JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

MAURICE JANET

Sur le problème de Pfaff

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 19, n° 1-4 (1940), p. 307-318.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1940_9_19_1-4_307_0>

Sur le problème de Pfaff;

PAR MAURICE JANET.

Ajouter à une forme différentielle linéaire une différentielle totale exacte, la multiplier par une fonction arbitraire sont deux opérations auxquelles correspondent souvent des propriétés assez analogues. Il y a donc sans doute avantage, dans l'étude du problème de Pfaff, à faire sentir immédiatement ce parallélisme, qui conduit, en particulier, de la manière la plus naturelle, aux formes canoniques bien connues.

Indépendamment des n variables indépendantes choisies, on peut attacher, à la forme différentielle considérée ω, un système d'équations différentielles invariant par la première opération $\left(\text{appelé système associé à l'}\textit{invariant intégral relatif } \int\omega\right)$, et de même un système d'équations différentielles invariant par la deuxième opération (appelé système associé à l'*équation* $\omega = 0$). Goursat a considéré les *courbes* définies par le premier système, courbes que je désignerai par (A), et il a démontré sans calcul que ce système est complètement intégrable [1]. J'appellerai (B) les *courbes* définies par le second système et démontrerai sans calcul que ce second système est complètement intégrable. De plus, pour mieux faire voir l'analogie des rôles des courbes (A) et (B), je reprendrai l'étude des courbes (A) elles-mêmes, par une méthode qui s'inspire des travaux de M. Cartan.

1. Étant donnée la forme [1] de Pfaff $\omega_d = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_i$, le système d'équations

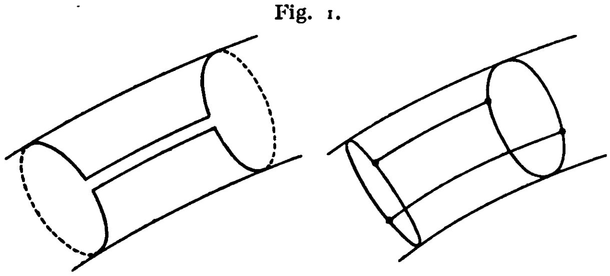
$$(\alpha) \qquad \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}\right) dx_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

[1] *Bulletin de la Société Math. de France*, t. 44, 1916, p. 13. Les courbes (A) sont étudiées par Goursat sous le nom d'*extrémales*.

est évidemment de rang pair (relativement à dx_1, dx_2, $\ldots$, dx_n), puisque le tableau des coefficients est symétrique gauche ([1]). Ou bien il entraîne algébriquement $dx_1 = dx_n = \ldots = dx_n = 0$ (cela ne peut arriver que si n est pair) et il n'y a pas de courbes satisfaisant au système d'équations différentielles (α). Ou bien il est satisfait par un système de valeurs dx_1, dx_2, $\ldots$, dx_n non toutes nulles, et il y a des courbes, dépendant soit de constantes, soit de fonctions arbitraires, qui satisfont au système d'équations différentielles (α); ce sont ces courbes que nous trouverons sous le nom de courbes (A) dans le problème que nous allons traiter maintenant.

Cherchons d'abord une famille de courbes (C) *dépendant de* $n-1$ *paramètres*, telle que pour toute multiplicité à deux dimensions engendrée par des courbes de cette famille ([2]), l'intégrale $\int X_i dx_i$ s'annule dès qu'on l'étend à une courbe fermée de cette multiplicité M_2, réductible à un point par une déformation continue sur M_2. Il revient au même de demander que les courbes C, qui s'appuient sur une *courbe fermée* quelconque donnée Γ, engendrent un tube tel que $\int X_i dx_i$ le long de toute courbe fermée, déduite de Γ par déformation continue sur ce tube, garde la même valeur que le long de Γ. (Les deux figures

Fig. 1.



ci-jointes rappelleront suffisamment la démonstration de cette équivalence, la courbe fermée en forme d'ellipse aplatie représentée sur

([1]) Nous convenons de supprimer les signes de sommation : quand dans un monome on écrit deux fois un même indice littéral, il faut entendre que l'on donne à cet indice toutes les valeurs possibles ($1, 2, \ldots, n$) et que l'on fait la somme de tous les monomes ainsi obtenus.

