$ ,  $n$  entier positif ou nul,  $\nu$  croît de zéro à  $\pi$ .

Sur la droite

$$z = x + 2ni\pi + i\pi, \quad n \text{ entier positif,}$$

on a de même, quel que soit  $x$ ,

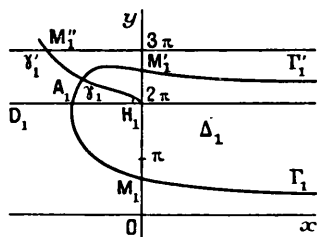
$$\nu = \arg \frac{1}{z},$$

$\nu$  croît de zéro à  $\frac{\pi}{2}$ , puis à  $\pi$ , lorsque  $x$  croît de  $-\infty$  à zéro, puis de zéro à  $+\infty$ .

Une conséquence immédiate du premier résultat est qu'un arc de courbe  $\nu = \text{const.}$ , sur lequel  $u$  croît indéfiniment, finit par rester dans une demi-bande  $x > 0$ ,  $2n\pi < y < 2(n+1)\pi$ , et a une asymptote parallèle à  $Ox$ .

3. Considérons la demi-bande  $R : x < 0, 0 < y < 3\pi$ ; elle contient le point  $A_1$  qui est l'origine de deux lignes  $\gamma_1, \gamma'_1$ , sur lesquelles  $v = v_1$ , et  $u$  décroît et tend vers zéro et de deux lignes  $\Gamma_1, \Gamma'_1$ , sur lesquelles  $v = v_1$ , et  $u$  croît indéfiniment;  $v_1$  est compris entre  $0$  et  $\frac{\pi}{2}$ . Sur la frontière de  $R$  se trouvent exactement quatre points en lesquels  $v = v_1$  : un point  $M''_1$  sur la demi-droite  $y = 3\pi$ , un point  $M'_1$  sur  $Oy$  entre  $H_1$  et le point d'ordonnée  $3\pi$ , le point  $H_1$  qui est un zéro, un point  $M_1$  entre  $O$  et  $H_1$ . Eu égard à l'alternance des courbes  $\gamma$  et  $\Gamma, \Gamma_1$  et  $\Gamma'_1$ , franchissent  $Oy$  en  $M_1$  et  $M'_1$ ,  $\gamma_1$  joint  $A_1$  à  $H_1$ , et  $\gamma'_1$  traverse la droite d'ordonnée  $3\pi$ . On a l'aspect de la figure 2; d'ailleurs  $\Gamma'_1$  ne coupe pas les droites  $y = 2\pi, y = 3\pi$ ,  $\Gamma_1$  coupe  $y = 2\pi$ , puis reste au-dessous,  $\gamma_1$  ne coupe pas  $y = 2\pi$ .

Fig. 2.

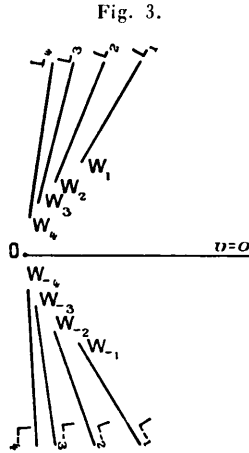


Lorsque le point d'affixe  $z$  parcourt le domaine  $\Delta_1$ , limité par  $\Gamma_1, \Gamma'_1$  et contenant  $H_1$ , le point d'affixe  $\omega = f_1(z)$  parcourt le feuillet de la surface de Riemann obtenu en prolongeant la branche de la fonction inverse qui est telle que  $\varphi_1(0) = 2i\pi$ . Ce feuillet, que nous appellerons  $F_1$ , ne contient sur sa frontière que le point critique  $W_1$ ;  $\Gamma_1$  et  $\Gamma'_1$  correspondent aux lignes de passage portées par  $L_1$  (fig. 3).

Montrons que la ligne  $\gamma'_1$  s'éloigne indéfiniment. S'il n'en était pas ainsi, elle aboutirait à quelque point zéro  $H_p$  (elle ne passe par aucun point  $A_p, p > 1$ , puisque  $0 < v_1 < v_p < \frac{\pi}{2}$ ), le feuillet correspondant à  $H_p$  sur la surface de Riemann contiendrait sur sa frontière, non seulement le point  $W_1$ , mais au moins un autre point  $W_p$ , qui serait tel que, lorsqu'on tournerait sur un grand cercle  $u = \text{const.}$  de la surface de Riemann dans le sens négatif à partir de  $L_1$ , au sortir de  $F_1$ , on



arriverait à  $L_q$ , prolongement de  $OW_q$ . A  $L_q$  correspondrait dans le plan des  $z$ , une courbe  $\Gamma_q$  qui devrait aller à l'infini en passant entre



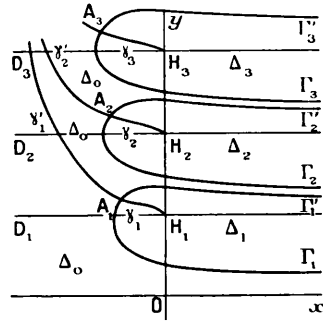
$\Gamma_1$  et  $Ox$ . C'est impossible puisque, sur le segment  $OM_1$ , on a  $0 < v < v_1$ , tandis que  $v_1 < v_q$ .