([2]) Multiplicité qu'on déterminera par exemple en donnant un arc arbitraire de courbe, Γ, sur lequel doivent s'appuyer les C en question.

l'une d'elles devant être imaginée, à la limite, réduite à un arc simple parcouru dans l'un, puis dans l'autre sens.)

Soit

$$\frac{dx_1}{Y_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{dx_2}{Y_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{Y_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

le système d'équations différentielles de la famille des C. Sur la surface du tube engendré par les C qui s'appuient sur une courbe fermée donnée Γ_0, repérons la position d'un point par deux paramètres u, v, les lignes C du tube correspondant à des valeurs constantes de v, la ligne Γ_0 à une valeur constante u_0 de u. Soit $\lambda(v)$ la valeur commune des n rapports $\frac{1}{Y_i}\frac{\partial x_i}{\partial u}$ sur la courbe Γ_0. Passons des variables u, v à de nouvelles variables U, V par un système de formules

$$U = \varphi(u, v), \qquad V = v,$$

où nous supposons

$$\varphi_u(u_0, v) \neq 0, \qquad \varphi_v(u_0, v) = 0,$$

de sorte que les lignes C correspondront à des valeurs constantes de V, et que la ligne Γ_0 correspondra à $U = \varphi(u_0, v)$ valeur indépendante de v, que nous appellerons U_0. $\int \omega$ le long d'une courbe $U = \text{const.}$ devant être indépendante de U, sa dérivée par rapport à U sera nulle. D'où

$$\int \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}\right) \frac{\partial x_k}{\partial U}\, dx_i = 0.$$

Utilisons ce fait pour $U = U_0$, et remarquons que

$$\frac{\partial x_k}{\partial u} = \frac{\partial x_k}{\partial U}\, \varphi_u(u, v).$$

Nous obtenons

$$\int_{\Gamma_0} \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}\right) Y_k \frac{\lambda(v)}{\varphi_u(u_0, v)}\, dx_i = 0.$$

On peut par le choix de $\varphi(u, v)$ donner au facteur $\frac{\lambda(v)}{\varphi_u(u_0, v)}$ telle valeur $\rho(v) \not\equiv 0$ que l'on voudra [il suffirait de prendre

$$\varphi(u, v) = \frac{\lambda(v)}{\rho(v)}(u - u_0)\Bigg].$$

D'autre part ce raisonnement est applicable à une courbe fermée arbitraire Γ. Mais pour que

$$\int \bar{\rho}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,[A_1(x_1, \ldots, x_n)dx_1 + A_2 dx_2 + \ldots + A_n dx_n]$$

soit nulle pour toute courbe fermée et toute fonction $\bar{\rho}$, il faut que tous les A soient identiquement nuls. D'où les équations

$$\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}\right) Y_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

qui, d'ailleurs, inversement, entraînent pour la famille des C la propriété indiquée.

Nous appellerons courbe (A) toute courbe susceptible de tenir le rôle d'une courbe (C). Le système (α) caractérise donc les courbes (A).

2. Étant donnée la forme de Pfaff ω_d, le système d'équations différentielles

$$(\beta)\quad \begin{cases} \dfrac{\left(\dfrac{\partial X_1}{\partial x_k} - \dfrac{\partial X_k}{\partial x_1}\right) dx_k}{X_1} = \dfrac{\left(\dfrac{\partial X_2}{\partial x_k} - \dfrac{\partial X_k}{\partial x_2}\right) dx_k}{X_2} = \ldots = \dfrac{\left(\dfrac{\partial X_n}{\partial x_k} - \dfrac{\partial X_k}{\partial x_n}\right) dx_k}{X_n}, \\ X_1 dx_1 + \ldots + X_n dx_n = 0 \end{cases}$$

est toujours de rang impair en $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$. En effet le tableau des coefficients du système en $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n, dt$

$$\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}\right) dx_k - X_i dt = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$
$$X_k dx_k = 0$$

est symétrique gauche et par suite de rang pair; or il suffit évidemment de diminuer ce dernier rang d'une unité pour avoir celui de (β). Ou bien (β) entraînent algébriquement $dx_1 = dx_2 = \ldots = dx_n = 0$ (cela ne peut arriver que si le tableau symétrique gauche qu'on vient de considérer est du rang pair $n+1$ et si par suite n est impair); il n'y a pas de courbes satisfaisant au système d'équations différentielles (β). Ou bien (β) est satisfait par un système de valeurs dx_1, $dx_2, \ldots, dx_n$ non toutes nulles, et il y a des courbes dépendant soit de constantes, soit de fonctions arbitraires qui satisfont au système d'équations différentielles (β). Ce sont ces courbes que nous trouverons sous le nom de courbes (B) dans le problème que nous allons traiter.

Cherchons d'abord une famille de courbes (C) *dépendant de* $n-1$ *paramètres* telle que, sur la multiplicité à deux dimensions M_2 engendrée par les C qui s'appuient sur un arc quelconque Γ *assujetti seulement à annuler* ω, toute autre courbe annule aussi ω. Comme nous pouvons toujours partir d'un arc annulant ω qui rencontre une courbe C_0 particulière arbitrairement donnée dans la famille, et comme C_0 fait alors partie de la multiplicité à deux dimensions M_2, on voit que toute courbe C_0 de la famille doit annuler ω. Ensuite, il faut, d'après une remarque connue, que l'élément linéaire d de la courbe C passant en un point donné de l'espace soit en *involution* avec tout élément linéaire δ passant par ce point et assujetti seulement à la condition $X_i\,\delta x_i = 0$. Il faut et suffit pour cela que l'équation, linéaire en $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n$

$$\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}\right) dx_k\,\delta x_i = 0$$

soit conséquence de $X_i\,\delta x_i = 0$, autrement dit que

$$\frac{\left(\dfrac{\partial X_1}{\partial x_k} - \dfrac{\partial X_k}{\partial x_1}\right) dx_k}{X_1} = \frac{\left(\dfrac{\partial X_2}{\partial x_k} - \dfrac{\partial X_k}{\partial x_2}\right) dx_k}{X_2} = \ldots = \frac{\left(\dfrac{\partial X_n}{\partial x_k} - \dfrac{\partial X_k}{\partial x_n}\right) dx_k}{X_n}.$$

Nous trouvons donc *toutes les équations du système* (β).

Examinons la réciproque; autrement dit considérons une famille de courbes dépendant de $n-1$ paramètres qui satisfassent toutes aux équations (β) et considérons parmi elles celles qui s'appuient sur une courbe Γ_0 donnée assujettie seulement à annuler ω : elles engendrent une multiplicité à deux dimensions M_2 sur laquelle nous repérons un point par deux coordonnées curvilignes u, v; nous supposerons que les courbes (C) tracées sur M_2 correspondent à des valeurs constantes de v, et que Γ_0 corresponde à une valeur constante de u que nous appellerons u_0.

Nous aurons, sur M_2, $X_k \dfrac{\partial x_k}{\partial u} = 0$; et, d'autre part, les rapports $\dfrac{\left(\dfrac{\partial X_i}{\partial x_k} - \dfrac{\partial X_k}{\partial x_i}\right)\dfrac{\partial x_k}{\partial u}}{X_i}$ seront égaux quel que soit i à une même fonction $\lambda(u, v)$.