Ainsi,  $\gamma'_1$  s'éloigne indéfiniment et traverse une fois et une seule les droites  $D_q$ ,  $y = 2\pi q$ , à gauche de  $Oy$ . Tous les points  $A_p$ ,  $p > 1$  sont à droite de  $\gamma'_1$ . Car, si l'un de ces points,  $A_p$ , se trouvait à gauche de  $\gamma'_1$ , il serait dans un domaine limité par  $D_p$ ,  $D_{p+1}$ ,  $\gamma'_1$ ; sur la frontière de ce domaine  $v$  serait positif et au plus égal à  $v_1$ ; les lignes  $\Gamma_p$ ,  $\Gamma'_p$  ne pourraient pas la franchir, puisque  $v_p > v_1$ . Or, ces lignes doivent aller à l'infini vers la droite. La disposition est donc celle de la figure 4.

4. On peut recommencer le raisonnement en considérant le point  $A_2$  comme appartenant au domaine limité par  $\gamma'_1$ ,  $\Gamma'_1$ ,  $Oy$  et par la droite  $y = 5\pi$ . Les courbes  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma'_2$  couperont  $Oy$ ,  $\gamma_2$  joindra  $A_2$  au point zéro  $H_2$ ,  $\gamma'_2$  coupera la frontière  $y = 5\pi$ . Au domaine  $\Delta_2$  limité par  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma'_2$  et qui contient  $H_2$  correspondra le feuillet  $F_2$  obtenu par le prolongement de la branche qui prend la valeur  $4i\pi$  pour  $w = 0$ ; ce feuillet ne contient sur sa frontière que le point de ramification  $W_2$ , la ligne de passage  $L_2$ , prolongement de  $OW_2$ , correspond à  $\Gamma_2$  et  $\Gamma'_2$ .

On montrera comme ci-dessus que  $\gamma'_2$  va à l'infini en laissant à sa droite les points  $A_p, p > 2$ .

Fig. 4.

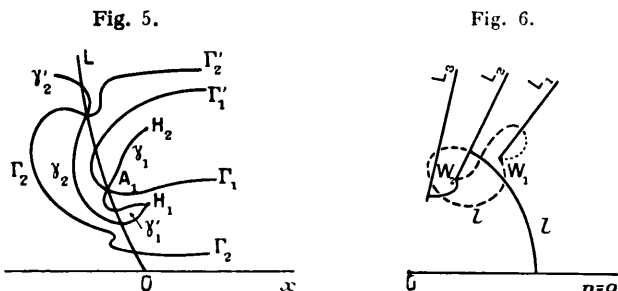


Et ainsi de suite.

On a la configuration tracée dans la figure 4. A la portion du demi-plan  $y > 0$  qui est extérieure aux domaines  $\Delta_p (p = 1, 2, \dots)$ , correspond la portion du plan des  $w$  telle que  $0 < v < \frac{\pi}{2}$ , privée des demi-droites  $L_p (p = 1, 2, \dots)$ . Lorsqu'on adjoint à ce quart de plan son symétrique par rapport à  $v = 0$ , on obtient un demi-feuillet  $F_0$  auquel correspond le domaine incomplet d'univalence  $\Delta_0$ , extérieur aux  $\Delta_p (p \geq 0)$ . On passe de ce demi-feuillet à chacun des autres  $F_p$  en franchissant la demi-droite  $L_p$  correspondante. L'étude de la ramification de la surface de Riemann et la division du plan des  $z$  en domaines d'univalence est achevée.

5. La méthode suivie par M. Iversen découlait du principe suivant. Pour établir que la configuration indiquée ci-dessus convient, il suffit de montrer que la ligne polygonale P que l'on trace sur la surface de Riemann en partant du point  $w = 1, z = 0$  et en suivant un chemin dont la projection sur le plan simple est la ligne polygonale obtenue en joignant ce point à  $W_1$ , puis  $W_1$  à  $W_2$ ,  $W_2$  à  $W_3$ , etc., que cette ligne P passe effectivement par les points critiques  $W_n, n > 0$  de la surface. A cet effet, M. Iversen considère la frontière du domaine riemannien décrit par  $w = f_1(z)$  lorsque  $z$  décrit la portion  $\Sigma$  du plan situé à gauche des courbes L et L' du n° 1. La frontière correspondant

à  $L$  passe bien par les points critiques  $W_n, n > 0$ . Mais il ne semble pas qu'on puisse en déduire qu'il en sera de même pour  $P$ . C'est ce que montrent les figures 5 et 6, où l'on a représenté d'une part une



disposition possible *a priori* des lignes  $\Gamma$  et  $\gamma$  pour les indices 1 et 2 et un aspect de la ligne  $l$  correspondant à  $L$  sur la surface de Riemann. Les mêmes groupements sont possibles pour les feuillets suivants.