L'identité

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(X_k \frac{\partial x_k}{\partial u}\right) = \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}\right) \frac{\partial x_k}{\partial u} \frac{\partial x_i}{\partial v}$$

se réduit donc à

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial v}\right) = \lambda(u, v)\left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial v}\right),$$

d'où, pour une valeur v particulière quelconque,

$$X_i \frac{\partial x_i}{\partial v} = \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial v}\right)_{u=u_0} e^{\int_{u_0}^{u} \lambda(\bar{u}, v)\, d\bar{u}};$$

et comme $\left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial v}\right)_{u=u_0} = 0$, $X_i \frac{\partial x_i}{\partial v}$ est nul quels que soient u, v. En définitive, pour toute courbe tracée sur la multiplicité M_2, on a $X_i dx_i = 0$.

Nous appellerons courbe (B) toute courbe susceptible de tenir le rôle d'une des présentes courbes (C). Le système (β) caractérise donc les courbes (B).

Que l'on considère la définition géométrique des courbes (A), (B), ou leur définition analytique par les systèmes [1] (α), (β), il est clair que les premières ne changent pas quand on ajoute à ω une différentielle totale exacte quelconque, que les secondes ne changent pas quand on multiplie ω par une fonction quelconque.

3. Soit donné un système d'équations aux différentielles totales. Appelons courbe intégrale d'un tel système toute multiplicité à une dimension dont les éléments infinitésimaux du premier ordre satisfont à ces équations : une telle multiplicité est définie par un système de fonctions continues admettant chacune une dérivée continue; nous supposons même que ces dérivées peuvent avoir un nombre quelconque de discontinuités de première espèce. L'ensemble des courbes intégrales issues d'un point M quelconque de l'espace engendre une multiplicité E(M). Dire que le système donné est complètement intégrable revient à dire que *toute courbe tracée sur* E(M) *est intégrale* [2].

---

[1] Désignés respectivement par les lettres S_1, S_4 dans l'ouvrage de Goursat sur le problème de Pfaff.

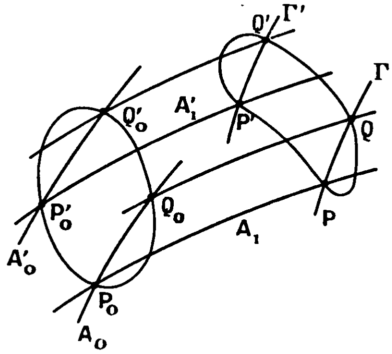
[2] GOURSAT, *Bull. Soc. Math.*, t. 44, p. 26.

Le fait que (α) est complètement intégrable résultera pour nous du lemme suivant.

Lemme. — Soit A_0 une courbe choisie comme l'on voudra parmi les courbes (A). Soit E_2 une multiplicité (à deux dimensions) engendrée par une famille simplement infinie de courbes A, différentes de A_0, issues des divers points de A_0 [ce qui suppose, comme il est suffisant de le faire, que le rang de (α) en dx_1, dx_2, ..., dx_n est au plus égal à $n-2$]. *Toute courbe tracée sur* E_2 *est une courbe* (A).

Considérons, en effet, une famille de courbes (A) dépendant de $n-2$ paramètres, dont fasse partie A_0 et pour chacune une E_2 engendrée comme celle que l'on vient de définir. Sur chacune de ces (E_2), choisissons une famille simplement infinie de courbes : à savoir sur E_2 engendrée par des A (appelons-les A_1) s'appuyant sur A_0, les Γ; sur E'_2 engendrée par des A (appelons-les A'_1) s'appuyant sur A'_0, les Γ', etc.

Fig. 2.



Nous obtenons au total une famille de courbes (Γ, Γ', ...) dépendant de $n-1$ paramètres : je dis que toutes ces courbes sont des (A). Sur une multiplicité à deux dimensions M_2 engendrée par des courbes de la famille (Γ, Γ', ...), traçons une courbe fermée C réductible à un point par déformation continue sur M_2. Les points P, Q de Γ situés sur C déterminent des A_1 passant par des points P_0, Q_0 de A_0. Les points P', Q' de Γ' situés sur C déterminent de même des A'_1 passant par des points $P'_0 Q'_0$ de A'_0. A la courbe fermée C correspond ainsi une courbe fermée C_0 qui se déduit de C par déformation continue sur le