II. — Cas de  $w = f_2(z) = \frac{e^z - 1}{z} - 1$ .

6. Les points  $A_n$  images des zéros de  $f_2'(z)$  sont les mêmes que précédemment; les points  $W_n$ , points critiques algébriques de la fonction inverse  $\varphi_2(w)$ , sont déduits des précédents par la translation  $-1$ . L'affixe de  $W_n$  est ici

$$w_n = \frac{z_n}{1 - z_n}.$$

Pour  $n$  positif, les arguments  $\nu_n$  de ces points sont compris entre  $\frac{\pi}{2}$  et  $\pi$ , ils croissent avec  $n$  et tendent vers  $\pi$ . En effet,

$$\text{tang } \nu_n = \frac{y_n}{x_n(1 - x_n) - y_n^2}$$

et, compte tenu de (3), l'étude de  $\nu_n$  est ramené à l'étude des variations de

$$\frac{y^2}{[x(1 - x) - y^2]^2} = \frac{e^{-2x} - (1 - x)^2}{[e^{-2x} + x - 1]^2},$$

lorsque  $x$  décroît de 0 à  $-\infty$ . Le numérateur de la dérivée de cette

fonction a le signe de

$$e^{-2x} - 1 + 2x - 2x^2 = \frac{(-2x)^3}{3!} + \dots,$$

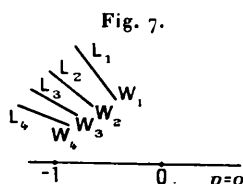
il est positif pour  $x$  négatif.

Sur la ligne  $L$ , on a, en vertu de (3),

$$\frac{x^2 + y^2}{(1-x)^2 + y^2} = e^{2x}[e^{-2x} - 1 + 2x] = 1 + e^{2x}(2x - 1), \quad x < 0,$$

cette fonction croît lorsque  $x$  décroît,  $u_n = |w_n|$  croît avec  $n$ ,  $n > 0$  et tend vers 1.

Les points critiques  $W_n$ , ( $n > 0$ ) et les lignes de passage  $L_n$  sont placés comme dans la figure 7.



7. Les zéros de  $f_2(z)$  sont  $z'_0 = 0$  et les solutions non nulles de l'équation

$$e^z = 1 + z,$$

c'est-à-dire du système

$$(4) \quad e^x \cos y = 1 + x, \quad e^x \sin y = y.$$

Si l'on change  $x$  et  $-x$  dans ce système (4), on retombe sur le système des équations (1), (2); les images des zéros de  $f_2(z)$  sont les symétriques des points  $A_n$  par rapport à  $Oy$ . Nous appellerons  $B_n$  le symétrique de  $A_n$  et  $z'_n$  son affixe, nous continuerons à appeler  $H_n$  le point de coordonnées  $0, 2n\pi$ ,  $D_n$  la droite  $y = 2n\pi$ ,  $F_n$  le feuillet de la surface de Riemann pour lequel  $\varphi_2(0) = z'_n$ , et nous appellerons  $F_0$  le feuillet pour lequel  $\varphi_2(0) = 0$ . L'ensemble de ces feuillets constitue toute la surface puisque  $f_2(z)$  n'admet plus zéro pour valeur asymptotique.

8. Nous allons étudier l'argument  $\nu$  de  $w = f_2(z)$  sur certaines droites.

I. Pour  $x = 0$ ,

$$\omega = \frac{1}{y} [\sin y - y + i(1 - \cos y)], \quad \text{tang } \nu = \frac{1 - \cos y}{\sin y - y}.$$

Le numérateur de la dérivée de  $\text{tang } \nu$  est

$$2 - 2 \cos y - y \sin y,$$

il s'annule pour  $y = 2n\pi$  et pour

$$\frac{y}{2} = \text{tang } \frac{y}{2}.$$

Si l'on prend  $\nu = 0$  sur  $Ox$  pour  $x > 0$ , il suit de là que  $\nu$  croît de  $\frac{\pi}{2}$  à  $\pi$  lorsque  $y$  croît de  $0$  à  $2\pi$ . Lorsque  $y$  croît de  $2n\pi$  à  $2(n+1)\pi$ ,  $n$  entier positif,  $\nu$  part de  $\pi$ , décroît d'abord jusqu'à un minimum  $\omega_n$  supérieur à  $\frac{\pi}{2}$  qu'il atteint pour un  $y$  compris entre  $2n\pi + \frac{\pi}{2}$  et  $2(n+1)\pi$ , puis croît jusqu'à  $\pi$ .

II. Sur l'axe  $Ox$ ,  $f_2(x)$  croît de  $-1$  à  $+\infty$  lorsque  $x$  croît de  $-\infty$  à  $+\infty$ . On aura donc  $\nu = \pi$  pour  $x$  infini négatif.

III. Sur la droite  $D_n$ ,  $y = 2n\pi$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , on a

$$\omega = \frac{(e^x - 1 - x)x - 4\pi^2 n^2 - 2\pi n i(e^x - 1)}{x^2 + 4\pi^2 n^2},$$

$$\text{tang } \nu = \frac{2\pi n(1 - e^x)}{(e^x - 1 - x)x - 4\pi^2 n^2}.$$

Le numérateur de la dérivée de  $\text{tang } \nu$  a le signe de

$$\lambda = e^{2x} + e^x [(x-1)^2 - 3 + 4\pi^2 n^2] + 2x + 1,$$

fonction qui est évidemment positive pour  $x \geq 0$ . La dérivée troisième de

$$\mu = \lambda e^{-x},$$

soit

$$\mu''' = e^x + e^{-x}(5 - 2x),$$

est positive pour  $x$  négatif et d'ailleurs  $\mu'(0) = \mu''(0) = 0$ . Il s'ensuit que  $\mu$  et par suite  $\lambda$  s'annule une fois seulement entre  $-\infty$  et zéro. Le dénominateur de  $\text{tang } \nu$  a une racine positive. On déduit de là que,

sur  $D_n$ ,  $\nu$  part de  $\pi$  pour  $-\infty$ , décroît jusqu'à un minimum supérieur à  $\frac{\pi}{2}$  qui est atteint pour un  $x$  négatif; puis  $\nu$  croît, passe pour  $x = 0$  par la valeur  $\pi$ , puis continue à croître jusqu'à  $2\pi$  lorsque  $x$  croît indéfiniment.

9. Il sera commode de tracer les courbes, autres que  $Ox$ , sur lesquelles  $\omega$  est réel. Elles sont définies par

$$(5) \quad (e^x \cos y - 1)y - x e^x \sin y = 0.$$

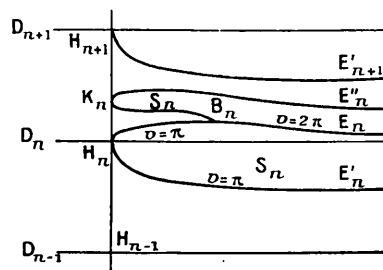
Par chaque zéro  $B_n$  passe une de ces lignes, sur l'une des branches  $E_n$ ,  $\nu$  est égal à  $2\pi (\equiv 0)$ , sur l'autre  $E'_n$ ,  $\nu = \pi$ . D'après les résultats du n° 8,  $E_n$  est comprise dans la demi-bande limitée par  $Oy$ ,  $D_n$  et  $D_{n+1}$  (on suppose toujours  $n > 0$ ), elle est asymptote à  $D_n$ . La branche  $E'_n$  est tangente à  $Oy$  au point  $H_n$ ; elle est dans la même demi-bande entre ce point et  $B_n$ ; l'arc joignant  $H_n$  à l'infini est à droite de  $Oy$  et reste entre  $D_n$  et son asymptote  $y = (2n - 1)\pi$ . On peut voir que la tangente au point  $B_n$  est parallèle à  $Ox$  et que c'est le seul point jouissant de cette propriété. Car les points de (5) en lesquels la tangente est parallèle à  $Ox$  vérifient la condition

$$(6) \quad y \cos y - (x + 1) \sin y = 0,$$

et, pour  $y \neq 0$ , le système (5), (6) équivaut au système (4).

Les courbes  $\nu = \omega = \text{const.}$  issues de  $B_n$  restent dans le domaine limité par  $E_n$ ,  $E'_n$ ,  $Oy$  et  $E'_{n+1}$  tant que  $0 < \omega < \omega_n$ ,  $\omega_n$  étant le minimum défini au n° 8. La courbe  $E''_n$ ,  $\nu = \omega_n$ , est donc tangente

Fig. 8.



à  $Oy$  en un point  $K_n$ . Le domaine  $S_n$  situé à droite de  $Oy$ , entre  $D_{n-1}$  et  $D_{n+1}$ , et limité par  $E'_n$  et  $E''_n$  (voir fig. 8), est représenté confor-

mément par  $\omega = f_2(z)$  sur un angle  $\pi < \nu < 2\pi + \omega_n$  situé sur le feuillet  $F_n$ .