« tube » de courbes A_1, A'_1, ... déterminé par C. On a donc

$$\int_C X_i\,dx_i = \int_{C_0} X_i\,dx_i.$$

Mais cette dernière intégrale est nulle puisque C_0 se trouve tracée sur une multiplicité à deux dimensions engendrée par des $A_0 A'_0$ qui sont des courbes (A). Donc $\int_C X_i dx_i$ est elle-même nulle. Cela étant vrai pour toute courbe fermée C réductible à un point par déformation continue sur M_2, et M_2 étant elle-même une multiplicité à deux dimensions arbitraire engendrée par des (Γ, Γ', ...), toutes ces courbes (Γ, Γ', ...) sont des courbes (A).

Soit alors la multiplicité E(M) relative au système (α) et au point M. Choisissons arbitrairement un arc RS sur E(M). Pour démontrer qu'un tel arc satisfait au système (α), on choisira d'abord comme l'on voudra un arc $R_0 S_0$ de *courbe* A sur E(M); d'après la définition même de E(M), on peut joindre un point quelconque de RS à un point quelconque de $R_0 S_0$ *par un arc* A *tracé sur* E(M); associons ces points deux à deux de façon que ces courbes (A) forment une suite continue; elles engendrent une multiplicité à deux dimensions à laquelle on peut appliquer le lemme précédent, et par suite, en particulier, RS est un arc de courbe (A).

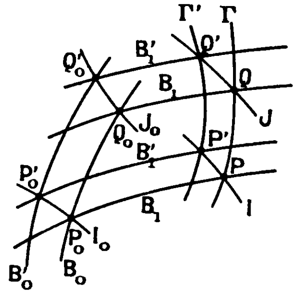
4. Le fait que (β) est complètement intégrable résultera pour nous du lemme suivant :

Lemme. — Soit B_0 une courbe choisie comme l'on voudra parmi les (B). Soit E_2 une multiplicité à deux dimensions engendrée par une suite continue de courbes B différentes de B_0, issues des différents points de B_0 [ce qui suppose, comme il suffit de le faire, que le rang de (β) en dx_1, dx_2, ..., dx_n est au plus égal à $n-2$]. *Toute courbe tracée sur E_2 est une courbe B.*

Considérons en effet une famille de courbes B dépendant de $n-2$ paramètres, dont fasse partie B_0, et pour chacune une E_2 engendrée comme celle que l'on vient de définir. Sur chacune de ces E_2, choisissons une famille simplement infinie de courbes, à savoir sur E_2 engendrée par des B (appelons-les B_1) s'appuyant sur B_0, les Γ; sur E_2

engendrée par des B (appelons-les B'_1) s'appuyant sur B'_0, les Γ', etc. Nous obtenons au total une famille de courbes (Γ, Γ', ...) dépendant de $n - 1$ paramètres; je dis que toutes ces courbes sont des courbes (B).

Fig. 3.



Considérons une courbe I assujettie seulement à annuler ω, et les courbes de la famille (Γ, Γ', ...) qui s'appuient sur I; nous allons démontrer que toute courbe, tracée sur la multiplicité à deux dimensions M_2 obtenue, annule ω : cela suffit à démontrer le lemme énoncé.

Il n'y a pas à insister sur le cas où I est tout entière dans E_2 : toute courbe tracée dans E_2 annule d'ailleurs d'elle-même ω, car E_2 est engendrée par des B s'appuyant sur une courbe annulant ω, à savoir les B_1 s'appuyant sur B_0.