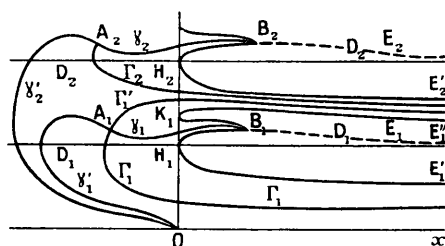
10. Lorsqu'un point  $m$  décrit la surface de Riemann en restant sur une circonférence de grand rayon  $u = u_0$ , tourne dans le sens négatif et part d'un point  $m_0$ ,  $\nu = 0$ , appartenant à  $F_1$ , le point  $M$  correspondant du plan des  $z$  part d'un point situé sur  $E_1$  et décrit une courbe sur laquelle  $\nu$  diminue, il se dirige vers  $Ox$ . Mais  $\nu$  ne peut diminuer de  $2\pi$  sans qu'on atteigne  $Ox$ , c'est-à-dire sans que, sur la surface de Riemann,  $m$  pénètre dans le feuillet  $F_0$ . On a donc traversé des lignes  $L_p$ ,  $\nu = \nu_p$ , soit  $L_q$  la première que l'on a rencontrée. A l'angle balayé par la demi-droite  $Om$  sur  $F_1$ , correspond un domaine limité par  $E_1$ , par une courbe  $\gamma_q$  joignant  $B_1$  à  $A_q$  et par une courbe  $\Gamma_q$  qui joint  $A_q$  à l'infini en passant entre  $Ox$  et  $E'_1$ . Ce domaine ne contient aucun point  $A_p$ ,  $p \neq q$ , ni à son intérieur, ni sur sa frontière. *Montrons que  $q = 1$ .* Sinon,  $\gamma_q$  et  $\Gamma_q$  couperaient  $D_2$  et  $A_1$  serait soit à droite de  $\gamma_q$ , soit à gauche de  $\Gamma_q$ . La ligne  $\gamma_q$  ne couperait ni  $Oy$ , ni  $D_1$ ; le domaine limité par  $\gamma_q$ ,  $D_2$  et  $Oy$  ne renfermerait pas de zéro de  $f_2(z)$ , sa frontière ne contiendrait que deux points en lesquels  $\nu$  puisse être égal à  $\nu_1$ , tous deux situés sur  $Oy$ , car, sur  $D_2$ , entre le point  $H_2$  et le point situé sur  $\gamma_q$ , on a  $\nu_q < \nu < \pi$ . Deux des quatre lignes  $\nu = \nu_1$  issues de  $A_1$  ne pourraient pas sortir du domaine,  $A_1$  ne s'y trouve pas. De même, le domaine situé entre  $D_1$  et  $D_2$ , à gauche de  $\Gamma_q$ , ne contient pas de zéro de  $f_2(z)$ , sur sa frontière il n'y a pas de point  $\nu = \nu_1$  sur  $D_2$ , il y en a deux au plus sur  $D_1$ ,  $A_1$  ne peut pas être dans ce domaine. *On ne peut pas avoir  $q > 1$ .*

Donc,  $A_1$  est joint à  $B_1$  par une ligne  $\gamma_1$ , une ligne  $\Gamma_1$  joint  $A_1$  à l'infini en passant entre  $E'_1$  et  $Ox$ . A  $\Gamma_1$  correspond  $L_1$ . Lorsque  $m$  franchit  $L_1$ , il entre dans un nouveau feuillet  $F_n$  et il y reste tant qu'il n'a pas atteint  $\nu = 0$  et même  $\nu = -\frac{\pi}{2}$ ; sa rotation totale à partir de  $m_0$  est supérieure à  $2\pi$ , donc  $M$  a franchi  $Ox$ . Il s'ensuit que  $n$  est égal à zéro,  $L_1$  fait passer à  $F_0$ ,  $A_1$  est joint à  $O$  par une courbe  $\gamma'_1$ . Cette courbe  $\gamma'_1$  peut couper ou ne pas couper  $D_2$ , mais dans ces deux cas,  $\Gamma_1$  ne coupe pas  $D_2$ ; chacune des

courbes  $\Gamma_1$  et  $\gamma'_1$  coupe  $D_1$  en un seul point, donc  $\gamma_1$  ne coupe pas  $D_1$  (voir *fig. 9*).

14. On peut raisonner à partir de  $B_2, E_2$  comme on vient de le faire à partir de  $B_1, E_1$ . Le point  $m$  part d'un  $\nu = 0$  appartenant à  $F_2$  et tourne dans le sens négatif; lorsqu'il a tourné de  $2\pi$ , il se trouve dans  $F_1$ , il a donc traversé tout d'abord une ligne  $\Gamma_p$  allant à l'infini entre  $E'_1$  et  $E'_2$ . On montre comme ci-dessus que  $p = 2$ ; donc  $\gamma_2$  joint  $A_2$  à  $B_2$ ;  $\Gamma_2$ , qui correspond à  $L_2$ , joint  $A_2$  à l'infini en passant entre  $E'_1$

Fig. 9.



et  $E'_2$  (*fig. 9*). Lorsque  $m$  a franchi  $L_2$ , il est arrivé dans un nouveau feuillet,  $F_q$ , puis lorsque  $\nu$  passe par la valeur  $\nu_1 - 2\pi$ ,  $m$  traverse  $L_1$  ou se trouve projeté sur  $L_1$ , il peut changer de feuillet ou ne pas changer, mais il reste alors dans un même feuillet tant que  $\nu$  reste supérieur à  $-3\pi$ , or  $m$  traverse alors  $E'_1$  et  $E_1$ ,  $m$  se trouve dans  $F_1$ , et, d'après le n° 10, il y reste tant qu'il n'atteint pas de nouveau  $L_1$ . A partir de  $L_2$ ,  $\nu$  a alors varié de  $2\pi + \nu_2 - \nu_1 > 2\pi$ ; il y a eu changement de feuillet lorsque  $m$  a franchi  $L_1$ , il a pénétré dans  $F_1$ . Il s'ensuit que, lorsque  $m$  était entre  $L_1$  et  $L_2$ , il était dans  $F_0$ ; que la seconde ligne  $\Gamma'_1$ ,  $\nu = \nu_1$ , joignant  $A_1$  à l'infini passe entre  $\Gamma_2$  et  $E'_1$ ; qu'une ligne  $\gamma'_2$ ,  $\nu = \nu_2$ , joint  $A_2$  à  $O$ ; que le domaine compris entre  $\Gamma_2, \gamma'_2, \gamma'_1, \Gamma'_1$ , ne contient pas de points  $A_q$ .

Le feuillet  $F_1$  ne contient sur sa frontière que le point critique  $W_1$ , la traversée de  $L_1$  fait passer de  $F_1$  à  $F_0$ . A  $F_1$  correspond le domaine d'univalence  $\Delta_1$  compris entre  $\Gamma_1$  et  $\Gamma'_1$ .

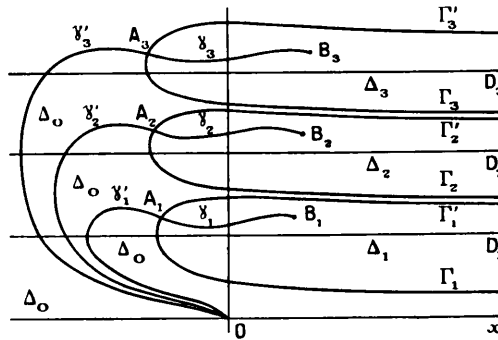
Recommençant le raisonnement avec  $B_3$  et  $E_3$ , on achève de déterminer le feuillet  $F_2$ ; sa frontière ne renferme que le point critique  $W_2$ , la traversée de  $L_2$  fait passer de  $F_2$  à  $F_0$ ; dans le plan des  $z$  il lui corres-



pond un domaine  $\Delta_2$  limité par  $\Gamma_2$  et par une courbe  $\Gamma'_2$  issue de  $A_2$  et allant à l'infini entre  $E'_2$  et  $E'_3$ ;  $A_2$  est joint à  $O$  par une courbe  $\gamma'_2$ .

Et ainsi de suite, de proche en proche, pour  $n$  positif. On définit une suite de domaines  $\Delta_n, n > 0$ , extérieurs les uns aux autres, correspondant aux  $F_n$ ; à l'extérieur des  $\Delta_n$  on est dans un domaine  $\Delta_0$  correspondant à la moitié de  $F_0$ . On complète par symétrie. L'aspect est celui de la figure 10; il est en apparence le même que dans le cas

Fig. 10.



de  $f_1(z)$  en ce qui concerne les frontières des  $\Delta_n$ , mais ici, les lignes  $\gamma'_n$  aboutissent en  $O$ . Sur la surface de Riemann, chaque feuillet  $F_n (n \neq 0)$  est rattaché à  $F_0$  seulement, le long de  $L_n$ .

III. — Cas de  $w = f_3(z) = \frac{e^z - 1}{z} + 1$ .

12. Les zéros  $z_n$  de  $f_3(z)$ , leurs images  $A_n$  sont toujours les mêmes; les points critiques  $W_n$  de la fonction inverse  $z = \varphi_3(w)$  se déduisent de ceux de  $\varphi_1(z)$  par la translation 1, leur module est supérieur à 1; leurs affixes sont

$$w_n = \frac{2 - z_n}{1 - z_n}.$$

Pour  $n$  positif, les arguments  $\nu_n$  sont compris entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$ . On a

$$\text{tang } \nu_n = \frac{\gamma_n}{(2 - x_n)(1 - x_n) + \gamma_n^2}.$$

Eu égard à l'équation (3), l'étude de  $\nu_n$  est ramenée à celle de la

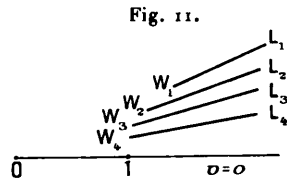
fonction

$$\frac{e^{-2x} - (x - 1)^2}{[e^{-2x} - x + 1]^2}$$

le numérateur de la dérivée a le signe de

$$e^{-2x} + 1 - 2(x - 1)^2,$$

qui est positif si  $x < -1$ . Lorsque  $n$  croît à partir de 1,  $v_n$  décroît et tend vers zéro. Les  $W_n$  et les lignes de passage  $L_n$  ont l'aspect de la figure 11.



Les zéros sont situés sur les arcs de courbe appelés  $E'_n$  au n° 9, mais sur  $E'_n$ , le point zéro  $C_n$  est au-dessous de  $D_n$ ; l'argument est zéro sur l'arc allant de  $C_n$  à  $H_n$  puis à l'infini, nous appellerons cet arc  $G_n$ , et  $G'_n$  l'arc sur lequel  $v = -\pi (\equiv \pi)$ . Si  $z''_n$  est l'affixe de  $C_n$ , nous appellerons  $F_n$  le feuillet de la surface de Riemann sur lequel  $\varphi_3(0) = z''_n$ .  $v = f_3(z)$  représente le domaine limité par  $G_n$  et  $G'_n$  sur la portion de  $F_n$  sur laquelle  $-\pi < v < 0$ .