Soient donc P, P' les points de I par où passent des courbes Γ, Γ' situées respectivement dans les multiplicités différentes E_2, E'_2, ... courbes engendrant une multiplicité M_2. Soit J une courbe arbitrairement tracée sur M_2; Q, Q' les points d'intersection de J avec Γ, Γ', ... Les B_1 passant respectivement par P, Q, ... rencontrent B_0 en P_0, Q_0, ... Les B'_1 passant respectivement par P', Q', ... rencontrent B'_0 en P'_0, Q'_0, ... Le lieu I_0 de P_0, P'_0, ... annulera ω, car I_0 est tracée sur une multiplicité à deux dimensions engendrée par des B s'appuyant sur une ligne annulant ω, à savoir des B_1, B'_1, ... s'appuyant sur I. Le lieu J_0 de Q_0, Q'_0, ... annulera alors ω, car J_0 est tracée sur une multiplicité à deux dimensions engendrée par des B s'appuyant sur une ligne annulant ω, à savoir des B_0, B'_0, ... s'appuyant sur I_0. Le lieu J de Q, Q', ... annule enfin ω, car J est tracée sur une multiplicité à deux dimensions engendrée par des (B) s'appuyant sur une ligne annulant ω, à savoir des B_1, B'_1, $\ldots$, s'appuyant sur J_0.

Soit alors la multiplicité $E(M)$ relative au système (β) et au point M. Choisissons arbitrairement un arc RS sur $E(M)$. Pour démontrer qu'un tel arc satisfait au système (β) on choisira d'abord comme on voudra un arc $R_0 S_0$ *de courbe* B, sur $E(M)$. D'après la définition même de $E(M)$, on peut joindre un point quelconque de RS à un point quelconque de $R_0 S_0$ *par un arc* (B) tracé sur $E(M)$. Associons ces points deux à deux de façon que ces courbes (B) forment une suite continue; elles engendreront une multiplicité à deux dimensions M_2 à laquelle on pourra appliquer le lemme précédent, et par suite, en particulier, RS est un arc de courbe (B).

5. Il est ainsi acquis, par des méthodes géométriques parallèles, que les systèmes (α), (β) qui définissent respectivement les courbes (A), (B), l'un de rang pair, l'autre de rang impair, sont, chacun, complètement intégrables. Il y a maintenant à distinguer deux cas, suivant qu'il *existe ou non des courbes* A *n'annulant pas* ω.

I. Si l'on est dans le premier cas, on ne peut pas trouver de λ satisfaisant au système d'équations

$$a_{ik}\lambda_k = X_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$\left(\text{où } a_{ik} \text{ représente } \dfrac{\partial X_i}{\partial x_k} - \dfrac{\partial X_k}{\partial x_i}\right)$. Car ces équations entraîneraient quels que soient les ρ

$$X_i \rho_i = (a_{ik}\rho_i)\lambda_k,$$

et par suite le système (α) aurait pour conséquence $\omega = 0$.

Il résulte de cette remarque que, dans le cas présent, dès que les rapports $\dfrac{a_{ik}dx_k}{X_i}$ ont la même valeur pour tous les i, cette valeur est zéro; en particulier, *toute courbe* B *est courbe* A. Il y a deux espèces de courbes (A) :

1° celles qui n'annulent pas ω (il en était question dans notre hypothèse même) : *elles ne peuvent pas être courbes* (B);

2° celles qui annulent ω; ces dernières satisfont à toutes les équations (β), ce sont donc des B; d'après ce qui a été dit il y a un instant, *ce sont les seules courbes* B.

Ainsi (β) peut s'obtenir en adjoignant à (α) la seule équation [1] $\omega = 0$. Le rang b de (β) est supérieur d'une unité au rang a de (α).

II. Si l'on est dans le deuxième cas, *toute courbe* (A) annule ω, et par suite satisfait par là-même au système (β), autrement dit est *courbe* (B). Il y a deux espèces de courbes (B) :

1° celles pour lesquelles la valeur commune des rapports $\frac{a_{ik}dx_k}{X_i}$ n'est pas nulle; ce ne sont pas des courbes (A);

2° celles pour lesquelles la valeur commune de ces rapports est nulle; ce sont des (A); d'après ce qui précède ce sont les seules courbes (A).