13. Sur  $Ox$ ,  $f_3(x)$  croît de 1 à  $\infty$  lorsque  $x$  croît de  $-\infty$  à  $+\infty$ ,  $v$  sera nul à l'infini, à gauche.

I. Sur  $Oy$ ,  $y > 0$ , on a

$$\text{tang } v = \frac{1 - \cos y}{y + \sin y};$$

le numérateur de la dérivée de  $\text{tang } v$  est

$$y \sin y.$$

Il s'ensuit que, lorsque  $y$  croît de  $2n\pi$  à  $(2n + 1)\pi$ ,  $n = 0, 1, \dots$ ,  $v$  croît de 0 à

$$\omega'_n = \text{arctang } \frac{2}{2n\pi + \pi},$$

puis, lorsque  $y$  croît de  $(2n+1)\pi$  à  $2(n+1)\pi$ ,  $\nu$  décroît de  $\omega'_n$  à zéro.

La courbe  $\nu = \omega'_{n-1}$  issue de  $C_n$  est donc tangente à  $Oy$  au point  $Q_n$  d'ordonnée  $(2n-1)\pi$ , nous l'appellerons  $G''_n$ . Le domaine  $S_n$  limité par  $G_n$  et  $G''_n$  est représenté par  $f_3(z)$  sur l'angle  $\omega'_{n-1} - 2\pi < \nu < 0$  qui appartient au feuillet  $F_n$ .

II. Pour  $y = 2n\pi$ ,  $n > 0$ ,

$$\text{tang } \nu = \frac{2\pi n(1 - e^x)}{(e^x - 1 + x)x + 4\pi^2 n^2}.$$

Le dénominateur de cette expression est toujours positif, le numérateur de la dérivée a le signe de

$$\tau = e^x - x^2 + 2x - 2 - 4\pi^2 n^2 + e^{-x}(1 - 2x),$$

et

$$\tau'' = e^x - 2 + (5 - 2x)e^{-x}$$

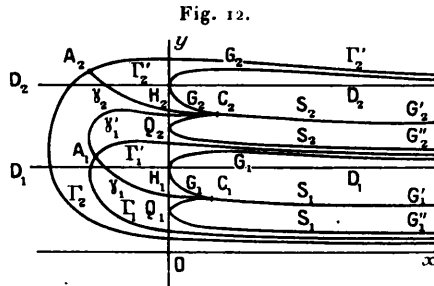
est toujours positif. On en déduit que  $\tau$  a deux racines, une positive et une négative, et que, lorsque  $x$  croît de  $-\infty$  à  $+\infty$ ,  $\nu$  croît d'abord, passe par un maximum inférieur à  $\frac{\pi}{2}$ , puis décroît jusqu'à zéro (pour  $x = 0$ ) et jusqu'à un certain minimum, enfin croît de nouveau jusqu'à zéro.

Ainsi, dans la partie de  $D_n$  extérieure à  $S_n$ ,  $x < 0$ ,  $\nu$  a un seul maximum compris entre zéro et  $\frac{\pi}{2}$ .

**14.** Procédons d'abord comme au n° 10. Le point  $m$  tourne sur la surface de Riemann, dans le sens négatif, à partir d'un point  $m_0$ ,  $\nu = 0$ , pris dans  $F_1$ ; le point correspondant  $M$  part de  $M_0$  sur  $G_1$ .  $M$  ne peut pas arriver sur  $Ox$  sans être sorti de  $F_1$ , puisque  $Ox$ , ligne  $\nu = 0$ , ne passe pas par  $C_1$ . Le point  $m$  rencontre donc une première ligne  $L_p$ , et, à l'angle  $\nu_p - 2\pi < \nu < 0$  correspond le domaine limité par  $G_1$ , par une ligne  $\gamma_p$  joignant  $C_1$  à  $A_p$ , et par une ligne  $\Gamma_p$  qui va de  $A_p$  à l'infini en passant entre  $G''_1$  et  $Ox$ ; dans ce domaine ne se trouve aucun point  $A_q$ ,  $q \neq p$ . Il s'ensuit que  $p = 1$ . Sinon,  $A_1$  serait à droite de  $\gamma_p$  ou à gauche de  $\Gamma_p$ , ce qui est impossible pour des raisons analogues à celles du n° 10. Donc,  $W_1$  est sur la frontière de  $F_1$ ; une ligne  $\gamma_1$ ,  $\nu = \nu_1$ , joint  $C_1$  à  $A_1$ , une ligne  $\Gamma_1$  joint  $C_1$  à l'infini en passant entre  $Ox$  et  $G''_1$ .