Pour passer de (β) à (α), il suffit d'adjoindre une condition [2], l'égalité à zéro de la valeur commune des rapports $\frac{a_{ik}dx_k}{X_i}$. Le rang a de (α) est donc supérieur d'une unité au rang b de (β).

Ainsi deux cas et deux seulement peuvent se présenter pour les deux entiers, l'un a pair, l'autre b impair, que nous avions introduits indépendamment l'un de l'autre.

I. $b = a + 1$: toute courbe (B) est courbe (A); mais il y a des (A) non B.

---

(1) On peut donc dire que (β) s'écrit sous la forme $S_2(a_{ik}\,dx_k = 0,\ \omega = 0)$. On peut observer de plus, en utilisant la remarque faite plus haut, que, pour écrire (α), il suffit d'égaler les $\frac{a_{ik}dx_k}{X_i}$ pour toutes les valeurs de i : autrement dit (α) s'écrit sous la forme S_3 (notations adoptées par Goursat dans son ouvrage sur le Problème de Pfaff).

(2) Pour définir les (B) de la première catégorie, il suffit d'écrire l'égalité des rapports $\frac{a_{ik}dx_k}{X_i}$ en spécifiant simplement que leur valeur commune est différente de zéro, car de $a_{ik}dx_k = X_i\,dt$ on tire $a_{ik}dx_k\,dx_i = (X_i\,dx_i)\,dt$ et par suite, si $dt \neq 0$, on a $\omega = 0$. Si d'ailleurs la valeur commune est zéro, on définit par là même des courbes (A), donc des courbes annulant ω. De toutes façons, (β) peut donc s'écrire sous la forme S_3 $\left(\text{égalité des rapports } \frac{a_{ik}\,dx_k}{X_i}\right)$. L'hypothèse même était, d'autre part, que (α) s'écrivait sous la forme $S_2(a_{ik}dx_k = 0;\ \omega = 0)$.

II. $a = b + 1$: toute courbe (A) est courbe (B); mais il y a des (B) non A.

L'invariance de (α) lorsqu'on ajoute à ω une différentielle totale exacte quelconque, l'invariance de (β) lorsqu'on multiplie ω par une fonction quelconque conduisent immédiatement à la méthode bien connue.

Cas où $b = a + 1$. — On ajoute à ω une différentielle totale exacte arbitraire $d\mu$; soient a', b' les rangs des systèmes (α'), (β'), relatifs à la nouvelle forme; (α') étant identique à (α), $a' = a$ et par suite $b' = a + 1$ ou $a - 1$, donc $= b$ ou $b - 2$.

Cas où $a = b + 1$. — On multiplie ω par une fonction arbitraire μ; soient a', b' les rangs des systèmes (α'), (β'), relatifs à la nouvelle forme; (β') étant identique à (β), $b' = b$, et par suite $a' = b + 1$ ou $b - 1$, donc $= a$ ou $a - 2$.

Dans l'un et l'autre cas, les valeurs intéressantes de μ mises en évidence sont celles qui diminuent (d'ailleurs de deux unités) le rang d'un des systèmes[1]; les réductions successives ainsi obtenues mettront en évidence, suivant le cas, les formes

$$du_1 + u_2\,du_3 + u_2 u_4\,du_5 + \ldots + u_2 u_4 \ldots u_{2p}\,du_{2p+1}$$

ou

$$u_1\,du_2 + u_1 u_3\,du_4 + \ldots + u_1 u_3 \ldots u_{2p-1}\,du_{2p}$$

qui ne diffèrent que par les notations des formes canoniques usuellement adoptées.

(1) En utilisant les remarques faites dans les deux notes précédentes, on voit encore que ces valeurs remarquables de μ sont précisément, dans l'un et l'autre cas, celles qui diminuent (d'ailleurs d'une unité) le rang du système que nous avons appelé S_3 $\left(\dfrac{a_{ik}\,dx_k}{X_i} \text{ indépendant de } i\right)$, rang qui est d'ailleurs primitivement pair dans le premier cas, impair dans le second.