Si  $m$  tourne à partir de  $m_0$  dans le sens positif,  $M$  s'éloigne de  $Ox$ , il arrive sur  $G_2''$ , donc  $m$  est sorti de  $F_1$ . Il existe donc une ligne  $\Gamma_p$  qui va d'un certain point  $A_p$  à l'infini en passant entre  $G_1$  et  $G_2''$  et une ligne  $\gamma_p$  qui joint  $A_p$  à  $C_1$ ; le domaine limité par  $\gamma_p, \Gamma_p$  et  $G_1$  ne contient pas de points  $A_q, q \neq p$ . On a  $p = 1$ . Sinon, le point  $A_1$  serait dans un domaine limité par  $\gamma_p, D_1$  et  $D_2$ , et les deux lignes  $\Gamma_1'$  et  $\gamma_1'$  issues de  $A_1$  ne pourraient traverser ni  $D_1$  ni  $D_2$ . Ainsi,  $p = 1$ ; la ligne  $\Gamma_1'$  joint  $C_1$  à l'infini en passant entre  $G_1$  et  $G_2''$ ; le domaine  $\Delta_1$ , qui contient  $C_1$  et qui est limité par  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_1'$ , correspond à  $F_1$ ; la frontière de  $F_1$  ne contient que le point critique  $W_1$ .

On voit de même que, si  $m$  part de  $m_2$ ,  $M$  partant de  $M_2$  sur  $G_2$ , et si  $m$  tourne dans le sens négatif, il sortira de  $F_2$ , il traversera tout d'abord une ligne  $L_p$ ; il existe une ligne  $\Gamma_p$  qui va de  $A_p$  à l'infini en passant entre  $G_1$  et  $G_2''$ , et une ligne  $\gamma_p$  qui joint  $A_p$  à  $C_2$ . Or, sur le segment  $H_1 Q_2$ , entre  $Q_2$  et le point situé sur  $\Gamma_1'$ , en lequel  $v = v_1$ , on a  $v > v_1$ ; il faut donc que  $p = 1$ . La ligne  $\gamma_1'$ ,  $v = v_1$ , issue de  $A_1$ , aboutit en  $C_2$ ; la ligne  $L_1$  fait passer du feuillet  $F_1$  au feuillet  $F_2$ . Audessous de  $\Gamma_1$ , on est d'abord dans  $F_2$ , et l'on peut recommencer le raisonnement du début : il existe une ligne  $\gamma_p$  qui joint  $C_2$  à  $A_p$  et une ligne  $\Gamma_p$  qui va de  $A_p$  à l'infini en passant en  $\Gamma_1$  et  $Ox$ . On montre que  $p = 2$ , puis on achève de définir  $F_2$  et le domaine correspondant. On a l'aspect de la figure 12.



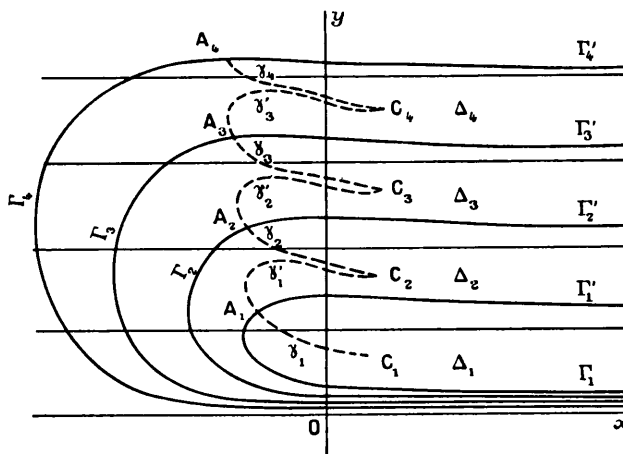
On continue de proche en proche. On voit que  $\gamma_1$  et  $\Gamma_1$  coupent  $D_1$  en un seul point;  $\gamma_1'$  et  $\Gamma_1'$  ne coupent pas  $D_1$ ;  $\gamma_1$  et  $\Gamma_1'$  ne coupent pas  $D_2$ ; mais l'une ou l'autre des lignes  $\Gamma_1, \gamma_1'$  coupe peut-être  $D_2$ , etc. La ramification de la surface de Riemann est donc la suivante :

$F_1$  ne contient que le point de ramification  $W_1$ , on passe à travers  $L_1$

de  $F_1$  à  $F_2$ ; la frontière de  $F_2$  est formée de  $L_1$  et  $L_2$ , lorsqu'on traverse  $L_2$  on passe à  $F_3$ ; d'une façon générale la frontière de  $F_n$  ( $n > 1$ ) est formée de  $L_{n-1}$  et  $L_n$ , la traversée de  $L_n$  conduit de  $F_n$  à  $F_{n+1}$ . Même résultat pour les valeurs négatives de  $n$ . Pour passer d'un point d'un feuillet à indice positif à un point d'un feuillet à indice négatif, il faut traverser une double infinité de feuillets. *La division est impropre.*

Dans le plan des  $z$ , chaque domaine d'univalence  $\Delta_n$ ,  $n > 0$ , s'insère

Fig. 13.



dans le suivant  $\Delta_{n+1}$  et englobe les précédents. Résultat analogue pour  $n < 0$ . L'axe  $Ox$  n'appartient à aucun de ces domaines, ni à leurs frontières, ses points sont points limites des frontières, on a l'aspect donné dans la figure 13.

